



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Проектирование и технический сервис транс-
портно-технологических систем»

Учебное пособие

по дисциплине

«Теория, моделирование и расчёт машин для возделывания сельскохозяйственных культур»

Авторы
Игнатенко И.В.
Чайка Е.А.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Изложены общие понятия о структуре и методологии моделирования мобильных сельскохозяйственных машин. Описаны методы создания теоретических математических моделей, а также экспериментальных, вероятностных и оптимизационных. Приведены примеры моделирования и решения расчётных задач с применением компьютерных технологий. Пособие предназначено для магистрантов дневного и заочного отделений по направлению 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

Авторы



доцент, доктор технических наук,
Игнатенко И.В.



кандидат технических наук,
доцент, кафедры
«Проектированием и технический
сервис ТТС»
Чайка Е.А.



Оглавление

Введение	7
Глава 1. Моделирование функционирования машин возделывания	13
1.1. Понятие моделирования	13
1.2. Типы моделей	17
1.3. Исходная информация для моделирования машин	23
1.4. Структура машин для возделывания с/х культур	26
Глава 2. Физическое моделирование	30
2.1. Подобие модели и оригинала	30
2.2. Виды физического подобия	33
2.3. Критерии механического подобия	35
2.4. Получение критериев подобия	36
2.5. Теоремы подобия	38
2.6. Критериальные уравнения	39
2.7. Построение модели по размерности факторов	40
Глава 3. Математическое моделирование машин возделывания	40
3.1. Атрибуты математических моделей	40
3.2. Правила построения функциональных ММ	44
3.3. Классификация функциональных математических моделей	47
3.4. Требования к математическим моделям	55
3.5. Моделирование технических объектов на макроуровне	56
3.5.1. Принципы моделирования на макроуровне	56
3.5.2. Компонентные и топологические уравнения	60
3.5.3. Построение теоретических моделей НТТС на макроуровне	64
3.5.3.1. Физический подход к построению теоретической модели	64
3.5.3.2. Формальный метод создания теоретических моделей	73
3.6. Усовершенствование математических моделей макроуровня	77
3.6.1. Учёт трансформаторных элементов	77
3.6.2. Учёт сложного движения	80
3.6.3. Учёт нелинейностей системы	81
3.6.4. Учёт ограничений и связей	85
3.7. Упрощение математических моделей макроуровня	87

3.7.1. Линеаризация нелинейностей	87
3.7.2. Снижение жёсткости модели	88
Глава 4 Теория рабочих органов почвообрабатывающих машин	90
4.1. Виды почвообрабатывающих рабочие органы	90
4.2. Поступательные рабочие органы	91
4.2.1. Разновидности клина	92
4.2.2. Теория работы клина	95
4.2.3. Модели напряженно-деформированного состояния почвы	99
4.2.4. Задача о тяговом сопротивлении клина	101
4.1.5. Микроуровневые модели деформируемой почвенной среды	106
4.2.6. Задачи терраупругости	109
Глава 5. Типовые расчётные задачи машин для возделывания	118
5.1. Расчётные модели сельскохозяйственных машин	119
5.1.1 Расчётные модели плугов	119
5.1.2. Расчётные модели глубокорыхлителей	125
5.1.3. Особенности расчета чизельных плугов	129
5.2. Силовой расчёт НТТС на примере плуга	131
5.2.1. Модели тягового сопротивления	132
5.2.2. Определение сил, действующих на рабочий орган	134
5.2.3. Разработка расчётной схемы	137
5.2.4. Кинестатический расчёт	140
5.3. Проверка устойчивости агрегата	142
Глава 6. Вероятностные математические модели	147
6.1. Вероятностные представления явлений	147
6.2. Моделирование случайных величин	152
6.3. Типовые модели распределения вероятностей	160
6.4. Случайные процессы	170
6.4.1. Понятие и характеристики случайных процессов	170
6.4.2. Спектральные представления случайных процессов	178
Глава 7 Моделирование процессов движения НТТС	182
7.1. Моделирование курсовой устойчивости НТТС	182
7.2.1. Устойчивость движения прицепного агрегата	182
7.1.2. Устойчивость движения агрегата с навесной машиной	186
7.2. Моделирование плавности хода НТТС	192
7.3. Моделирование процесса копирования рельефа	194
Часть 8. Математические модели в инженерии	198
8.1. Разновидности исследовательских задач	198

8.2. Модели анализа режимов функционирования технических объектов	201
8.3. Оптимизационные математические модели	205
8.3.1. Категории оптимизации	205
8.3.2. Безусловная оптимизация	208
8.3.3. Математическое программирование	209
8.3.4. Модели многокритериальной оптимизации	210
8.3.5. Метод неопределённых множителей Лагранжа	213
Перечень использованных информационных ресурсов	217

Введение

Современные машины для возделывания являются представителями так называемых наземных транспортно-технологических систем (НТТС), охватывающих все передвигающиеся по поверхности земли рукотворные устройства на колёсах или гусеницах. Это различные виды гражданской и военной техники (аэродромная и муниципальная техника, разная бронетехника, тягачи ракет, артиллерийских установок, а также многочисленные сельскохозяйственные машины). Несмотря на разное назначение всех их объединяет единая структура – наличие ходовой и технологической подсистем и единые требования к функционированию, главными из которых являются устойчивость и управляемость системы от возмущений рельефа и динамических нагрузок в технологической подсистеме.

Дисциплина является логическим продолжением дисциплины специалистов "Математическое моделирование", но отличается объектом моделирования. Моделируется не технологический процесс, а вся машина как система.

Виды машин для возделывания уже подробно изучались при обучении студентов ВУЗов по направлению "Наземные транспортно-технологические комплексы".

К машинам возделывания отнесены;

- машины для освоения земель (корчеватели, машины для удаления кустарника и мелколесья; собиратели, погрузчики и транспортировщики лесосечных отходов, собиратели камней, каналокопатели, каналоочистители, дренажные машины, трубоукладчики, кротователи, планировщики, специальные тяжёлые плуги, плуги кустарнико-болотные и плантажные; тяжёлые бороны и катки);

машины для основной обработки почвы (плуги лемешные для свальной-развальной и гладкой вспашки, ярусные, дискаторы, плуги-рыхлители, плоскорезы); (глубокорыхлители, чизели, почвоуглубители); для мелкой обработки (луцильники); для поверхностной обработки (дискаторы, бороны зубовые и дисковые, катки-уплотнители, рыхлители и паковщики).;

- машины для внесения удобрений (жидких, твёрдых, пылевидных минеральных удобрений; мелиорантов, безводного аммиака; для внесения твёрдых и жидких органических удобрений, биодобавок);
машины для подготовки почвы к посеву и посадке (культиваторы лаповые и фрезерные, грядоделатели, гребнеобразователи, бороздоделатели, бороны, мотыги);

- машины для посева с/х культур (зерновые, травяные, кукурузные, свекловичные, льняные, овощные, рисовые, механические и пневматические);
- машины для посадки с/х культур (рассадопосадочные, высадкопосадочные, виноградопосадочные, картофелепосадочные)
машины для ухода за растениями (пропашные культиваторы, культиваторы для междурядной обработки; культиваторы растениепитатели; прореживатели; окучники; подкормщики, аппликаторы);
- техника для орошения полей (дождеватели, техника для поверхностного полива, подпочвенного и капельного орошения);
- машины для защиты растений от болезней и вредителей (опрыскиватели, опыливатели, аэрозольные генераторы, фумигаторы, разбрасыватели приманок, техника биологической защиты - разбрасыватели энтомогафов);

Примеры машин возделывания представлены в презентации.



Собиратель камней



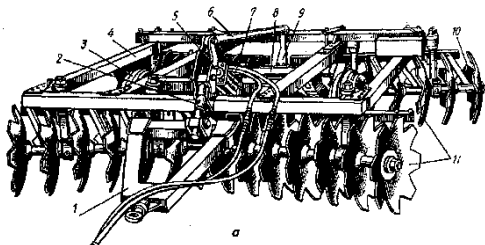
каналокопатель



Плуг – стародавнее основное орудие почвообработки



Чизельный плуг



дисковая борона



разбрасыватель удобрений

разбрасыватель удоб-



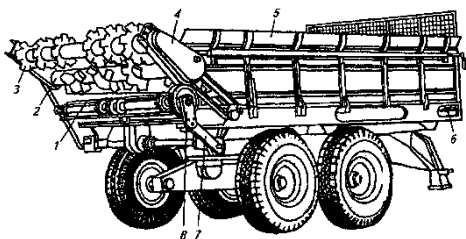
ватель туков

пневмо-рассе-

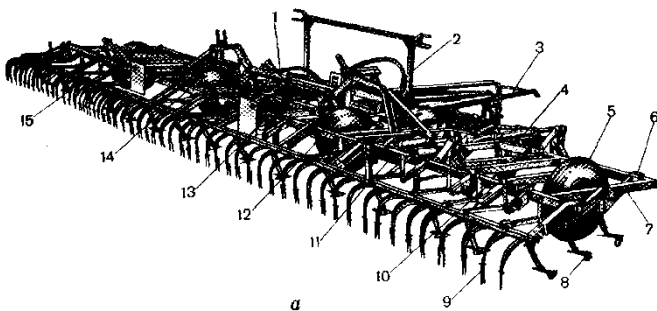


ИНЪЕКЦИОННЫЙ

подкормщик



разбрасыватель органики



культиватор лаповый



культиватор фрезерный



посевной комплекс



Пневматическая сеялка **СПУ-6**





рассадосажалка



Культиваторы междурядий



Подкормщик - аппликатор

Особенность множества типов МВ – большое количество простых вариантов техники, вызванное стремлением удешевить сельхозпроизводство огромной массы продуктов питания. В большинстве случаев машины возделывания не самоходные и двигателя не имеют. Их агрегируют с другим двигателем (трактором).

Создание машин для возделывания требует разных видов работ: моделирования, исследований, трудоёмких расчетов, конструирования, проектирования, испытаний. Расчёты в СХП

сложны и трудоёмки; зачастую они не проработаны наукой; иногда просто неосуществимы; но, тем не менее, обязательны. Ввиду сложности инженеринга НТТС для их разработки необходимо прибегать к моделированию как испытанному нарративу творчества.

Современное моделирование с применением цифровых технологий представляет достаточно мощное и универсальное средство познания, пригодное для любых видов интеллектуальной деятельности человека: науки, инженеринга, маркетинга, управления, прогнозирования и пр. Термин «моделирование» проник практически во все науки и техники: физику, математику, механику и пр.

Типовыми расчётными задачами при моделировании ТС являются: кинематический расчёт, силовой расчёт, тепловой расчёт, гидравлический расчёт. Особенностью инженеринга является обязательность этих расчётов, особенно прочностных, для обеспечения работоспособности сконструированной машины.

Цель курса – получение знаний по моделированию НТТС на примере машин возделывания, необходимых для исследования работоспособности и создания методик их расчёта.

Часть 1. Моделирование функционирования машин возделывания

1.1 . Понятия моделирования

Моделирование – распространённый инструмент рационального отображения человеческим мозгом сложных явлений окружающего мира. Его восприятие ограничено возможностями органов чувств и человеческого мозга. Человеческий мозг не в состоянии отображать всё, он отражает только часть процессов, тем самым заменяя сложную картину упрощённым отображением.

Замена сложного явления упрощённым отображением, сохраняющим нужные в данной ситуации свойства, и принято называть моделированием.

Степень упрощения зависит от способностей моделиста и его потребностей в данной ситуации. Простой пример: перед вами забор. Его надо смоделировать. Если вы хотите построить себе такой же и есть время, можно изучать конструкцию, дизайн осмотром, измерениями. Но если за вами гонится собака, и перед вами тот же забор, то вас будет интересовать не конструкция и дизайн, а высота и возможность забор перепрыгнуть. Ситуация заказывает степень упрощения при моделировании.

Моделирование присуще каждому живому организму. Организмы овладевают им на основе врожденных инстинктов и жизненного опыта. Развитая способность к быстрому моделированию выделила человека из окружающего мира. Оно очень нужно инженеру, но особенно исследователям.

Действительный процесс или объект принято называть оригиналом, а отображение его в результате моделирования – называют моделью. Оригинал – объект моделирования, модель – результат моделирования. Моделирование сводится к созданию некой простой системы, имеющей определённое сходство с моделируемой системой.

Практически модель – материальный или мысленный образ, который в процессе изучения имитирует оригинал.

Модели создавались и развивались человеком для удовлетворения своих нужд по получению, накоплению и передаче жизненно важной информации об устройстве или процессе. Модель поэтому является носителем информации.

В зависимости от способа отображения информации использовались различные виды моделирования (рис. 1), которые совершенствовались человечеством на протяжении тысячелетий.

Мыслительное моделирование	Информационное моделирование			
	Семантическое	Физическое	Символьное	Компьютерное
<i>образное</i>	<i>звуки</i>	<i>материальное</i>	<i>рисуночное</i>	<i>числовое</i>
<i>интуитивное</i>	<i>речь</i>	<i>аналоговое</i>	<i>знаковое</i>	<i>имитационное</i>
	<i>пение</i>		<i>письмо</i>	<i>статистическое</i>
	<i>сказания</i>		<i>математическое</i>	<i>структурное</i>
	<i>легенды</i>		<i>графическое</i>	<i>поисковое</i>
	<i>мифы</i>		<i>черчение</i>	

Рис. 1. Классификация способов моделирования

Вначале появились **мыслительные модели**: образные и интуитивные.

Образные модели человек создаёт в мозгу в виде образов на основе приходящих зрительных образов, например, при конструировании. Заведует образным мышлением обычно правое полушарие человеческого мозга.

К мыслительному моделированию относится также интуитивное – представления об объекте или ситуации, не поддающиеся образной формализации. Его основа – жизненный опыт человека.

Недостаток мыслительного моделирования: информацию невозможно ни передать другим людям, ни зафиксировать. Поэтому по мере развития общества развивались информационные модели, удобные для описания свойств и передачи информации внутри человеческого сообщества.

Появилось **семантическое моделирование** – описание объекта при помощи слов. Для передачи информации используется речь. Недостаток: неточность, субъективность, иногда явная ложь, отсутствие наглядности.

Физическое моделирование – это моделирование с применением физических предметов и законов. Различают:

материальное моделирование, при котором реальному объекту сопоставлена его увеличенная или уменьшенная копия (статуи, статуэтки, модели судов, самолётов и пр.); недостаток такого физического моделирования – большая трудоёмкость;

аналоговое моделирование, основанное на использовании аналогий процессов, имеющих разную физическую природу, но одинаково описываемых формально. Поиск аналогий как способ поиска общих законов мироздания требует фундаментальных знаний.

Для снижения трудоёмкости создания моделей появилось **символьное моделирование** – описание объекта символами. Оно менее трудоёмко, более точное и полное, поэтому получило развитие. По мере развития появлялось символьное моделирование:

Рисуночное – с помощью рисунков, картин, карт.; требует высокой квалификации.

Знаковое – с помощью специальных знаков, обозначений, часто понятных только создателю (шифрование).

Письменные (описательные, дискриптивные) – с помощью общепринятых символов типа азбуки, иероглифов, образующих систему письменности какого-либо народа.

Графическое – описание объекта с помощью стилизованных нормированных рисунков (например, черчение).

Математическое – описание объекта с помощью математических символов и процедур. Единственный пока вид моделирования для точной передачи количественных характеристик объекта или процесса. Основа для проведения расчётов.

Символьное моделирование нашло широкое применение в жизни человечества как средство не только получения, но и хранения, накопления и переработки информации. Увеличивающийся объём информации потребовал применения компьютерных технологий.

Компьютерное моделирование – моделирование с использованием компьютерных технологий переработки информации. Сочетает черты образного и символьного моделирования. Бурно развивающийся способ.

В инженерной практике создания НТТС начальным является образное моделирование, представления новой машины образами. Образ может дополняться физическими моделями (копиями), удобными для демонстрации новых технических объектов.

Но основной объём моделирования приходится на математическое и расчётное моделирование, по результатам которого

определяются размеры, разнообразные т.н. конструктивно-технологические параметры (КТП), необходимые для заключительного графического моделирования – разработке проектной документации новой НТТС.

Математическое моделирование помимо трудоёмкости требует обширных знаний физических законов, высокой квалификации в области теории вопроса и зачастую недоступно простому инженеру по сложности. К тому же инженер проектировщик не может терять время на трудоёмкие и продолжительные теоретические изыскания. Такие работы составляют содержание т.н. предпроектных изыскательных поисковых работ, которые должен проводить специально подготовленный персонал, обладающих исследовательскими навыками, которых готовит магистратура, в том числе магистратура по направлению 23.04.05 «Наземные транспортно-технологические комплексы».

В последние годы инженеринг использует компьютерное моделирование, которое должно объединить расчётное и графическое в систему автоматизированного проектирования (САПР). В настоящем САПР графическая информация (чертежи) заменяется компьютерными программами, имеющими варьируемые параметры и способными создавать виртуальные варианты НТТС.

Цифровое моделирование в настоящее время становится основным методом разработки технических объектов, не требующим дорогих опытов в производственных условиях.

Цифровое моделирование становится в инженеринге также методом изучения сложных процессов и объектов, не поддающихся физической реализации. Тогда вместо оригинала испытывают его модель, а результаты переносят на оригинал. Например, испытания моделей самолётов в аэродинамической трубе, моделей рабочих органов в почвенном канале и т.п.

Моделирование расширяет сферу исследования, делает доступными для анализа недоступные объекты, организационно и морально не осуществимые процессы.

Цель моделирования – получение новой информации об объекте с наименьшими затратами. Для этого используют информационные связи модели и оригинала. Моделирование приводит к циркуляции потоков информации (рис. 1).

изучение объекта

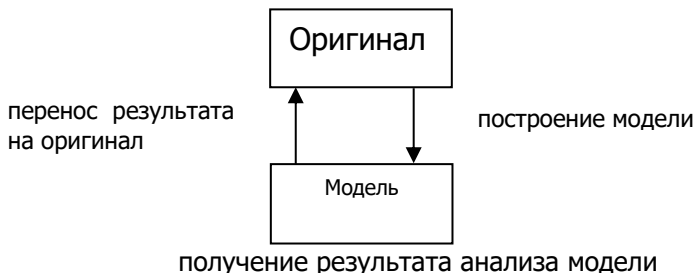


Рис.1.1. Схема взаимодействия модели и оригинала

Объект, подлежащий моделированию, подвергается предварительному изучению, получают первичную информацию (представления) об объекте. На основе этой информации строят модель – новую систему, более удобную для исследователя. Модель анализируется с применением различных процедур и средств получения информации (например, математических), результат получают в виде новой информации. Его переносят по каким-либо правилам на оригинал.

1.2. Типы моделей

Согласно схеме взаимодействия модель имеет входную и выходную информацию. Процесс преобразования входной информации в выходную называется функционированием модели.

Входную информацию представляют в виде совокупности факторов. Фактором считается любая изменяемая величина, существенно влияющая на результат функционирования.

При выявлении факторов нужно учитывать существенность их для результата и требования независимости факторов.

Графическое представление превращения входных факторов в результат называют *факторной моделью* (рис. 1.2).

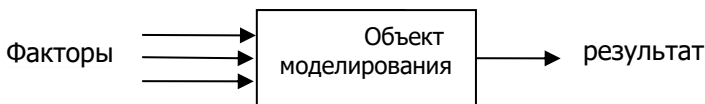


Рис. 1.2. Факторная модель объекта моделирования

Факторная модель является первой. По ней составляют бо-

лее детализированные модели – функциональные и морфологические.

Функциональная модель – модель, отражающая функционирование объекта; она должна давать информацию о закономерностях преобразования факторов в результат.

Функциональные модели широко применяются в мировой практике в разных отраслях по единым методологиям. В настоящее время двумя наиболее популярными методологиями построения функциональных моделей являются [SADT](#) и [DFD](#).

Методология SADT (*Structured Analysis and Design Technique* – методология структурного анализа и проектирования) в 1981 г., принята в качестве федерального стандарта на разработку программного обеспечения IDEF0 (*Icam DEFINition*). Под этим названием SADT стала применяться в промышленных организациях [20]. IDEF0 рекомендована для использования Госстандартом РФ и применяется в отечественных госструктурах (например, в Государственной налоговой инспекции РФ).

Главными компонентами модели являются схемы, на которых функции системы отображаются в виде прямоугольников, а связи между ними и внешней средой изображаются посредством стрелок (рис. 1.4). Прямоугольник обозначает процесс (деятельность, функцию или задачу), который приводит к результату. Имя процесса должно выражать действие (например, «Расчет скоростей», «Формирование ведомости № 3»).

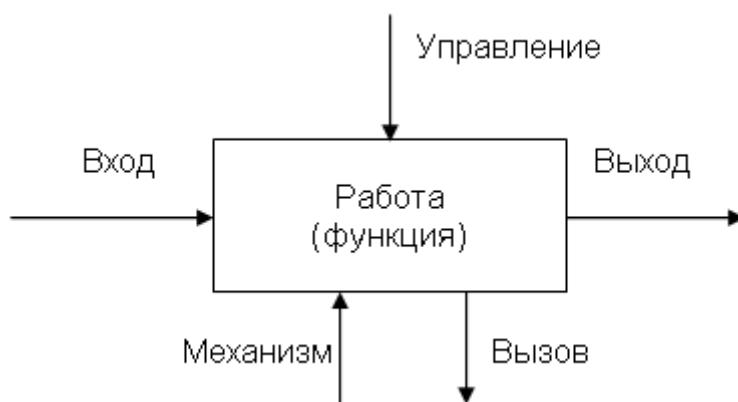


Рис. 1.4. Элементы графической нотации IDEF0

Стрелки в методологии IDEF0 адекватны факторам в моделях СХП; разбиваются на группы в зависимости от их роли в процессе.

В IDEF0 различают 5 видов стрелок-факторов:

- вход – материал или информация, которые используются и преобразуются. Вход отвечает на вопрос «Что подлежит обработке?»;

- управление – регламентирующие и нормативные данные, которыми руководствуется модель (например, чертёж, стандарты, нормативы, расценки). Управление отвечает на вопрос «В соответствии с чем выполняется работа?».

- выход – материал или информация, которые представляют результат выполнения работы. Выход отвечает на вопрос «Что является результатом работы?»;

- механизм – ресурсы, которые выполняют работу. Механизм отвечает на вопрос «Кто выполняет работу?». В качестве механизма могут быть персонал предприятия, станок, оборудование, программа;

- вызов – стрелка указывает, что некоторая часть работы выполняется за пределами рассматриваемого блока.

Методология SAD(IDEF0) оказывается применимой и для моделей СХП. После адаптации однозвенная факторная модель СХП (рис. 1.2) приходит к виду (рис 1.5).

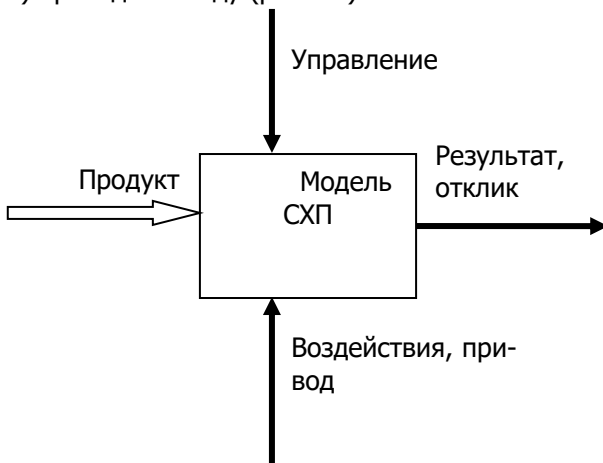


Рис. 1.5. Факторная модель СХП в стиле IDEF0

Здесь на входе в качестве фактора действуют показатели

исходного потока продукта (подача, скорость, свойства). В качестве управления могут фигурировать какое-либо изменение пространства или рабочего органа (открытие заслонок, изменения ориентации и т.п.). В качестве ресурса следует использовать режимные факторы – воздействия, получаемые от рабочего органа и его приводов. Результат (отклик) будет представлять показатели переработанного продукта, прошедшего через рабочие органы.

Сложные процессы внутри СХМ, целесообразно моделировать морфологическими моделями, требующих системного подхода к объекту моделирования.

Морфологическая модель - модель, отражающая структуру объекта, конфигурацию и взаимодействие его частей (элементов). В зависимости от учтённых свойств элементов различают структурные, топологические и геометрические морфологические модели.

Структурная морфологическая модель описывают только состав и взаимосвязи элементов без указания их формы. Обычно, она представляется структурной схемой (рис. 1.6), где каждому элементу объекта соответствует элемент модели со своими входными и выходными величинами, называемые в разных науках по-разному: сигналами, воздействиями, реакциями и пр. Отклик модели Y не содержит информации о внутренних сигналах модели. Для устранения этого недостатка введено понятие вектора состояния системы, под которым понимается совокупность откликов всех элементов модели $Y=[Y, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]^T$.

По сравнению с функциональными моделями объекта структурные морфологические модели более детализованы, содержат больший объём информации, но их разработка требует знаний о внутренних процессах в объекте. Элементы такой морфологической модели сами могут быть импедансными или функциональными моделями. В этом случае структурная морфологическая модель процесса становится структурно-функциональной.

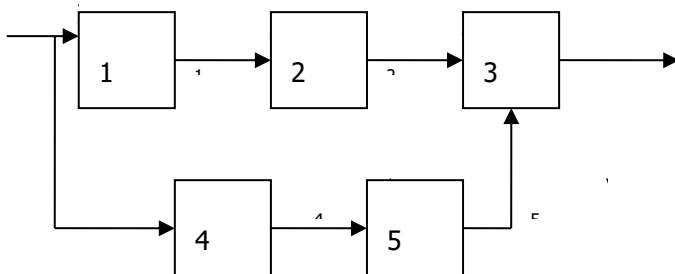


Рис. 1.6. Структурная морфологическая модель

По сравнению с функциональными моделями объекта структурные морфологические модели более детализованы, содержат большой объём информации, но их разработка требует знаний о внутренних процессах в объекте.

Структурные схемы также могут выполняться по методологии SAD(IDEF0). На рис. 1.7 приведена структурная модель типового процесса изготовления изделия.



Рис. 1.7. Структурная модель процесса изготовления изделия

Модель имеет три элемента: процессы изготовления деталей сборки изделия и контроля качества. Отклики-результаты элементов моделируется стрелками: детали и готовое изделие. В качестве управляющего фактора служат чертежи деталей и сборочный чертёж.

Подобным образом можно моделировать сложные СХП, выявляя их структуру.

Процедура выявления структуры процесса или объекта называется *систематизацией*. Определяются состав, взаимодействие элементов и связи между ними. В этом случае говорят о применении системного подхода к объекту моделирования. Объекты однозвенные или сплошные среды морфологических представлений не имеют.

Геометрические морфологические модели дополнительно приводят сведения о форме элементов (пример - принципиальные и кинематические схемы машин и устройств). Это самая информативная морфологическая модель.

Топологические морфологические модели отражают только картину размещения элементов как семейства множеств без указания взаимодействия между элементами. Например, размещение всходов по поверхности почвы.

Для НТТС особенно применимы геометрические морфологические модели. Морфологические модели НТТС выполняются в виде схем (кинематических, принципиальных и др.).

Морфологические многозвенные модели могут переходить в однозвенные функциональные, используя принцип "вход-выход". Обратный переход требует проведения систематизации процесса.

Системой-оригиналом в СХП могут быть процессы или технические объекты. Машина для возделывания считается частным случаем технического объекта.

1.3. Исходная информация для моделирования машин

Для моделирования необходима исходная информация о машине.

Наиболее полную информацию об устройстве и работе машины содержит сопроводительная документация (СД), которую производитель обязан приложить к поставляемой машине. Сопроводительная документация имеет юридический статус.

Сопроводительная документация (СД) разрабатывается на основе ГОСТ 2.601-95 с редакцией 1997 г. Госстандарта РФ и последующих изменениях. Состав СД зависит от сложности изделия, условий его поставки и монтажа (считается, что изделие может состоять из частей, которые поставляются отдельно и собирается (монтируется) на месте по специальной проектной документации).

В общем случае СД должен содержать:

1. паспорт изделия,
2. комплектовочные ведомости,
3. упаковочные ведомости,
4. проектную документацию на сборку на месте использования,
5. описание вспомогательного оборудования для монтажа,
6. руководство по проведению монтажных работ,
7. руководство по проведению наладочных работ,
8. ведомости ЗИП,
9. руководство по эксплуатации,
10. паспорта и этикетки на покупные изделия,
11. гарантийные обязательства,
12. учебные плакаты и пр.

Машины возделывания поставляются обычно целиком в собранном виде, поэтому документацию по досборке пп. 4, 5, 6, 7 могут не иметь.

Сопроводительная документация разрабатывается проектировщиками и по объёму соизмерима с проектной документацией.

Наиболее информативен в СД для МВ обязательный раздел РЭ (руководство по эксплуатации). В европейских машинах носит название ИЭ (инструкция по эксплуатации).

РЭ машины НТТС должно включать:

1. Назначение изделия. Требования Ограничения по применению, безопасности. Обозначения и пр.
2. Состав изделия. Рисунок (схема) или текст, показывающие все крупные автономные устройства, из которых состоит изделие; в том числе прилагаемые комплекты.
3. Техническое описание и работа.
4. Технические характеристики (свойства).
5. Управление и приборы.
6. Требования безопасности при работе
7. Подготовка к эксплуатации.
8. Правила эксплуатации.
9. Техническое обслуживание.
10. Правила хранения.
11. Неисправности при работе.
12. Приложения. Схемы, спецификации.
13. Маркировка и пломбирование.

Отдельные части машины (покупные или заимствованные у других изготовителей) могут поставляться вместе со всей машиной или отдельно в качестве комплекта или запасных частей. В первом случае их техническое описание входит в состав эксплуатационной документации машины как составная часть РЭ; во втором случае они рассматриваются как самостоятельное изделие и должны иметь свой паспорт ПС, или этикетку ЭТ (шильдик), закреплённую на изделии (например, электродвигатель, гидродвигатель, шины, аппаратура и пр.)

Состав изделия. Состав машины описывается структурной схемой, которая фактически моделирует состав изделия. Она содержит информацию о составе и взаимодействии крупных автономных подсистем, машин, называемых элементами.

Важной отличительной особенностью машин возделывания является их мобильность, необходимость перемещения по поверхности поля в условиях бездорожья. Это превращает сельскохозяйственные и мелиоративные машины в наземное транспортно-технологическое средство (НТТС). Структура НТТС имеет как правило две подсистемы: транспортную и технологическую.

Структурная схема получается анализом технической документации, имеющей перечень узлов и деталей. Элементы и подсистемы структурной схемы получаются объединением соответствующих узлов и деталей в подсистему.

Разберём особенности структуры мобильной с/х техники.

1.4. Структура машин для возделывания с/х культур

Машины для возделывания СХК относятся к группе наземных транспортно-технологических средств (НТТС), создаваемых для облегчения и увеличения производительности труда в земледелии.

В любом НТТС можно различить две подсистемы: транспортную и технологическую (рис. 1).

Транспортная часть перемещает машину и носимую ею технологическую часть по полю в нужном направлении и нужной скоростью. Состав транспортно-ходовой части НТТС зависит от способа передвижения машины.

