

ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Техническая эксплуатация летательных аппаратов  
и наземного оборудования»

**Методические указания**  
к курсовой работе  
по дисциплине

**«Техническая диагностика  
летательных аппаратов»**

Авторы  
Годунова Л. Н.

Ростов-на-Дону, 2019

## Аннотация

Методические указания к курсовой работе предназначены для студентов очной формы обучения направления 24.03.04 «Авиастроение».

## Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и наземного оборудования»  
Годунова Л.Н.





## Оглавление

<b>Методические указания по изучению дисциплины .....</b>	<b>4</b>
<b>Теоретические положения .....</b>	<b>6</b>
1. Дефекты ротора с лопатками .....	6
2. Методы теории статистических решений .....	12
Критерий Байеса .....	15
Минимаксный критерий .....	16
Критерий Неймана-Пирсона .....	18
Критерий Неймана-Пирсона .....	19
Задание 1 .....	21
Задание 2 .....	28
<b>Библиографический список .....</b>	<b>32</b>

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины «Техническая диагностика летательных аппаратов» являются:

- формирование теоретических знаний о методах и средствах технической диагностики (ТД) и неразрушающего контроля (НК);
- освоение студентами общих вопросов применения диагностической аппаратуры при поиске неисправностей авиационной техники;

Для достижения поставленных целей в рамках дисциплины решаются задачи подготовки студентов к решению вопросов контроля технического состояния и повышения качества эксплуатации и ремонта авиационной техники.

Дисциплина «Техническая диагностика летательных аппаратов» является одной из дисциплин вариативной части «Профессионального цикла» (Б1.В. 07).

Дисциплина базируется на дисциплинах математического и Общепрофессионального цикла: «Математика», «Физика», «Химия», «Сопротивление материалов», «Материаловедение и технология конструкционных материалов».

В результате изучения дисциплины обучающийся должен знать:

- перспективные планы и направления развития современного летательных аппаратов и авиационных двигателей;
- технологии и формы организации диагностики летательных аппаратов и авиационных двигателей.

уметь:

- исследовать и анализировать причины отказов и неисправностей авиационных двигателей;



- исследовать причины потери прочности деталей авиационных двигателей при статических и динамических нагрузках;
- анализировать причины отказов и неисправностей воздушных судов;
- организовывать и обеспечивать контроль технического состояния воздушных судов;

организовывать и обеспечивать оперативный учет отказов и неисправностей воздушных судов;

владеть:

- измерения диагностических параметров;
- анализом состояния летательных аппаратов и авиационных двигателей по полученным параметрам и по косвенным признакам;
- методами контроля технического состояния воздушных судов;

В процессе изучения дисциплины каждому студенту рекомендуется вести конспект изучаемой по данной дисциплине литературы.

Кроме самостоятельного изучения материала для студентов читаются в университете обзорные лекции, по основным вопросам курса проводятся практические занятия.

В процессе самостоятельного изучения дисциплины студенты выполняют курсовую работу на тему «Расчет амплитуд колебаний ротора и корпуса газотурбинного двигателя, обусловленных неуравновешенностью диска турбины ротора при обрыве лопатки и оценка технического состояния газотурбинного двигателя».

Материал должен изучаться последовательно согласно данным методическим указаниям. Качество изучения проверяется умением правильно и полно отвечать на вопросы самоподготовки, представленные в конце методических указаний. Ответы рекомендуется записывать в конспект по изучению данной дисциплины, который предъявляется при сдаче экзамена.

Студенты могут получать от преподавателей письменную или устную консультацию по интересующим его вопросам данного курса.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

### 1. Дефекты ротора с лопатками

Увеличение вибрации на роторной частоте происходит по следующим причинам:

- из-за недостаточной динамической балансировки ротора;
- от разрушения и деформации лопаток ротора;
- из-за коробления деталей ротора вследствие неравномерного их прогрева при работе;
- от износа или разрушения деталей подшипников опор ротора;
- из-за ослабления посадки деталей на роторе (если посадка ослаблена по достижении определенной скорости вращения роторов, то на этой скорости отмечается резкий скачок роста уровня вибрации);
- от задевания деталей ротора о неподвижные части. В этом случае появляется нестабильность вибрации ротора во времени. Форма осциллограммы, размах и частота вибрации непрерывно меняются, в спектрограмме появляется составляющая на частоте задевания, которая флюктуирует во время работы.

В случае начала или развития разрушения подшипников опор ротора двигателя помимо изменения и роста вибрации, растет температура масла на выходе из опор, появляются посторонние частицы в масле, меняется время выбега ротора.

Упрощенное моделирование дефекта роторного узла двигателя может осуществляться с учетом следующих конструктивных особенностей:

- ротор установлен в корпус двигателя на упругих опорах (под подшипниками качения);

- в качестве дефекта роторного узла рассматривается отрыв лопатки, что приводит к увеличению остаточной неуравновешенности ротора;
- считается, что масса двигателя существенно превышает массу ротора.

На рис. 1.1 показан роторный узел двигателя и расчетная схема.

Допустим, что масса ротора сосредоточена в центре тяжести его диска, а вал является упругим и невесомым. Считаем, что система совершает установившиеся вынужденные вертикальные колебания под действием сил, обусловленных динамической неуравновешенностью ротора. В случае рассмотрения только вертикальных колебаний (например, в направлении измерения вибрации) такая система имеет одну степень свободы.