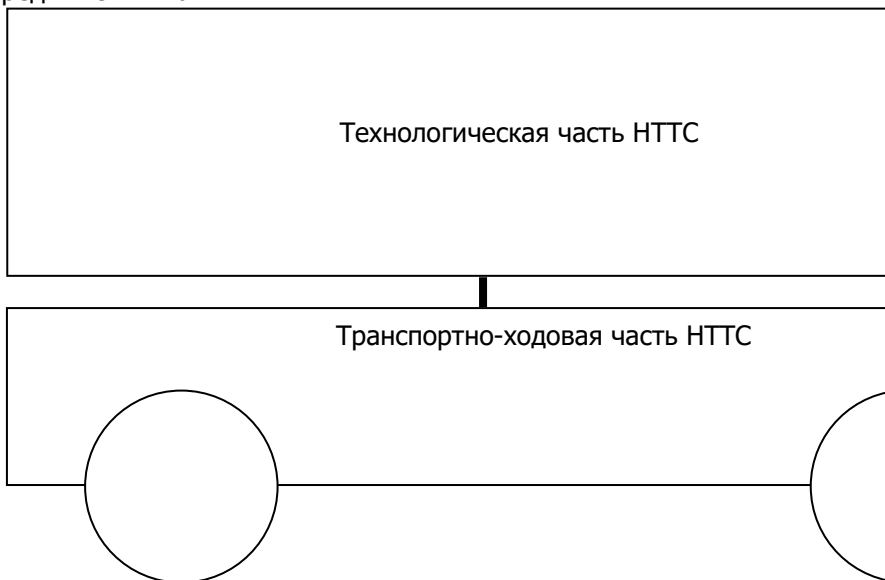


Рисунок 1 – Укрупнённая структура НТТС

Различают самоходные и агрегируемые НТТС.

Наиболее сложную структуру имеют самоходные НТТС (рис. 2).

У них должен быть двигатель, кабина управления (для оператора), привод колёс или гусениц, трансмиссия, рулевые колёса и все устройства, обязательные для безопасности движения:

тормозная система, система электрооборудования, гидросистема, информационные и навигационные системы и пр.

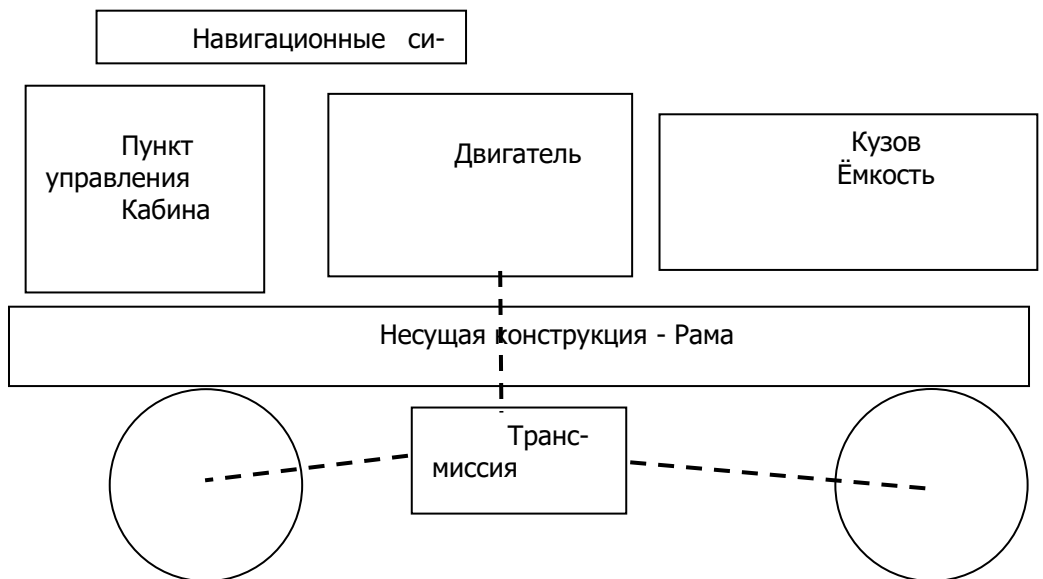


Рисунок 2 - Ходовая часть самоходной НТТС

Транспортная часть самоходных МВ включает: несущую часть (раму), ходовую часть (колёса, подвеска, трансмиссия), двигатель и системы управления двигателем, пункт управления (кабина), органы управления вождением, навигационные системы. Такая сложная часть создаёт удобства использования, но удорожает машины.

Большинство сельскохозяйственных НТТС делаются несамоходными, агрегируемыми. Их движителем обычно является трактор. Совокупность машины и движителя называется агрегатом. Соединение машины и движителя осуществляется устройством агрегатирования (рис. 3), которое обычно выполняется в виде сницы у прицепных машин или треугольника навески у навесных машин.

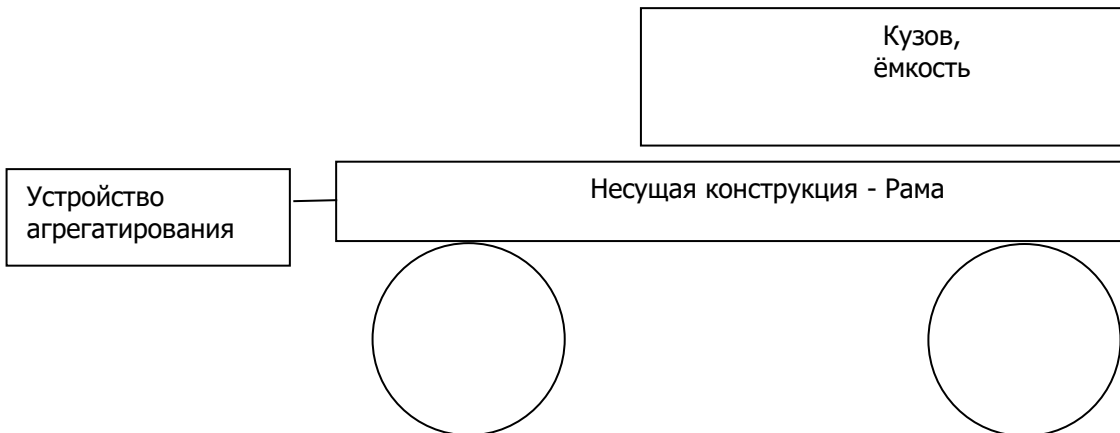


Рисунок 3 - Ходовая часть агрегируемой НТТС

Соответственно машины возделывания могут быть прицепными, навесными, полунавесными и монтируемыми.

Выполнение машины как агрегируемой упрощает структуру ходовой части. Отсутствует двигатель, кабина, трансмиссия, полсистемы контроля и регулирования.

Технологическая часть непосредственно воздействует на объект обработки (почву, удобрения, семена, растения и т. п.), выполняя несколько необходимых технологических операций. Технологическая часть МВ включает: рабочие органы машины, приводы рабочих органов, транспортеры, органы регулировки, системы контроля и управления (гидравлические, электрические, электронные).

Для технологий, применяющих различные рабочие среды (воду, растворы, удобрения и пр.) в технологической машине появляются подсистемы движения рабочей среды: насосы, ёмкости для рабочей среды, распределительные устройства, выпускные устройства, трубопроводная и коммутационные арматура.

Полная структурная схема агрегируемой машины для возделывания с технологической и транспортной частями показана на рис. 4.

Она имеет пассивную (безприводную) ходовую часть и развитую технологическую часть с несколькими рабочими органами и системой транспорта продуктов и сред. Для их работы устанавли-

ваются приводные механизмы. Агрегатируемая машина как правило не имеет своего двигателя, поэтому привод осуществляется от ВОМ движителя, дистанционного гидро- или электропривода.

Настройка режимов работы проводится системой регулировок, а контроль техпроцесса – системой контроля, в которой применимы современные цифровые электронные устройства.

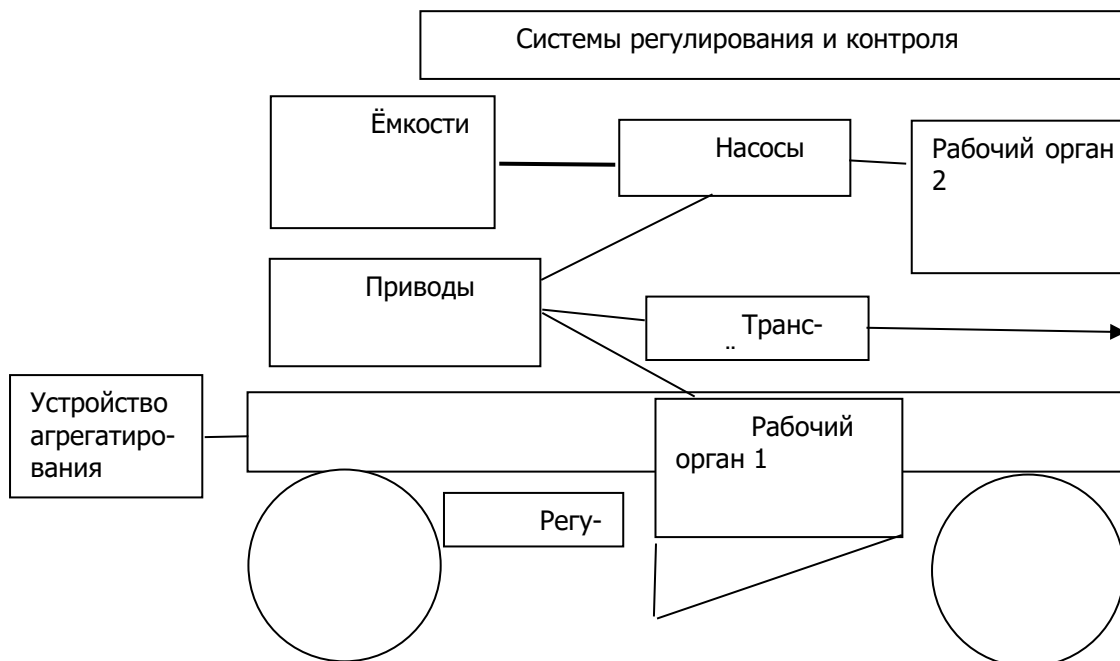


Рисунок 4 - Полная структурная схема агрегатируемой машины для возделывания

Структурная схема служит основой для разработки технического описания и других документов с сохранением принятого деления на элементы и их названий.

Машины для возделывания должны иметь устойчивость к воздействию почвенно-климатических факторов и обрабатываемых материалов, надёжную конструкцию, удовлетворять санитарно-гигиеническим и агроэкологическим требованиям, выполнять работы с наименьшими затратами энергии.

При моделировании с\х машин следует исходить из требо-

ваний технологического процесса, который машина призвана выполнять (механизировать).

Под процессом понимается любое явление, сопровождающееся изменением состояния системы. В сельскохозяйственном производстве главное место занимают процессы преобразования сырья, материалов, представляющих разные сельскохозяйственные среды: почва, корма, листостебельная масса, удобрения, ворох, валок и пр.

В растениеводстве это большие группы процессов возделывания, уборки, переработки и хранения, семеноводства и пр.

Процессы возделывания включают подготовку почвы (основную и предпосевную), внесение удобрений, посев, уход за растениями, защиту от вредителей, орошение и пр.

В производственных процессах СХП выделяются типовые физические процессы: движение рабочего органа в сплошной среде; измельчение; сепарация, сортировка, смешивание; движение частиц по поверхностям рабочих органов, формование, темперирование (кормов), распределение, внесение (удобрений), посев и пр. Сельскохозяйственные процессы сложны для математического описания и анализа. Особенностью их является слабо изученное влияние живых организмов и продуктов их жизнедеятельности. Поэтому широко применяются общие модели: факторные и морфологические.

Общее представление о процессе даёт факторная модель функционирования по типу (рис. 1.1) в виде «чёрного ящика». На входе модели СХП действуют факторы; на выходе получается результат их воздействия на процесс.

Факторы делятся на режимные (подача, скорость, сила и т.п.), геометрические (форма рабочего органа) и изменяемые свойства материала (влажность, скважность и т.п.) Неизменяемые свойства к факторам по определению не относятся. Количественные характеристики факторов выражаются скалярными величинами – параметрами (параметры воздействий, параметры рабочего органа).

Результат выражается в виде показателей функционирования (производительность, пропускная способность, расход горючего, затраты) и показателей качества (недомолот, потери, засорённость, крошение, рыхление, подрезание сорняков и т.п.). Показатели качества выражаются через изменения параметров факторов. Изменения показателей качества должны удовлетворять требованием качества, образующих систему нормированных показателей качества, которых надо достичь.

Как следует из вышеприведённых структурных схем, машины для возделывания, как частный случай НТТС, имеют внутреннюю структуру и является достаточно сложной системой. Поэтому их моделирование требует системного подхода и использования т.н. морфологических моделей.

При системном подходе объект рассматриваются как техническая система (ТС), состоящая из упорядоченного множества взаимодействующих элементов, образующих структуру объекта. Структура технических объектов характеризуется составом элементов, их взаиморасположением и взаимосвязью. В сельхозмашинах элементами являются устройства, узлы, детали, связанные между собой механическими связями. Изображать их в качестве чёрного ящика, как в факторной модели функционирования, нет необходимости.

Для НТТС уместна морфологическая модель в виде схем (кинематических, принципиальных, схем нагружения и пр). Факторами такой модели являются кинематические параметры (скорость, число оборотов, смещения), силовые нагрузки; могут добавляться изменяемые геометрические параметры (длина, высота, толщина, расстояние, зазор, углы, радиусы). Неизменяемыми параметрами считаются обычно конфигурация системы.

Элементы ТС (детали, узлы) в отличие от процессов имеют вполне очевидные границы, очертания, форму. Поэтому для элементов вместо факторных моделей применяют расчётные схемы (РС); например, схема нагружения детали, балки, вала, как в сопромате строительной механике.

Результатом моделирования ТС считаются кинематические характеристики (скорость, смещения, траектории) силовые характеристики (усилия в звеньях деталей и механизмов), прочностные характеристики (напряжения и износ деталей), температурные поля, тепловые потоки, давления, расход, энергетические (мощность, энергозатраты, КПД, потери на трение).

Каждый элемент может при соблюдении некоторых условий может рассматриваться отдельно и моделироваться функциональной моделью, т.е. морфологическая модель процесса распадается на функциональные, а вся модель становится структурно-функциональной.

Типовыми расчётными задачами при моделировании ТС являются: кинематический расчёт, силовой расчёт, тепловой расчёт, гидравлический расчёт. Особенностью инженеринга является обязательность этих расчётов, особенно прочностных, для обеспечения работоспособности сконструированной машины.



Глава 2. Физическое моделирование.

2.1. Подобие модели и оригинала

Наиболее простой и очевидный вид физического моделирования - материальное моделирование представляет метод изучения объекта, при котором вместо реального объекта (оригинала) исследуют модель в виде увеличенной или уменьшенной копии. В литературе его часто называют просто физическим.

Физическое подобие достигается только при одинаковой физической природе явления.

Если модель и оригинал имеют разную физическую природу, то моделирование перестает быть физическим, а становится аналоговым. Для НТТС оно не применяется.

Особенностью физического моделирования является большая трудоёмкость этапа проектирования и изготовления физической модели.

Главное требование физической модели: модель должна быть подобна оригиналу.

Подобными называются явления, для которых существуют некие инварианты (критериальные характеристики) параметров, отношения сходственности которых постоянны.

Пусть процесс-оригинал описывается функцией $Q_o = F(P_{1o}; P_{2o}; \dots P_{no})$, а процесс-модель $Q_m = F(P_{1m}; P_{2m}; \dots P_{nm})$. Здесь P_{io} ; $i=1, \dots, n$ - параметры явления P_{im} ; $i=1, \dots, n$ - параметры модели. Для установления подобия находятся в общем случае инварианты подобия как некие критериальные характеристики параметров $H(P_i)$, $i=1, \dots, n$. Подобие существует, если отношения сходственности

$$S_i = H(P_{io})/H(P_{im}) \quad (2.1)$$

будут постоянны для любых значений параметров.

Отношения сходственности могут строиться по-разному.

Общее выражение сходственности характеристик параметров называется **инвариантой подобия**.

Инварианты подобия могут быть симплексами и критериями.

Симплексы представляют простое отношение однородных величин.

В простом и весьма распространённом случае симплексы строятся как отношения самих параметров. Такие симплексы называют масштабами преобразования:

$$m_i = P_{io}/P_{im} \quad \text{для значений } i=1, \dots, n.$$

масштабы преобразования по всем параметрам постоянны:

$$m_1 = m_2 = m_n$$

Симплекс для геометрического подобия строится как отношение линейных размеров оригинала и модели:

$$K_L = L_0 / L_M \quad (2.2)$$

Симплекс можно строить и для временного подобия.

$$K_t = t_0 / t_M \quad (2.3)$$

Симплексы кинематического подобия:

по скорости $k_v = V_0 / V_M$; по ускорению $k_a = a_0 / a_M$.

Инварианты, представляющие отношение сложных разнородных величин, носят название критериев подобия (комплексов). В отличие от масштабов они являются одинаковыми характеристиками для подобных объектов при любом масштабе.

Пример: окружности разного диаметра подобны геометрически. Масштабный коэффициент $m = d_2 / d_1$. Но кроме геометрического симплекса можно характеризовать подобие окружностей специфическим показателем $k = L/d = \pi d/d = \pi$, которое сохраняется для всех их размеров. Такой показатель можно считать критерием подобия для окружностей.

Критерий подобия является более общей характеристикой подобия, чем симплекс.

2.2. Виды физического подобия

Физические подобие достигается только при одинаковой физической природе явления.

Физическое подобие считается полным, если охватывает время и пространство, и частное, если допускается их упрощение.

В СХП получили распространение частные виды подобия: геометрическое и механическое.

Геометрическое подобие – линейные размеры модели подобны оригиналу, угловые остаются const.

Механическое подобие – включает кинематическое, массово-геометрическое, динамическое.

Кинематическое – подобны скорости и ускорения. Массово-геометрическое – подобно распределение масс. Динамическое – подобны силы и нагрузки, вызывающие движение.

Практическое применение находит главным образом механическое подобие при разработке серий или типа ряда машин. Разработанный и проверенный образец машины применяют за базовую модель серии, а параметры других машин находят по соотношениям подобия.

Геометрическое подобие. Самое простое, распространено в авиа и судостроении – получение уменьшенной копии (макета), по которой изучают характер обтекания объекта.

В СХП моделирование обычно пространственное – т.

е. учитывают подобие по 3-м координатам.

Пусть имеем в качестве модели уменьшенную копию (рис.

1.1)

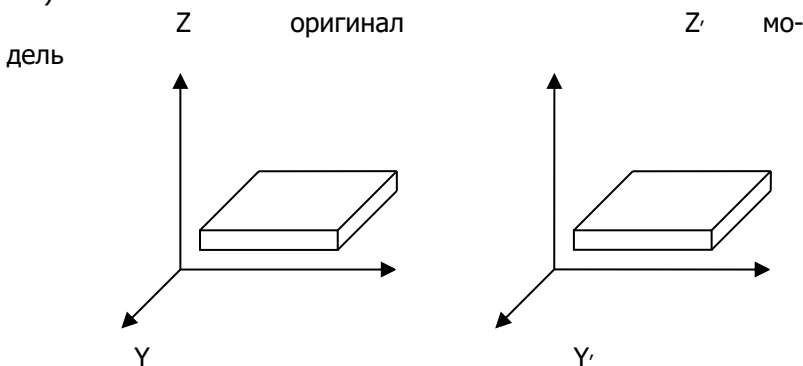


Рис. 2.1. Геометрическое подобие 2-х параллелепипедов

Геометрическое подобие 2-х параллелепипедов 3-м координатам имеет простые геометрические симплексы:

$$m_z = Z_0/Z_M \quad m_y = Y_0/Y_M \quad m_x = X_0/X_M \quad (2.4)$$

$$m_x = m_y = m_z,$$

где m_x ; m_y ; m_z – масштабные коэффициенты (коэффициенты подобия, константы подобия, масштаб, масштабные множители).

Масштабные коэффициенты – частный случай симплексов, называемых масштабами преобразования.

Не следует путать геометрическое преобразование подобия с *аффинным преобразованием*, в котором $m_x \neq m_y \neq m_z$. В нем указывается не масштаб, а функция преобразования.

При аффинном преобразовании происходит не только изменение масштаба, но и деформации (прямой в кривую, круга в эллипс и т.д.).

Пусть оригинал представляет прямую $Y_{op} = 4 - KX_{op}$. Функции преобразования ($X_{op} = 4x_m^2$); $y_{op} = 4y_m^2$. В итоге получаем $4y_m^2 = 4 - 4Kx_m^2$ или $y_m^2 + x_m^2 = 1$ – уравнение окружности.

Если функция преобразования комплексная, то такое преобразование носит название *отображения*. Применяется в расчётах на прочность для определения смещения прогибов оболочек.

2.3. Критерии механического подобия

Для механического подобия в СХП применяются главным образом безразмерные *критерии подобия*.

Практика накопила ряд критериев для решения частных задач подобия:

1) Критерий гомохронности для подобия нестационарных перемещений тел

$$\pi_n = \frac{V * t}{L}, \quad (2.5)$$

где V – скорость, t – время, L – перемещение.

2) Критерий Ньютона применяется для подобия движений с ускорением

$$\pi_n = \frac{F * t^2}{M * L}, \quad (1.6)$$

где F – сила, M – масса;

Для вращательного движения критерий Ньютона имеет другой вид:

$$\pi_n = \frac{M}{J \omega \rho}, \quad (2.7)$$

где Mкр – крутящий момент, J – момент инерции, ω – угловая скорость.

3) Критерий Фруда для подобия перемещений масс в поле силы тяжести.

$$\pi_f = \frac{V^2}{gL}, \quad (2.8)$$

где g – ускорение силы тяжести.

4) Критерий Коши для подобия упругих смещений

$$\pi_{ко} = \frac{V}{\sqrt{\frac{E \varepsilon}{\rho}}}, \quad (2.9)$$

где ε – относительное удлинение, ρ – плотность среды; E – модуль Юнга.

5) Критерий Рейнольдса для подобия процессов течения жидкости в трубопроводе или обтекания тел

$$\pi_{Re} = \mu = \frac{VD\rho}{\nu}, \quad (2.10)$$

где D – диаметр трубы (тела), μ – вязкость статическая, ν – вязкость динамическая.

6) Критерий Эйлера для подобия давлений в движущейся среде (энергетический)

$$\pi_{Eu} = P/\rho V^2, \quad (2.11)$$

где P – сила (давление среды).

7) Критерий напряжённого состояния тел

$$\pi_{\sigma} = P/\sigma L^2, \quad (2.12)$$

где σ - напряжения в детали, Па.

8) Тепловые процессы описываются критерием Фурье

$$\pi_F = q t / \lambda T, \quad (2.13)$$

где q – плотность теплового потока, Дж/(с м²); λ – коэффициент теплопроводности материала, Дж/(с м °К); T – температура, °К.

2.4. Получение критериев подобия

Ситуация 1. Модель имеет математическое описание (формулу). Для получения критерия подобия достаточно привести эту формулу к безразмерному виду (способ интегрированных аналогов).

Например, подобие по скорости. Скорость по определению имеет формулу

$$v = dl/dt.$$

Приводим формулу к безразмерному виду делением левой части на физические величины правой - получается критерий гомохронности:

$$\pi_H = N_0 = vt/l [(m/c) \cdot c^*/(M)] \quad \Pi_H = \frac{Vt}{L} \quad (2.14)$$

Подобие сил по закону Ньютона

$$F = M d^2l / dt^2 \quad (2.15)$$

Приведение к безразмерному виду даёт критерий Ньютона

Ситуация 2. Объект математически не описан. В этом случае используют метод анализа размерностей.

Суть метода: Если известно, какие физические величины действуют, можно путём сопоставления размерностей установить характер зависимости, которая связывает данные величины и установить критерий подобия.

Пример. Течение вязкой жидкости плотностью ρ по трубопроводу диаметром D со скоростью V .

Постановка задачи: установить подобие распределения скоростей и давлений для разных плотностей жидкости, скорости, диаметра труб.

Отмечаем существенные факторы для распределения давлений и скоростей по сечению трубы: это диаметр трубы D , скорость v , плотность жидкости ρ .

Перемножаем учитываемые факторы v, D, ρ .

Размерность произведения $[v D \rho] = [(м/с) м (кг/м^3)] = [кг/(м с)]$.

Чтобы это выражение стало бы безразмерным, его надо разделить на величину μ с размерностью $[кг/(м с)]$. Эта величина считается вязкостью жидкости μ .

Получаем безразмерный критерий Рейнольдса:

$$Re = v D \rho / \mu \quad (2.16)$$

Он хорошо описывает подобие ламинарного течения жидкости до значений $Re = 2300$.

С помощью такого критерия можно на моделях изучать обтекание тела жидкостью, давление на тела, погружённые в жидкость, испытываемые ими сопротивления.

Однако использование частных критериев не всегда оправдано. При создании физмоделей трудно соблюсти подобие по всем критериям и симплексам.

Пример. Противоречия критериев Фруда и Рейнольдса.

Рассмотрим два известных в гидродинамике критерия подобия: Фруда и Рейнольдса.

При выборе модели по критерию Фруда:

$$\pi_F = V^2/gL \quad (2.17)$$

условие подобия запишется как

$$V_{\text{мод}}^2/g_{\text{мод}} L_{\text{мод}} = V_{\text{ор}}^2/g_{\text{ор}} L_{\text{ор}} \quad (2.18)$$

$V_{\text{мод}}, g_{\text{мод}}, L_{\text{мод}}, V_{\text{ор}}, g_{\text{ор}}, L_{\text{ор}}$ - соответственно скорости, ускорение свободного падения и геометрические размеры модели и оригинала.

Учитывая, что $g_{\text{мод}} = g_{\text{ор}}$, получаем

$$(V_{\text{ор}} / V_{\text{мод}})^2 = (L_{\text{ор}} / L_{\text{мод}}) \quad (2.19)$$

Масштабный коэффициент скорости $K_V = V_{\text{ор}} / V_{\text{мод}}$, масштабный геометрический коэффициент $K_L = L_{\text{ор}} / L_{\text{мод}}$. Тогда $K_V = \sqrt{K_L}$ т.е. если модель уменьшена по сравнению с оригиналом в K_L раз, то скорость ее должна быть изменена $\sqrt{K_L}$ раз.

При выборе модели по критерию Рейнольдса

$$\pi_{Re} = VL/\delta\mu. \quad (2.20)$$

Для одной и той же жидкости вязкость μ модели и оригинала одинакова и условие подобия примет вид:

$$V_{\text{мод}} L_{\text{мод}} = V_{\text{ор}} L_{\text{ор}} \quad \text{или} \quad L_{\text{мод}} / L_{\text{ор}} = V_{\text{ор}} / V_{\text{мод}},$$

где $L_{\text{мод}}, L_{\text{ор}}, V_{\text{ор}}, V_{\text{мод}}$ соответственно скорость и геометрические размеры модели и оригинала.

Масштабный коэффициент для скорости потока получается другим:

$K_v = 1/K_L$, т.е., если модель уменьшена по сравнению с оригиналом в K_L раз, то скорость ее должна быть изменена в $1/K_L$, что расходится с результатами модели по Рейнольдсу.

Следовательно, изменяя геометрические параметры, невозможно выстроить физическую модель, удовлетворяющую одновременно критериям Re и Fr .

2.5. Теоремы подобия

Более надёжно при создании физмоделей использовать при выводе отношений подобия теоремы подобия.

Первая теорема подобия (теорема Ньютона).

Явления, подобные в том или ином смысле (математически, физически, полно, приближённо) имеют сочетания подобия, численно одинаковые для подобных явлений. Первую теорему подобия можно трактовать так: при подобии процессов равны все критерии подобия.

Вторая теорема (π -теорема, теорема Федермана—Бэкингема).

Всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определённой системе единиц, может быть представлено функциональной зависимостью между критериями подобия из участвующих в процессе параметров. При этом, если число физических параметров равно n , число основных единиц K , то независимых безразмерных критериев будет $n - k$.

Вторая теорема подобия утверждает, что результаты опытов можно представлять в виде функциональной зависимости между критериями, которая называется *критериальным уравнением*.

Критериальные уравнения описывают всю группу подобных процессов. Это обстоятельство имеет большое практическое значение и позволяет надёжно моделировать промышленный объект на подобной лабораторной модели.

Третья теорема подобия (теорема М. В. Кирпичева, А. А. Гухмана).

Необходимым и достаточным условием для создания подобия являются: пропорциональность сходственных параметров, входящих в условие однозначности; равенство критериев подобия сопоставляемых явлений. Согласно теореме критериальные уравнения применимы только для подобных процессов.

2.6. Критериальные уравнения

Критериальные уравнения – сложные отношения сходственности, составленные из нескольких частных критериев. При их создании следует использовать теоремы подобия.

Существует несколько методов получения критериальных уравнений.

Ситуация 1. Имеется дифференциальное уравнение задачи.

Для примера рассмотрим вывод критериального уравнения, описывающего движение вязкой жидкости в трубопроводе. Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением Навье—Стокса для одномерного движения потока жидкости без учета сил сжатия и растяжения:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dx^2} + \rho g_x = \rho v_x \frac{dv_x}{dx} + \rho \frac{dv_x}{dt}, \quad (2.21)$$

где p — давление; μ — вязкость; v — скорость; ρ — плотность; t — время.

В этом уравнении первый член характеризует изменение давления потока в направлении оси абсцисс, второй — силу трения, третий — силу тяжести, четвертый и пятый — силы инерции. Учитывая физический смысл членов уравнения, запишем: $-P + T + G = I_1 + I_2$, где P — сила давления; T — сила трения; G — сила тяжести; I_1 и I_2 — силы инерции.

При расчете трубопроводов представляют интерес соотношения следующих сил: давления и инерции P/I_1 ; инерции и трения I_1/T ; тяжести и инерции G/I_1 и, наконец, соотношение инерционных сил I_1/I_2 .

Применим описанный выше метод получения критериев подобия. Из соотношения сил давления и инерции получим безразмерный комплекс $v\chi\rho/\mu$, который называется критерием Рейнольдса и характеризует гидродинамическое подобие: $Re = vd\rho/\mu$. Здесь диаметр d трубопровода является характерным линейным размером.

Из соотношения сил давления и инерции получим критерий Эйлера $Eu = p/(pv^2)$, а из соотношения сил тяжести и инерции — критерий Фруда $Fr = gd/v^2$.

Отношение сил инерции позволяет получить критерий гомотронности $Ho = v\tau/d$, который характеризует временное подобие в нестационарных процессах.

Полученные критерии подобия, за исключением критерия Эйлера, состоят только из условий однозначности, следовательно,

они являются определяющими, а критерий Эйлера — определяемым (давление не входит в условия однозначности и является искомой величиной).

На основании второй теоремы подобия связь между критериями представим в виде критериального уравнения

$$Eu=f(Re,Fr,Ho,\Gamma_1, \Gamma_2) \quad (2.22)$$

Для стационарного процесса из уравнения следует исключить критерий гомохронности:

$$Eu=f(Re,Fr, \Gamma_1, \Gamma_2) \quad (2.23)$$

В случае развитого турбулентного режима силы тяжести не оказывают влияния на движение жидкости и уравнение имеет вид

$$Eu=f(Re, \Gamma_1, \Gamma_2) \quad (2.24)$$

или $\Delta p/(\rho v^2)=f(vd\rho/\mu, \ell/d)$.

$$\text{Тогда } \Delta p=f(vd\rho/\mu, \ell/d)(\rho v^2/2). \quad (2.25)$$

Вынесем симплекс ℓ/d из под знака функции:

$$\Delta p=f'(vd\rho/\mu)(\ell/d)(\rho v^2/2). \quad (2.26)$$

Обозначим $f'(vd\rho/\mu)$ через λ и окончательно получим уравнение, которое называется уравнением Дарси—Вейсбаха и является основным при расчете трубопроводов:

$$p = \lambda(\ell/d) (\rho v^2/2). \quad (2.27)$$

где λ - коэффициент гидравлического сопротивления, определяемый экспериментально.