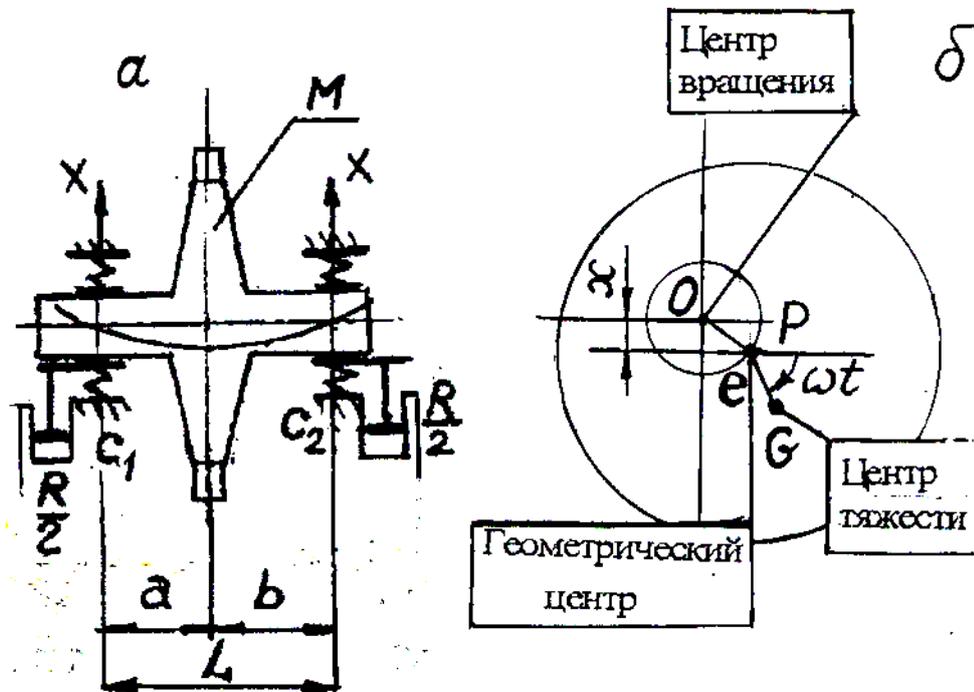


Рис. 1.1. Узел двигателя с неуравновешенным ротором (а)  
и расчётная схема (б):

$M$  – масса ротора;  $e_1$  – начальный эксцентриситет массы ротора;

$R$  – коэффициент затухания вибрации в упругих опорах ротора;

$C$  – суммарная жесткость вала ротора и упругих опор;

$$\frac{1}{c} = \frac{a^2 b^2}{3EIL} + \frac{1}{L} \left( \frac{b^2}{c_1} + \frac{a^2}{c_2} \right),$$

где  $a$  и  $b$  – расстояния от центра тяжести ротора до передней и задней опор;  
 $L$  – расстояние между опорами;  $C_1$  и  $C_2$  – жёсткость передней и задней опор;  
 $EI$  – изгибная жёсткость вала.

Допустим, что ротор вращается с угловой скоростью  $\omega = 2\pi f_p$ , где  $f_p$  – частота вращения ротора в Гц. Вертикальное перемещение массы ротора с начальным эксцентриситетом  $e$  равно  $x + e_1 \sin \omega t$ .

Суммируя вертикально действующие силы, имеем:

$$M \frac{d^2}{dt^2} (x + e_1 \sin \omega t) + R \frac{dx}{dt} + cx = 0,$$

или иначе:

$$M\ddot{x} + R\dot{x} + cx = M_1 e_1 \omega^2 \sin \omega t$$

Если положить  $F = M_1 e_1 \omega^2$ , то получим уравнение вынужденных колебаний системы с демпфированием и с одной степенью свободы. Необходимо отметить, что  $m_1 e_1 \omega^2$  есть центробежная сила неуравновешенной массы  $M$ , вращающейся относительно фиксированной оси, а  $M e \omega^2 \sin \omega t$  представляет собой компоненту этой силы в направлении движения  $x(t)$ .

Установившиеся колебания центра масс ротора выражается уравнением:

$$x = \frac{M e \omega^2}{c} \Psi \sin(\omega t - \varphi), \quad (1.1)$$

где  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$  – коэффициент динамичности;

$\beta$  – безразмерный коэффициент затухания,  $r = \omega/\omega_0$  ( $\omega_0 = \sqrt{c/M}$  – частота собственных колебаний ротора на упругих опорах);

$\varphi = \arctg \frac{2\beta r}{1-r^2}$  – начальная фаза колебаний.

Из выражения (1.1) видно, что амплитуда колебаний ротора  $X$  (в микронах) прямо пропорциональна его начальной неуравновешенности, квадрату

частоты вращения и коэффициенту динамичности, который зависит от коэффициента затухания в упругих опорах и отношения частоты вращения ротора к частоте собственных колебаний на упругих опорах.

На рис. 1.2 представлена зависимость амплитуды колебаний ротора

$$X_1 = \frac{Me_1\omega^2}{c} \Psi \text{ от отношения частот } r \text{ коэффициента затухания } \beta = 0,1.$$

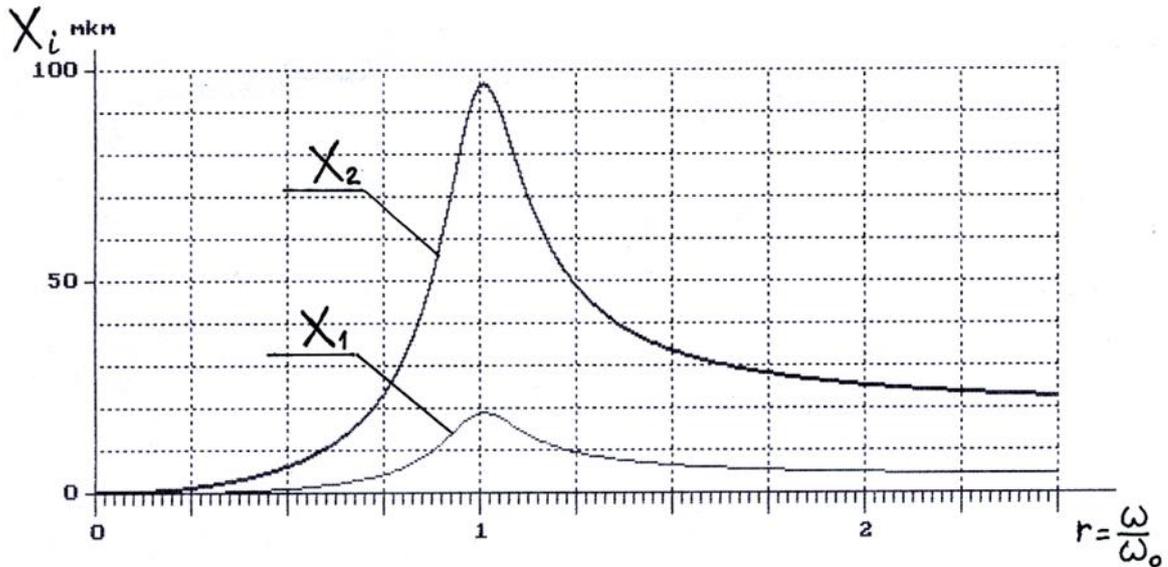


Рис. 1.2. Частотные зависимости амплитуд колебаний  
дефектного и бездефектного роторов

Здесь же показана зависимость амплитуды колебаний ротора  $X_2$  при увеличенном эксцентриситете  $e_2 = 5e_1$  из-за обрыва лопатки.

$$X_2 = \frac{Me_2\omega^2}{c} \Psi.$$

Из анализа графика (рис. 1.2) видно, что на критических оборотах, соответствующих резонансной частоте дефектного ротора  $\omega_0$ , наблюдается значительное увеличение его амплитуды колебаний, что может привести к задеванию ротора за неподвижные части, если не предусмотрено ужесточение упругих опор с ростом амплитуды колебаний ротора. Также видна прямая связь диагностического параметра (виброперемещения) с изменением структурного параметра – увеличением дисбаланса ротора с дефектной лопаткой.

В реальных условиях работы двигателя имеется много источников вибрации с периодическими и случайными составляющими, которые могут маскировать роторную вибрацию двигателя на рабочем режиме. Учитывая рост уровня вибрации на роторной частоте в области резонанса ( $\omega_0$ ), представляется перспективным диагностировать состояние лопаток ротора на вылете, когда, с одной стороны, снизятся вибропомехи от рабочего процесса, а, с другой стороны, при проходе через резонанс ротора на упругих опорах возрастет амплитуда колебаний на роторной частоте.

Дефекты лопаток проявляются не только на частоте вращения ротора, но и в области более высоких частот в виде модуляции колебаний с несущей лопаточной частотой.

Причиной модуляции, помимо обрыва лопаток, может быть проявление других дефектов лопаток типа трещин, деформаций.

Во всех случаях увеличивается амплитудная и частотная модуляция возмущающих сил, связанная с усилением взаимодействия различных колебательных процессов друг с другом.

Несущей является «лопаточная» частота  $\Omega = n\omega$ , где  $n$  - число лопаток ротора;  $\omega$  - угловая частота вращения ротора.

В качестве модулирующего процесса выступает обратная частота ротора  $\omega$  и кратные гармоники ( $K\omega$ ).

Математическая модель этого процесса может быть представлена в виде виброакустического сигнала со смешанной модуляцией:

$$Z(t) = A(1 + \sum_k m_k \cos k\omega t) \cos(\Omega t + \chi \sin \omega_n t),$$

где  $m_k$  – парциальные глубины амплитудной модуляции;  $\chi = m_n \frac{\Omega}{\omega_n}$  -

индекс модуляции;  $m_n$  – глубина угловой модуляции с частотой  $\omega_n$ ;  $m_n \Omega = \Delta \Omega$ , где  $\Delta \Omega$  – девиация частоты.

Частотная модуляция возникает при деформации лопаток (развороте). В случае отсутствия частотной модуляции модулирующая функция принимает вид

$$Z(t) = A \left[ \sin \Omega t + \sum_k \frac{m_k}{2} \sin(\Omega - k\omega)t + \sum_k \frac{m_k}{2} \sin(\Omega + k\omega)t \right].$$

На рис. 1.3 представлен сигнал и спектр вибрации ротора с дефектной лопаткой, смоделированный на основании вышеприведенной формулы.

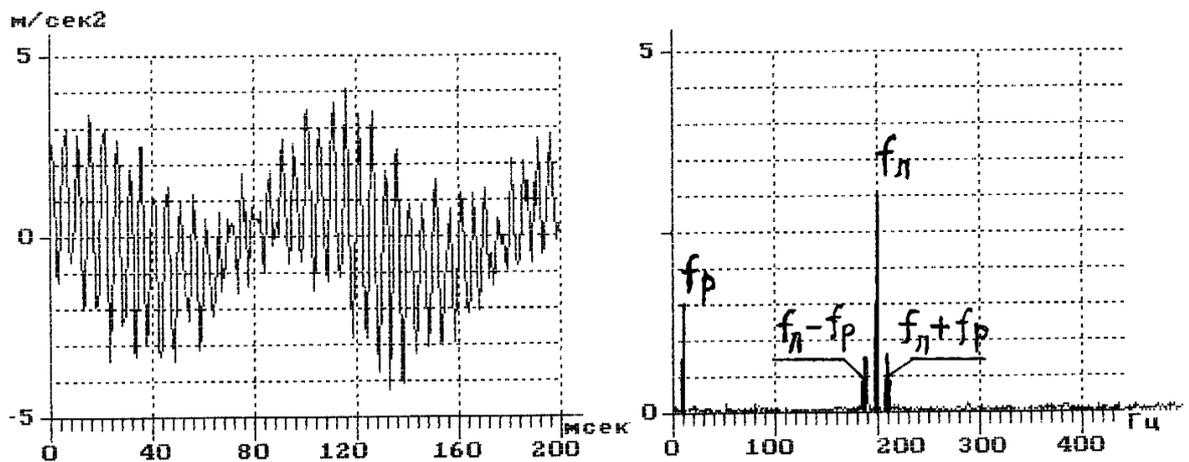


Рис. 1.3. Моделирование дефекта лопатки ротора турбины

Видно, что дефект лопатки, например, в виде трещины приводит к появлению симметрично расположенных «боковых» частот относительно «несущей» лопаточной частоты.

Степень развития этого дефекта оценивается глубиной амплитудной модуляции по формуле

$$m_p = \frac{S(f_l - f_p) + S(f_l + f_p)}{S_{f_l}},$$

здесь  $S_{f_l}$  - амплитуда несущей («лопаточной») частоты,  $S(f_l-f_p)$  и  $S(f_l+f_p)$  – амплитуды боковых составляющих спектра вибрации.

## 2. Методы теории статистических решений

Ошибки I и II рода. Выбор признакового пространства в условиях вероятностного описания классов. Критерий Байеса. Минимаксный критерий. Критерий Неймана-Пирсона.

В условиях неполной информации отнесение объекта диагностирования к классу исправного или неисправного состояний может быть выполнено с использованием статистической теории проверки гипотез, созданной Нейманом и Пирсоном.

Положим в основу объект диагностики. Это может быть отдельный узел или целый механизм. Каждый объект будем относить к одному из двух классов:

класс I – объект исправен,

класс II – объект неисправен.

О состоянии объекта будем судить по значениям измеряемых параметров. Например, объект – газотурбинный двигатель (ГТД), измеряемый параметр – СКЗ виброскорости, рассчитанное по сигналу с датчика вибрации.

Далее ограничимся одним измеряемым параметром. Обозначим его через  $X$  и будем считать случайной величиной.

Обозначим условную плотность вероятности случайной величины  $X$  при отнесении объекта к классу I –  $f_1(x)$ , а при отнесении объекта к классу II –  $f_2(x)$ .

Возможное взаимное расположение графиков этих функций представлено на рис. 2.1.