Вторая ситуация: уравнение задачи отсутствует.

При изучении многих сложных процессов, например, резание почв, не всегда удается составить уравнение процесса и сформулировать условия однозначности, поэтому невозможно применить и теорию подобия. В таких случаях для получения критериальных уравнений полезен *метод анализа размерностей*.

2.7. Построение модели анализом размерностей факторов

Для его применения достаточно априорной информации, какие физические величины оказывают существенное влияние на процесс. Пусть по априорной информации показатель процесса Y существенно зависит от n факторов x_1, x_2, \dots, x_n . Требуется найти критериальную функцию. Используется тот факт, что в системе СИ основными единицами является масса $[M]$, длина $[L]$, время $[T]$, а остальные величины выражаются через них. Тогда размерность i -ой величины можно представить выражением со степенями размерностей $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$[P_i]= [L]^{\alpha_i} [M]^{\beta_i} [T]^{\gamma_i} \quad (2.28)$$

Согласно второй теореме подобия полное уравнение процесса, записанное в определённой системе единиц,

может быть представлено в виде зависимости между безразмерными критериями подобия из входящих в уравнение параметров. Структура критерия строится степенным произведением по числу факторов:

$$П = P_1^{z_1} P_2^{z_2} \dots P_n^{z_n} \quad (2.29)$$

Выражая размерность каждого фактора через основные единицы по соотношению (1.), получим:

$$П = k [L]^{(\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n)} [M]^{(\beta_1 z_1 + \dots + \beta_n z_n)} [T]^{(\gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_n z_n)}, \quad (2.30)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Так как критерии подобия должны быть безразмерные, то получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n &= 0 \\ \beta_1 z_1 + \dots + \beta_n z_n &= 0 \\ \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_n z_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Система является недостаточной; она имеет три уравнения для n неизвестных z_i . Недостающие уравнения находят на основе допущений и экспериментальным путем.

При увеличении числа критериев построение физической модели, подобной оригиналу, становится затруднительным. Те объекты, которые сложны для физического моделирования, разделяют условно на более простые части и моделируют каждую отдельно. Примеры такого моделирования – лабораторные установки для обмолота, очистки зерна, сепарации вороха, имитирующие отдельные процессы в зерноуборочном комбайне.

Глава 3. Математическое моделирование машин возделывания

3.1. Атрибуты математических моделей

Математическое моделирование машин сводится к разработке математического описания их функционирования, образующего математическую модель.

Математическая модель – символическая модель, использующая математические символы величин и процедур. Главное её достоинство - она количественно отображает свойства или состояние технического объекта. Другой особенностью математических моделей является их «всеядность» – она пригодна для объектов разной физической природы при любых физических воздействиях.

Величины в ММ обозначают символами, в качестве которых рекомендуется использовать буквы латинского и греческого алфавитов (таблица 3.1). Буквы имеют названия. Европейские нормы применять русские буквы (Б, Г, Д, Ж, И, Л, П, Ф, Ц, Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я) почему-то запрещается.

Таблица 3.1 Символы и процедуры математических моделей

Символы величин				Символы процедур	
Латинские		греческие		Символ	процедура
Символ	имя	Символ	имя		
A, a	A	A, α	альфа	+	плюс
B, b	бэ	B, β	бета	-	минус
C, c	цэ	Γ, γ	гамма	x или *	умножение
D, d	дэ	Δ, δ	дельта	: или /	деление
E, e	e	E, ε	эпсилон	± -	плюс-минус
F, f	эф	Z, ζ	дзета	= ≠ -	равно, не равно
G, g	же	H, η	эта	≈	приближённо равно
H, h	аш	Θ, θ	тэта	≡ -	тождественно равно
I, i	и	I, ι	йота	>, <, ≥	больше, меньше
J j	жи	K, κ	каппа	a ⁿ или ^	– степень

Теория, моделирование и расчёт машин для возделывания сельскохозяйственных культур

K k	ка	Λ, λ	лямбда	$\sqrt{\quad}$	- корень
L l	эль	M, μ	мю	Σ	- суммирование
M, m	эм	N, ν	ню	Π	- перемножение
N, n	эн	Ξ, ξ	кси	f	- функция
O, o	о	O, o	омикрон	$\partial x / \partial t$ или \dot{x}	- производная
P, p	пэ	Π, π	пи	\int	- интеграл
Q, q	ку	P, p	ро	\lim	- предел
R, r	эр	Σ, σ	сигма	$\sin, \cos,$ tg, ctg	- тригонометрические функции
S, s	эс	Σ, ς	сигма	lg, log, \ln	- логарифмические
T, t	тэ	T, τ	тау	$grad$	- градиент
U, u	у	Y, υ	ипсилон	div	- дивергенция
V, v	вэ	Φ, ϕ	фи	rot	- ротор
W, w	дубль-вэ	X, χ	хи	Re	- вещественная часть
X, x	икс	Ψ, ψ	пси	Im	- мнимая часть
Y, y	игрек	Ω, ω	омега	arg	- аргумент
Z, z	зэт			∇, ∇^2	- операторы Набла, Лапласа

Отношения между символьными объектами выражают математические процедуры (операции). Процедуры представляют наборы математических функций (см. таблицу 3.1). Часть простейших операций, наиболее популярные (алгебраические), присутствуют на стандартной клавиатуре компьютеров.

В качестве символов ММ могут использоваться и графические пиктограммы и элементы (круги, треугольники, прямоугольники, стрелки, разные соединительные линии, элементы блок-схем и т.л.). Популярные приведены в компьютерных редакторах, например в библиотеке «Автофигуры» Word. Выбираются по предпочтениям моделировщика и добавлениями новаций.

Символы применяются в морфологических или функциональных по разному (см. раздел 1). Графические элементы применяются главным образом в морфологических моделях, а символы –

в функциональных.

Морфологические ММ отображают структуру объектов, состав и взаимодействие элементов (пример см рис. 1.6).

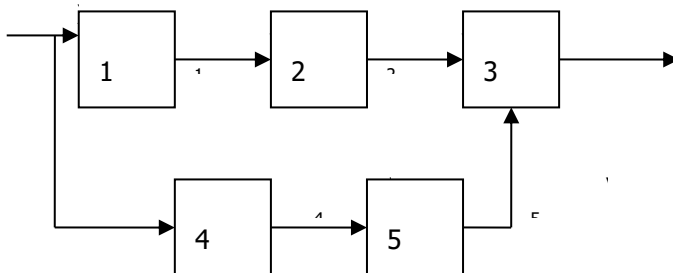


Рис. 1.6. Структурная морфологическая модель

Параметрами морфологических ММ являются отличительные признаки элементов. Эти параметры называют *морфологическими переменными*. В зависимости от их состава различают модели структурные, топологические и геометрические.

Структурные ММ описывают состав и взаимосвязи элементов.

В геометрических ММ дополнительно приводятся сведения о форме элементов. Их могут называть расчётными (РС) или принципиальными (ПС) схемами.

Топологические ММ отражают только картину размещения элементов как семейства открытых множеств.

Морфологическая модель графически представляется в виде графов, схем кинематических, принципиальных, расчётных, эквивалентных и др. В морфологических моделях могут быть символы, но в качестве обозначений элементов (матрицы, множества).

Особенностью математического моделирования является соподчинённость и взаимодействие морфологических и функциональных моделей, обязательность предварительной разработки морфологической модели. Элементы морфологической модели (см. рис. 1.6) можно рассматривать по отдельности как функциональные. Морфологические ММ играют роль концептуальных, а инженерный результат даёт только ММ функционирования.

Математические функциональные модели незаменимы при решении инженерно-исследовательских и расчётных задач. В дальнейшем основное внимание уделим изучению создания функциональных ММ.

3.2. Правила построения функциональных ММ

На практике математическое моделирование обычно проводится на основе непротиворечивых наборов правил (аксиом, теорем) или их конструктивным применением (т.е. выводом новой модели, пользуясь уже известными теоремами).

Общеизвестными примерами математических моделей, ставших аксиомами, являются системы чисел, евклидова геометрия дифференциальное, интегральное, матричное исчисление и др., на разработку которых человечество затратило много сил и времени.

Инженер при разработке новых математических моделей не может изобретать новые аксиомы, теоремы и процедуры; он должен рационально использовать существующие, что требует от него определённой математической квалификации.

Математическую модель в инженерной практике строят на основе физической или факторной модели оригинала, подвергая её систематизации, параметризации и математизации.

Систематизация призвана создать представления о структуре сложного многоэлементного объекта в виде схем, составе и взаимодействия элементов. Используются методы морфологического анализа и синтеза. Итогом систематизации является набор функциональных моделей с расчётными схемами.

Параметризация – назначение количественных оценок - параметров, характеризующих количественную сторону функционирования выделенных элементов моделируемых объектов и процессов.

Параметр — это скалярная величина, характеризующая свойство или режим работы объекта.

Различают внутренние, внешние и выходные параметры.

Внутренние параметры — это параметры элементов, из которых состоит технический объект.

Внешние параметры — это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта.

Выходными параметрами процессов и технического объекта считаются показатели качества и эффективности: производительность, грузоподъемность, удельная материалоемкость, удельная энергоёмкость, габариты массы, показатели надежности и качества переходных процессов и др.

Выходные параметры характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры — свойства его элементов.

При переходе к новому иерархическому уровню проектирования внутренние параметры могут стать выходными и наоборот.

После параметризации общая факторная модель (см. рис. 1.2) преобразуется в факторную математическую модель (рис. 3.1).

На входе модели задают параметры внешних факторов, выражаемых функциями независимых переменных (времени). К ним добавляются внутренние параметры объекта – массово-геометрические параметры и свойства элементов. Эти параметры с помощью математических процедур преобразуются в результат. Результат работы математической модели принято называть решением модели. Форма представления результата определяет название математической модели.

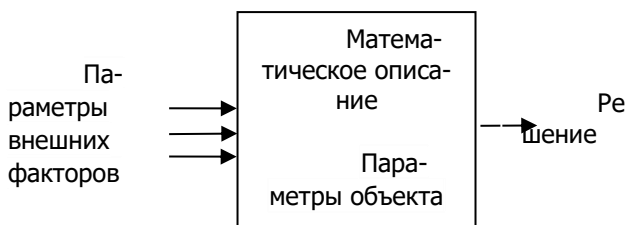


Рис. 3.1. Факторная математическая модель технического объекта

Математизация – определение математических процедур (операций), преобразующих подмножество параметров и входные переменные в выходные переменные. Определение этих математических процедур, составляют основное содержание математического моделирования, в результате которого и появляется математическая модель (ММ).

В общем случае уравнения математической модели связывают физические величины, которые характеризуют состояние объекта и не относятся к перечисленным выше выходным, внутренним и внешним параметрам. Такими величинами являются: скорости и силы — в механических системах; расходы и давления — в гидравлических и пневматических системах; температуры и тепловые потоки — в тепловых системах; токи и напряжения — в электрических системах.

Функциональные математические модели имеют форму систем уравнений%

$$\Phi(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{Y}, \dot{\bar{Y}}, \bar{Q}, t) = 0$$

где Φ – некий функционал – (функция над функциями),

\bar{x} – параметры внешних факторов и их производные;

\bar{Y} – выходные параметры (решение);

\bar{Q} вектор параметров объекта;

t – время.

Величины \bar{x} и \bar{Y} , характеризующие состояние технического объекта в процессе его функционирования, называют *фазовыми переменными (фазовыми координатами)*. Вектор фазовых переменных задает точку в пространстве, называемом *фазовым пространством*. Фазовое пространство многомерное. Его размерность определяется количеством используемых фазовых координат.

Обычно в уравнениях математической модели фигурируют не все фазовые переменные, а только часть из них, достаточная для однозначной идентификации состояния объекта. Такие фазовые переменные называют *базисными координатами*. Через базисные координаты могут быть вычислены значения и всех остальных фазовых переменных.

3.2 Классификация функциональных математических моделей

Математические модели функционирования прошли большой путь развития, накопили множество разновидностей, имеют развитую классификацию.

Классификация приведена на рис. 1.2.



Рис. 1.2. Классификация математических моделей (ТО - технический объект)

По форме представления математических процедур различают аналитические, инвариантные и алгоритмические модели.

Инвариантная модель обязательно имеет производные выходной переменной

$$\Phi(\bar{x}(t), \bar{Y}, \dot{\bar{Y}}, \bar{Q}) = 0$$

Представляется дифференциальными и интегральными уравнениями, содержащих произвольные постоянные. Модели не имеют однозначного решения. Применяются в теоретических исследованиях, для расчётов непригодны, требуют процедур т.н. решения.

Классическим случаем современных инвариантных моделей являются т.н. модели состояния в нормальной форме Коши. Модель состояния использует представления фазовых координат, фазового пространства через вектор состояния. В качестве фазовых координат принимаются выходные параметры \bar{Y} и скорости их

изменения $\dot{\bar{Y}}$. Они образуют вектор состояния \bar{u} .

$$\bar{u} = \begin{matrix} Y \\ \dot{Y} \end{matrix}$$

Модель состояния имеет математическое описание через

вектор состояния \bar{u} :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \Phi(\bar{u}, \bar{x}, t) \quad (3.2.)$$

Модели состояния используются для описания движения машины при анализе качества, устойчивости движения и управляемости. Имеют развитое программное обеспечение.

Аналитическая модель – модель, разрешённая относительно \bar{Y} , получается решением инвариантной модели:

$$\bar{Y} = \Phi(\bar{x}, Q, t), \quad (3.1)$$

где t – время; Φ – совокупность математических процедур. Алгебраические модели получаются при отсутствии производных и времени. Удобна для построения графиков.

$$\bar{Y} = F(\bar{x}, Q)$$

Является предпочтительной формой ММ.

В зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технической системы различают три основных иерархических уровня: верхний или метауровень; средний или макроуровень; нижний или микроуровень.

Метауровень соответствует начальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, разработка технического предложения. Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов и искусственного интеллекта.

Для моделирования машин НТТС иерархический уровень метауровня имеет ограниченное применение.

На *макроуровне* объект моделирования – машину НТТС – рассматривают как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Машину разделяют на отдельные конструктивные элементы: рабочие органы, приводы, ёмкости, транспортёры, ходовую часть, трансмиссию и т.п. Математические модели макроуровня тпких элементов представляют собой системы обыкновенных диф-

ференциальных уравнений. Эти модели используют при определении параметров функциональных элементов и всей машины. Макроуровень развивался в течении долгого времени и стал основным.

На *микроуровне* объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами или неделимые элементы технической системы, называемые *базовыми элементами*. Примерами таких элементов являются рамы, панели, корпусные детали, валы, диски фрикционных механизмов и др. При этом каждый базовый элемент рассматривается как распределённая система, состоящая из множества однотипных элементов одной и той же физической природы, взаимодействующих между собой. Проектирование их требует анализа напряженного состояния. Для описания процессов функционирования таких элементов используют дифференциальные уравнения в частных производных. К математическому моделированию отдельных машин этот иерархический уровень неприменим.

Таким образом, для моделирования машин возделывания больше всего применим иерархический уровень макроуровня. Его в дальнейшем и будем рассматривать.

Модели на макроуровне многочисленны. используют следующие виды математических моделей: детерминированные и вероятностные, теоретические и экспериментальные факторные, линейные и нелинейные, динамические и статические, непрерывные и дискретные, функциональные и структурные.

По форме представления математических моделей различают инвариантную, алгоритмическую, аналитическую и графическую модели объекта проектирования.

В *инвариантной форме* математическая модель представляется системой уравнений (дифференциальных, алгебраических), вне связи с методом решения этих уравнений.

В *алгоритмической форме* соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма — последовательности вычислений.

Аналитическая модель представляет собой явные зависимости искомых переменных от заданных величин (обычно зависимости выходных параметров объекта от внутренних и внешних параметров). Такие модели получают на основе физических законов, либо в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений, используя табличные интегралы. К ним относятся также регрессионные модели, получаемые на основе результатов эксперимента.

Графическая модель представляется в виде графов, эквивалентных схем, динамических моделей, диаграмм и т. п. Для использования графических моделей должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической и компонентов инвариантной математических моделей. Среди алгоритмических моделей выделяют *имитационные модели*, предназначенные для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте при функционировании его под воздействием различных факторов внешней среды.

По способам получения функциональные математические модели делятся на теоретические и экспериментальные.

Теоретические модели получают на основе описания физических процессов функционирования объекта, а *экспериментальные* — на основе изучения поведения объекта во внешней среде, рассматривая его как кибернетический "черный ящик". Эксперименты при этом могут быть *физические* (на техническом объекте или его физической модели) или *вычислительные* (на теоретической математической модели).

При построении теоретических моделей используют физический и формальный подходы.

Физический подход сводится к непосредственному применению физических законов для описания объектов, например, законов Ньютона, Гука, Кирхгофа, Фурье и др.

Формальный подход использует общие математические принципы и применяется при построении как теоретических, так и экспериментальных моделей.

Построение теоретических формальных моделей основано на вариационном принципе Гамильтона—Остроградского. Для динамических систем с сосредоточенными параметрами вариационный принцип приводит к уравнениям Лагранжа второго рода.

Экспериментальные модели — формальные. Они не учитывают всего комплекса физических свойств элементов исследуемой технической системы, а лишь устанавливают обнаруживаемую в *процессе* эксперимента связь между факторами. Такие модели дают адекватное описание исследуемых процессов лишь в ограниченной области факторного пространства, в которой осуществлялось варьирование факторов. Экспериментальные факторные модели не могут быть приняты в качестве физических законов. Вместе с тем методы, применяемые для построения этих моделей (метод статистических испытаний, регрессионный анализ, корреляционный анализ, планирование эксперимента и др.), широко используются при проверке научных гипотез.

Функциональные математические модели могут быть линейные и нелинейные.

Линейные модели содержат только линейные функции фазовых переменных и их производных. Характеристики многих элементов реальных технических объектов нелинейные. Математические модели таких объектов включают нелинейные функции фазовых переменных и (или) их производных и относятся к *нелинейным*.

С целью упрощения задач проектирования на высших иерархических уровнях используют простые линейные модели. Такой подход используется для построения математических моделей на метауровне. В моделях макроуровня следует учитывать нелинейные свойства технического объекта.

Если при моделировании учитываются инерционные свойства технического объекта и (или) изменение во времени параметров объекта или внешней среды, то модель называют *динамической*. В противном случае модель *статическая*. Выбор динамической или статической модели определяется режимом работы технического объекта. Большинство задач функционального проектирования требует использования динамических моделей.

Математическое представление динамической модели в общем случае может быть выражено системой дифференциальных уравнений, а статической — системой алгебраических уравнений. Динамическая модель может также представлять собой интегральные уравнения, передаточные функции.

Воздействия внешней среды на машины носят случайный характер и описываются случайными функциями. Все процессы, происходящие в объекте, также случайны и могут быть оценены вероятностными и статистическими характеристиками: вероятностью выполнения тех или иных требований, корреляционной функцией, спектральной плотностью, математическим ожиданием, дисперсией и др. Анализ функционирования объекта в этом случае требует построения *вероятностной математической модели*. Однако такая модель весьма сложная и ее использование при проектировании требует больших затрат машинного времени. Поэтому ее применяют чаще на заключительном этапе проектирования.

Большинство проектных процедур выполняется на детерминированных моделях. *Детерминированная математическая модель* характеризуется взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие. В вычислительном эксперименте при проектиро-

вании обычно задают некоторые стандартные типовые воздействия на объект: *ступенчатыми, импульсными, гармоническими, кусочно-линейными, экспоненциальным*.и и др. Их называют *тестовыми воздействиями*.

Математические модели используются при проектировании технических объектов по-разному, в зависимости от его стадии и этапа. В зависимости от степени абстрагирования различают три основных иерархических уровня моделирования: верхний или метауровень; средний или макроуровень; нижний или микроуровень.

На *микроуровне* объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Морфологических представлений не имеет. Функциональные ММ на микроуровне имеют вид дифференциальных уравнений в частных производных. По ним проводится прочностной расчёт деталей, определение напряженно- деформированного состояния, температурных полей, давлений и т.п.

На *макроуровне* объект проектирования рассматривают как систему с сосредоточенными параметрами. ММ макроуровня представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используют в расчётных задачах при определении конструктивно-технологических параметров объекта и их оптимизации.

Метауровень соответствует начальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции, технического решения или технического предложения и при решении задач структурного синтеза, не требующие детализации. Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов. Функциональные модели здесь имеют ограниченное применение, поскольку исходные данные для них отсутствуют.

Инженерное прикладное математическое моделирование должны начинаться с разработки представлений о структуре объекта, а заканчиваться получением математической зависимости между факторами и результатом.

Основная доля инженерных расчётов приходится на ММ функционирования. Их широко используют на всех иерархических уровнях, стадиях и этапах проектирования. На метауровне функциональные ММ позволяют решать задачи прогнозирования, на макроуровне — расчёты и оптимизацию параметров ТО, на микроуровне — расчёты базовых элементов и несущих конструкций.

По способам получения функциональные ММ делятся на теоретические и экспериментальные.

Теоретические ММ получают путём математического описания процессов функционирования объекта, а *экспериментальные* — на основе изучения поведения объекта, рассматривая его как "чёрный ящик".

Экспериментальные модели устанавливают связь между варьируемыми факторами формально. Они не могут быть приняты в качестве физических законов. Эксперименты при этом могут быть *физические* (на техническом объекте или его физической модели) или *вычислительные* (на компьютерной математической модели).

По форме представления применяемых в ММ математических процедур различают инвариантные, алгоритмические, аналитические и имитационные модели объекта проектирования.

В *инвариантной форме* ММ представляется системой дифференциальных или интегральных уравнений, не имеющих однозначного ответа или решения.

В *алгоритмической форме* соотношения модели записаны в виде алгоритма — последовательности вычислений; используются при создании компьютерных программ.

Имитационные модели, предназначены для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте.

Аналитическая модель представляет собой явные символьные зависимости искоемых переменных от исходных величин. Такие модели получают в результате решения модели. Они удобны и всегда предпочтительны.

По характеру зависимостей ММ могут быть линейные и нелинейные.

Линейные модели содержат только линейные функции фазовых переменных и их производных.

Нелинейные модели содержат хотя бы одну нелинейную функцию фазовых переменных или их производных.

Если при моделировании учитываются инерционные свойства технического объекта и (или) изменение во времени параметров объекта или внешней среды, то модель называют *динамической*. В противном случае модель *статическая*.

По степени предсказуемости решения (результата) различают детерминированные и стохастические ММ.

Детерминированная ММ характеризуется взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие.

Вероятностной ММ считается модель, в которой присутствуют случайные функции. При случайных изменениях факторов (сигналов) модель считается статистической. Если в модели случайными являются свойства элементов, то модель считается стохастической.

По назначению различают ММ *описательные* (дискрипционные) и *оптимизационные* – для оптимизации параметров модели по какому-либо критерию.

По характеру представления изменений параметров различают модели: непрерывные, когда параметры изменяются непрерывно, и дискретные, когда состояние и параметры объекта являются дискретными величинами.

3.4. Требования к математическим моделям

К математическим моделям предъявляются противоречивые требования: адекватности, точности, экономичности, универсальности. Эти требования противоречивы, поэтому обычно для каждого элемента используют свою модель.

Адекватность – степень совпадения поведения модели и объекта при изменении воздействий или параметров. Главный показатель качества и пригодности модели.

Точность ММ оценивается степенью совпадения предсказанных в процессе вычислительного эксперимента на модели значений выходных параметров с истинными их значениями.

Точность оценивается степенью совпадения предсказанных в процессе вычислительного эксперимента на модели значений выходных параметров с истинными их значениями. Погрешность модели s по всей совокупности m учитываемых выходных параметров оценивается одной из норм вектора $\vec{\varepsilon}_M = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$:

$$\varepsilon = \|\vec{\varepsilon}_M\| = \max|\varepsilon_j|, j \in [1:m], \quad (1.1)$$

или
$$\varepsilon = \|\vec{\varepsilon}_M\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m \varepsilon_j^2},$$

(1.2)

где ε_j - относительная погрешность модели по j -му выходному параметру:

$$\varepsilon_j = (\tilde{y}_j - y_j) / y_j;$$

где \tilde{y}_j — значение j -го выходного параметра, полученное в результате вычислительного эксперимента на принятой математической модели;

y_j — значение того же параметра, полученное при испытаниях технического объекта или в вычислительном эксперименте на математической модели, точность которой проверена и отвечает принятой норме.

Универсальность ММ – возможность использовать его при анализе других процессов и объектов.

Экономичность ММ – характеризуется затратами времени для её реализации и использования.

Математическая модель должна быть также простой и быстродействующей.

Требования к модели противоречивы; на практике необходимо придерживаться разумного компромисса всех требований модели, кроме адекватности.

3.5. Моделирование технических объектов на макроуровне

3.5.1. Принципы моделирования на макроуровне

В отличие от систем с распределёнными параметрами, не имеющими понятия структуры, объекты на макроуровне рассматриваются как сложные системы, состоящие из совокупности взаимодействующих элементов, т.е. объекты должны иметь структуру.

Эти модели получают структуризацией (дискретизацией) распределённых систем в пространстве. Система представляется совокупностью дискретных элементов с постоянными параметрами. Такую систему называют системой с сосредоточенными параметрами.

Принято считать, что каждый элемент достаточно наделять 3 свойствами: инерционными, упругими, диссипативными. В ряде случаев добавляют фрикционные и трансформаторные элементы.

Основанием для дискретизации является наличие дискретного спектра собственных частот колебаний системы в рабочем диапазоне (для механических систем — до 300 Гц).

Назначение несуществующей структуры основано на принципах системного подхода. Переход пока слабо формализован, основан на интуиции и опыте.

Требования к результатам структуризации.

Выделение дискретных элементов должно

соответствовать физическим законам и не нарушать принципы функционирования объекта моделирования.

Получаемая модель с сосредоточенными параметрами должна отображать не только статические, но и динамические свойства объекта. Это означает, что выделенные элементы в общем случае должны обладать инерционными, упругими и диссипативными свойствами.

Дискретные элементы должны быть по возможности простыми (простой элемент наделен только одним из упомянутых физических свойств, а сложный — более чем одним).

Элементы, отображающие инерционные свойства, должны содержать сосредоточенную массу.

Обозначения и размерности элементов для систем разной физической природы приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Система Тип элемента	Механическая		Гидравлическая	Тепловая	Электрическая
	постоятельная	переменная			
Инерционный	м г	кг г·м ²	м г к г/м ⁴	ст Д ж,К	Л Г н
Диссипативный	μ с/м	μ Нмс/рад д	μ г Н с/м ⁵	μт Дж,(сК)	Р О м
Упругий	с Н /м	с Нм/рад	сг Н /м ⁵	-	С Ф

ст - теплоемкость, μт - коэффициент теплового сопротивления; Л - индуктивность; Р - сопротивление; С - ёмкость.

Для выделения дискретных элементов из сплошной среды практика использует различные методы: метод функционально законченных элементов, методы сеток, и метод сосредоточенных масс.

Метод функционально законченных элементов основан на

выделении типовых элементов технического объекта, завершённых в конструктивном отношении и выполняющих определённые функции (например, в гидромеханической системе — участок гидромагистральной, золотниковый клапан, дроссель, обратный клапан, насос, гидромотор и др.). Имея библиотеку математических моделей функционально законченных элементов, можно составить полную математическую модель.

Недостаток метода — трудность применения к сплошным средам и наличие сложных элементов, обладающими несколькими физическими свойствами.

Методы сеток сводятся к набрасыванию на объект какой-либо сетки как в МКР и МКЭ. Отличие в том, что в узлах сетки размещаются сосредоточенные массы. Недостаток метода — трудности применения его для механизмов с движущимися деталями. Элементы также могут быть сложными.

Метод сосредоточенных масс. Этот метод применим для технических объектов, у которых масса распределена в пространстве неравномерно и система имеет дискретный спектр собственных частот. Например, в приводе СХМ масса вращающихся деталей в основном сосредоточена в шкивах, крупных шестернях, барабанах, роторах, имеющих большие моменты инерции, а соединяющие их детали (валы, муфты и др.) имеют малые радиальные размеры и массу, но обладают упругими свойствами. При построении макромоделей массы крупных частей объекта отображают эквивалентными сосредоточенными массами, а элементы с малыми массами отображают невесомыми связями.

Количество выделяемых сосредоточенных масс в динамической модели равно числу ее степеней свободы. Связи сосредоточенных масс осуществляется посредством упругих, диссипативных, фрикционных и трансформаторных связей элементов. В методе сосредоточенных масс все элементы простые, каждый из них наделен только одним физическим свойством.

Независимо от применённого метода в результате структуризации распределённых систем появляется структура, которая может представляться графически.

Абстрагированное графическое отображение состава элементов технического объекта и характеристик их взаимодействия с внешней средой называется структурной (компонентной) моделью. Для обозначения элементов в ней применяют стандартные графические изображения, используемые в кинематических и принципиальных схемах.

Таким образом, модель макроуровня имеет обязательно

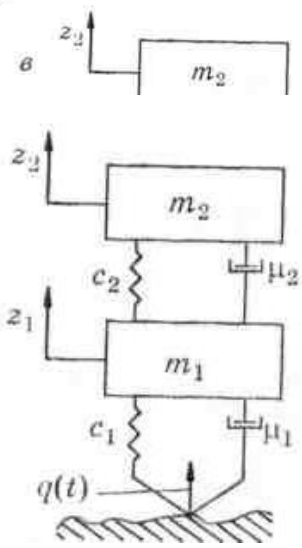
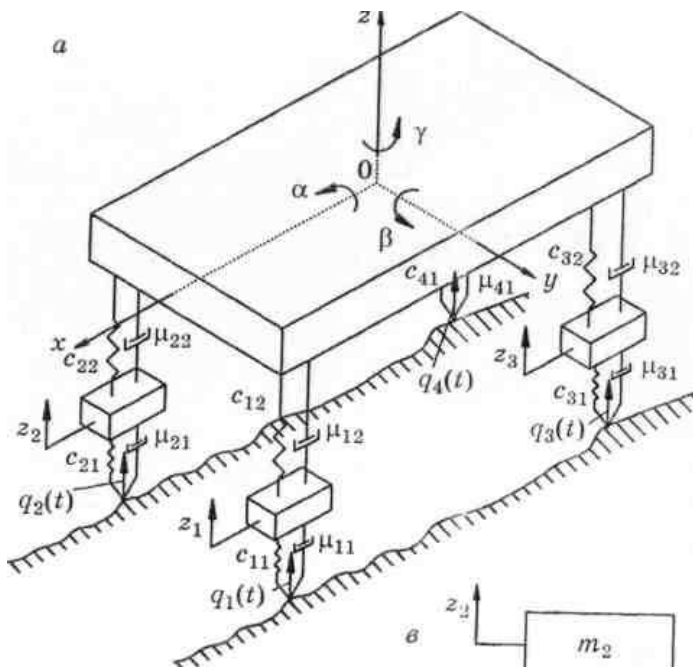
структуру из компонентов: элементов с сосредоточенными параметрами и связей между ними. Разработка структурной модели – задача творческая.

Пример 3.1. Используя метод сосредоточенных масс, построить структурную модель для анализа плавности хода мобильной машины (транспортно-технологического средства, сельхозмашины, автомобиля).