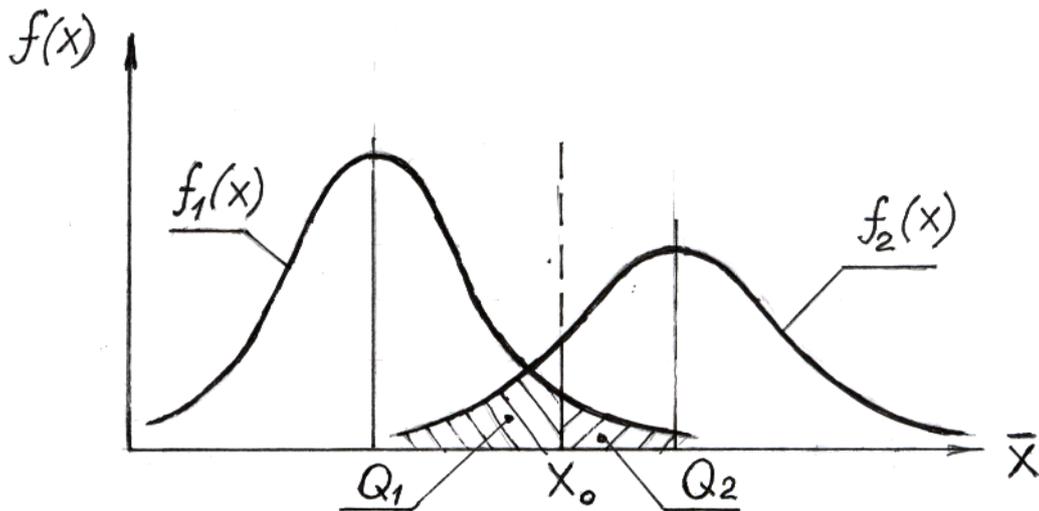


Рис. 2.1. Графики плотностей распределения вероятностей параметра при отнесении объекта к классам I и II

Пусть в результате обследования параметр принял значение  $X$ . К какому классу отнести объект в этом случае? Эта вероятностная задача сводится к нахождению такого значения  $X_0$ , что при  $X \leq X_0$  объект относят к классу I, а при  $X > X_0$  – к классу II.

Решения, принятые в условиях неполной определенности, называют гипотезами. Обозначим гипотезу о принадлежности объекта к классу I через  $H_1$ , а гипотезу о принадлежности объекта к классу II через  $H_2$ . При этом принятое решение может оказаться ошибочным.

Ошибка первого рода (вероятность ложной тревоги) – объект относится к классу I, а его посчитали объектом класса II.

Ошибка второго рода (вероятность пропуска цели) – объект относится к классу II, а его посчитали объектом класса I.

Используя свойства случайных величин, можно вычислить вероятности ошибок соответственно первого и второго рода по формулам:

$$Q_1 = \int_{X_0}^{\infty} f_1(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{X_0} f_1(x) dx,$$
$$Q_2 = \int_{-\infty}^{X_0} f_2(x) dx.$$

Если считать, что случайная величина  $X$  для обоих классов имеет нормальное распределение (распределение Гаусса), то

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right),$$

где  $a_1$  и  $a_2$  - математические ожидания, а  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  - средние квадратические отклонения соответствующих распределений.

Введя функцию Лапласа  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$  (значения функции Лапласа приведены в табл. 2.1), получим

$$Q_1(x) = 1 - F\left(\frac{X_0 - a_1}{\sigma_1}\right), \tag{2.1}$$

$$Q_2(x) = F\left(\frac{X_0 - a_2}{\sigma_2}\right). \tag{2.2}$$

Условные вероятности правильных решений при справедливости гипотез  $H_1$  и  $H_2$  соответственно равны:

$$D_1 = 1 - Q_1 = F\left(\frac{X_0 - a_1}{\sigma_1}\right),$$

$$D_2 = 1 - Q_2 = F\left(\frac{X_0 - a_2}{\sigma_2}\right).$$

При наличии достаточного статистического материала и методики расчета материальных потерь при принятии ошибочных решений можно ввести некоторые априорные характеристики объекта.

Обозначим априорные вероятности принадлежности объекта соответственно к первому и второму классам через  $P(I)$  и  $P(II)$ .

Введем следующие обозначения:

$C_{12}$  – ущерб (стоимость), причиненный ошибкой первого рода;

$C_{21}$  – ущерб (стоимость), причиненный ошибкой второго рода;

$C_{11}$  и  $C_{22}$  – стоимость правильных решений.

Матрица, составленная из чисел  $C_{ij}$ , называется матрицей цен.

Тогда средняя величина потерь при многократном распознавании объектов равна сумме стоимостей неправильных и правильных решений с учетом вероятностей их появления и априорных вероятностей отнесения объекта к первому и второму классам:

$$C = P(I)C_{11}D_1 + P(I)C_{12}Q_1 + P(II)C_{22}D_2 + P(II)C_{21}Q_2.$$

С учетом полученных ранее соотношений :

$$C = P(I)\left[C_{11}\int_{-\infty}^{X_0} f_1(x)dx + C_{12}\int_{X_0}^{\infty} f_1(x)dx\right] + P(II)\left[C_{22}\int_{X_0}^{\infty} f_2(x)dx + C_{21}\int_{-\infty}^{X_0} f_2(x)dx\right].$$

### Критерий Байеса

Правило, по которому стратегия решений выбирается так, чтобы минимизировать средний риск (среднюю стоимость), называется критерием Байеса. При этом величина  $C$  должна быть минимальной, т.е. выбирается  $X_0$ , при котором  $C$  достигает минимума.

Используя необходимое условие минимума функции, продифференцируем  $C$  по  $X$  и приравняем производную нулю, положив  $X = X_0$ .

$$\left. \frac{dC}{dX} \right|_{X=X_0} = P(I)[C_{11}f_1(X_0) - C_{12}f_1(X_0)] + P(II)[C_{21}f_2(X_0) - C_{22}f_2(X_0)].$$

Отсюда:

$$\frac{f_2(X_0)}{f_1(X_0)} = \frac{P(I)(C_{12} - C_{11})}{P(II)(C_{21} - C_{22})}$$

Полагая  $P(I)(C_{12} - C_{11})/P(II)(C_{21} - C_{22}) = \lambda_0$ , получим уравнение для нахождения  $X_0$ :

$$f_2(X_0)/f_1(X_0) = \lambda_0,$$

где  $\lambda_0$  - коэффициент правдоподобия.

### Пример

При  $C_{11} = C_{22} = 0$  и  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ :

$$\lambda_0 = P(I)C_{12}/P(II)C_{21}.$$

С другой стороны

$$\lambda_0 = f_2(X_0)/f_1(X_0) = \exp(((X_0 - a_1)^2 - (X_0 - a_2)^2)/2\sigma^2).$$

Следовательно

$$X_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sigma^2}{a_2 - a_1} \ln \lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sigma^2}{a_2 - a_1} \ln \frac{P(I)C_{12}}{P(II)C_{21}}.$$

В частности, при  $C_{12} = C_{21}$  и  $P(I) = P(II)$ , получим  $X_0 = (a_1 + a_2)/2$ .

### Минимаксный критерий

В ситуации, когда априорные вероятности  $P(I)$  и  $P(II)$  неизвестны, критерий Байеса применить нельзя. В этом случае рационально использовать критерий, который обеспечит минимум максимального среднего риска. Этот критерий получил название минимаксного.

Рассмотрим этот критерий в предположении, что имеется два класса и  $C_{11} = C_{22} = 0$ . Тогда выражение для среднего риска примет вид:

$$C = P(I)C_{12} \int_{X_0}^{\infty} f_1(x)dx + (1 - P(I))C_{21} \int_{-\infty}^{X_0} f_2(x)dx,$$

т.к.  $P(II) = 1 - P(I)$ .

$C$  достигает максимума при некотором значении  $P(I)$ . При этом

$$\frac{dC}{dP(I)} = C_{12}Q_1(X_0) - C_{21}Q_2(X_0) = 0.$$

Отсюда получаем уравнение для определения  $X_0$ :

$$C_{12}Q_1(X_0) = C_{21}Q_2(X_0) \tag{2.3}.$$

### Пример

Огибающая корреляционной функции шума работающего редуктора меняется по закону  $\exp(-at)$ . Состояние редуктора определяется значением параметра  $a$ . Будем считать, что  $a$  подчиняется нормальному закону распределения. При этом для нормального редуктора

$$a_1 = m(a) = 0,07(\text{рад/с}); \quad \sigma_1 = \sigma(a) = 0,01(\text{рад/с}),$$

а для неисправного редуктора

$$a_2 = m(a) = 0,12(\text{рад/с}); \quad \sigma_2 = \sigma(a) = 0,015(\text{рад/с}).$$

Кроме того, стоимость правильных решений равна 0, а стоимость ошибки первого рода в пять раз меньше стоимости ошибки второго рода, т.е.  $C_2 = 5C_1$ . Требуется найти критическое значение  $a_0$ , а также вероятности ошибок первого и второго рода.

Из уравнения (2.3) получим  $Q_1 = 5Q_2$ . Выразим входящие в равенство величины через функцию Лапласа:

$$F((0,07 - a_0)/0,01) = 5F((a_0 - 0,12)/0,015).$$

Отсюда  $a_0 = 0,085$ ,  $Q_1 = 0,05$ ,  $Q_2 = 0,01$ .

### Критерий Неймана-Пирсона

Иногда неизвестны и априорные вероятности и цены ошибок. В этом случае может быть использован критерий Неймана-Пирсона. Его суть состоит в том, что заранее задается максимальное допустимое значение вероятности ошибки первого рода  $Q_1$ , а затем находится решение, при котором вероятность ошибки второго рода  $Q_2$  минимальна. Ясно, что  $X_0$  находится из соотношений:

$$Q_1 = \int_{X_0}^{\infty} f_1(x) dx \leq A,$$
$$Q_2 = \int_{-\infty}^{X_0} f_2(x) dx = \min.$$

Но эти соотношения выполняются при выполнении равенства

$$\int_{X_0}^{\infty} f_1(x) dx = A,$$

т.к. при выборе любого другого значения  $X > X_0$   $Q_2$  возрастает, а при  $X < X_0$   $Q_1 > A$ .

Используя уравнение (2.1), получим для определения  $X_0$ :

$$1 - F\left(\frac{X_0 - a_1}{\sigma_1}\right) = A,$$

после чего с помощью (2.2) найдем  $Q_2$ .

#### Пример

В условиях примера предыдущего пункта положим, что ошибка первого рода  $Q_1 \leq 0,05$ . Тогда для нахождения  $a_0$  получим уравнение  $1 - F((a_0 - 0,07)/0,01) = 0,05$ , откуда из табл. 2.1 найдем  $(a_0 - 0,07)/0,01 = 1,7$ ,  $a_0 = 0,086$ , а  $Q_2 = F((a_0 - 0,12)/0,015) = 0,012$ .

### Пример

Огибающая корреляционной функции шума работающего редуктора меняется по закону  $\exp(-xt)$ . Состояние редуктора определяется значением параметра  $a$ . Будем считать, что  $a$  подчиняется нормальному закону распределения. При этом для нормального редуктора

$$a_1 = m(x) = 0,07(\text{рад/с}); \quad \sigma_1 = \sigma(x) = 0,01(\text{рад/с}),$$

а для неисправного редуктора

$$a_2 = m(x) = 0,12(\text{рад/с}); \quad \sigma_2 = \sigma(x) = 0,015(\text{рад/с}).$$

Кроме того стоимость правильных решений равна 0, а стоимость ошибки первого рода в пять раз меньше стоимости ошибки второго рода, т.е.  $C_2 = 5C_1$ . Требуется найти критическое значение  $X_0$ , а также вероятности ошибок первого и второго рода.

Из уравнения (2.3) получим  $Q_1 = 5Q_2$ . Выразим входящие в равенство величины через функцию Лапласа:

$$F((0,07 - X_0)/0,01) = F((X_0 - 0,12)/0,015)$$

$$\text{Отсюда } X_0 = 0,085, \quad Q_1 = 0,05, \quad Q_2 = 0,01.$$

### Критерий Неймана-Пирсона

Иногда неизвестны и априорные вероятности и цены ошибок. В этом случае может быть использован критерий Неймана-Пирсона. Его суть состоит в том, что заранее задается максимальное допустимое значение вероятности ошибки первого рода  $Q_1$ , а затем находится решение, при котором вероятность ошибки второго рода  $Q_2$  минимальна. Ясно, что  $X_0$  находится из соотношений:

$$Q_1 = \int_{X_0}^{\infty} f_1(x) dx \leq A,$$
$$Q_2 = \int_{-\infty}^{X_0} f_2(x) dx = \min .$$

Но эти соотношения выполняются при выполнении равенства

$$\int_{X_0}^{\infty} f_1(x) dx = A,$$

т.к. при выборе любого другого значения  $X > X_0$   $Q_2$  возрастает, а при  $X < X_0$   $Q_1 > A$ .

Используя уравнение (2.1), получим для определения  $X_0$ :

$$1 - F\left(\frac{X_0 - a_1}{\sigma_1}\right) = A, \text{ после чего с помощью (2.2) найдем } Q_2.$$

### Пример

В условиях примера предыдущего пункта положим, что ошибка первого рода  $Q_1 \leq 0,05$ . Тогда для нахождения  $X_0$  получим уравнение  $1 - F((X_0 - 0,07)/0,01) = 0,05$ , откуда из табл. 2.1 найдем  $(X_0 - 0,07)/0,01 = 1,7$ ,  $X_0 = 0,086$ , а  $Q_2 = F((X_0 - 0,12)/0,015) = 0,012$ .