В связи с неровностями дороги движение сельхозмашины сопровождается колебаниями кузова. Для того чтобы их уменьшить, применяют подвеску колёс, содержащую упругие элементы и амортизаторы. Упругими и диссипативными свойствами обладают и пневматические шины колес. Поддрессоренная масса кузова и массы колес и мостов образуют многомассовую колебательную систему. Внешние воздействия на эту систему создаются неровностями микро- и макропрофиля дороги. Эти воздействия описываются случайными функциями $q(t)$.

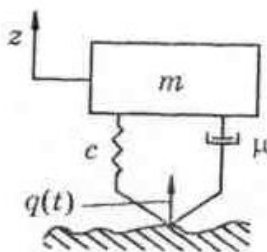
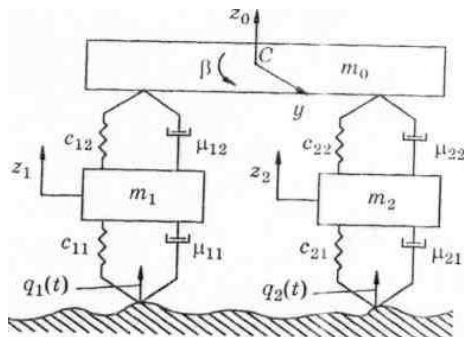
Кузов можно рассматривать как твердое тело с шестью степенями свободы, совершающее смещения вдоль трех координатных осей, проведенных через его центр масс, и вращения относительно этих же осей (рис. 3.8, а). При независимой подвеске колес обычно учитывают только их вертикальные перемещения и каждое колесо имеет одну степень свободы. Тогда структурная модель колебательной системы автомобиля с системой виброзащиты имеет 10 степеней свободы.

Рассмотренная структурная модель довольно сложна и ее использование при расчётах требует больших затрат времени. Поэтому на ранних этапах проектирования применяют упрощения.



a

б



б

г

Рис. 3.8. Структурные схемы мобильной машины

Если исключить из рассмотрения поперечные смещения, то приходим к структурной модели плоских колебаний (рис. 3.8, б), в которой учитываются вертикальные колебания кузова z_0 , двух мостов z_1, z_2 , угловые колебания β вокруг оси y (тангаж). Колебательная система имеет четыре степени свободы и ее состояние определяется координатами z_0, β, z_1, z_2 .

Если при анализе плавности хода ограничиться только вертикальными смещениями центра масс кузова и колёс, то возможно использование двухмассовой структурной модели (рис. 3.8, в). Сосредоточенные массы m_1 и m_2 могут перемещаться только вертикально вдоль осей соответственно z_1 и z_2 . Следовательно, система имеет две степени свободы.

Одномассовая динамическая модель (рис. 3.1, г) описывает только вертикальные колебания кузова и не учитывает колебаний колес. Парциальная частота колебаний колес обычно в 6...10 раз выше парциальной частоты колебаний кузова. Они могут вызывать вибрации приборов и механизмов машины. Поэтому такое упрощение даёт потерю важной информации и неприемлемо.

Таким образом, в зависимости от степени абстрагирования

при описании физических свойств технического объекта можно получить структурные модели различной сложности.

3.5.2. Компонентные и топологические уравнения

Состояние сосредоточенных масс определяется фазовыми координатами типа потока I . Они включают координаты и их производные по времени. Взаимодействие элементов модели отображается переменными типа потенциала U . Названия и размерности фазовых переменных для систем разной физической природы приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Названия и размерности фазовых переменных

№	Система	Фазовая переменная	
		Типа потенциала	Типа потока
1	Механическая поступательная	Сила F , Н	Скорость V , м/с
2	Механическая вращательная	Вращающий момент M , Нм	Угловая скорость ω , рад/с
3	Гидравлическая	Давление p ,	Расход Q ,
4	Тепловая	Тепловой поток Φ , Вт (Дж/с)	Температура T , К
5	Электрическая	Напряжение U , В	Ток I , А

Фазовые координаты типа потока выбирают в качестве обобщенных координат. Количество независимых обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы. Переменные типа потенциала всегда принадлежат к зависимым координатам и выражаются через переменные типа потока.

Ограничения на изменения геометрических координат и скоростей движения сосредоточенных масс динамической системы называют связями. Различают связи: геометрические (позиционные) и кинематические; удерживающие и недерживающие (вир-

туальные); стационарные и нестационарные; голономные и неголономные, линейные и нелинейные. Математическое описание ограничений дается уравнениями связей. Уравнения виртуальных и неголономных связей включаются в состав математической модели.

Состояние простого элемента характеризуется одной фазовой переменной типа потока I и одной переменной типа потенциала U . Математическую зависимость $U=f(I)$ между фазовыми переменными называют компонентным уравнением.

Компонентные уравнения, полученные на основе физических законов, имеют вид:

$$\text{для инерционного элемента } U_I = k_I dI_I / dt ; \quad (3.60)$$

$$\text{для диссипативного элемента } U_\delta = k_\delta I_\delta ; \quad (3.61)$$

$$\text{для упругого элемента } U_Y = k_Y \int I_Y dt . \quad (3.62)$$

Индексы при фазовых переменных I и U указывают на принадлежность их соответствующим элементам.

Для получения полной математической модели ТС все компонентные уравнения элементов дополняются топологическими уравнениями, выражающими условия равновесия и непрерывности фазовых переменных.

Условия равновесия записываются для фазовых переменных типа потенциала

$$\sum_i U_i = 0 , \quad (3.63)$$

Условия непрерывности записываются для фазовых переменных типа потока

$$\sum_k I_k = 0 . \quad (3.64)$$

Форма компонентных и топологических уравнений одинакова для систем различной физической природы. Эти аналогии - проявление общих законов мироздания, пока не сформулированных.

Для вывода компонентных и топологических уравнений систем различной физической природы используются соответствующие физические законы.

Компонентные уравнения механической системы используют 2-ой закон Ньютона, уравнения Ньютона для вязких сред, закон Гука.

Компонентные уравнения гидравлической системы используют уравнение Эйлера, Навье-Стокса и Гука.

Компонентные уравнения тепловой системы используют уравнения Эйлера, закон Фурье.

В таблице 3.3 приводятся компонентные уравнения для систем разной физической природы.

Таблица 3.3. Компонентные уравнения

№	Система	Тип элемента		
		Инерционный	Диссипативный	Упругий
1	Механическая поступательная	$F_u = m \, dV/dt$	$F_d = \mu \, V$	$F_y = c_f \, Vdt$
2	Механическая вращательная	$M_u = J \, d\omega/dt$	$M_d = \mu \, \omega$	$M_y = c_f \, \omega dt$
3	Гидравлическая	$P_u = m_r \, dQ/dt$	$P_d = \mu_r \, a$	$P_y = c_r \, f \, Qdt$
4	Тепловая	$\Phi_u = c_T \, dT/dt$	$\Phi_d = \mu_T \, T$	отсутствует
5	Электрическая	$U_u = L \, dI/dt$	$U_d = R \, I$	$U_y = C^{-1} \, I \, dt$

Топологические уравнения систем разной физической природы и название соответствующего закона приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4. Топологические уравнения

№	Система	Топологическое уравнение	
		равновесия	непрерывности

1	Механическая поступательная	$\sum_i \vec{F}_i = 0$ Принцип Даламбера	$\sum_k \vec{v}_k = 0$ Правило сложения скоростей
2	Механическая вращательная	$\sum_i \vec{M}_i = 0$ Принцип Даламбера	$\sum_k \vec{\omega}_k = 0$ Правило сложения скоростей
3	Гидравлическая	$\sum P_i = 0$ Условие равновесия давлений	$\sum Q_i = 0$ Условие непрерывности потока жидкости
4	Тепловая	$\sum T_i = 0$ Условие равновесия температур в контактах тел	$\sum Q_i = 0$ Условие непрерывности теплового потока
5	Электрическая	$\sum U_i = 0$ 2-ой закон Кирхгофа	$\sum I_i = 0$ 1-ый закон Кирхгофа

Топологические уравнения механической системы. Первое топологическое уравнение является уравнением равновесия. Оно выражает принцип Даламбера: геометрическая сумма всех сил, приложенных к твердому телу, включая силу инерции, равна нулю: Второе топологическое уравнение определяет условие непрерывности фазовых координат типа потока. Оно выражает принцип сложения скоростей при сложном движении твердого тела: геометрическая сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю:

Топологические уравнения гидравлической системы :

Первое уравнение выражает условие равновесия потенциалов, действующих на сосредоточенные массы, а второе — условие непрерывности потоков жидкости.

Топологические уравнения тепловой системы имеют вид:

Первое уравнение выражает условие равновесия потенциалов на поверхностях контакта дискретных элементов, а второе — условие непрерывности тепловых потоков. Упругими свойствами тепловая система не обладает. Это следует из того, что тепловая энергия может передаваться только от более нагретых дискретных элементов к менее нагретым. Тепловой поток в твердом теле всегда направлен противоположно градиенту температуры.

Топологические уравнения электрической системы:

Первое уравнение выражает первый закон Кирхгофа. Он формулируется так: алгебраическая сумма токов для любого узла электрической схемы равна нулю.

Второе уравнение выражает второй закон Кирхгофа. Оно составляется для замкнутых контуров электрической схемы.

3.5.3. Построение теоретических моделей НТТС на макроуровне

Теоретической в литературе называют символьную математическую модель полученной теоретическими преобразованиями расчётной схемы.

При построении теоретических моделей используется два подхода: физический и формальный. Физический подход основан на непосредственном применении физических законов, а формальный использует общие математические принципы.

Исходным пунктом для обоих подходов является структурная модель объекта (например, двухмассовая структурная схема транспортного средства на рис.).

3.5.3.1. Физический подход к построению теоретической модели . Используют следующие способы создания модели: табличный, графический, матричный, узловый метод, метод переменных состояния.

3.5.3.1.1. *Табличный метод* использует исходные компонентные и топологические уравнения непосредственно, без каких-либо преобразований (см. пример 4.1).

Теоретическая модель технического объекта формируется на основе компонентных и топологических уравнений ТС. Однако математическая модель при этом получается высокого порядка и имеет избыточное число фазовых координат. Система уравнений оказывается переопределенной. Количество уравнений значительно превышает число степеней свободы системы. Это приводит к неустойчивости вычислительных алгоритмов при решении полученной системы уравнений. Поэтому этот метод применим только для простых систем.

3.5.3.1.2. *Графические представления.* В инженерной практике получили распространение графические формы в виде графов и эквивалентных схем.

Эквивалентная схема – графическое изображение состава и взаимодействия элементов с помощью стандартизированных условных обозначений (рис. 3.9).

Эквивалентная схема отображает топологию и компонентный состав модели (см. пример на рис. 3.11, б). Ветви эквивалентной схемы соответствуют компонентам математической модели: инерционных, упругих и диссипативных элементов модели и источников внешних воздействий. Узлы эквивалентной схемы соответствуют узлам дискретизации непрерывных объектов в пространстве при переходе от микроуровня на макроуровень. Узлы дискретизации совпадают с сосредоточенными массами.

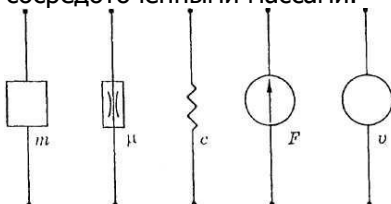


Рис. 3.9. Обозначение компонентов эквивалентной схемы: а — инерционной; б — диссипативной; в — упругой; г — источника потенциала; д — источника потока

Построение эквивалентной схемы начинают с инерционных ветвей, которые соединяют узлы с базовым узлом, соответствующим инерциальной системе отсчета фазовых координат. Ветви упругих и диссипативных компонентов соединяют между собой взаимодействующие узлы в соответствии с динамической моделью.

Обозначения параметров элементов и фазовых переменных соответствуют обозначениям параметров компонентов.

Эквивалентная схема имеет хорошую наглядность, но не имеет аналитического описания. Её применяют обычно лишь при предметном моделировании, когда необходимо иметь схему замещения на элементах иной физической природы.

Граф представляет графическую модель системы, отображающую ее топологию. В отличие от эквивалентной схемы компоненты не изображаются и условные их изображения не применяются. Граф представляет собой совокупность узлов (вершин) и соединяющих их ветвей (ребер) (рис. 3.10). Узлы графа обозначают точками, а ветви линиями.

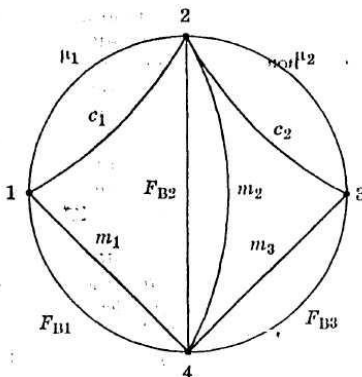


Рис. 3.10. Граф механической системы на рис. 3.11

Узлам присваивают номера сосредоточенных масс, а ветвям дают обозначения параметров элементов модели или обозначения фазовых переменных для источников внешних воздействий. Один из узлов графа отображает инерциальную систему отсчета фазовых координат. Его называют базовым узлом (или базой) и обозначается нулём.

Граф является аналогом эквивалентной схемы, но его изображение значительно проще.

Орграф (ориентированный граф) – граф, у которого указаны направления передачи сигналов в ветвях графа. Направления сигналов в ветвях графа изображают стрелками.

В ветвях источников внешних воздействий сигналы направляют от базы к узлу, если энергия подводится к узлу. При отводе энергии на преодоление сопротивлений направление сигнала в ветви источника — от узла к базе. Во всех ветвях инерционных компонентов направления сигналов от узлов к базе. Такое направление характеризует затраты энергии источников на увеличение кинетической энергии инерционных элементов. В любых других ветвях, соединяющих узлы с базой, кроме ветвей источников, сигналы всегда направлены к базе.

В случае, когда нельзя однозначно указать направление передачи энергии в ветвях графа, их задают произвольно, а истинное направление определяют по знакам компонентов решения.

Граф имеет и математическое описание: $\Gamma = (U, V, I)$, где, U — множество узлов; V — множество ветвей; I — инцидентор — указатель способа соединения ветвей.

Пример 4.1. Составить графические формы математиче-

ских моделей для анализа колебаний кузова автомобиля, обусловленных неровностями дороги.

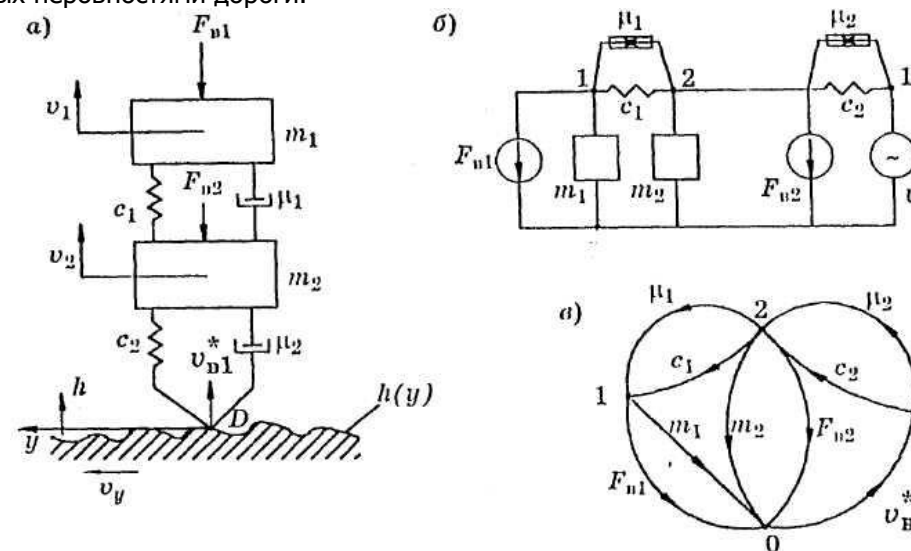


Рис. 3.11. Динамическая модель (а), эквивалентная схема (б) и оргграф (в) мобильной машины

На рис. 3.11, а приведена одна из возможных динамических моделей (см. рис. 3.8, в). Твёрдые тела с массами m_1 и m_2 (кузов и колеса автомобиля) совершают поступательные движения. Фазовые переменные типа потока в механической поступательной системе — скорости V , а типа потенциала — силы F . На систему действуют источники потенциалов F_{v1} и F_{v2} и источник потока $V_{v1}^*(t)$ от кинематического воздействия неровностей дороги.

Потенциалы внешних воздействий F_{v1} и F_{v2} представляют собой силы тяжести соответственно кузова и колес автомобиля. При определении усилий в упругих элементах их необходимо учитывать.

Структурная схема имеет 7 компонентов: две сосредоточенные массы m_1 и m_2 , четыре элемента связи c_1, c_2, μ_1, μ_2 и один безмассовый элемент нагружения в точке D . Система компонентных уравнений:

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= F_1 + R_{c1} + R_{\mu 1} ; \\
 R_{c1} &= -c_1(z_1 - z_2) ; \\
 R_{\mu 1} &= -\mu_1 (v_1 - v_2) ; \\
 m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= F_2 - R_{c1} + R_{c2} - R_{\mu 1} + R_{\mu 2} ; \\
 R_{c2} &= -c_2(z_2 - h(y)) ;
 \end{aligned}
 \tag{3.65}$$

$$R_{\mu 2} = -\mu_2 (v_2 - v^*);$$

$$V_{v1}^*(t) = V_y(t)[dh(y)/dy],$$

где $V_y(t)$ — скорость движения автомобиля вдоль оси y ;

$h(y)$ — функция микропрофиля поверхности дороги.

R - реакции соответствующих связей;

z_1, z_2 - вертикальные смещения сосредоточенных масс;

v_1, v_2 - вертикальные скорости сосредоточенных масс.

Система уравнений составляет математическую модель табличного метода. Неизвестными являются два неизвестных z_1, z_2 — вертикальные смещения двух сосредоточенных масс, что соответствует числу обобщённых координат и числу степеней свободы. Число уравнений 7. Система переопределена и решение будет неустойчиво.

На рис. 3.11, б построена эквивалентная схема, а на рис. 3.11, в орграф рассматриваемой системы. Наличие источников потока приводит к возникновению дополнительных узлов в эквивалентной схеме и орграфе. Узлы 1 и 2 отображают сосредоточенные массы, а узел 1^* — внешнюю среду, генерирующую воздействие тина потока $V_{v1}^*(t)$, передаваемое на упругий и диссипативный элементы C_2 и μ_2 колес автомобиля. Узлы источников потока имеют свою нумерацию и обозначаются звездочкой.

Число узлов орграфа n (за вычетом, базового) равно числу сосредоточенных масс.

3.5.3.1.3. Матричные представления. Матричная форма представления математической модели основана на представлении орграфа в виде матрицы инцидентий размерности $\alpha * \beta$, где α — число строк, равное числу узлов орграфа; β — число столбцов, равное числу ветвей орграфа. Каждому узлу орграфа, за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви — столбец матрицы. Единицами в матрице отмечается наличие соединений между узлами и ветвями орграфа, а нулями — их отсутствие. Направления сигналов в ветвях учитываются знаками единиц: знак минус, если сигнал направлен от узла, знак плюс - если к узлу.

В табл. 4.2 приведена матрица инцидентий для объекта, модель которого представлена на рис. 3.11, в.

При составлении матрицы инцидентий для объекта с источниками внешних воздействий типа потока $V_{v1}^*(t)$ в нее включаются не только узлы, отображающие сосредоточенные массы, но и узлы источников потока, отмечаемые на орграфе и в матрице звездочкой и имеющие слою нумерацию. Поэтому источники потока в матрице инцидентий формально замещаются источниками реактивных потенциалов F_{vj}^* .

Таблица 3.5. Матрица инцидентий для модели 3.11

злы	Ветви									
	инерционная			диссипативная		упругие		воздействия потенциалов		
	1	2	1*	1	2	1	2	1	2	1*
	1							1		
		1		1		1			1	
			1		1		1			
од-матрицы	$A_{и}$			$A_{д}$		$A_{у}$		$A_{в}$		

Матрица инцидентий обозначается $A = (a_{ij})$, $i = 1, a; j = 1, \beta$, где a — число узлов графа, за исключением базового; β — суммарное число ветвей орграфа — инерционных, диссипативных, упругих и источников внешних воздействий.

Матрицу инцидентии A можно представить состоящей из подматриц инерционных $A_{и}$, диссипативных $A_{д}$, упругих $A_{у}$ ветвей и подматрицы ветвей источников потенциалов $A_{в}$:

$$A = [A_{и}, A_{д}, A_{у}, A_{в}] \quad (3.66)$$

Матричное представление орграфа теряет в наглядности, но является более удобной формой для общения с компьютером, чем орграф.

3.5.3.1.4. Узловой метод формирования инвариантной модели. Узловой метод основан на совместном использовании компонентных и топологических уравнений и матрицы инцидентии для каждого узла орграфа системы.

Компонентные и топологические уравнения для механической поступательной системы в новых обозначениях:

уравнения инерционных элементов

$$\bar{F}_И = m(d\bar{v}_И / dt); \quad (3.67)$$

уравнения диссипативных элементов

$$\bar{F} = \mu\bar{v}_L; \quad (3.68)$$

уравнения упругих элементов

$$\bar{F}_Y = c \int \bar{v}_Y dt, \quad (3.69)$$

где $F_И, F_Д, F_Y$ — векторы потенциалов соответственно инерционных, диссипативных и упругих элементов; m, μ, c — диагональные матрицы параметров этих же элементов; $V_И, V_Д, V_Y$ — векторы фазовых переменных типа потока соответствующих элементов.

Топологические уравнения механической поступательной системы:

уравнение равновесия потенциалов ветвей орграфа, инцидентных i -му узлу:

$$\left(\sum_j \bar{F}_j \right)_i = 0, \quad i=1, \dots, n; \quad (3.70)$$

уравнение непрерывности фазовых переменных типа потока l -й ветви орграфа:

$$\left(\sum_k \bar{v}_k \right)_l = 0, \quad l=1, \dots, L \quad (3.71)$$

где n — число узлов орграфа, за исключением базового; L — число ветвей.

Используя матрицу инциденций, топологические уравнения можно записать в компактной форме

$$A\bar{F} = 0 \quad (3.72)$$

$$\bar{v}_B + A_B^T \bar{v} = 0, \quad v = и, д, у \quad (3.73)$$

где A — матрица инциденций; A^T — транспонированная матрица A ; F — вектор потенциалов ветвей; V_B, V — векторы потоковых переменных соответственно ветвей и узлов графа.

Отличительной чертой узлового метода является использование в качестве базисных координат узловых потоковых переменных v , характеризующих состояния узлов графа;

Уравнение равновесия потенциалов ветвей в узлах графа (4.11), выражает известный принцип Даламбера.

Вектор потенциалов системы F представим состоящим из подвекторов потенциалов компонентов - инерционных F_i , диссипативных F_d , упругих, F_y и источников внешних воздействий.

$$\bar{F}^T = [\bar{F}_i, \bar{F}_d, \bar{F}_y, \bar{F}_B] \quad (3.74)$$

Аналогично можно представить матрицу инцидентий состоящей из соответствующих подматриц:

$$A = [A_i, A_d, A_y, A_B] \quad (3.75)$$

Используя разложения (3.74) и (3.75), приведем уравнение равновесия (3.72) к виду:

$$A_i \bar{F}_i + A_d \bar{F}_d + A_y \bar{F}_y + A_B \bar{F}_B = 0 \quad (3.76)$$

Подставим значения потенциалов ветвей из уравнений (3.67) — (3.69) в равенство (3.76):

$$A_i m (d\bar{v}_i / dt) + A_d \mu \bar{v}_d + A_y c \int \bar{v}_y dt + A_B \bar{F}_B = 0 \quad (3.77)$$

Учитывая топологическое уравнение (3.73), фазовые переменные V_i, V_d, V_y можно выразить через узловые потоковые переменные V :

$$\bar{v}_B = -A_B^T \bar{v} \quad v = i, d, y \quad (3.78)$$

В результате получаем теоретическую модель узлового метода в виде системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$A_i m A_i^T (d\bar{v}_i / dt) + A_d \mu A_d^T \bar{v}_d + A_y c A_y^T \int \bar{v}_y dt = A_B \bar{F}_B \quad (3.79)$$

Достоинство узлового метода – возможность получения полноценной теоретической модели, недостаток - вид уравнений неудобен для анализа процесса функционирования объекта, требует значительной затраты времени на матричные вычисления в процессе формирования модели.

Узловой метод хорошо приспособлен для моделирования электрических цепей, гидравлических и тепловых систем. Для механических систем он применим лишь в случае представления объектов в виде системы материальных точек или твердых тел, совершающих простые движения. Построить математическую модель системы твердых тел при сложном их движении узловым методом нельзя. Это также относится к объектам с неголономными связями, с виртуальными связями и с переменной структурой. Такими свойствами обладают многие механические и гидромеханические системы. Кроме того узловой метод не может применяться для динамических систем, содержащих трансформаторные и фрикционные

элементы.

Предпочтительной формой теоретической модели при использовании компьютерных численных методов является система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши.

3.5.3.1.5. *Метод переменных состояния.* Метод ориентирован на получение математической модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши.

Преобразование интегро-дифференциальных уравнений (3.79) к нормальной форме осуществляется путем расширения координатного базиса добавлением в него функции потенциалов упругих компонентов:

$$\bar{F}_y = -c * A_y^T \int \bar{v} dt \quad (3.80)$$

Определим производную по времени от вектор-функции F_y , а уравнение (3.79) разрешим относительно производной dv/dt . Учтём, что матрицы A_i и A_i^T одного и того же порядка, и матричное произведение $(A_i m A_i^T)^{-1} = m^{-1}$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{v}}{dt} = [A_u m A_u^T]^{-1} [A_B \bar{F}_B - A_D \mu A_D^T \bar{v} + A_u \bar{F}_u] \\ \frac{d\bar{F}_y}{dt} = -c A_y^T \bar{v} \end{array} \right. \quad (3.81)$$

В уравнениях (4.19) базисными координатами являются фазовые переменные v и F_y .

Первое матричное уравнение системы (3.81) выражает принцип Даламбера, а второе является компонентным уравнением упругих элементов. Число неизвестных функций равно числу дифференциальных уравнений. Следовательно, метод переменных состояния позволяет избежать избыточности фазовых координат и переопределенности системы уравнений табличного метода, повышая устойчивость вычислительных алгоритмов.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.81) необходимо задать начальные условия: v_0 и F_{y0} при $t = 0$.

Если образовать в левой части вектор состояния системы

$$\bar{U} = \left| \frac{\bar{V}}{\bar{F}_y} \right|, \quad (3.82)$$

то теоретическая модель (3.81) представится через переменные состояния \bar{u} в нормальной форме Коши:

$$d\bar{u}/dt = [J] \bar{u} + [B] x, \quad (3.83)$$

где $[J]$ – матрица Якоби, образуемая из подматриц A_y, A_y^T ;

$[B]$ – матрица возмущений, составленная из подматриц $A_b,$

$A_d,$

x – вектор возмущений, составленный из векторов потенциалов F_b, F_d .

Теоретическая модель (3.83) хорошо приспособлена для реализации на ЭВМ, имея развитое программное обеспечение.

Накопление математических описаний отдельные элементов машины позволяет создавать целые библиотеки моделей. Так формируется целая технология заимствования предшествующего опыта. Специально организованная по доступу система образует *метод функционально законченных элементов*. Выделяемые функционально законченные элементы описываются по отдельности; используется множество разнообразных математических моделей, упакованных банк. Однако разнородные математических описания трудно стыкуются; создание банка требует много времени. Тем не менее, при создании специализированных систем проектирования в промышленности этому методу отдается предпочтение.

Следует отметить, что вышеприведённые математические модели макроуровня получены из простых элементов и описывают только простые движения: поступательные или вращательные. Несмотря на это, они являются базой для построения моделей более сложных систем.

3.5.3. Формальные методы создания теоретических моделей.

Широкое применение для построения математических моделей технических объектов находит **формальный подход**. Он основан на использовании интегральных вариационных принципов аналитической механики. Одним из наиболее мощных теоретических методов формального моделирования является вариационный принцип Гамильтона—Остроградского. Он применим к техническим объектам различной физической природы (механическим, гидравлическим, электрическим и др.). Для систем с сосредоточенными параметрами вариационный принцип приводит к уравнениям

Лагранжа второго рода, дающим хорошие результаты для сложных технических систем, если они рассматриваются как системы с сосредоточенными параметрами. При этом никаких ограничений на структуру и физические свойства объекта не накладывается и пользователь может не прогнозировать неизвестное.

Уравнения Лагранжа второго рода для системы с голономными связями имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $E_{\text{к}}$ — кинетическая энергия системы; q_i — обобщенная координата; \dot{q}_i — обобщенная скорость; Q_i — обобщенная сила; n — число степеней свободы системы.

В качестве обобщенных координат выбирают независимые между собой переменные, которые позволяют полностью определить состояние исследуемой системы.

Каждой обобщенной координате q_i соответствует своя обобщенная сила Q_i . Работу всех обобщенных сил на возможных перемещениях системы (виртуальную работу) можно вычислить по формуле

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i,$$

где δq_i — вариация i -й обобщенной координаты; δW_i — работа i -й обобщенной, силы, на возможном перемещении.

Из формулы, (4.27) следует, что обобщенные силы представляют собой коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы.

Так как вариации обобщенных координат δq_i независимы, то вычисляя работу всех приложенных к системе сил на одном из возможных перемещений δq_i , а все остальные вариации в формуле (4.27) полагая равными нулю, легко определить каждую обобщенную силу Q_i в отдельности.

Кинетическая энергия системы $E_{\text{к}}$ в общем случае является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени и представляет собой сумму

$$E_{\text{к}} = E_{\text{к}0} + E_{\text{к}1} + E_{\text{к}2},$$

$$\text{где } E_{\text{к}0} = a_0; \quad E_{\text{к}1} = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i; \quad E_{\text{к}2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Если формулы связей декартовых и обобщенных координат

не содержат явно времени t , то $E_{k0} = E_{k1} = 0$, а $E_k = E_{k2}$. Следовательно, при стационарной структуре системы кинетическая энергия представляется однородной квадратичной формой

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где m_{ij} — элемент матрицы параметров инерционных элементов системы.

Обобщенные силы можно разделить на потенциальные Q_p , диссипативные Q_d и произвольные Q^* .

Силы называются потенциальными, если существует положительно определенная функция обобщенных координат, удовлетворяющая следующим равенствам

$$Q_{pi} = -\partial E_p / \partial q_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $E_p = E_p(q_1, q_2, \dots, q_n)$ — потенциальная энергия системы.

В стационарном равновесном состоянии системы $E_p = \min$, следовательно, $\delta E_p = 0$ и $\delta^2 E_p > 0$. В окрестности точки, соответствующей этому состоянию в фазовом пространстве, потенциальная энергия может быть представлена квадратичной формой

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j,$$

где c_{ij} — элемент матрицы параметров упругих элементов системы.

Обобщенные силы называют диссипативными, если существует положительно определенная функция обобщенных скоростей, удовлетворяющая следующим равенствам

$$Q_{di} = -\partial \Phi / \partial \dot{q}_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где Φ — диссипативная функция Рэлея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

μ_{ij} — элемент матрицы параметров диссипативных элементов системы.

Обобщенная сила Q_i , соответствующая i -ой обобщенной координате, равна алгебраической сумме произвольной Q_i^* , потенциальной Q_{pi} , и диссипативной Q_{di} составляющих:

$$Q_i = Q_i^* - (\partial E_p / \partial q_i) - (\partial \Phi / \partial \dot{q}_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим значение Q_i в уравнение (4.26), опуская индекс (*) при составляющей Q_i^* :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обобщенная сила Q_i , фигурирующая в этом уравнении, определяется с учетом работы источников всех внешних воздействий, а также некоторых внутренних источников, которые не могут быть отнесены к упругим и диссипативным элементам (например, силы кулоновского трения в механических системах).