Таблица 2.1

Значения функции Лапласа F(x)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,500	0,540	0,579	0,618	0,655	0,691	0,726	0,758	0,788	0,816
1	0,841	0,864	0,885	0,903	0,919	0,933	0,945	0,955	0,964	0,971
2	0,977	0,982	0,986	0,989	0,991	0,994	0,995	0,996	0,997	0,998

Для нахождения значений функции Лапласа при отрицательных значениях аргумента воспользоваться равенством  $F(-x) = 1 - F(x)$ .



### **Задание 1**

Расчет амплитуд колебаний ротора и корпуса газотурбинного двигателя (ГТД), обусловленных неуравновешенностью диска турбины ротора при обрыве лопатки.

Цель выполнения задания 1 состоит в расчете амплитуд установившихся колебаний ротора ГТД на упругодемпферных опорах и корпуса двигателя на упругой подвеске при неуравновешенности, обусловленной обрывом лопатки ротора. Неуравновешенность возникает, если центр тяжести ротора не совпадает с осью его вращения.

Расчетная схема колебательной системы «ротор- корпус ГТД» приведена на рис.1.

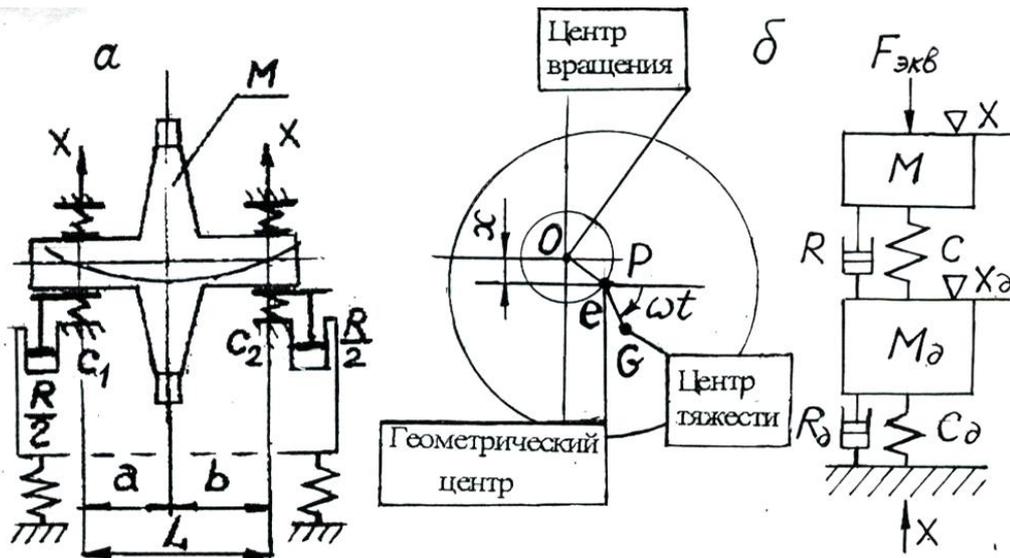


Рис.1.Расчетная схема для выполнения курсового проекта:

а-схема ротора на упругих опорах, б-расчётная схема .

$M$  -масса ротора;  $e$  - эксцентриситет массы ротора;  $R$ -коэффициент затухания вибрации в упругих опорах ротора;  $C$  -суммарная жесткость вала и упругих опор ротора;  $a$  и  $b$  – расстояние от центра тяжести ротора до передней и задней опор;  $L = a + b$ -расстояние между опорами,  $C_1$  и  $C_2$  - жесткость передней и задней упругих опор ротора;  $M_{\partial}$ ,  $C_{\partial}$ ,  $R_{\partial}$  - соответственно масса корпуса двигателя, жесткость и коэффициент затухания вибрации упругой подвески двигателя;  $X$  и  $X_{\partial}$  - амплитуды колебаний ротора и корпуса двигателя соответственно

Данная схема описывается системой двух линейных дифференциальных уравнений.

Допустим, что ротор вращается с угловой скоростью  $\omega = 2\pi f_p$ , где  $f_p$  - частота вращения ротора в Гц. Вертикальное перемещение массы ротора с начальным эксцентриситетом  $e_1$  равно  $x + e_1 \sin \omega t$ . Суммируя вертикально действующие динамические силы можно записать

дифференциальное уравнение колебаний центра масс ротора в следующем виде:

$$M \frac{d^2}{dt^2} (x - e_1 \sin \omega t) = -R(\dot{x} - \dot{x}_\partial) - C(x - x_\partial)$$

или иначе

$$M\ddot{x} + R(\dot{x} - \dot{x}_\partial) + C(x - x_\partial) = F_{\text{экв}} \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь  $F_{\text{экв}} = Me_1\omega^2$ . В случае обрыва лопатки ротора  $F_{\text{экв}} = Me_2\omega^2$ .

В рассматриваемой двухмассовой системе колебания центра масс корпуса двигателя в вертикальном направлении также можно описать линейным дифференциальным уравнением:

$$M_\partial \ddot{x}_\partial = -R_\partial \dot{x}_\partial - C_\partial x_\partial - R(\dot{x}_\partial - \dot{x}) - C(x_\partial - x). \quad (2)$$

После преобразований этих уравнений с использованием метода механического импеданса (производится замена  $F_{\text{экв}} \sin \omega t$  на  $F_{\text{экв}} \exp(j\omega t)$ ,  $x(t)$  на  $\bar{X} \exp(j\omega t)$ ,  $x_\partial(t)$  на  $\bar{X}_\partial \exp(j\omega t)$ , где  $\bar{X}$  и  $\bar{X}_\partial$  - комплексные амплитуды, соответствующие  $x(t)$  и  $x_\partial(t)$ ) и сокращения на множитель  $\exp(j\omega t)$ , получаем систему алгебраических уравнений:

$$(-M\omega^2 + C + jR\omega)\bar{X} + (-C - jR\omega)\bar{X}_\partial = F_{\text{экв}};$$

$$(-C - jR\omega)\bar{X} + (-M_\partial\omega^2 + C + C_\partial + j(R + R_\partial)\omega)\bar{X}_\partial = 0$$

Из этой системы определяются комплексные амплитуды колебаний ротора и корпуса двигателя  $\bar{X}$  и  $\bar{X}_\partial$  по правилу Крамера:

$$\bar{X} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \bar{X}_\partial = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Здесь:

$$\Delta = (-M\omega^2 + C)(-M_\partial\omega^2 + C + C_\partial) - R(R + R_\partial)\omega^2 - C^2 + R^2\omega^2 +$$

$$+j\omega[R(-M_{\partial}\omega^2+C+C_{\partial})+(R+R_{\partial})(-M\omega^2+C)-2CR] = a_0+b_0j;$$

$$\Delta_1 = F_{\text{ЭКВ}}(-M_{\partial}\omega^2+C+C_{\partial})+j F_{\text{ЭКВ}}\omega(R+R_{\partial}) = a_1+b_1j;$$

$$\Delta_2 = F_{\text{ЭКВ}}C + j F_{\text{ЭКВ}}\omega R = a_2+b_2j.$$

При этом, если  $x(t) = X\cos(\omega t - \varphi)$ ;  $x_{\partial}(t) = X_{\partial}\cos(\omega t - \varphi_{\partial})$ , то амплитуды  $X$  и  $X_{\partial}$  вынужденных колебаний при установившемся режиме можно вычислить по формулам:

$$X = |\bar{X}| \quad . \quad X_{\partial} = |\bar{X}_{\partial}|.$$

### Задание.

1. Рассчитать суммарную жесткость упругих опор с учетом изгибной жесткости вала ротора.
2. Определить приближенное значение частоты собственных колебаний ротора (критические обороты) как одномассовой системы.
3. Записать уравнения вынужденных колебаний ротора и корпуса двигателя.
4. Нарисовать эскиз ротора на упругих опорах.
5. Рассчитать амплитуды вынужденных колебаний ротора и корпуса двигателя на рабочих оборотах с начальным эксцентриситетом  $e_1$  (для нормального ротора) и эксцентриситетом  $e_2$  (для ротора с дефектной лопаткой).
6. Рассчитать амплитуду виброскорости корпуса двигателя.
7. Выполнить анализ результатов расчетов и сделать выводы по работе.

Исходные данные для выполнения курсового проекта выбираются из таблиц 1, 2. Из таблицы 1 по предпоследней цифре номера зачетной книжки выбирается вариант с рабочими оборотами ротора и размерами полого вала, из таблицы 2 выбираются остальные исходные данные по последней цифре номера зачетной книжки.

**Таблица 1**

Варианты расчетных схем ротора.

Предпоследняя цифра номера зачетной книжки.	Наружный диаметр вала ротора (м)	Внутренний диаметр вала ротора (м)	Рабочая частота вращения ротора $f_r$ , об/с (Гц)
0, 1	0,1	0,06	50
2,3	0,12	0,07	60
4, 5	0,08	0,04	40
6,7	0,11	0,07	40
8, 9	0,09	0,04	70

**Таблица 2**

Варианты исходных данных

Параметр и его размерность	Обозначения	Последняя цифра номера зачетной книжки				
		0	1	2	3	4
Масса ротора, кг	M	300	200	400	210	150

Масса корпуса ГТД, кг	$M_{\partial}$	2000	1800	2500	1800	2000
Жесткость упругих опор ротора, Н/м	$C_1$	$5 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$
	$C_2$	$5 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$
Расстояние от опор до ц.т. ротора, м	a	0,5	0,4	0,3	0,25	0,42
	b	0,5	0,4	0,3	0,25	0,42
Эксцентриситет ротора, м	$e_1$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	$e_2$	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
Безразмерный коэф. затухания в опорах ротора	$\beta$	2,7	2,3	2,6	3,0	2,5
Безразмерный коэф. затухания в подвеске двигателя	$\beta_{\partial}$	2,5	2,8	2,0	1,8	0,9
Суммарная жесткость упругой подвески двигателя, Н/м	$C_{\partial}$	$10^7$	$5 \cdot 10^6$	$10^7$	$4 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$

Таблица 2 (окончание)

## Варианты исходных данных

Параметр и его размерность	Обозначения.	Последняя цифра номера зачетной книжки				
		5	6	7	8	9
Масса ротора, кг	M	150	250	300	350	400
Масса корпуса ГТД, кг	$M_{\partial}$	2000	2100	2500	2400	3000
Жесткость упругих опор ротора, Н/м	$C_1$	$3 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5,5 \cdot 10^6$
	$C_2$	$3 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5,5 \cdot 10^6$
Расстояние от опор до ц.т. ротора, м	a	0,35	0,41	0,25	0,14	0,3
	b	0,35	0,41	0,25	0,14	0,3
Эксцентриситет ротора, м	$e_1$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	$e_2$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
Безразмерный коэф. затухания в опорах ротора	$\beta$	2,1	3,0	3,5	2,9	2,4
Безразмерный коэф. затухания в подвеске двигателя	$\beta_{\partial}$	1,8	2,5	2,2	1,5	0,9

Суммарная жесткость упругой подвески двигателя, Н/м	$C_d$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$
---	-------	----------------	----------------	----------------	------------------	----------------

### Рекомендуемая последовательность выполнения задания 1.

1. Суммарная жесткость упругих опор с учетом изгибной жесткости вала ротора определяется по формуле:

$$\frac{1}{C} = \frac{a^2 b^2}{3EJL} + \frac{1}{L^2} \left( \frac{b^2}{C_1} + \frac{a^2}{C_2} \right).$$

Здесь  $L = a + b$  - расстояние между опорами,  $EJ$ - изгибная жесткость вала ротора,  $E$  -модуль Юнга (для стали  $E = 2 \times 10^{11}$  Па.),  $J = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$ , где  $D$

и  $d$  - наружный и внутренний диаметры вала ротора соответственно.

2. Частота собственных колебаний ротора (без учета влияния корпуса двигателя), соответствующая критической скорости вращения вала, определяется по формуле:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{M}}.$$

Примечание. Частота вращения  $f$  и круговая частота  $\omega$  связаны соотношением  $\omega = 2\pi f$ .

3. Уравнения вынужденных колебаний ротора и корпуса двигателя имеют вид (1),(2) с коэффициентами, взятыми в соответствие с вариантом.

Примечание. Модуль эквивалентной вынуждающей силы вычисляется по формуле:  $F_{\text{эkv}} = Me\omega^2$ , где  $e$  – эксцентриситет ротора.

4. Эскиз для конкретного варианта выполняется по аналогии с рис. 1.