Математическая модель, получаемая на основе уравнений Лагранжа второго рода, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\vec{F}(\ddot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = 0.$$

В эту систему входит n дифференциальных уравнений второго порядка, где n — число степеней свободы системы.

Процедура получения математической модели на основе уравнений Лагранжа второго рода включает следующие операции:

1) составление динамической модели технического объекта (при этом выделяются инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные и фрикционные элементы, определяются источники внешних воздействий);

2) определение возможных перемещений элементов системы с учетом наложенных позиционных голономных связей и введение обобщенных координат q_i , количество которых должно соответствовать числу степеней свободы системы n ;

3) составление выражений для вычисления кинетической E_K и потенциальной E_P энергий и диссипативной функции Рэля Φ ;

4) составление выражения для вычисления виртуальной работы δW источников внешних воздействий, определение обобщенных сил Q_i ;

5) выполнение операций дифференцирования, предусмотренных уравнениями (4.32), и формирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим важное свойство функций E_K , E_P и Φ — их аддитивность. Напомним, что способностью накапливать кинетическую энергию обладают инерционные элементы, а потенциальную энергию — упругие элементы. Диссипативные элементы рассеивают энергию системы, затрачивая ее на преодоление внутренних сопротивлений. В связи со свойством аддитивности кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех инерционных элементов. Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех упругих элементов, а диссипативная

функция — сумме энергий потерь всех диссипативных элементов.

Для неголономной системы уравнения Лагранжа второго рода усложняются добавлением неопределённого множителя λ_v и уравнения связи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{II}}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} &= Q_i + \sum_{v=1}^N \lambda_v A_{vi}, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n A_{vi} \dot{q}_i + A_v &= 0, \quad v = \overline{1, N}, \end{aligned} \right\}$$

где λ_v - неопределённый множитель Лагранжа; A_{vi} , A_v - коэффициенты уравнений неголономных связей; n - число обобщенных координат; N - число неголономных связей.

Как недостаток, следует учитывать, что метод даёт инвариантную модель в виде систем дифуравнений второго порядка, а не первого как форма Коши. Приведение уравнений Лагранжа к форме Коши в общем виде пока не разработано.

3.6. Усовершенствование математических моделей макроуровня

Полученные математические модели макроуровня с простыми элементами не могут описывать системы со сложным движением или сложными свойствами, но при необходимости допускают усовершенствование путём учёта соответствующих особенностей.

3.6.1. Учёт трансформаторных элементов

Трансформаторные элементы (ТЭ) отображают безынерционное преобразование переменных типа потока и типа потенциала. В технических объектах часто используются механические (зубчатые, цепные, фрикционные, рычажные, клиноременные), гидравлические (гидрообъемные и гидродинамические) и электрические трансформаторные элементы.

Особенностью ТЭ как компонента является наличие двух входов и выходов. На рис. 3. 7. приведён механический ТЭ в виде зубчатой передачи, на входе которого действуют угловые скорости ω_1 , и крутящий момент M_1 ; на выходе они становятся ω_2 и M_2 . Угловые скорости - потоковые переменные; крутящие моменты – потенциалы.

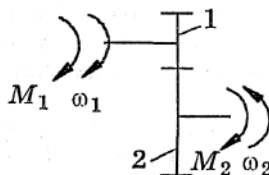


Рис. 3.7. Схема зубчатой передачи

Физические свойства ТЭ характеризуются передаточным числом и коэффициентом трансформации. Потери учитываются КПД.

Передаточное число u ТЭ определяется отношением потоковых переменных на входе и выходе элемента. Обратная ему величина $i=1/u$ называется передаточным отношением.

Для механической вращательной передачи передаточное число равно отношению угловых скоростей на входе и на выходе:

$$u = \omega_1 / \omega_2. \quad (3.34)$$

Коэффициент трансформации K представляет собой отношение потенциала на выходе трансформаторного элемента к потенциалу на его входе.

Для механической передачи коэффициент трансформации равен отношению крутящих моментов на выходе и входе:

$$K = M_2 / M_1 \quad (3.35)$$

Параметры u и K — алгебраические величины, учитывающие направления фазовых переменных.

КПД трансформаторного элемента выражаются через его передаточное число и коэффициент трансформации:

$$\eta = |K / u|. \quad (3.36)$$

Формулы для определения параметров ТЭ другой физической природы аналогичны; обозначения фазовых переменных в соответствии с табл. 3.2.

Для формирования математической модели объектов с ТЭ используется структурно-матричный метод.

В структурных моделях ТЭ изображаются так же, как и на принципиальных и кинематических схемах.

Пример. Механическая вращательная система с двумя зубчатыми передачами. Структурная схема системы имеет вид, представленный на рис. 3.8, а.

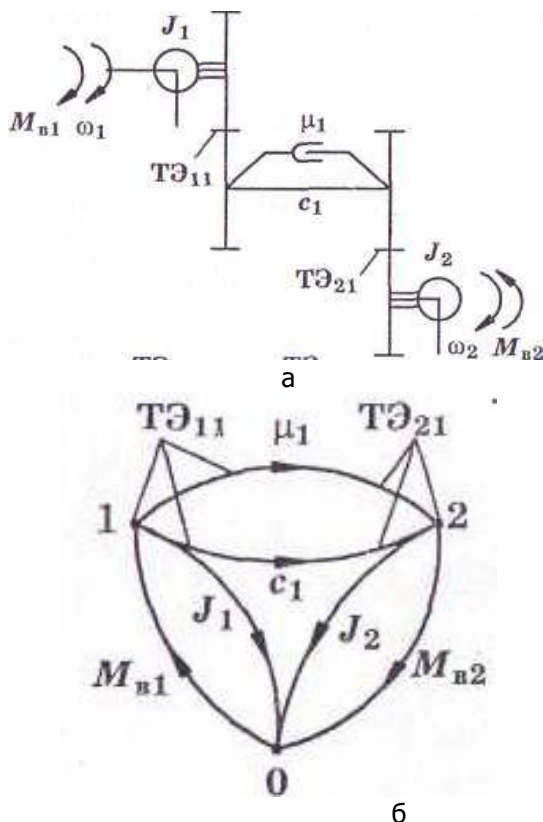


Рис. 3.8. Динамическая модель механической вращательной системы с двумя зубчатыми передачами (а) и ее орграф (б)

Сосредоточенная масса с моментом инерции J_1 связана с двигателем, а масса J_2 — с рабочим органом машины.

Система с ТЭ может изображаться орграфом (рис. 3.8, б). Узлами орграфа являются две сосредоточенные массы J_1 и J_2 ; узлы орграфа соединяют ветви, отображающие потенциалы $M_{в1}$ и $M_{в2}$, воздействующие на узлы. Две зубчатые передачи моделируются трансформаторными элементами $TЭ_{11}$ и $TЭ_{21}$. ТЭ на орграфе отобразить в виде ветвей невозможно, так как у них два входа и выхода. Поэтому расположение трансформаторных элементов на орграфе отмечают выносными линиями, проведенными от узлов i к ветвям j , взаимодействие которых осуществляется посредством $TЭ_{ij}$

Для отображения информации о структуре объекта с ТЭ в

учебнике предлагается дополнять матрицу инцидентий A матрицей ТЭ [1, п. 5.2]. Матрица ТЭ аналогична матрице инцидентий, но в ней фигурируют лишь упругие и диссипативные элементы.

Рациональнее учитывать наличие ТЭ в ветвях эквивалентной схемы. Тогда в матрице инцидентии вместо единиц появляются значения передаточных отношений и коэффициентов трансформации.

Для схемы рис. 3.8 матрица инцидентии примет вид:

Узлы	Ветви				
	M_{B1}	M_{B2}	C_1	μ_1	
1	1	0	-	-	
2	0	1	K_{11}/K_{21}	u_{21}/u_{11}	
			K_{11}/K_2	u_{21}/u_1	
			1	1	

В ветвях потенциала крутящие моменты умножаются на коэффициенты трансформации, а в ветвях диссипации – делятся.

В учебнике [1, п. 5.2] приводятся универсальные выражения уравнений системы с ТЭ (5.25 - 5.27) для любого числа упругих и трансформаторных элементов. Формула имеет сложное правило учёта знаков потенциалов и скоростей.

Для схемы рис. 3.13 они имеют простой вид:

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \left[M_{B1} - \frac{M_{y1} + M_{D1}}{u_{11}\eta_{11}^{R1}} \right];$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \left[-M_{B2} + (M_{y1} + M_{D1})u_{21}\eta_{21}^{R1} \right];$$

(3.37)

где $R_i = \text{sign } M_{y1}$ – учитывает направление упругих моментов;

u, η - передаточные числа и КПД соответствующих ТЭ;

M_y, M_d – моменты от упругого и диссипативного элемента;

Согласно уравнениям угловые ускорения на входе и выходе модели зависят не только от крутящих моментов и моментов сопротивления, но и от параметров трансформаторных элементов.

3.6.2. Моделирование сложного движения

Сложное движение – движение тела, сочетающее поступательное и вращательное движение. По правилам механики его можно разложить на две составляющие: переносное поступательное вместе с полюсом O и относительное сферическое вокруг полюса. Скорость i -ой точки тела V_i тогда:

$$V_i = V_o + V_{Qi} \quad (3.38)$$

где V_o — вектор скорости полюса; V_{Qi} — вектор скорости относительного сферического движения.

Скорость V_{Qi} может определяться через углы Эйлера или векторным произведением [1, с. 174]. Однако пользоваться ими при вычислениях неудобно. Целесообразно использовать для определения скорости сложного движения матричное уравнение:

$$V_i = \Omega r_i, \quad (3.39)$$

где r_i – радиус-вектор точки в подвижной системе координат;

Ω - кососимметрическая матрица:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Элементы матрицы ω_x , ω_y , ω_z представляют угловые квазискорости сферического движения тела вокруг соответствующей координатной оси и имеют традиционные названия: скорости крена, тангажа и рыскания соответственно.

Развёрнутое выражение (3.39) определяет проекции вектора скорости i -ой точки на оси координат в сферическом движении тела:

$$\begin{aligned} V_{xi} &= \omega_y Z_i - \omega_z Y_i \\ V_{yi} &= \omega_z X_i - \omega_x Z_i \\ V_{zi} &= \omega_x Y_i - \omega_y X_i \end{aligned} \quad (3.41)$$

Выражения (3.41) получены в 1765 г. Эйлером и носят его имя.

Динамическая модель тела, совершающего сложное движение, включает компонентные уравнения инерционных, упругих и диссипативных элементов (см. табл. 3.3) по соответствующим осям координат.

3.6.3. Учёт нелинейностей системы

Математические модели, созданные на основе простых

компонентных уравнений, являются линейными. Их следует считать идеализацией реальных ТС, поскольку большинство их нелинейно. Для обеспечения адекватности описаний линейную модель можно усовершенствовать учётом нелинейности оригинала.

Нелинейной системой называется система, процессы функционирования которой описываются нелинейными уравнениями.

Существуют два способа учёта нелинейностей: добавление нелинейных элементов и добавление нелинейных связей.

Нелинейные элементы (НЭ). Элемент относится к нелинейным, если в его компонентном уравнении переменные $\bar{I}(t)$, $\bar{U}(t)$ и их производные связаны нелинейной зависимостью $\psi_{\text{нел}}$:

Общая форма записи:

$$\bar{U}(t) = \psi_{\text{нел}}[\bar{I}, d\bar{I}/dt, d^2\bar{I}/dt^2, \dots, t] \quad (3.47)$$

НЭ называется *динамическим*, если в уравнение (3.47) входят и фазовые переменные, и их производные. НЭ называется *статическим*, если его уравнение не содержит производных от фазовых координат.

Если функция $\psi_{\text{нел}}$ не зависит от времени, НЭ является *стационарным*, в противном случае *нестационарным*.

Если НЭ имеет один входной сигнал $I(t)$, элемент называется *одномерным*, а если несколько $\bar{I}(t)$ — *многомерным* (или сложным).

Простые НЭ, содержащие производные не выше первых, называют безинерционными. Уравнение (3.47) для безинерционного НЭ упрощается

$$y = f(x) \quad (3.48)$$

Различные виды характеристик приведены на рис. 3.9.

Нелинейные безинерционные элементы можно разделить на группы: одномерные и многомерные, непрерывные и разрывные, симметричные и несимметричные, однозначные и неоднозначные, гладкие и с изломами (кусочно-линейные).

У *однозначного нелинейного элемента* выходная координата y зависит только от значений входной координаты x , а у *неоднозначного* — не только от x в данный момент времени, но и от знака первой производной; поэтому его относят к динамическим.

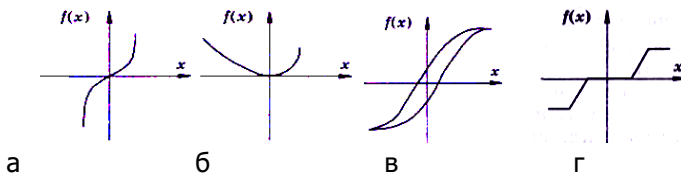


Рис. 3.9. Виды безинерционных нелинейных характеристик: непрерывные (а, б — гладкие; г — с изломами); симметричные (а, г); несимметричные (б, д); однозначные (а б, г); неоднозначные (в);

Безинерционные НЭ хорошо изучены; из них выделены типовые нелинейности с кусочно-линейными характеристиками (рис. 3.10).

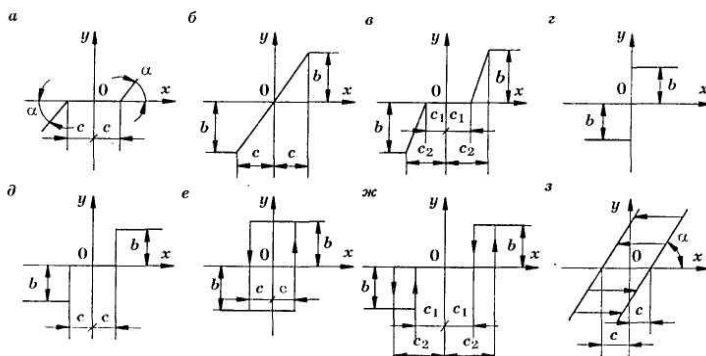


Рис. 3.10. Типовые нелинейности:

- а – зона нечувствительности; б - зона насыщения; в - зона нечувствительности и зона насыщения; г - идеальный релейный;
- д - идеальный релейный с зоной нечувствительности; е - релейный с гистерезисом; ж - с гистерезисом и зоной нечувствительности;
- з - люфт, зазор или сухое трение

Их описания, параметры аппроксимации и линеаризации приводятся в справочниках.

Способы математического описания безинерционных НЭ :

а) аналитическое для однозначных непрерывных нелинейностей $y=f(x)$;

б) для неоднозначных добавляется слагаемое $\text{sign } \dot{x}$;

в) кусочно-линейная аппроксимация для НЭ произвольного вида.

Примеры кусочно-линейной аппроксимации для НЭ:

1. Зона нечувствительности и зона насыщения (рис. 3.16,

в)

$$y = \begin{cases} -b & \text{при} \\ k(x+c_1) & x \leq -c_2; \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\begin{array}{ll}
 0 & \text{при } - \\
 k(x-c_1) & c_2 < x < -c_1; \\
 b & \text{при} \\
 \text{где} & |x| \leq c_1; \\
 k=b/(c_2-c_1) & \text{при} \\
 & c_1 < x < c_2; \\
 & \text{при} \\
 & x \geq c_2,
 \end{array}$$

2. Люфт, зазор или сухое трение (рис. 3.16, з)

$$y = \begin{cases} k(x-c) & \text{при} \\ k(x+c) & dx/dt > 0; \\ \text{где } k & \text{при} \\ = \operatorname{tga} & dx/dt < 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Математические описания для разных типовых нелинейностей приведены в [1, с. 230-231].

Нелинейные свойства наиболее характерны для упругих и диссипативных элементов технической системы. Примером нелинейной зависимости является характеристика кулоновского трения.

Приёмы учёта нелинейностей при моделировании. При построение модели нелинейности по степени влияния на результаты следует разделять на *несущественные* и *существенные*.

Несущественные нелинейности это те, которые можно заменить линейными без заметного искажения функционирования объекта.

Существенные нелинейности при моделировании не подлежат линеаризации, так как это может привести к недопустимому искажению результатов исследований.

Общая динамическая модель существенных НЭ (3.47) сложна для практического пользования. Рациональным приёмом учёта нелинейностей при моделировании ТС является разделение нелинейной характеристики $\psi_{\text{нел}}$ на линейную динамическую часть $\psi_{\text{лин}}$ и нелинейную безынерционную $y(x)$, концентрирующую все нелинейные свойства модели:

$$\psi_{\text{нел}} = \psi_{\text{лин}} [\bar{I}, d\bar{I}/dt, d^2\bar{I}/dt^2, \dots, t] * y(x) \quad (3.49)$$

Тем самым учёт нелинейностей сводится к добавлению в структурную схему нелинейных безынерционных звеньев подходящего типа (см. рис. 3.16) кусочно-линейной характеристикой.

Кусочно-линейная характеристика позволяет рассматри-

вать модель на каждом интервале как линейную. Конечное состояние на границе предыдущего участка служит начальными условиями для последующего участка. Пример - модель гасителя колебаний в трансмиссии мобильных машин [1, с. 284-285].

После учёта нелинейностей модель состояния примет вид:

$$du/dt = \Phi(u) + Bx \quad (3.50)$$

где Φ – нелинейный функционал.

3.6.4. Учёт ограничений и связей

Движение элементов технической системы не может быть беспредельным; их взаимные перемещения в пространстве ограничены. Ограничения на изменения геометрических координат и скоростей движения элементов системы называют связями. Связь на сосредоточенную массу системы может накладывать внешняя среда, либо другие сосредоточенные массы, взаимодействующие с данной массой.

Связи учитываются добавлением в ММ уравнений связи вида:

$$f(\bar{X}, \dot{\bar{X}}, t) \leq 0, \quad (3.51)$$

где \bar{X} — вектор координат, определяющих положение всех элементов ТС в пространстве; $\dot{\bar{X}}$ — вектор скоростей этих элементов; t — время.

Различают связи: *геометрические (позиционные) и кинематические; удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние); стационарные и нестационарные; голономные и неголономные.*

Связь называют *нестационарной*, если уравнение связи содержит явно время t . В противном случае связь *стационарная*.

Связь называется *удерживающей*, если в выражении (3.51) стоит знак равенства, и *неудерживающей*, если стоит знак неравенства. Неудерживающие связи в процессе функционирования технического объекта могут возникать и исчезать. Поэтому такие связи называют также *виртуальными*.

На рис. 3.11 приведена динамическая модель двухмассовой механической системы с виртуальными связями. Система в целом линейная, имеет две массы и две степени свободы. Перемещение массы m_2 ограничено пределами $0 < x_2 < L_{2k}$. При нарушении этого неравенства возникает виртуальная связь от внешней среды, и система лишается одной степени свободы, превращается в нелинейную; изменяется структура математической модели.

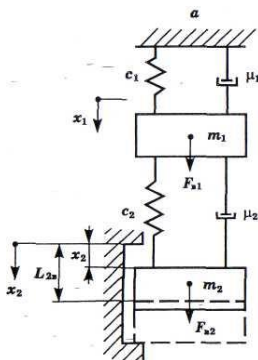


Рис. 3.11. Схема механической системы с виртуальной связью

Моделирование таких систем использует приёмы описания объектов переменной структуры [см. 1, п. 3.5, пример 3.6].

Связь, накладывающая ограничения только на геометрические координаты сосредоточенной массы ТС, называется *позиционной* или *голономной*. Уравнение её имеет вид:

$$f(\vec{X}, t) = 0 \quad (3.52)$$

Связь, накладывающая ограничения и на геометрические координаты, и на скорость сосредоточенной массы, называется *кинематической*; описывается уравнением вида:

$$f(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) = 0 \quad (3.53)$$

Если уравнение кинематической связи элементов системы нельзя интегрированием привести к виду (3.109), то такая связь называется *неголономной* или *неинтегрируемой*. Система, имеющая неголономные связи, называется также неголономной.

При расчётах технических систем обычно ограничиваются линейными уравнениями неголономных связей:

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \dot{q}_i + b_k = 0, \quad k=1, N, \quad i=1, n \quad (3.54)$$

где \dot{q}_i - обобщенные скорости; n — число обобщённых координат, N — число линейных связей; a_{ki} , b_k — коэффициенты уравнений. Число степеней свободы системы в этом случае будет равно $s = n - N$.

Неголономные системы распространены в мобильной технике. В качестве примеров можно назвать качение тел по плоской поверхности, работу ремённых передач. Классическим примером

неголономной системы является автомобильное или тракторное колесо с эластичной шиной при его качении по поверхности дороги.

3.7. Упрощение математических моделей макроуровня

Распространены следующие способы упрощения: линеаризация; снижение жёсткости системы, сокращение диапазона частот.

3.7.1. Линеаризация нелинейностей

Линеаризация гладких нелинейностей. Нелинейная математическая модель технического объекта в нормальной форме Коши

$$d\bar{U}/dt = F(\bar{U}) + B\bar{X}, \quad (3.61)$$

имеющая гладкую нелинейность $F(\bar{U})$, может быть линеаризована разложением нелинейной функции $F(\bar{U})$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки \bar{U}_o

$$F(\bar{U}) = F(\bar{U}_o) + \frac{\partial F(\bar{U}_o)}{\partial \bar{U}} \bar{u} + \frac{1}{2} \bar{u}^T \frac{\partial^2 F(\bar{U}_o)}{\partial \bar{U}^2} \bar{u} + \dots \quad (3.62)$$

где $\bar{u} = (\bar{U} - \bar{U}_o)$ — вектор приращений фазовых координат от точки с координатами \bar{U}_o .

Удерживая члены не выше первого порядка, получаем линейное уравнение в приращениях:

$$d\bar{u}/dt = J \bar{u} + B\bar{X} \quad (3.63)$$

где $J = \frac{\partial F(\bar{U}_o)}{\partial \bar{U}}$ — квадратная матрица коэффициентов линеаризации порядка $n \times n$, называемая матрицей Якоби.

Элементами матрицы Якоби являются частные производные от нелинейной вектор-функции $F(\bar{U}) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$:

$$J_{ik} = \partial f_i / \partial u_k \quad (3.64)$$

Матрица Якоби играет роль матрицы A в линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (4.25) и характеризует важнейшие свойства системы.

Линеаризация разрывных нелинейностей. Для линеаризации разрывных нелинейностей $F(\bar{U})$ применим метод статистической линеаризации. В соответствии с ним случайную функцию $\bar{U}(t)$ представляют в виде

$$\bar{U}(t) = \bar{U}_m + \hat{u}, \quad (3.65)$$

где \bar{U}_m — математическое ожидание функции; \hat{u} — центрированные значения функции (колебания вокруг среднего).

Нелинейная функция выражается через эти составляющие:

$$F(\bar{U}) = F(\bar{U}_m) + K(\bar{U}_m) \hat{u}, \quad (3.66)$$

где $K(\bar{U}_m)$ — матрица коэффициентов линеаризации. Для

всех типовых нелинейностей она приводятся в справочной литературе.

3.7.2. Снижение жёсткости модели

Оценкой жесткости системы дифференциальных уравнений является число обусловленности матрицы Якоби μ , представляющее в общем случае отношение каких-либо норм матрицы J .

В технических системах под числом обусловленности μ обычно понимают отношение максимального и минимального модулей собственных значений матрицы Якоби:

$$\mu = \max\{|\lambda_k|\} / \min\{|\lambda_k|\}; \quad k \in [1 : n] \quad (3.67)$$

Собственными значениями матрицы J порядка n называют корни её характеристического уравнения λ_k , $k = 1, n$,

$$\det(J - \lambda E) = 0, \quad (3.68)$$

где \det — символ определителя матрицы; E — единичная матрица порядка n .

Множество собственных значений λ_k , $k = 1, n$ называется спектром матрицы Якоби.

Жесткой системой обыкновенных дифференциальных уравнений называют такую систему, у которой число обусловленности $\mu > 10^5$. Матрица Якоби таких систем имеет модули собственных значений, различающиеся на несколько порядков, и система становится плохо обусловленной. Стремление проектировщиков учитывать как можно большее количество факторов приводит к необоснованно широкому спектру резонансных частот динамической модели объекта, причем высшие из них могут значительно превышать частоты возмущающих воздействий и практически не влиять на характеристики исследуемых процессов. Такую модель следует признать чрезмерно подробной и необоснованно усложнённой.

Поэтому после построения математической модели необходимо провести диагностический анализ спектра матрицы Якоби; сравнить получаемые резонансные частоты с частотами внешних воздействий и в случае значительного превышения первых над вторыми осуществить упрощение динамической модели объекта.

Упрощение проводится разделением технической системы на части с существенно различными физическими свойствами. У однородных процессов части с высокими собственными частотами можно исключить, устранив лишние степени свободы. Разнородные части можно интегрировать отдельно. В любом случае порядок модели снижается, что кардинально упрощает решение и анализ.

Глава 4 Теория рабочих органов почвообрабатывающих машин

4.1. Виды почвообрабатывающих рабочие органы.

Рабочий орган в почвообработке представляет совокупность рабочих и несущих элементов (рис.1.1).

Рабочий элемент непосредственно оказывает механическое воздействие на почву.

Несущий элемент задаёт траекторию движения, применяется двух типов: стойки и роторы. Стойки обеспечивают поступательное перемещение со скоростью V , ротор – добавляет относительное вращательное. Соответственно различают рабочие органы поступательные и ротационные.

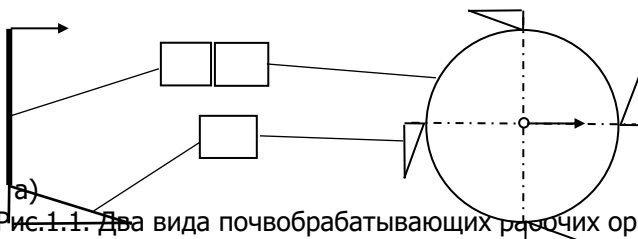


Рис.1.1. Два вида почвообрабатывающих рабочих органов: а – поступательные; б - ротационные; 1 - рабочий элемент- клин; несущие элементы: 2 - стойка; 3 - ротор

Рабочий орган считается пассивным, если он перемещается в почве только за счёт тяги трактора. Активный рабочий орган получает дополнительное относительное движение несущего элемента от дополнительного источника энергии (например, от вала отбора мощности (ВОМ) трактора).

В качестве рабочего элемента исторический опыт отобрал клин, который благодаря наличию острых кромок наилучшим образом внедряется в почвенную среду.

Клин имеет переднюю рабочую поверхность, установленную под углом к направлению движения, которой он воздействует на почву, подошву и лезвие (рис.1.2). Частный случай - бесподошвенный клин с вырожденной подошвой, когда клин превращается в косо поставленную пластину (см. рис.1.8, а).

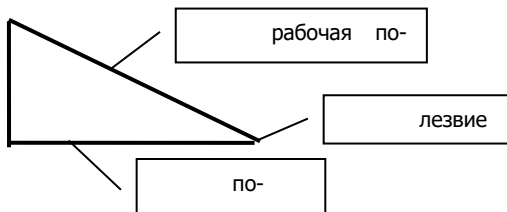


Рис.1.2. Элементы клина

Рабочая поверхность клина выполняются плоской или криволинейной. Плоские клинья - лемехи, ножи, лапы культиваторов, зубья борон; криволинейные - сферические диски борон, луцильников, отвалы плугов, окучники.

Все элементы рабочих органов почвообрабатывающих машин являются разновидностями клина.

4.2. Поступательные рабочие органы

4.2.1. Разновидности клина

По установке к направлению движения различают прямые (лобовое резание) и косые (скользящее резание) клинья, соответственно двугранные и трёхгранные клинья.

Плоский двугранный клин имеет лезвие, перпендикулярное направлению движения. В зависимости от ориентации лезвия действие двугранного клина на почву изменяется.

Двугранный клин с углом α (рис.1.3, а) отделяет пласт от дна борозды, поднимает его и раскалывает на части.

Двугранный клин с углом γ (рис.1.3, б) отделяет пласт от стенки борозды, отводит в сторону и сжимает в горизонтальной плоскости. Наклонять и оборачивать пласт двугранный клин не может.

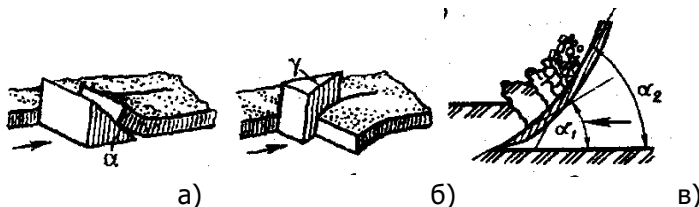


Рис. 4.1 Деформация почвы плоским двугранным (а, б) и криволинейным (в) клиньями

Трёхгранный клин. Согласно теории В.П. Горячкина форму рабочей поверхности трёхгранного клина можно разложить на три

двугранных прямых клина: $BB'CC'$ с углом α , $C'A'BC$ с углом θ и $B'CA'A$ с углом β при вершине (рис.1.4).

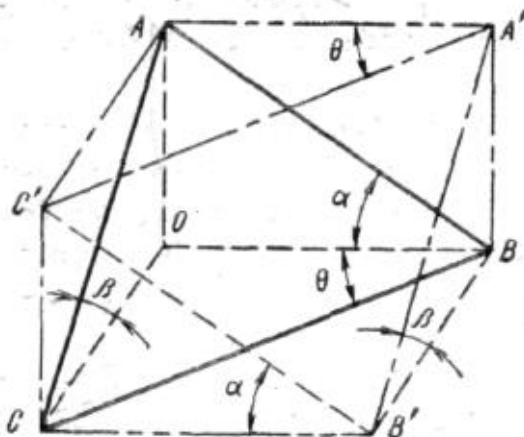


Рис.4.2 Трёхгранный клин

Каждый из клиньев при движении трехгранного клина выполняет свою работу. Клин $BB'CA$ отделяет пласт от дна борозды и поднимает его на себя, клин $C'A'BC$ отделяет пласт от стенки борозды и отводит его в сторону, клин $B'CA'A$ оборачивает пласт.

Таким образом, при движении трехгранного клина пласт почвы подрезается, поднимается вверх, поворачивается, отодвигается в сторону. При плавном увеличении угла β свыше 90° можно достигать полного оборота пласта. В этом состоит главное преимущество трёхгранного клина перед двугранным.

Трёхгранный клин можно рассматривать как прямой двугранный с лезвием, повернутым так, что оно составляет с направлением движения острый угол θ .

Криволинейный клин. Если углы α , γ и β непрерывно изменять по высоте, то плоский клин преобразуется в криволинейную поверхность. Поверхность клина непрерывно деформирует пласт (см. рис.1.3, в), и он распадается на мелкие части.

Такие поверхности с переменной геометрией, получившие название «отвалы», применяют на плугах, окучниках, бороздорезах, грядоделателях и других машинах, рабочий процесс которых связан с перемещением почвы.

Кинетика криволинейного клина. Криволинейную поверхность используют в корпусах плугов (рис.4.3). Считается, что она образуется развитием трёхгранного клина (см. рис. 4.2) с углами $\alpha, \beta, \gamma = \theta$. Развитие заключается в том, что эти углы плавно изменяют по мере увеличения высоты Z . Поверхность становится криволинейной (рис.1.5, в). Рабочая поверхность корпуса плуга состоит из лемеха 1 и отвала 2 (рис.4.3).