5. Расчет амплитуд установившихся колебаний ротора ( $X$ ) и корпуса двигателя ( $X_{\partial}$ ) выполняется по формулам:

$$X = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}, \quad X_{\partial} = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}, \text{ где}$$

$$a_0 = (-M\omega^2 + C)(-M_{\partial}\omega^2 + C + C_{\partial}) - R(R + R_{\partial})\omega^2 - C^2 + R^2\omega^2,$$

$$b_0 = \omega[R(-M_{\partial}\omega^2 + C + C_{\partial}) + (R + R_{\partial})(-M\omega^2 + C) - 2CR],$$

$$a_1 = F_{\text{ЭКВ}}(-M_{\partial}\omega^2 + C + C_{\partial}), \quad b_1 = F_{\text{ЭКВ}}\omega(R + R_{\partial}),$$

$$a_2 = F_{\text{ЭКВ}}C, \quad b_2 = F_{\text{ЭКВ}}\omega R,$$

$$R = 2M\beta, \quad R_{\partial} = 2M_{\partial}\beta_{\partial}.$$

6 Расчет амплитуды виброскорости корпуса двигателя производится по формуле:

$$V = 10^3 2\pi f X_{\partial}, \text{ мм/с.}$$

## Задание 2

Оценка технического состояния газотурбинного двигателя

Задача считается выполненным, если в итоге получено правильное числовое значение ответа и дано правильное заключение об исправности двигателя. По каждому теоретическому вопросу задания в контрольной работе должен быть дан исчерпывающий письменный ответ.

Исходные данные:

- нормальное распределение уровня вибрации исправного и дефектного двигателей;
- для исправного двигателя математическое ожидание уровня вибрации  $m_1$ , а среднеквадратическое отклонение -  $\sigma_1$ ;
- для неисправного двигателя математическое ожидание уровня вибрации  $m_2$ , а среднеквадратическое отклонение -  $\sigma_2$ ;
- максимально допустимое значение ошибки первого рода  $A$ .

- замеренное значение уровня вибрации  $V_{\Pi}$ .

Требуется сформулировать заключение об исправности двигателя и определить вероятность ошибки второго рода используя критерий Неймана – Пирсона.

Исходные данные для решения задачи выбираются из табл.1 и 2.

Из табл. 1 по последней цифре учебного шифра студента выбирается максимально допустимое значение ошибки первого рода  $A$ , а по предпоследней цифре - исходные данные из таблицы 2. Если соответствующая цифра учебного шифра 0, то в таблице выбирается 10-й вариант.

Таблица 1

Вероятность ошибки первого рода (последняя цифра номера зачетной книжки)

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A$	0,035	0,045	0,06	0,075	0,05	0,03	0,065	0,04	0,055	0,07

Таблица 2

Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетной книжки)

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m_1$	15,6	14,9	15,8	15,4	15,2	15,7	14,8	15,1	15,5	15,3
$\sigma_1$	2,8	2,7	2,9	2,8	2,8	2,9	2,7	2,8	2,9	2,8
$m_2$	29,7	29,3	30,4	29,6	29,5	30,1	29,3	29,8	30,2	29,9
$\sigma_2$	6,4	6,3	6,7	6,4	6,4	6,6	6,3	6,3	6,5	6,4
$V_{\Pi}$	20,2	19,3	20,6	22,3	21,0	18,8	19,7	16,4	23,1	17,9

### Порядок выполнения задания 2

1. Определить аргумент функции Лапласа по ее значению  $Q_1$  (табл. 2.1).
2. Вычислить критическое значение вибрации  $V_0$ .
3. Вычислить аргумент функции Лапласа для определения  $Q_2$ .
4. Определить  $Q_2$  из таблицы 2.1.

5. Принять решение об исправности двигателя.
6. Оформить пояснительную записку по пп. 1-6.

Рассмотрим пример решения подобной задачи.

“Оценка технического состояния редуктора по уровню шума”

Исходные данные:

- огибающая корреляционной функции уровня шума работающего редуктора меняется по закону  $\exp(-at)$ , состояние редуктора определяется значением параметра  $a$ ;
- нормальное распределение параметра  $a$  исправного и дефектного редукторов;
- для исправного редуктора математическое ожидание параметра  $a$  -  $m_1$ , а среднеквадратическое отклонение -  $\sigma_1$ ;
- для неисправного редуктора математическое ожидание параметра  $a$  -  $m_2$ , а среднеквадратическое отклонение -  $\sigma_2$ ;
- максимально допустимое значение ошибки первого рода  $A$ .
- замеренное значение параметра  $a$ .

Требуется сформулировать заключение об исправности редуктора и определить вероятность ошибки второго рода.

Решение.

В соответствии с заданием, будем считать, что параметр  $a$  подчиняется нормальному закону распределения. При этом для исправного редуктора

$$m_1 = 0,07(\text{рад/с}); \quad \sigma_1 = 0,01(\text{рад/с}),$$

а для неисправного редуктора

$$m_2 = 0,12(\text{рад/с}); \quad \sigma_2 = 0,015(\text{рад/с}).$$

Примем, что максимально допустимое значение ошибки первого рода  $A \leq 0,05$ , а замеренное значение  $a = 0,1$ .

Для решения задачи используем критерий Неймана – Пирсона.

Определяем критическое значение параметра  $a_0$  и вероятность ошибки второго рода  $Q_2$ . Используя для нахождения критического значения  $a_0$  данные по исправному редуктору, получим уравнение  $Q_1 = 1 - F((a_0 - a_1)/\sigma_1) = 1 - F((a_0 - 0,07)/0,01) = 0,05$  или  $F((a_0 - 0,07)/0,01) = 0,95$ .

Из табл. 2.1 по значению функции Лапласа 0,95 найдем значение аргумента 1,65, откуда  $(a_0 - 0,07)/0,01 = 1,65$ , то есть  $a_0 = 0,0865$ .

Для определения вероятности ошибки второго рода воспользуемся формулой  $Q_2 = F((a_0 - a_2)/\sigma_2)$  и табл. 2.1. Так как  $(a_0 - a_2)/\sigma_2 = (0,0865 - 0,12)/0,015 = -2,2$ , то  $Q_2 = F(-2,2) = 1 - F(2,2) = 1 - 0,0986 = 0,014$ .

Так как фактическое значение параметра  $a$  превышает критическое, то редуктор неисправен, а вероятность ошибки второго рода  $Q_2 = 0,014$ .

Кривые плотности распределения параметра  $a$  для исправного и неисправного редукторов, а также критическое значение  $a_0$  приведены на рис. 2.1.



## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Методы и средства диагностирования авиационной техники: Часть 1: Учебное пособие/ Университет ГА. С.Петербург, 2011.
2. Руководство по организации сбора, обработки и использования полетной информации в авиапредприятиях гражданской авиации Российской Федерации, изд. «Воздушный транспорт», 2002г.
3. Основы теории технической диагностики. Методические указания под ред. д.т.н. А.П.Ушакова, Академия ГА, часть1, 2002г.