Лемех – лезвие плуга, предназначенное для подрезания пласта почвы в горизонтальной плоскости. Рабочую поверхность лемеха делают цилиндрической, чтобы плавно переходить в поверхность отвала. Лемех при работе располагается не перпендикулярно к направлению движения, а под некоторым углом $\theta_0 < 90^\circ$ (рис. 4.3, а).

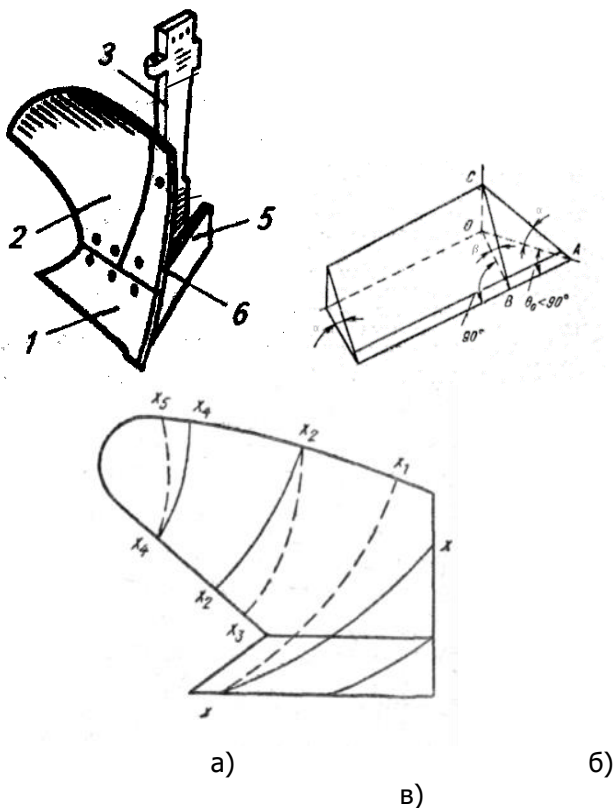


Рис. 4.3. Рабочая поверхность корпуса плуга: а - кинетические параметры лемеха; б - сечения отвала поперечно-вертикальной плоскостью; 1 - лемех; 2 - отвал

Кинетические параметры лемеха - угол крошения ν и угол подъёма $\nu_1 = \alpha$. Углы связаны зависимостью

$$\operatorname{tg} \nu_1 = \operatorname{tg} \nu \sin \theta_0 \quad (1.5)$$

Отвал отрезает пласт от стенки борозды, деформирует и крошит его, и оборачивает верхним слоем вниз. Его сечения $x_i - x_i$ (рис. 4.3, б) – линии с увеличивающейся крутизной, постепенно оборачивающие пласт почвы. Траектории движения частиц почвы по отвалу близки с графиками сечений (пунктирные линии на рис. 4.3, б).

Качество вспашки - оборот пласта и его крошение - зависят от формы отвала, характеризующихся значениями и законом изменения углов трёхгранного клина α , γ и β .

По форме рабочей поверхности отвалы подразделяют на четыре основных типа: культурные, полувинтовые, винтовые и цилиндрические. В нашей стране применяют первые три типа.

При обороте культурный отвал хорошо крошит почвенный пласт, поэтому его используют для вспашки старопахотных земель.

Полувинтовой корпус лучше оборачивает пласт, но хуже рыхлит его (сплошные линии на рис.1.5, а).

Винтовой корпус максимально оборачивает пласт, но почти его не крошит, создавая наилучшие условия для разложения пожнивных остатков и дернины. Они используются при перепашке пласта многолетних трав и первичной вспашке целинных земель.

Рабочие поверхности культурного и полувинтового отвалов относятся к цилиндрическим поверхностям. Цилиндроидальная поверхность описывается (рис.1.6) движением прямолинейной горизонтальной образующей EF по направляющей кривой BC, расположенной в плоскости N, перпендикулярной к лезвию лемеха АВ и дну борозды. В качестве направляющей кривой обычно берется парабола.

Углы наклона образующих к стенке борозды γ изменяются по определенному закону $\gamma = f(Z)$, где Z - высота расположения образующей. На рис.1.6, б, в показаны графики изменения углов образующих со стенкой борозды для культурного и полувинтового отвалов. Способ построения отвалов разработан проф. Н.В. Щучкиным [19].

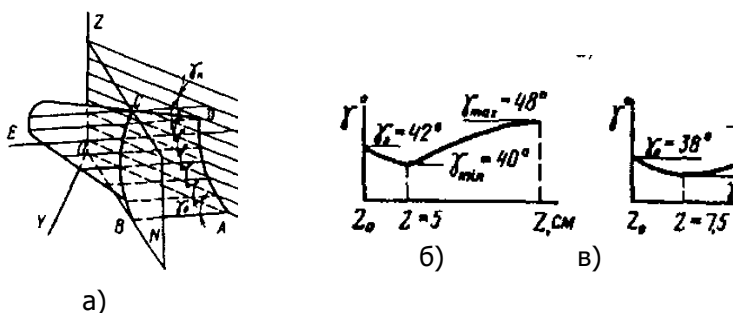


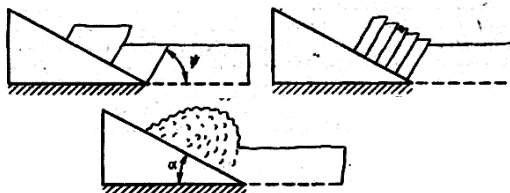
Рис.4.4. Построение поверхностей отвалов: а - схема образования цилиндридной поверхности по Н.В. Щучкину; б, в – рекомендуемые законы изменения углов образующей культурного и полувинтового отвалов

На практике вместо прямолинейной образующей используют выпуклую кривую. В этом случае в каждом сечении отвал соприкасается с пластом только в одной точке верхней части пласта, что обеспечивает лучший оборот его на 180°.

4.2.2. Теория клина

Общие закономерности взаимодействия клина с почвой изучает земледельческая механика. Основателем земледельческой механики В.П. Горячкин строил теорию взаимодействия рабочего органа с почвой на теории клина, теории разрушения почвы и её физико-механических свойствах.

Характер деформации почвы. Характер деформации в значительной степени зависит от механического состава, состояния почвы. Считается, что почвы среднесвязные и средние по влажности скалываются под некоторым углом ψ к направлению движения клина, образуя глыбы трапецеидальной формы (рис.1.7, а). Угол ψ есть направление абсолютной скорости частиц почвы.



а) б)
в)

Рис.1.7. Деформация слабосвязных почв

При этом процесс механического разрушения почвы состоит из четырех последовательных стадий [16].

Первая стадия - первоначальное пластическое смятие почвы. Воздух, находящийся в капиллярах и промежутках между комочками, переходит в защемленное состояние.

Вторая стадия - дальнейшее сжатие почвы и защемленного в ней воздуха и накопление в нем потенциальной энергии из-за увеличения сжатия.

Третья стадия - сжатие почвы до предельного состояния, обусловленного ее прочностью. Как только напряжение смятия превысит временное сопротивление почвы сдвигу, впереди лезвия клина возникнет плоскость сдвига, направленная под углом γ к дну борозды, и от пласта отделится глыба трапецеидальной формы.

После скалывания глыбы скользят по поверхности клина, не претерпевая новых деформаций, и поэтому не распадаются.

Четвертая стадия - расширение защемленного в период первых двух стадий воздуха и переход его потенциальной энергии в работу разрушения связей между частицами почвы, т.е. крошения пласта на более или менее мелкие части.

При дальнейшем движении клина процесс повторяется в том же порядке. Резкого разграничения стадии не имеют: одна стадия постепенно переходит в другую в изложенной последовательности. Основной вид деформации - сдвиг.

При меньшей глубине хода клина в почве пласт распадается на более мелкие куски аналогичной формы (рис.1.7, б).

Легкие почвы с большим содержанием песка под действием клина, если угол α значителен, распадаются на отдельные зерна и сгруживаются перед клином (рис.1.7, в), образуя призму волочения.

Сильносвязные (суглинистые и глинистые) почвы оптимальной влажности испытывают деформации отрыва. В самом начале внедрения клина образуется трещина *ОС* (рис.1.8, а); она расширяется, и от пласта отрывается элемент *АОС*.

Сухие твёрдые почвы испытывают деформации скалывания. Трещина излома распространяется вниз (рис.1.8, б). Пласт раскалывается на глыбы неправильной формы, а дно борозды получается неровным и изрытым.

Сильно задернелые и влажные суглинистые почвы отрезаются клином в виде сплошной ленты. Возникающие при изгибе пласта трещины не доходят до поверхности, т.е. пласт не разделяется на отдельные элементы и представляет собой сплошную ленту (рис.1.8, в).

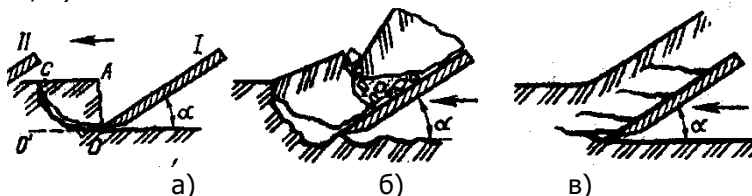


Рис.1.8. Деформации сильносвязных почв

Таким образом, деформации почвы весьма разнообразны. Помимо классического случая деформаций сдвига, имеют место деформации отрыва, скалывания, резания. Тем не менее, все типы деформирования почвы клином сохраняют в земледельческой механике традиционное название «резание почв».

В.П. Горячкин указал на разнообразие видов деформации почвы, разработал основы теории клина, которая рассматривает движения частиц почвы под действием клина и силы сопротивления перемещению. Движение частиц характеризует кинетику и кинестатику клина.

Кинетика клина. Плоский клин. Для плоского клина теория устанавливает направление абсолютной скорости v_a движения пласта в зависимости от вида деформации и геометрии клина. При резании сухих сыпучих почв ее частицы перемещаются под углом ψ перпендикулярно рабочей поверхности клина (рис.1.9, а):

$$\psi = \pi/2 - \alpha. \quad (1.1)$$

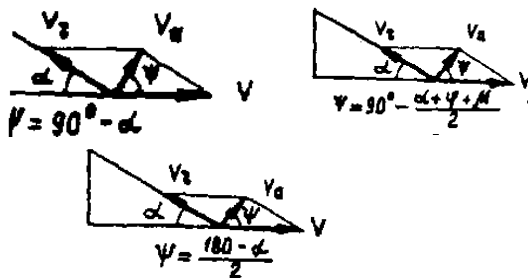
При обработке связных среднеувлажненных почв (рис.1.9, б) абсолютная скорость частиц направлена под углом

$$\psi = -(\alpha + \varphi + \mu)/2, \quad (1.2)$$

где φ – угол трения почвы по поверхности клина; μ – угол внутреннего трения почвы.

При обработке связных задернелых почв пласт отрезается сплошной лентой. В этом случае абсолютная скорость стружки имеет направление, совпадающее с биссектрисой угла между передней гранью клина и дна борозды (рис.1.9, в).

$$\psi = (\pi - \alpha)/2, \quad (1.3)$$



а) б) в)

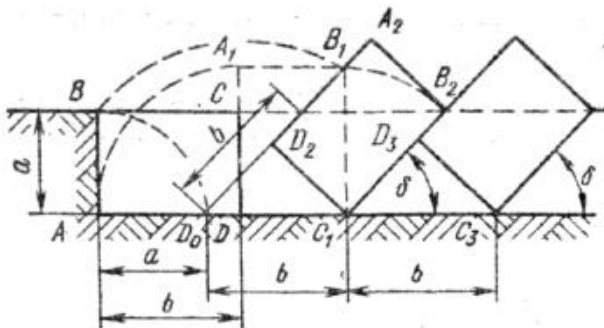
Рис.1.9. Направление абсолютной скорости движения пласта с различной почвой: а - сухая сыпучая почва, б - среднеувлажнённая почва; в - задернелая почва

Величина абсолютной скорости

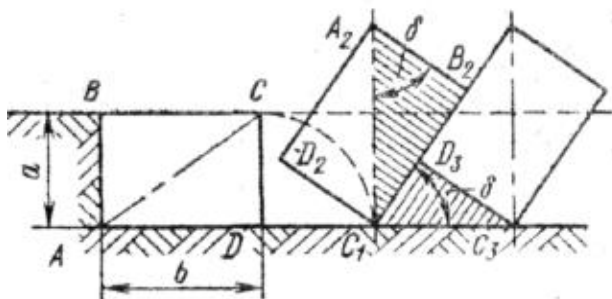
$$V_a = 2V \sin(\alpha/2), \quad (1.4)$$

где V - поступательная скорость клина.

Криволинейный клин. Перемещаясь в почве криволинейный клин корпуса плуга отрезает пласт ABCD (рис.1.10, а), поднимает его на отвал; пласт вначале поворачивается вокруг ребра D до отвесного положения. Далее пласт поворачивается вокруг ребра C_1 до положения $C_1D_2A_2B_2$, пока не ляжет гранью C_1B_2 на ранее отваленный пласт. При повороте пласт деформируется и крошится.



а)



б)

Рис. 1.10. Схема оборота пласта корпусом плуга без предплужника

Толщина пласта принимается равной глубине пахоты a . Соотношение между толщиной a и шириной пласта b задаётся коэффициентом формы пласта k :

$$k = b/a \quad (1.6)$$

Угол δ наклона отваленного пласта к горизонту

$$\sin \delta = a/b = 1/k \quad (1.7)$$

Пласт не должен обратно падать в борозду после прохода плуга. Неустойчивое равновесие пласта соответствует положению, при котором диагональ A_2C_1 располагается вертикально (рис.1.10, б). Из подобия треугольников $C_1A_2B_2$ и $C_1D_3C_3a/b = b\sqrt{a^2+b^2}$. Предельное отношение $k_{\min} = 1,27$, $\sin \delta = 0,787$.

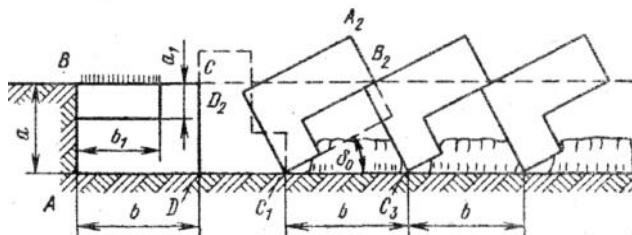


Рис. 1.11. Схема оборота пласта корпусом плуга с предплужником

Для обеспечения надежного оборачивания пласта необходимо иметь

$$k > 1,27.$$

Предельно допустимые глубина вспашки

$$a_{\max} = b/1,27 = 0,787b,$$

угол δ наклона пласта

$$\delta_{\max} = \arcsin 0,787 = 52^\circ.$$

При наличии предплужника, который снимает верхний слой основного пласта на глубину a_1 по ширине $b_1 = 2/3b$, сечение пласта Г-образной формы оборачивается полнее. Угол наклона пласта δ_0 получим из схемы на рис.1.11:

$$\sin \delta_0 = (a - a_1)/b. \quad (1.8)$$

Сравнивая выражения (1.8) и (1.7), получаем, что $\delta_0 < \delta$. Неустойчивое равновесие пласта при $k_{\text{пmin}} = 1,06 < 1,27$. Это означает, то с предплужником можно пахать глубже.

4.2.3. Модели напряженно-деформированного состояния почвы

Для описания зависимости между напряжениями и деформациями почвы используют реологические модели.

Представление почвы фазовой моделью, состоящей из твердой, жидкой и газообразной фаз, требует учёта упругих, пластичных и вязких свойств, в силу чего реологические уравнения должны содержать не только напряжения, деформации, но и их производные во времени:

$$\Phi(\sigma, \varepsilon, d\sigma/dt, d\varepsilon/dt, \dots) = 0. \quad (1.9)$$

Установление реологических зависимостей - наиболее трудный вопрос в теории разрушения почвы. Поскольку почва полидисперсная, гетерогенная и анизотропная среда, то зависимость напряжения от деформации носит сложный изменчивый характер. Одни и те же типы почв в зависимости от влажности и рыхлости могут проявлять свойства хрупкого или пластичного тела. Многообразие и непостоянство физико-механических свойств почвы приводят к тому, что научно обоснованная теория деформации почвы с учетом ее физико-механических свойств до настоящего времени отсутствует.

Для описания напряженно-деформированного состояния почвы применяют разные реологические зависимости: простые линейные (упругое, вязкое тело) и сложные (упругопластическое или упруговязкопластическое тело с нелинейными характеристиками и др.).

Так, поведение трехфазного тела описывают реологической моделью Фойгта [3]

$$\sigma = \varepsilon E + \mu v d\varepsilon/dt, \quad (1.10)$$

где ε - деформация; E - модуль упругости; η_v - коэффициент вязкости.

Напряжения зависят не только от деформации, но и от её скорости. При $\sigma = \text{const}$ и начальных нулевых условиях $\varepsilon_0 = 0$ имеем скорость деформации

$$d\varepsilon/dt = \sigma_0 [1 - \exp(-Et/\eta_v)]/E. \quad (1.11)$$

Из этого выражения следует, что при приложении к телу мгновенной нагрузки его деформация будет значительно меньше, чем при продолжительном нагружении. Поэтому разрушение почвы под действием мгновенных (ударных) нагрузок носит хрупкий характер.

Реологическую модель двухфазного тела (почва, перенасыщенная водой) составляют из последовательного соединения упругого тела (модель Гука) и вязкого (модель Ньютона). Деформация такого тела равна сумме удлинений упругого ε_y и вязкого ε_v тел:

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_v = \sigma/E + \sigma t/\eta_v, \quad (1.12)$$

а скорость деформации

$$d\varepsilon/dt = (d\sigma/dt)/E + \sigma/\eta_v. \quad (1.13)$$

При постоянной скорости деформации получим

$$\sigma = (d\varepsilon/dt)ET + [\sigma_0 - (d\varepsilon/dt)ET] \exp(-t/T), \quad (1.14)$$

где $T = \eta_v/E$ - время релаксации (снижения напряжений в деформированном пласте).

Из уравнения (1.14) следует, что с увеличением скорости нагружения растет напряжение, а с уменьшением времени релаксации слабее проявляются свойства твердого тела.

Кроме того, для любого тела существует определенная скорость деформации $\varepsilon_{пр}$, при которой внешние силы уравновешиваются внутренним сопротивлением. При превышении скорости деформации $\varepsilon_{пр}$ внутренние силы станут больше внешних и разрушение примет вид хрупкого с соответствующим ростом энергозатрат.

Предельная скорость распространения напряжений для почв средней плотности (супесная, суглинистая) равна по В.В. Кацыгину 4...12 м/с. Рабочие скорости «пассивных рабочих органов», находящиеся в пределах 1...3 м/с, не превышают предельно допустимых, но у «активных» рабочих органов ротационных почвообрабатывающих машин (фрез, ротационных плугов) скорости резания могут быть соизмеримы с предельными скоростями деформации почвы, что увеличивает энергозатраты.

Взаимосвязь между разрушением почвы и её напряженно-деформированным состоянием устанавливается различными теориями прочности почвы.

Применительно к почвогрунтам наибольшее распространение получила теория разрушения Кулона-Мора. По этой теории разрушение наступает, когда касательное напряжение τ в плоскостях сдвига достигает предельного значения. Оно, в свою очередь, зависит от нормальных напряжений σ в плоскости сдвига:

$$\tau = c + \sigma \tan \mu, \quad (1.15)$$

где μ - угол наклона прямой $\tau = f(\sigma)$ к оси абсцисс, называемой углом внутреннего трения среды; c - составляющая сопротивления сдвига, не зависящая от нормальных напряжений и называемая сцеплением почвогрунтов.

Однако теория Мора не учитывает многофазность структуры почвы.

Установленные закономерности позволяют сделать ряд практических выводов и рекомендаций. Так, сухие твердые почвы следует разрушать ударными нагрузками. Переувлажненные, пластичные почвы начинают деформироваться при малых силах и статических нагрузках, но обладают высокой ударной прочностью. Их выгоднее разрушать медленными нагружениями.

4.2.4. Задача о тяговом сопротивлении клина

Для определения энергетики процесса почвообработки важно определять силы сопротивления. Известными величинами считаются режимы резания (скорость, глубина, геометрия клина), скорость и физико-механические свойства почвы.

Наиболее простая зависимость через удельное сопротивление почвы K_c :

$$P = K_c S; \quad S = ab, \quad (1.16)$$

где a — глубина вспашки, см; b — ширина захвата, см.

Однако эта зависимость не учитывает ни геометрии резания, ни скорости, ни прочностных свойств почвы. Поэтому идут поиски более совершенных силовых моделей.

Кинестатика клина. Широкое применение нашли кинестатические модели силового равновесия клина, известные в земледельческой механике со времён В.П. Горячкина. Распределённые нагрузки представляются сосредоточенными силами. Принимается модель разрушения почвы сдвигом. При перемещении клина со стороны почвы на него действуют нормальная сила N и сила

трения F , вызывающие силы сопротивления движению R и движущая сила P (рис.1.12, а).

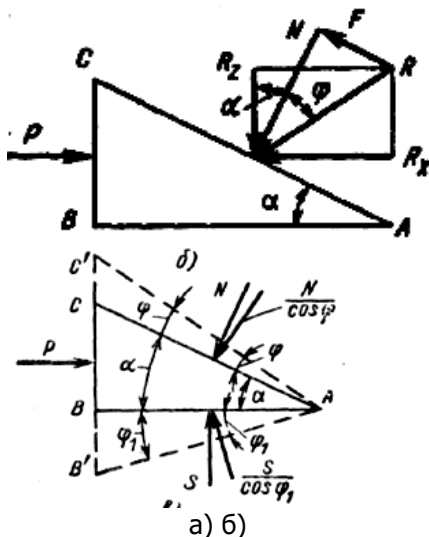


Рис.1.12. Силы, действующие на клин со стороны почвы

Считается, что сила N переменна: на первой и в начале второй стадии процесса резания определяется сопротивлением почвы смятию, а на третьей - весом сколотого объема почвы.

Сила трения F действует в плоскости рабочей поверхности клина в направлении, обратном движению клина.

Равнодействующая R сил N и F отклоняется от нормали к рабочей поверхности на угол трения φ и равна

$$R = N/\cos\varphi = N\sqrt{1+f^2}, \quad (1.17)$$

где $f = \operatorname{tg}\varphi$ - коэффициент трения.

Сила R разлагается на составляющие R_x и R_z . $R_x = P$ определяет сопротивление клина перемещению, а R_z - заглубляющую способность клина.

С учетом сил трения

$$P = R_x = N\sin(\alpha+\varphi) / \cos\varphi. \quad (1.18)$$

Из выражения (1.18) следует, что для учёта сил трения достаточно угол заострения клина увеличить на угол трения, т.е. $\alpha' = \alpha + \varphi$, и к новой фиктивной поверхности AC приложить нормальную силу R . Если и на подошву AB клина действует сила S (рис.1.12, б), то для определения силы P надо рассматривать клин $AB'C'$ с углом заострения $\alpha'' = \alpha + \varphi + \varphi_1$, на который действуют силы $R = N/\cos\varphi$ и $S' = S/\cos\varphi_1$, где φ_1 — угол трения

Трудность использования моделей кинестатики заключается в неизвестности силы N . Для её определения используется то обстоятельство, что она ограничена силами сопротивления почвы разрушению и приравнивается к силе прочности пласта.

По данным И.М.Панова, при разрушении сдвигом вдоль плоскости сдвига (см. рис.1.8, б) максимальное значение сдвигающей силы имеет место при угле $\psi = \pi/2 - (\alpha + \varphi + \mu) / 2$ (см. (1.2)).

Сила нормального давления тогда выразится через предел прочности на сдвиг T_{\max} :

$$N = T_{\max} ab \cos\varphi \cos\mu / \cos^2\varphi ((\alpha + \varphi + \mu)/2). \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) получено для условий разрушения почвы сдвигом. Реально на плотной сухой почве под воздействием клина может наблюдаться и отрыв. Ю.Ф. Новиковым определена сила N' из условия разрушения за счет нормальных напряжений, равномерно распределенных по плоскости АВ [12]:

$$N = ab\sigma_{\text{пр}}\cos\varphi/(1 - \sin(\alpha + \varphi)), \quad (1.23)$$

где $\sigma_{\text{пр}}$ - предельное сопротивление почвы отрыву.

Анализ формул (1.22) и (1.23) установлено, что при больших значениях $\alpha + \varphi = 30..50^\circ$ почва разрушается за счет отрыва, при $\alpha + \varphi > 50^\circ$ - за счет сдвига. Возможны случаи, когда сдвиг и отрыв равновероятны, например, при влажности почвы 17%, и $\alpha + \varphi = 53..72^\circ$

Однако по А.Н. Зеленину сила P сдвига элемента стружки по уравнению (1.22) является только одним из компонентов общей силы резания $P_{\text{общ}}$ и составляет всего 16,5...36%. Основная часть общей силы резания затрачивается на вдавливание режущей кромки клина:

$$P_{\text{общ}} = P_x + \sigma_{\text{сж}} b \delta, \quad (1.24)$$

где $\sigma_{\text{сж}}$ - напряжение смятия почвы при вдавливании в нее штампа в виде режущей кромки рабочего органа; δ - толщина режущей кромки.

В.В. Каныгиным установлена зависимость между напряжением сжатия $\sigma_{\text{сж}}$ и деформацией сжатия h по закону гиперболического тангенса:

$$\sigma_{\text{сж}} = p_0 \operatorname{th}(q h/p_0), \quad (1.25)$$

где p_0 - предел несущей способности почвы, Па; q - коэффициент объемного смятия почвы, Н/см³.

Это означает, что нарастание силы нормального давления будет нелинейно зависеть от деформации, и задача о тяговом сопротивлении усложняется.

В последнее время развился подход к определению среднего значения силы тягового сопротивления путём разделения её на составляющие и их отдельного учёта.

Так, по И.М. Панову, сила тягового сопротивления P_x уравновешивается силой инерции $P_{и}$, реакцией R , отклонённой на угол φ от нормали к поверхности клина, и подпором Q почвы, находящейся впереди клина (рис.1.14):

$$P_x = P_{и} + R + Q. \quad (1.26)$$

Сила Q способствует увеличению сжатия почвы впереди клина, появлению опасности сгруживания почвы впереди клина. При малой связности почвы и большой длине рабочей поверхности клина подпор пласта может оказаться недостаточным для преодоления сопротивлений движению пласта по поверхности клина (составляющей силы тяжести пласта и силы трения на рабочей поверхности клина). Из условия $Q_{max} < ab\sigma_v$, (где σ_v - временное сопротивление почвы сжатию) определяется максимальная длина клина, при которой еще не возникает сгруживание почвы.

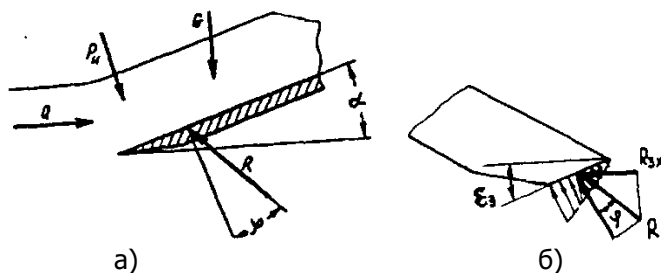


Рис.1.14. Кинетостатика клина: а - силовое равновесие клина;

б - нагружение затылочной части лезвия

При затуплении лезвия появляется затылочная фаска под углом ϵ , вызывающая смятие слоя почвы и появление давления R (рис.1.14, б).

Общетяговое сопротивление двугранного клина P_x складывается из составляющих на разрушение почвы сдвигом R_{Gx} , на преодоление динамического подпора R_{Qx} , силы трения R_{Fx} и давлений на затылочной фаске R_{3x} :

$$P_x = R_{Gx} + R_{Qx} + R_{Fx} + R_{зх} . \quad (1.27)$$

Составляющие сил сопротивления сложно выражаются через геометрические параметры клина и свойств почвы [1].

Разработаны разные варианты выделения составляющих тягового сопротивления. Так, П.Н. Бурченко предложил формулу с учётом адгезии и сопротивления сдвигу:

$$P = R_1' \cos + Gf + P_a K_a + (W + J) K_d , \quad (1.28)$$

где R_1 – сопротивление почвы внедрению лезвия; G – сила тяжести поднятого пласта на поверхности клина; P_a – сила адгезии (прилипания почвы); W – сила сопротивления сдвигу; J – силы инерции; K_a , K_d – коэффициенты, выражающиеся через углы резания и сдвига пласта.

Подробно формулы каждой составляющей, выраженные через параметры клина и свойства почвы, приведены в книге П.Н. Бурченко [6]. Здесь же приводятся результаты экспериментальных исследований и обширный список работ по теории резания почв разных лет.

Подобные кинетостатические модели взаимодействия рабочего органа с почвой, заменяющие распределённую нагрузку сосредоточенными силами, широко распространены в земледельческой механике. Достоинством их является возможность оценки характера влияния каждого параметра на процесс резания. Однако обилие коэффициентов, требующих экспериментального определения для каждого типа почвы, обесценивает их практическую значимость и оставляет их только в сфере научной. Несмотря на простоту, широкого применения в инженерной практике они не находят.

Кинетостатика строит упрощённые макроуровневые модели силового равновесия клина. Они не учитывают распределённость нагрузки по поверхности клина в почве, не позволяют рассчитывать картину обтекания клина и совершенно не описывают процессы в самой почвенной среде (рыхление, крошение пласта), ради которых клин используется.

4.1.5. Микроуровневые модели деформируемой почвенной среды

Для более полного описания процесса почвообработки необходимы микроуровневые динамические модели, способные описать изменение состояния и свойств почвенной среды в каждой ее точке.

Почвенная среда и рабочий орган в общем случае являются системой с распределёнными параметрами, и задача движения клина в почвенной среде является краевой задачей. Силы сопротивления распределены по поверхности рабочего органа, в почвенной среде образуется сложное поле напряжений и деформаций, которое разрушает структуру почвенной среды. В силу сложности описания таких процессов они представляются в земледельческой механике различными упрощёнными моделями.

Все многообразие свойств и состояния почвенной среды сводят к двум основным моделям: дискретной и сплошной средам.

Модель сплошной среды строится классическими методами механики сплошных сред в виде уравнений равновесия в частных производных типа [3]:

$$\rho d\mathbf{V}/dt = \rho \mathbf{F} + (\partial \sigma_x / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + \partial \sigma_z / \partial z), \quad (1.29)$$

где x, y, z – координаты точки почвенной среды; ρ – плотность среды в заданной точке; \mathbf{V} – вектор скорости точки среды; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – векторы напряжений по граням элемента почвенной среды; \mathbf{F} – вектор массовых сил, действующих на элемент среды.

Начальные и граничные условия краевой задачи задаются указанием на границах почвенной среды напряжений и скоростей, в том числе в начальный момент времени.

В почвообработке задача состоит в нахождении напряжений и скоростей под действием заданных сил. В уравнении известными считаются компоненты нагрузки. Остальные величины: плотность, 6 компонентов напряжений и 3 компоненты скоростей – подлежат определению. Всего 10 неизвестных для трёх уравнений. Поэтому уравнения (1.29) являются необходимыми, но недостаточными. Недостающие 7 уравнений получают с учётом физико-механических свойств и условий прочности почвенной среды.

Свойства почвенной среды описывают реологическими зависимостями напряжения от деформации. Это даёт ещё 6 уравнений в добавление к трём основным уравнениям равновесия.

Обзор существующих расчётных моделей почв приводит проф. В.А. Жилкин [3].

Модель линейного деформирования почвы, называемую моделью упругости почв, получают при использовании линейных реологических уравнений. Применима для почвогрунтов в строительстве при однократном нагружении. Рыхление и крошение почвенных сред линейные реологические зависимости описывают плохо.

Модель предельного напряжённого состояния почвы строится добавлением к уравнениям равновесия условия типа уравнения прочности почв Кулона-Мора. Применяема для определения предельной несущей способности грунта, после которого наступает неограниченное увеличение деформаций.

Более сложные модели, позволяющие определять деформации во всём диапазоне нагрузок, требуют применения нелинейных реологических моделей. Они называются теориями пластичности почв.

Теория малых пластических деформаций А.А.Ильюшина, использует упрощённые представления об объёмных и сдвиговых деформациях и потому даёт приближённые решения.

Теории пластического течения дают более точные решения. Модель С.С. Григоряна (1958 г.) использует гипотезы законов объёмного и сдвигового напряжений, в которых учитывается явление разрыхления и изменения плотности. Модель неоднократно уточнялась в плане совершенствования закона объёмного деформирования. Проф. К.С. Султанов (1993 г.) предложил нелинейный закон, хорошо согласующийся с экспериментами на мягких почвах.

Недостаток расчётных моделей – неучёт многофазности почв, т. е. наличия у них твёрдой, вязкой, жидкой и газовой фаз. Для учёта многофазности применяются приближённые методы сведения неньютоновской среды к ньютоновской. Для почвы как твёрдой суспензии известен метод поправки Эйнштейна. Поправку добавляют к коэффициенту вязкости несущей фазы μ [20]. Приведённый коэффициент вязкости μ^* зависит от объёмной доли твёрдой примеси α :

$$\mu^* = \mu (1 + 2,5 \alpha). \quad (1.30)$$

где– Δ добавка, зависящая от формы частиц; она колеблется в пределах 2,3... 5.

Уравнение описывает условие разрушения. В механике сплошных сред десятое уравнение играет роль уравнения непрерывности, что для разрушаемой на кусочки почвы не подходит. Дискретное состояние должно описываться другой моделью с нарушенными связями. Но переход почвы от одного состояния в другое трудно моделируется.

Легче смоделировать наиболее важное с агротехнической точки зрения изменение плотности почвы (объёмной массы) при её обработке. Этот процесс можно считать процессом притока (стока) массы с интенсивностью, характеризуемой секундным приростом массы J в данной точке:

$$J = dp/dt + \text{div}(\rho V). \quad (1.33)$$

При его увеличении происходит уплотнение, при уменьшении – рыхление. Такой подход позволяет осуществлять компьютерное моделирование процесса движения рабочего органа в почве (например, в среде FlowVision), получать не только напряжённое состояние пласта, поле скоростей и давлений, но и определять качественные показатели рыхления почвы [20].

В целом классическая механика сплошных сред не приспособлена для моделирования обработки почвы, так как не учитывает дискретный характер почвенной среды, которая в отличие от грунтов обязательно имеет агрегаты (комочки).

Свойства дискретных сред, состоящих из отдельных частиц, связанных силами сцепления, должна изучать статистическая механика, опираясь на законы теории вероятностей и математической статистики. Это направление требует переосмысления некоторых исходных положений механики сплошных сред и пока не получило достаточного развития в механике почв.

4.2.6. Задачи терраупругости

Задачи терраупругости состоят в определении характера движения рабочего органа в почвенной среде с учётом упругости его крепления.

Применяемые в почвообработке математические модели взаимодействия рабочего органа с почвой широко используют постулат, что пассивный рабочий орган закреплён жёстко, движется поступательно, не отклоняясь от прямолинейной траектории [1]. Это расходится с реальным процессом. Исследования показывают, что движение рабочего органа в почве сопровождается значительными упругими смещениями и колебаниями интенсивностью до 8g по виброускорению [5], что даёт право рассматривать их как технологический и энергетический фактор в почвообработке. Величина упругих смещений составляет от 10 до 110 мм; искажения геометрии рабочих органов достигают 20 град/кН [5]. Упругие смещения соизмеримы с глубиной хода и оказывают сильное влияние на качественные и энергетические показатели почвообработки. Абсолютно жесткого крепления не существует.

Терраупругость – это раздел динамики, изучающей движение упругозакреплённого рабочего органа (УЗРО) в почвенной среде.

Теория терраупругости - аналог теорий аэроупругости и гидроупругости, но для среды с более сложными реологическими свойствами.

Кинематика упругих смещений рабочего органа. Рабочий орган почвообрабатывающей машины обычно крепится к её раме, движущейся со скоростью V , консольной стержневой системой разной степени сложности (рис.1.15). Консольность крепления вытекает из необходимости вынесения места крепления за почвенный горизонт. Основная функция крепления - удержание требуемого положения рабочего органа в почве.

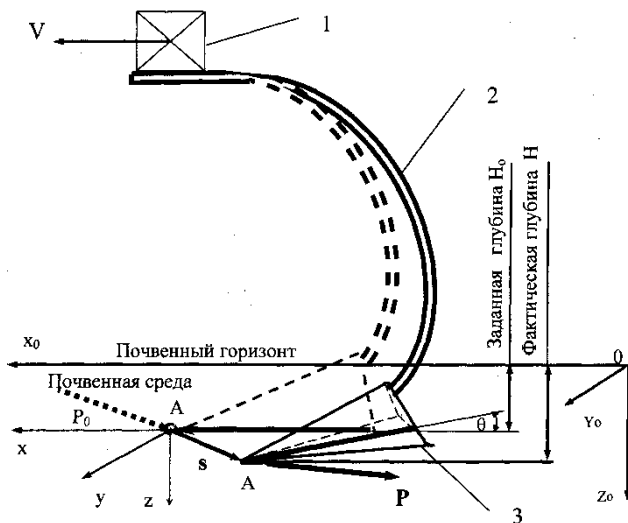


Рис.1.15. Схема упругих смещений рабочего органа

Рассматривая рабочий орган как трёхгранный клин, его упругие смещения под действием нагрузки P можно представить как смещение s носка лапы и поворот относительно этой точки (см. рис.1.15). Для малых углов поворот можно определять вектором $\theta = [\theta_x, \theta_z, \theta_y]$, как это принято при ориентации кораблей, самолётов и других движущихся в пространстве тел. Здесь $\theta_x, \theta_z, \theta_y$ - углы поворота вокруг координатных осей, имеющие традиционные названия: θ_x - угол крена, θ_y - угол тангажа, θ_z - угол рыскания. Применять углы Эйлера нерационально, так как они не образуют вектора.

Смещения i -й точки рабочего органа

$$s_i = s + [\theta]L, \quad (1.34)$$

где L - радиус-вектор текущей точки рабочего органа относительно его носка; $[\theta]$ - матрица вращений на угол θ .

Структура матрицы вращения

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для плоской задачи это соотношение примет вид

$$s_r = s + \theta_y L, \quad (1.35)$$

т.е. в этом случае смещение задних кромок рабочего органа зависит только от его тангажа.

Зависимость смещений точек от нагрузки $\mathbf{s}_i(\mathbf{P})$, и их траектории в общем случае нелинейны.

Для нелинейных систем справедливы законы деформирования в приращениях:

$$d\mathbf{s} = [\Delta]d\mathbf{P}, \quad (1.36)$$

$$d\mathbf{P} = [\mathbf{C}]d\mathbf{s}, \quad (1.37)$$

$$d\theta = [\mathbf{H}]d\mathbf{P}, \quad (1.38)$$

где $[\Delta]$ - симметричная матрица податливости размерности 3×3 ;
 $[\mathbf{C}]$ - симметричная матрица жёсткости, размерности 3×3 ; $[\mathbf{H}]$ - матрица угловой податливости размерности 3×3 .

Структура матрицы податливости

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix},$$

где δ_{ik} - смещение по k -му направлению от единичной силы, приложенной по i -му направлению, причем согласно принципу взаимности $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Структура матрицы жёсткости

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

где $c_{ik}(\bar{P})$ - коэффициенты жесткости, характеризующие величину упругой силы по координате i на единицу смещения по координате k ; причем согласно принципу взаимности $c_{ik} = c_{ki}$.

Матрицы жёсткости и податливости связаны соотношением $[\mathbf{C}] = [\Delta]^{-1}$.

$$(1.39)$$

Структура матрицы угловых искажений H :

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & 0 & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

где h_{ik} - коэффициенты угловой жесткости, характеризующие угол поворота относительно i -й оси от единичной нагрузки по координате k , причем $h_{ij} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Нелинейности делают все эти матрицы зависимыми от нагрузки. Для сравнимости упругих свойств их необходимо определять в рабочей точке при номинальном рабочем значении нагрузки $P = P_n$.

Направление приложения силы описывает вектор направляющих косинусов $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}^T$, ($n_1 = \cos\psi_1$, $n_2 = \cos\psi_2$, $n_3 = \cos\psi_3$), т.е.

$$P = |P| \mathbf{n}. \quad (1.40)$$

Направление упругих смещений характеризуется соотношением компонентов вектора \mathbf{s} по разным координатам из выражения (1.36). Сравнение его с (1.40) показывает, что направления силы и упругого смещения в общем случае не совпадают; совпадение возможно только при диагональной матрице $[\Delta]$ ($\delta_{ik} \neq 0$ при $i \neq k$) и при равенстве её диагональных элементов: $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33}$, что практически неосуществимо.

На практике направление упругих смещений удобнее характеризовать параметром $\lambda = s_x/s_z$:

$$\lambda = (\delta_{12}\cos\psi_1 + \delta_{22}\cos\psi_2 + \delta_{23}\cos\psi_3) / (\delta_{11}\cos\psi_1 + \delta_{12}\cos\psi_2 + \delta_{13}\cos\psi_3). \quad (1.41)$$

Кинематические режимы работы упругой подвески. В зависимости от направления смещения носка лапы можно выделить три кинематических режима: с заглублением $\lambda > 0$, равновесный $\lambda = 0$ и с выглублением $\lambda < 0$.

При первом режиме с повышением тягового сопротивления возрастает вертикальная нагрузка, и лапа заглубляется, что еще больше увеличивает тяговое сопротивление. Процесс может нарастать лавинно, возникают рывки тягового сопротивления, угрозы прочности системы и неустойчивость хода лап по глубине.

Второй режим работы характеризуется равновесным состоянием, когда глубина хода лапы не зависит от колебаний тягового сопротивления. Эти условия обеспечивают устойчивость хода лапы по заданной глубине.

При третьем режиме увеличение тягового сопротивления вызывает подъем лапы, что приводит к снижению тягового сопротивления и возвращению лапы в исходное положение, т.е. система приобретает тенденцию к поддержанию постоянного тягового сопротивления (предохранительный эффект).

Система показателей упругости крепления. Упругие свойства крепления рабочего органа описываются двумя матрицами: жесткости $[C]$ и угловых искажений $[H]$, полностью характеризующими величину и направление упругих смещений рабочего органа. С учётом симметрии матриц они содержат 12 показателей: C_{11}, C_{22}, C_{33} - продольная, вертикальная и поперечная податливости, м/Н; C_{12}, C_{13}, C_{23} - податливости взаимосвязи, м/Н; $h_{21}, h_{31}, h_{12}, h_{32}, h_{13}, h_{23}$ - угловые податливости от горизонтальной, вертикальной и поперечной нагрузки, град/мм.

Для плоской задачи остаётся 5 показателей: $C_{11}, C_{22}, C_{12}, h_{31}, h_{32}$.

Агротехнические требования к кинематике упругих смещений рабочего органа сводятся к трём условиям:

1) глубина хода носка рабочего органа при рабочей нагрузке должна соответствовать заданной, т.е. вертикальные отклонения его должны равняться нулю ($ds_z = 0$), или с учетом зависимости (1.37)

$$ds_z = (\delta_{12} n_1 + \delta_{22} n_2 + \delta_{23} n_3) = 0; \quad (1.42)$$

2) направление упругих смещений должно быть равно требуемому по технологии и энергосбережению, т.е. $\lambda = \lambda_{\text{треб}}$, или

$$(\delta_{21} n_1 + \delta_{22} n_2 + \delta_{23} n_3) / (\delta_{11} n_1 + \delta_{12} n_2 + \delta_{13} n_3) = \lambda_{\text{треб}}, \quad (1.43)$$

где $\lambda_{\text{треб}}$ - требуемое направление упругих смещений при номинальной нагрузке;

3) вертикальные упругие смещения удалённых точек подошвы УЗРО не должны выходить за пределы агродопуска A_d :

$$\{s + [\Phi]L\}_z < A_d, \quad (1.44)$$

здесь Φ – матрица вращений для углов $\theta = [H]P_n$.

Условие равномерности хода по глубине требует равновесного кинематического режима ($\lambda=0$), не реагирующего на колебания нагрузки.

Реализовать эти требования можно, управляя межкоординатными связями (коэффициенты $c_{ik} \neq k$ в матрице жесткости) и угловыми искажениями упругого крепления.

Динамическая модель терраупругости. В общем случае модель взаимодействия УЗРО с почвой должна описываться трудноразрешимыми уравнениями в частных производных типа (1.10).

Динамическую модель теории terraупругости целесообразно строить переходом на макроуровень через вектор состояния.

Вектор состояния системы «УЗРО - почва» включает векторы положения носка рабочего органа \mathbf{P} , вектор углов поворота θ и их производные:

$$\mathfrak{Z} = \{\mathbf{P}; \theta; d\mathbf{P}/dt; d\theta/dt\}. \quad (1.45)$$

Сопrotивление почвы описывает вектор \mathbf{F} размерностью $n=6$, включающий составляющие силы сопротивления \mathbf{P} и момента \mathbf{M} :

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{P}; \mathbf{M}\} = \{P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z\}^T. \quad (1.46)$$

Согласно вышеизложенной теории клина сопротивление почвы оказывается вектор-функцией вектора состояния:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}[\mathfrak{Z}]. \quad (1.47)$$

В существующей теории резания крепление считается абсолютно жёстким, и $\mathfrak{Z}_0 = \text{const}$. Вектор изменения состояния рабочего органа от упругих смещений

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{s}; \theta; d\mathbf{s}/dt; d\theta/dt\}, \quad (1.48)$$

Результирующее значение вектора состояния

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 + \mathbf{U} = \{\mathbf{H} + \mathbf{s}; \theta; \mathbf{V} + d\mathbf{s}/dt; d\theta/dt\}, \quad (1.49)$$

и сопротивление почвы движению рабочего органа выразится через изменённый вектор состояния:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} \{\mathfrak{Z}_0 + \mathbf{U}\}. \quad (1.50)$$

Упругое крепление в общем случае является системой с распределёнными параметрами, находящейся под действием распределённой нагрузки. Разлагая формы упругих смещений по формам собственных колебаний основных частот и приводя силы и массы к носку рабочего органа, можно свести задачу к матричному дифференциальному уравнению в форме Коши, в котором за фазовые координаты приняты изменения вектора состояния \mathbf{U} :

$$[\mathbf{Y}]\mathbf{U}' = [\mathbf{G}]\mathbf{U} + \mathbf{R}\{\mathfrak{Z}\} + \rho(t), \quad (1.51)$$

$$\mathbf{R}\{\mathfrak{Z}\} = \mathbf{Q}\{\mathfrak{Z}_0 + \mathbf{U}\}, \quad (1.52)$$

где $[\mathbf{G}]$, $[\mathbf{Y}]$ - блочные матрицы собственных свойств упругой системы размерностью $2n$ со структурой вида:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{vmatrix};$$

здесь $[\mathbf{A}]$ - диагональная матрица коэффициентов инерции;
 $[\mathbf{B}]$ - симметричная матрица коэффициентов диссипации;
 $[\mathbf{C}]$ - симметричная матрица коэффициентов жесткости;

$[E]$, $[O]$ - соответственно единичная и нулевая матрицы размерностью n ;

Q – оператор свойств деформируемой почвенной среды;

$R\{Z_0\}=[O; F\{Z_0\}]$ - детерминированная вектор-функция реакции почвенной среды размерностью $2n$;

$\rho(t)=[O; f(t)]$ -случайная составляющая вследствие неоднородностей почвенной среды.

Число n обобщенных координат выбирается в зависимости от конкретной задачи. Так, при отсутствии моментов M упругие прогибы консольного крепления пропорциональны углам поворота, и число независимых координат в этом случае равно трём; векторы сопротивления и смещений трёхмерны:

$$s = \{x, y, z\}^T; \quad F = P = \{P_x, P_y, P_z\}^T. \quad (1.53)$$

Система из уравнений (1.51) и (1.52) образует нелинейную динамическую модель терраупругости. Первое уравнение системы описывает упругие смещения рабочего органа, второе - энергетику технологического процесса по принципу "вход-выход".

Структура модели представлена на рис1.16. В её основе лежит встречно-параллельное соединение звена УЗРО, описываемого уравнением (1.51), и звена энергетики технологического процесса почвообработки, описываемого уравнением (1.52).

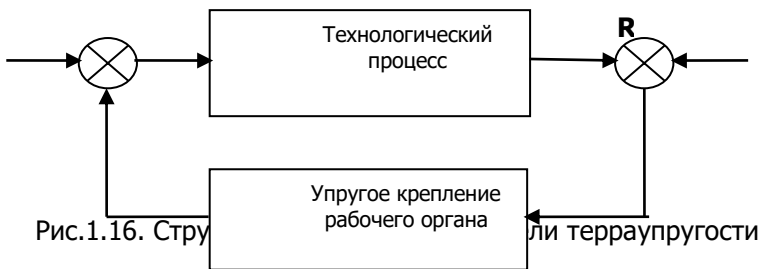


Рис.1.16. Структура модели терраупругости

Как видно из схемы, упругость крепления образует обратную связь между выходом и входом модели. Наличие такой обратной связи является важной отличительной особенностью работы УЗРО, позволяющей объяснить все динамические эффекты процесса.

Линеаризованная модель задачи терраупругости включает уравнение колебаний "относительно среднего"

$$Y u' = \{[G] + [Q]\}u + \rho(t) \quad (1.54)$$

и уравнение силового равновесия "в среднем"

$$[G]U + R\{Z_0\} + R_u = 0, \quad (4.55)$$

где \mathbf{U} - вектор математического ожидания фазовых координат; \mathbf{u} - центрированный вектор фазовых координат; $[\mathbf{Q}]$ - матрица коэффициентов статистической линеаризации размерностью $2n$; \mathbf{R}_u - вектор средних значений нелинейной вектор-функции $\mathbf{R}\{\mathbf{U}\}$; по физическому смыслу - реакция системы на упругость.

Достоинством модели является то, что каждое слагаемое имеет физический смысл:

матрица $[\mathbf{G}]$ описывает свойства упругого крепления рабочего органа;

матрица $[\mathbf{Q}]$ описывает упругие и вязкие свойства почвенной среды; по физическому смыслу является матрицей квазиупругости почвенной среды;

среднее значение реакции системы на упругость \mathbf{R}_u характеризует энергоэффект УЗРО по отношению к жёсткому;

$\mathbf{R}\{\mathcal{F}_0\}$ – статическая силовая характеристика жесткой системы, является традиционной задачей земледельческой механики о зависимости силы сопротивления от режимов резания.

Анализ уравнений (1.51), (1.54), (1.55) выявляет ряд динамических эффектов: прецессию собственных частот под нагрузкой, появление неустойчивых режимов типа известных в механике дивергенции и флаттера, автоколебания, вибро- и энергоэффект упругого крепления, определяемый средним значением реакции на упругость

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_u. \quad (4.56)$$

Модель позволяет проводить оптимизацию жёсткости упругого крепления. В качестве параметров оптимизации упругого крепления приняты 6 коэффициентов матрицы жесткости \mathbf{C} , доступные для управления: три диагональных элемента (C_{11} , C_{22} , C_{33}) и три элемента межкоординатных связей (C_{12} , C_{13} , C_{23}).

Практические рекомендации по расчету и оптимизации упругого крепления приведены в отраслевых методических указаниях МУ 23.2.48-89, разработанных в НПО ВИСХОМ [7].

Глава 5. Типовые расчётные задачи машин для возделывания

Теоретические модели применяются главным образом в исследовательских целях. Они, как правило, многомерные инвариантные, сложные и малоприспособлены для инженерно-расчётных задач. Для инженерной практики инвариантные теоретические модели необходимо преобразовать в более простые аналитические или алгебраические модели. Такие аналитические модели принято называть расчётными. Множество расчётных моделей, с указанием правил и последовательности их применения принято называть методикой расчётов. Методики расчёта являются итогом и завершением исследовательских работ.

Методика расчета представляет процедуру применения найденных аналитических моделей. Её рационально оформлять в виде алгоритма, создавая удобства для последующего программирования. В этом случае согласно принятой классификации она должна считаться алгоритмической моделью.

Основными расчётными задачами для мобильных машин для возделывания являются:

1. Выбор и расчёт параметров рабочего органа, заканчивающегося определением размеров и геометрии рабочего органа (профиля отвала, углов атаки, резания, крошения).
2. Расчёт конструктивно технологических параметров машины, заканчивающегося разработкой принципиальной схемы (способ агрегатирования, расстановка рабочих органов, опорных колёс, высота рамы, подъём в транспортное положение и др.).
3. Силовой расчёт агрегата.
4. Проверка агрегата на статическую устойчивость.

Этот состав типовых задач типичен для всех видов НТТС, но имеет некоторую специфику для машин возделывания, связанную с обязательным наличием рабочих органов, воздействующих на окружающую среду, почву, растения.

Разберём типовые расчётные модели для самых простых машин – почвообрабатывающих плугов. С точки зрения структуры они имеют все характерные части: рабочие органы, колёсный ход, раму и устройства агрегатирования и регулировки.

5.1. Расчётные модели сельскохозяйственных машин

5.1.1 Расчётные модели плугов

Плугом принято называть почвообрабатывающее орудие, осуществляющее основную обработку почвы с оборотом пласта - вспашку поля.

Классификация плугов проводится по типу рабочих органов, по способу агрегатирования, по технологическому процессу, по конструкции рамы.

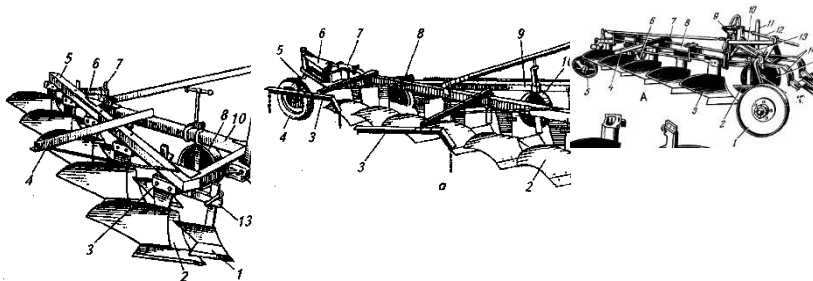
По типу рабочих органов различают лемешные, дисковые, чизельные, ротационные и комбинированные плуги. Их конструкции описаны в учебниках /1/, /2/. Наиболее распространены лемешные плуги, другие применяют в особых условиях.

По способу агрегатирования плуги делят на прицепные, полунавесные и навесные.

По технологическому процессу - на плуги для свально-развальной и для гладкой вспашки без образования свальных гребней и разъемных борозд.

Состав элементов плуга: рабочие органы, рама, ходовая часть, агрегатирование и регулировки глубины хода.

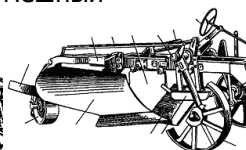
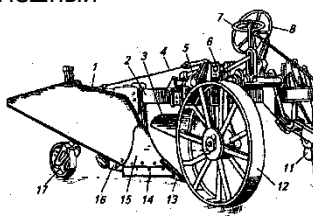
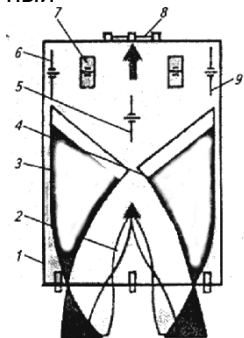
Конструкции плугов разнообразны. Приведены на рисунке 5.1.



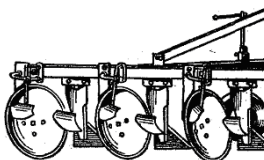
Навесной лемешный

Полуприцепной лемешный

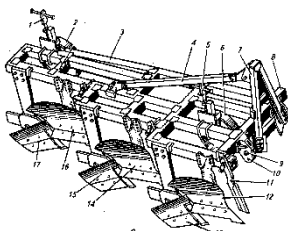
Прицепной лемешный



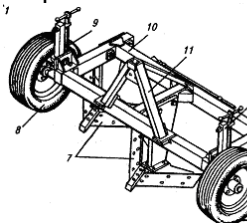
Фронтальный



Прицепной плантаж-ный

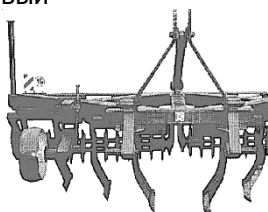


Прицепной ку-старниковый



Навесной

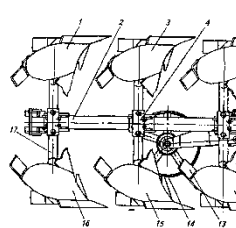
Диско-вый



Ярусный



Плоскорез



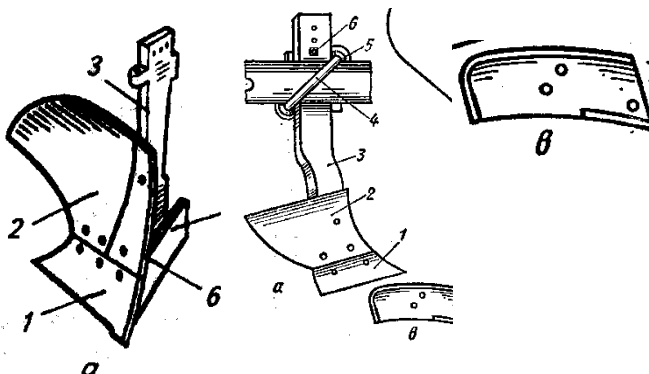
Чизельный навес-ной

Чизельный прицепной

Оборотный

Основной рабочий орган лемешного плуга - корпус плуга, вспомогательные - предплужник, углосним, ножи (таблица 5.1).

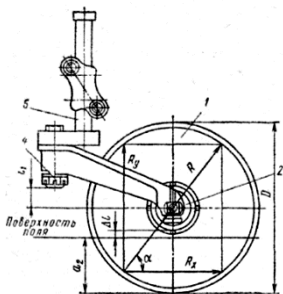
Таблица 5.1. Рабочие органы плугов



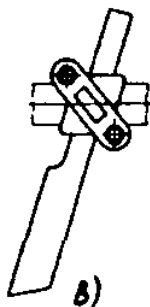
корпус плуга

предплужник

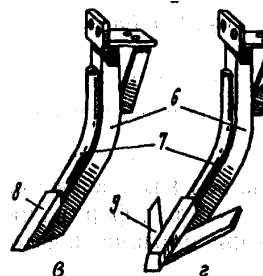
углосним



дисковый нож



черенковый
нож



рыхлители

Расчётная модель строится как алгоритмическая и представляет процедуру использования множества аналитических, (алгебраических, логических) моделей, полученных при исследованиях работы элементов машин, опытных данных..

В качестве примера рассмотрим расчёты лемешного плуга

Расчёт проводится в два этапа:

1. Расчёт требуемых эксплуатационных параметров агрегата.
2. Расчёт конструктивно-технологических параметров машины.

Особенность расчёта агрегируемых машин состоит в том, что для рационального расхода горючего и моторесурса он должен полностью загружать применяемый трактор. Недогруженные режимы разорительны. То есть, сначала выбирают движитель (трактор), а под него рассчитывают плуг.

Исходные требования: назначение плуга, климатические зоны применения, свойства почвы, тип и характеристики трактора, режим работы: глубина a , рабочая скорость V и др.

5.1.1.1. Расчёт эксплуатационных параметров агрегата

1. Выбор способа совмещения борозд на поле: свально-развальная пахота или гладкая. Для 1-й – постоянная работа корпусов с одинаковым оборотом пласта (левосторонних): плуг простой, качество пахоты невысокое. Для 2-го – чередование работы лево- и правосторонних корпусов; плуг более сложный и тяжёлый, выровненность поля высокая. В этом случае следует принять способ смены корпусов разной ориентации: оборотный, клавишный, челночный или поворотный.

2. Выбор типа агрегатирования плуга с трактором: навесной, полуприцепной, прицепной.

Следует начинать с самой простой и манёвренной конструкции – навесного плуга. При нагрузках больших, когда расчёт на устойчивость навесного плуга не даёт надёжного результата, переходят к полунавесному, а затем и прицепному плугу. Самые нагруженные плуги: плантажные, болотные при этом получатся прицепными, плуги общего назначения для старопахотных полей останутся навесными.

3. Сила тяги трактора P. Сила P определяется для реальной почвы с учётом сил сцепления c колёс трактора с почвой. Для отечественных тракторов в паспортных данных задаётся сила тяги в тоннах для каждого класса: 0, 6, 0,9, 1,4, 2, 3, 4, 5 тонн для средних почв. Для зарубежных тракторов и новых отечественных задаётся только мощность двигателя. В этих случаях тяговое усилие трактора при абсолютном сцеплении колёс с почвой определяется по формуле

$$P_N = N_T / V, \quad (2.5)$$

где N_T – мощность трактора, кВт; V – скорость движения агрегата, м/с.

Скорость агрегата можно подбирать оптимальную по тяговой характеристике трактора, т.е. ту, при которой агрегат даст наибольшую производительность. Это соответствует скорости, на которой трактор реализует максимальную мощность. Обычно $V = 1,5 - 2,0$ м/с.

Тяговое усилие не должно превышать силу сцепления колёс трактора с почвой P_c .

$$P_c = G_B \phi \cos \alpha, \quad (2.6)$$

где G_B – нагрузка на ведущие колёса от веса трактора; ϕ – коэффициент сцепления колёс с почвой, обычно 0,8; α – возможный угол наклона поля к горизонту, $\alpha = 5...10^\circ$.

$$G_B = G_T (L - A) / L, \quad (2.7)$$

где G_T – вес трактора; L – колёсная база трактора; A – положение центра масс трактора (из паспортных данных).

В качестве тягового усилия трактора P принимается меньшее значение: P_N или P_c .

$$P = \min\{P_N, P_c\}.$$

4. Тяговое усилие на крюке трактора, т.е. расходуемое на почвообрабатывающее орудие,

$$P_k = P - G_T(f + \sin \alpha), \quad (2.8)$$

где f – коэффициент сопротивления перекачиванию трактора по полю.

5. Ширина захвата плуга

$$B = \mu P_k / a K_c \text{ м,} \quad (2.9)$$

где $\mu = 0,8...0,95$ - коэффициент использования тяги; K_c - удельное сопротивление почвы пахоте, $K_c = 2...12 \text{ Н/см}^2$ в зависимости от типа почвы.

6. Ширину захвата одного корпуса выбирают из условия

$$b = k a \quad , \quad (2.10)$$

где k - коэффициент формы пласта. Для гарантии опрокидывания пласта $k > k_{\text{крит}}$; $k_{\text{крит}} = 1,27$ при работе без предплужника и $k_{\text{крит}} = 1,06$ при работе с предплужником.

Полученное значение b округляем до значений стандартной ширины корпуса плугов общего назначения $b = 30; 35; 35$ и 40 см.

В специальных плугах, предназначенных для очень глубокой пахоты (более 40 см), при нормальном отношении k для обеспечения оборачиваемости пласта надо иметь слишком большую ширину захвата b . Однако при такой ширине ухудшается крошение пласта, поэтому в подобных случаях применяют ярусную вспашку, при которой пласт снимается в два приема. Верхняя часть пласта снимается верхним корпусом, а остальная - поднимается нижним. Захват корпусов одинаков, а отношение k становится в пределах допустимого.

Для специальных плугов с оборачивающими отвалами (болотных и др.), предназначенных для работы на связных почвах, рекомендуется принимать $k=2...3$, для плантажных плугов $k=0,83...0,9$.

Для более полного подрезания пласта почвы и во избежание огрехов при пахоте ширину захвата лемеха корпуса увеличивают на величину перекрытия Δb . Для плугов общего назначения $\Delta b=25...30$ мм, для луцильников $\Delta b=50...70$ мм.

7. Уточнённое число корпусов n и ширина захвата B :

$$n = (B - \Delta b) / (b + \Delta b); \quad (2.11)$$

принимая ближайшее целое число N , тогда уточнённая ширина захвата плуга:

$$B = N (b - \Delta b) + \Delta b. \quad (2.12)$$

8. Вес плуга. Ориентировочный вес плуга G_n определяют на основании статистических данных об удельной металлоемкости q_n на 1 м ширины захвата существующих плугов родственного класса:

$$G_n = q_n B \quad , \quad (2.13)$$

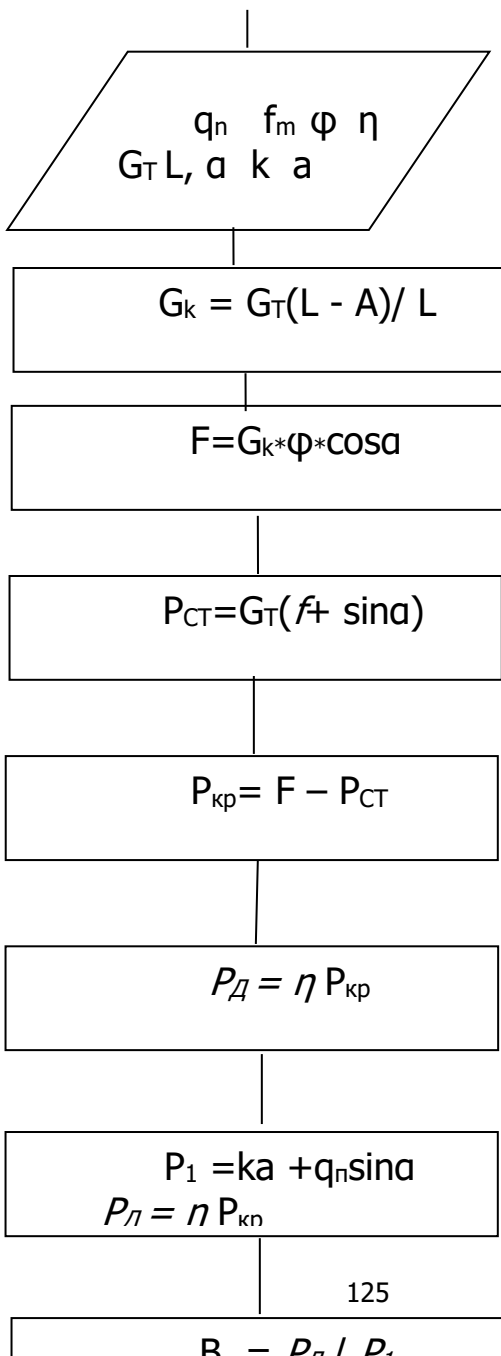
где q_n - удельная металлоемкость, кг/м.

Определяется по каталогам сельхозтехники.

Первый этап определяет главные показатели будущей машины.

Приведённую методику можно представить в виде алгоритма (рис. 5.3), являющегося исходным материалом для программирования.

Алгоритм расчета с тестовым примером



=
=
=
=
=
=
=

Рис. 5.3. Алгоритм расчёта параметров пахотного агрегата
5.1.1.2. Расчёт конструктивно-технологических параметров плуга.

Расчёт КТП также проводят в определённой последовательности. Она включает:

- выбор параметров корпусов : тип и конструкции отвала, лемехов, полевая доски, стойки корпуса.

- определение параметров предплужника.
- определение параметров ножей - дисковые , черенковые

;

- определение параметров почвоуглубителя;
определение взаимное расположение корпуса плуга и вспомога-тельных рабочих органов плуга;

- расстановка корпусов.
- определение высоты расположения рамы плуга Н ;
- определение диаметров и ширины колес;
- выбор ширины колеи передних колес B_1
- расположение опорных колёс.

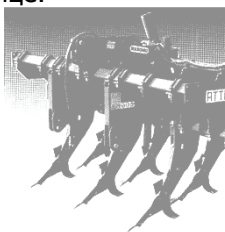
Подробности расчёта, формулы и опытные данные приведены в пособии [] и подлежат изучению на практических занятиях.

Изложенная алгоритмическая расчётная модель пригодна для других типов почвообрабатывающих машин. Процедура и последовательность сохраняется, изменяются только частные модели рабочего органа.

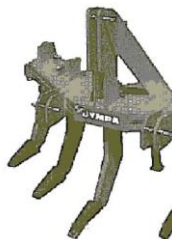
5.1.2. Расчётные модели глубокорыхлителей

Глубокой обработкой почвы считается её обработка ниже пахотного слоя (т.е. глубиной 35...40 см). Глубокая обработка разрушает плужную подошву, препятствующую проникновению корней растений в нижние слои почвы, и улучшает её аэрацию и водный режим, обладает противозерозионными свойствами. Глубокое рыхление проводят глубокорыхлителями и чизелями. Строгой терминологии фирмы-изготовители не придерживаются.

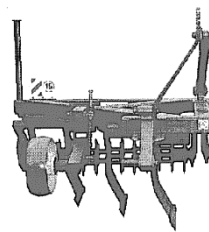
Распространённые виды глубокорыхлителей представлены в таблице.



Глубокорыхлитель Artiglio фирмы Gaspardo



Глубоко-рыхлитель Jumbra



Чизельный плуг ПЧН-4 типа Paraplay

Глубокорыхлители Gaspardo. Итальянская фирма Gaspardo выпускает семейства глубокорыхлителей Artiglio, Attila, Pinocchio

(рис.3.2), выполняющих обработку глубиной до 65, 55 и 45 см соответственно. Рабочие органы: зубья с быстросменяемыми накопечниками с победитовыми накладками и рыхлительными лезвиями, два зубовых катка с гидравлической и механической регулировкой глубины хода. Индивидуальные предохранители стоек зубьев обычно конструируются с предохранительным болтом.

Модульная конструкция рамы, комплекты креплений, колёс позволяют проводить трансформацию внутри каждого семейства, получая несколько типоразмеров ширины с разным числом зубьев.

За счёт глубокого рыхления глубокорыхлитель способствует восстановлению структуры и дренажа почвы, а ротационные зубовые катки, дробят комья и культивируют верхний слой почвы.

Глубокорыхлитель Jutra (рис.3.3) имеет V-образную раму, осуществляет рыхление и дренирование на глубину 60 см. На треугольной раме располагаются рыхлители, опорных колес 2, регулятора 5 глубины обработки, навески 3 и подставки. На раме плуга можно установить девять или одиннадцать рыхлителей. V-образная рама делает конструкцию компактной и прочной.

У глубокорыхлителей специфичны модели расстановки рыхлителей.

Всякий рыхлитель при блокированном резании образует впереди себя зону деформации, расширяющуюся от носка долота шириной b к поверхности поля под углом конуса θ (рис.3.1, а). Длина зоны деформации L' на поверхности поля:

$$L' = h \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \quad (3.1)$$

где α – угол резания; φ – угол трения почвы о металл.

Ширина зоны

$$S = 2h \operatorname{tg}(\theta/2) / \cos(\alpha + \varphi). \quad (3.2)$$

Рыхление почвы деформациями сдвига и отрыва наблюдается только до глубины $h_{кр}$ - критической глубины резания, после которой рыхление прекращается и происходит смятие почвы в боковых направлениях [1]:

$$h_{кр} = \{b[0,1 \rho(1+3\operatorname{tg} \psi')/\sigma_{от}]-2,5\} / (4,2+\operatorname{ctg} \alpha), \quad (3.3)$$

где ρ – сопротивление почвы смятию; ψ' – угол приложения нагрузки.

При $\rho/\sigma_{от} = 100$ и 150 и $b=0,05$ м наибольшее значение $h_{кр}$ имеет место при углах резания $\alpha=20^\circ$, что также соответствует минимуму тягового сопротивления. При больших углах резания ($\alpha=25...45^\circ$), по данным А.Н. Зеленина, критическая глубина $h_{кр}=(2,5...4) b$.

Боковое рыхление начинается только с глубины $h_{кр}$.

Из-за этих особенностей дно борозды рыхлителей неровное; зоны рыхления двух смежных стоек могут перекрывать друг друга (рис.3.1, в), и на дне борозды остаются гребни высотой h_r .

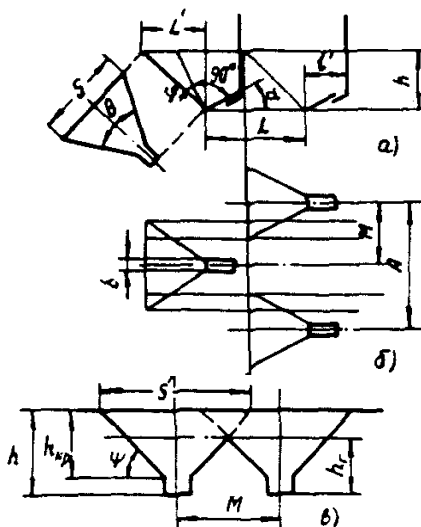


Рис.3.1. Схема расстановки рыхлительных стоек:
а – в вертикальной плоскости; б - в горизонтальной плоскости;
в – профиль дна борозды

Особенность работы рыхлителей - образование на дне борозды гребешков высотой

$$h_r = (M-b)/2ctg\psi, \quad (3.4)$$

где ψ - угол боковой деформации почвы; M – междуследие – расстояние между соседними бороздами рабочих органов. Различают глубокое рыхление, если образуется сплошной слой разрыхлённой почвы ниже пахотного слоя, т.е $a=h-h_r > 35$ см, и чизелевание (разуплотнение), если сплошность рыхления мала или отсутствует вовсе: $a=h-h_r \leq 12$ см. Промежуточная зона – плужная безотвальная обработка.

Толщина разрыхлённого слоя с учётом соотношения (3.4) определяется расстановкой рабочих органов – междуследием M :

$$a = h - h_r = h - (M-b)/2ctg\psi, \quad (3.5)$$

где ψ - угол боковой деформации почвы.

У глубокорыхлителей $M < S'$, у чизелей $M > S'$. Промежуточное положение занимают чизельные плуги и плуги-

глубококорыхлители, у которых $h_{кр}$ считается глубиной обработки ($a=h_{кр}$), а междуследие подбирается так, чтобы высота гребней по выражению (3.4) была бы меньше допускаемых агротребованиями ($h_g < h_{гдоп}$).

Шаг расстановки рыхлителей зависит от глубины обработки.

При однорядном расположении рабочих органов расстояние между стойками (междуследие) чизелей

$$M > b + S. \quad (3.6)$$

Для снижения опасности забивания стоек почвой и растительными остатками их располагают в несколько рядов.

Расстояние между рядами лап (рис.3.1, а)

$$L \geq h \operatorname{tg}(\alpha + \varphi + \mu) / 2 + l' + b_c, \quad (3.7)$$

где μ - угол трения почвы о почву; l' - вылет лезвия; b_c - ширина стойки.

Для снижения забивания стоек рабочих органов почвой их часто располагают по V-образной схеме. Тогда угол их расстановки

$$L = \operatorname{arctg}(L/M). \quad (3.8)$$

Преимуществом V-образной схемы расстановки рабочих органов является то, что одна стойка работает в сплошной среде (блокированное резание), а остальные - во взрыхленной с одной стороны, что снижает тяговое сопротивление на 17...20% (В.В. Труфанов).

Из-за наличия зон деформации рабочая B и конструктивная B_k ширина захвата рыхлителя различаются:

$$B_k = (n-1)M + b, \quad (3.9)$$

$$B = B_k + S'. \quad (3.10)$$

В связи с эпизодичностью использования глубококорыхлителей (разрушение плужной подошвы проводится обычно раз в пять лет) специализированных глубококорыхлителей и чизелей выпускается мало. Обычно у машин к глубокому рыхлению обычно добавляется функция плужной обработки. Серьёзных изменений конструкции не требуется, просто орудие должно работать на меньшей глубине с перекрытием зон деформации. Так появляются комбинированные орудия: плуги-глубококорыхлители, чизельные плуги и т. п.

5.1.3. Особенности расчета чизельных плугов

Оказалось, что если отказаться от выровненности дна борозды, то требованиям почвозащитной технологии в большей степени отвечают чизельные плуги [17]. Само чизелевание - это разуплотнение почвы чизельным рабочим органом, образующим

узкую борозду глубиной более 35 см. Соответствующей расстановкой чизельных рабочих органов можно добиться перекрытия их зон рыхления. Такой чизель со сплошным рыхлением на глубину основной обработки называют чизельным плугом.

Различают чизельные плуги с прямыми или наклонными стойками («параплау»).

Чизельные плуги с прямыми стойками. Зона деформации рыхлителя имеет сложную форму. Глубина рыхления начинается не с глубины хода h , а только с критической глубины рыхления $h_{кр}$. Рыхление почвы чизельными плугами требует деблокированного резания, когда зоны рыхления двух смежных стоек частично перекрывают друг друга (рис.2.22) и на дне борозды остаются гребни высотой h_g .

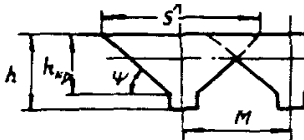


Рис.2.22. Зоны деформации рыхлительных стоек чизельных плугов в поперечной плоскости

перекрывают друг друга (рис.2.22) и на дне борозды остаются гребни высотой h_g .

$$h_g = (M-b)/2ctg\psi, \quad (2.1)$$

где ψ - угол боковой деформации почвы.

Действительная высота гребней h'_g обычно меньше расчетной: $h'_g = k_g h_g$. Величина $k_g = 0,49...0,61$ (П. П. Корниенко).

Расстановку чизельных рабочих органов проводят с учётом допустимой высоты гребней на дне борозды h'_g . Если она задана агротребованиями, то расстояние между стойками чизельного плуга следует задавать с учетом угла поперечной деформации ψ :

$$M=b+2 h_g ctg\psi. \quad (2.2)$$

Чтобы расширить зону рыхления, на прямых стойках устанавливают лапу или лезвия типа плоскореза (см. рис.2.20, в).

Чизельные плуги с наклонными стойками имеют нижнюю часть, наклоненную под углом примерно $\alpha=45^\circ$; зоны рыхления почвы показаны на рис.2.23.

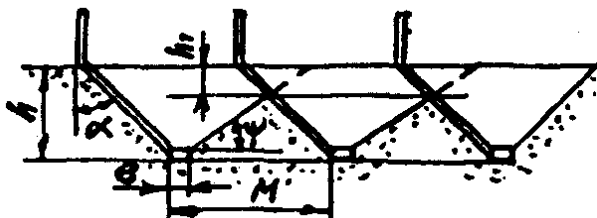


Рис.2.23. Схема работы наклонных стоек типа «Paraplay»

Пример : плуг-глубокорыхлитель чизельный ПЧН-4 с наклонными стойками типа Paraplay показан на рис 5.3, в). Он предназначен для чизелевания и безотвальной обработки почвы взамен пахоты.

Плуг состоит из V – образной рамы, рабочих органов-рыхлителей, опорных колес, регулятора глубины обработки, навески. На раме плуга можно установить девять или одиннадцать рыхлителей.

Особенность машины – применение стоек типа Paraplay, дающих сниженное тяговое сопротивление.

Глубина обработки до 45 см, скорость 7...10 км/ч, ширина захвата 4 м, масса 1870 кг, производительность 3,2 га/ч. Агрегатируют с мощными тракторами типа К-700 К-701.

Величина междуследия (Н.И. Волостникова):

$$M = b + [h - (h_1 + h_2)] \left(\frac{1}{tg \psi} + tg \alpha \right), \quad (2.3)$$

где h_2 - глубина щели, прорезаемая долотом на дне борозды; α - угол наклона стойки в поперечно-вертикальной плоскости; h_1 - глубина сплошной обработки,

$$h_1 = (h - h_2) - (M - b) \frac{\sin \psi}{\sin(\psi + \alpha)} tg \psi. \quad (2.4)$$

Поскольку стойки идут по поверхностям сдвига пластов, то их сила сопротивления и повреждения стерни будут минимальны. Зависимости для определения тягового сопротивления наклонных стоек для заблокированного и полублокированного резания почвы получил Л.С. Орси́к.

Приведённые соотношения являются условиями использования глубокорыхлителей и чизелей для плужной обработки, что отражается в названиях орудий. Так, появляются названия: плуги-глубокорыхлители, чизельные плуги и т.п. сочетания. Устройство таких специфических плугов см. гл.3 «Машины для глубокой обработки».

Принятые конструктивные решения по рабочим органам, колёсам, раме и их расстановке позволяет решать вопросы компоновки со всеми размерами и провести разработку принципиальной схемы машины в масштабе.

Получение принципиальной схемы машины открывает путь к силовому расчёту мобильных машин, принадлежащим к наземным транспортно-технологическим системам (НТТС).

5.2. Силовой расчёт НТТС на примере плуга

Под силовым расчётом НТТС понимают определение внешних силовых нагрузок, определяющих энергетику и характер движения системы.

Силовой расчёт проводят после расчёта КТП машины, итогом которого является принципиальная схема НТТС (агрегата), отражающая принятую компоновку машины и способ агрегатирования. Принципиальная схема выполняется в масштабе и служит исходником при построении расчётных схем.

Силовой расчёт должен включать этапы:

1 – определение нагрузок и сил сопротивления рабочих органов;

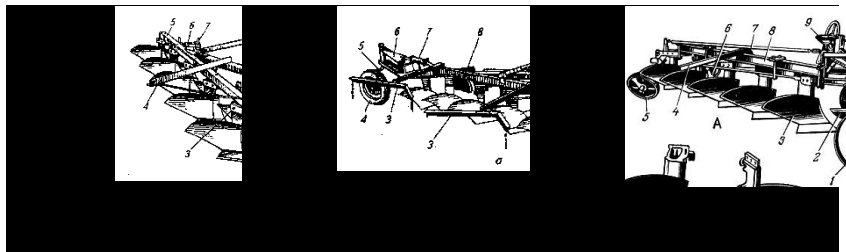
2 - разработка расчётной схемы, путем приложения на принципиальной схеме всех сил (сил сопротивления, движущих сил, реакций, нагрузок на рабочие органы);

3- кинетостатический расчёт системы; по известным силам сопротивления определяются тяговое сопротивление и движущие силы;

4 - определение реакций связей между ответственных узлами машины.

Рассмотрим моделирование силового расчёта НТСС на примере плуга

Проведём силовой расчёт на примере пахотного агрегата, включающий лемешный плуг и гусеничный трактор.



Под силовым расчётом плуга будем понимать определение всех нагрузок, действующих на агрегат, исходя из принятой компо-

новки и способа агрегатирования. Результаты силового расчёта используются и для прочностных расчётов, и для выбора параметров агрегата, обеспечивающих устойчивый ход плуга. Под устойчивостью понимается независимость положения плуга от колебаний сил сопротивления рабочих органов.

Важным этапом моделирования являются модели тягового сопротивления машин. Тяговое сопротивление определяет энергетику процесса и является наряду с производительностью важнейшим эксплуатационным показателем. Однако определение сопротивления почвенных сред требует сложного моделирования на микроуровне, поэтому в ходу ряд упрощённых моделей.

5.2.1. Модели тягового сопротивления

Рассмотрим модели тягового сопротивления на примере простого плуга.

Усилие, необходимое для перемещения плуга при вспашке, называют тяговым сопротивлением плуга. Это горизонтальная составляющая результирующей силы сопротивления, которая действует на почвообрабатывающую машину.

В первом приближении среднее значение тягового сопротивления определяют по удельному сопротивлению почвы K_c , измеренному при динамометрировании обычных плугов:

$$P = K_c a B, \quad (2.28)$$

где a – глубина вспашки; B – ширина захвата плуга.

Значения удельного сопротивления почвы K_c определяются для различных типов почв и агрофонов (табл.2.4) и слабо зависят от конструкций плугов.

Таблица 2.4
Коэффициент удельного сопротивления почв K_c , кПа

Тип почвы	Степень освоения	Тип почвы по механическому составу			
		Глинистая	Тяжелый суглинок	Средний суглинок	Супесь
Дерново-подзолистая	Целина, залежь	99,4	71,7	50,7	40,8
	Травяной пласт	74,8	56,7	43,8	30,8

	Жни- вьё	66,9	47,8	35,4	25,9
Чер- нозём	Це- лина, за- лежь	92,3	72,1	53,1	40,3
	Тра- вяной пласт	88,4	58,2	45,6	32,3
	Жни- вьё	63,9	49,9	36,1	25,2
Каш- тановая	Це- лина, за- лежь	100,0	69,0	55,6	38,4
	Тра- вяной пласт	69,6	48,0	37,0	21,7

Удельное сопротивление лежит в основе деления почв по трудности обработки: $K_c < 30$ кПа – почва лёгкая; $K_c = 30 \dots 50$ – средняя; $K_c = 50 \dots 70$ кПа – среднетяжёлая; $K_c = 70 \dots 120$ кПа – тяжёлая; $K_c > 120$ кПа – очень тяжёлая почва.

Из-за случайного характера возмущающих факторов формула может давать результаты, сильно отличные от реальных. Коэффициент вариации может на ровных участках достигать 50%. В хозяйственных условиях варьирование достигает 80...100%, а пиковые значения R_x превышают средние в 2...2,7 раза [20].

Второй недостаток формулы (2.28) – её независимость от параметров и скорости движения плуга. Для их учёта более удобна формула В.П. Горячкина. Общее тяговое сопротивление плуга по В.П. Горячкину состоит из трёх составляющих:

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \quad (2.29)$$

где P_1 усилие, необходимое для перекатывания плуга и преодоления сил трения корпусов, ножа и предплужников о стенку и дно борозды, сил трения в подшипниках колес; P_1 пропорционально весу плуга G :

$$P_1 = f G, \quad (2.30)$$

где f - коэффициент трения, зависящий от типа почвы и агрофона (для жнивья $f = 0,5$); P_2 - сопротивление при деформации пласта, пропорционально площади сечения пласта:

$$P_2 = K_1 aB, \quad (2.31)$$

где a – глубина пахоты; B – ширина захвата; $K_1 = 20 \dots 100$ кПа – удельное сопротивление почвы; $K_1 = \eta K_c$; здесь $\eta = 0,7$ – КПД плуга; P_3 – сопротивление от преодоления сил инерции при обороте и отваливании пласта; пропорционально площади поперечного сечения пласта и квадрату скорости движения агрегата V :

$$P_3 = \varepsilon abnV^2, \quad (2.32)$$

где ε – скоростной коэффициент, учитывающий форму рабочей поверхности корпуса плуга, $\varepsilon = 1500 \dots 2000$ Н с² м⁴; V – скорость движения агрегата, м/с.

С учётом выражений (2.30)...(2.32) получаем для тягового сопротивления плуга формулу В.П. Горячкина:

$$P = f G + K_1 abn + \varepsilon abnV^2. \quad (2.33)$$

Зависимость позволяет определить основные факторы, влияющие на тяговое сопротивление плуга.

Усилие P_1 , необходимое для перекачивания плуга и преодоления сил трения корпусов, называют вредным. Сопротивления на деформацию, отбрасывание и перемещение частиц пласта называют полезным сопротивлением.

КПД плуга учитывает долю полезных сопротивлений в общем сопротивлении:

$$\eta = (P_2 + P_3) / (P_1 + P_2 + P_3), \quad (2.34)$$

или

$$\eta = (K_1 + \varepsilon V^2) / (f G/abn + K_1 + \varepsilon V^2). \quad (2.35)$$

Из формулы следует, что для повышения КПД плуга надо уменьшать удельные силы трения и удельный вес на единицу ширины захвата.

5.2.2. Определение сил, действующих на рабочий орган

В качестве примера определим силы, действующие на корпус плуга.

Многолетние исследования показали, что силы сопротивления почвы при работе корпуса плуга представляют собой пространственную систему сил и не могут быть приведены к одной равнодействующей. Однако, в каждой плоскости проекции, т.е. в горизонтальной xOy , вертикальной zOx и поперечной zOy , суммарное действие сил сопротивления почвы можно представить только одной результирующей силой [14].

В горизонтальной плоскости проекции (рис.2.28, а) на корпус действует сила R_{xy} , образующая с направлением движения угол $\delta = 15...25$. Точка приложения силы определяется расстоянием $l=0,4b$, где b - ширина захвата корпуса.

Составляющая R_x - тяговое сопротивление определяется по формуле

$$R_x = \mu k ab, \quad (2.36)$$

где $\eta = 0,6-0,8$ - КПД плуга; k — удельное сопротивление почвы; a - глубина пахоты.

Поперечная составляющая силы сопротивления:

$$R_y = R_x \operatorname{tg} \delta = (0,27...0,47) R_x. \quad (2.37)$$

Приблизленно $R_y = R_x/3$.

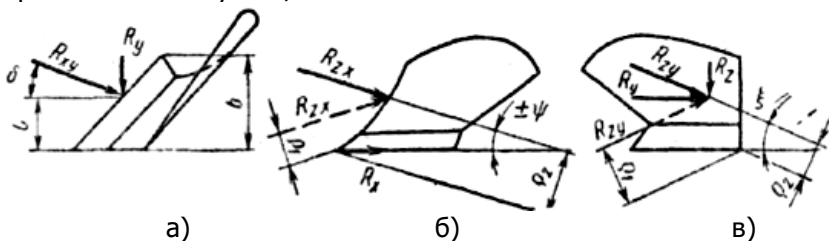


Рис.2.28. Силы сопротивления плуга в разных плоскостях

В вертикальной плоскости zOx (рис.2.28, б) на корпус действует сила R_{zx} , образующая с направлением движения (осью x) угол ψ . Значение угла ψ зависит от остроты лезвия лемеха и колеблется в пределах $+18^\circ$ у острых лемехов и -23° у затупленных лемехов на тяжелых почвах. В качестве расчетного следует принимать $\psi = \pm 12^\circ$.

Вертикальная составляющая силы сопротивления:

$$R_z = R_x \operatorname{tg} \psi; \quad (2.38)$$

$$R_{zx} = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}. \quad (2.39)$$

Расстояние вектора силы R_{zx} до носка лемеха равно:

$r_1 = a/2$ при положительном значении угла ψ ;

$r_2 = a/3$ при отрицательном значении угла ψ (на рисунке изображено штрихом).

В поперечной плоскости проекции zOy (рис.2.28, в) на корпус действует сила R_{zy} , образующая с направлением силы R_y угол ζ . Тангенс этого угла

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \delta * \operatorname{tg} \psi. \quad (2.40)$$

Из-за изменения угла ψ угол ζ также может иметь и положительное, и отрицательное значение. Значение силы R_{zy} равна геометрической сумме сил R_z и R_y :

$$R_{zy} = \sqrt{R_z^2 + R_x^2} = R_x \sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \psi} . \quad (2.41)$$

Расстояние от носка лезвия лемеха до вектора R_{zx} :

$r_1 = a/2$ при положительном значении угла ζ ,

$r_2 = 3a/4$ при отрицательном значении угла ζ .

Полная сила сопротивления

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} . \quad (2.42)$$

Силы, действующие на дисковый нож, сводятся к одной равнодействующей R_n . Она проходит через центр вращения диска под углом $\alpha = 50 \dots 53^\circ$ к горизонтальной плоскости.

Горизонтальная составляющая сопротивления дискового ножа R_{nx} на различных по удельному сопротивлению k почвах имеет значения (по данным проф. Г. Н. Синеокова [15]), приведённым в табл.2.5.

Таблица 2.5

Горизонтальная составляющая сопротивления дискового ножа R_{nx}

k , кГс/см ²	0,4	0,6	0,8
k , КПа	39,2	58,8	78,5
R_x , кГс	70...90	120...150	180...220
R_x , Н	700...900	1200...1500	1800...2200

Вертикальная составляющая

$$R_{ny} = 1,2 R_{nx} . \quad (2.43)$$

5.2.3. Разработка расчётной схемы

Расчётная схема изображается в масштабе на базе принципиальной схемы, разработанной ранее с полученным числом корпусов, их расстановкой, размерами звеньев. Вводят систему координат OZXY.

Прикладывают пространственную систему сил, действующих на трактор и плуг в виде векторов. Пространственную систему сил изображают в двух координатных плоскостях: продольно-вертикальной ZOХ и горизонтальной плоскости – ХОУ. Соответственно все силы изображаются как проекции на плоскости с соответствующими индексами zх и ху.

Варианты расчётных схем пахотных агрегатов по способам агрегатирования приведены на рис. 1-3. Схемы приведены в двух проекциях на плоскости: вертикально-продольную zOx (вид сбоку) и поперечно-горизонтальную xOy (вид сверху).

Навесной плуг присоединяется к навеске трактора, имеет одно опорное колесо. Изображается в в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

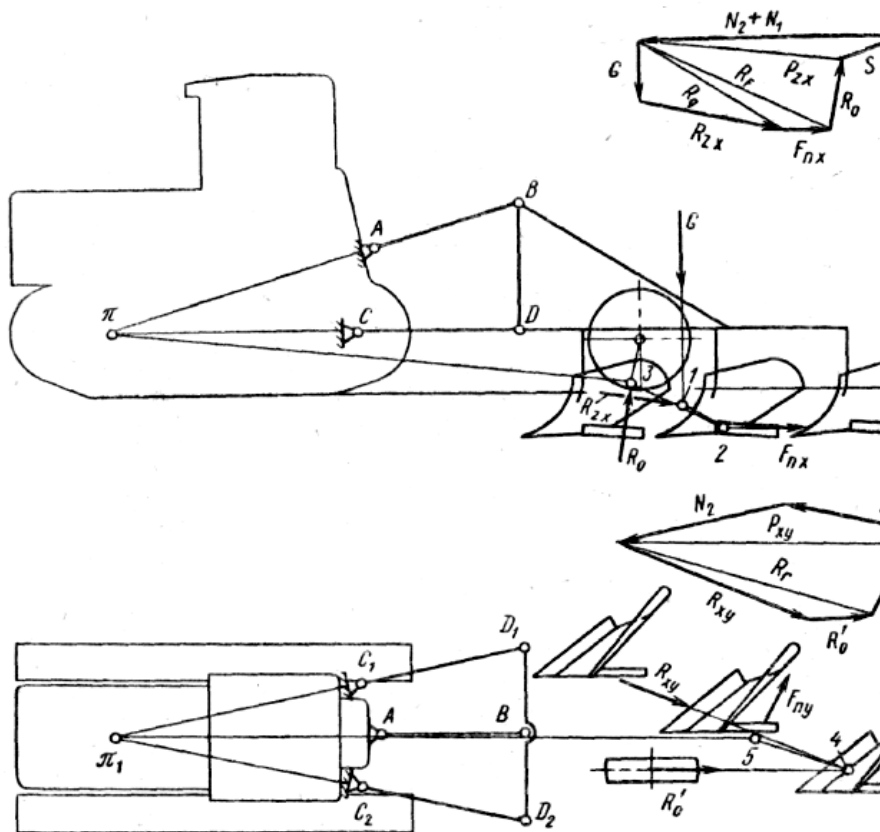


Рис.5.3 Расчётная схема навесного агрегата

Согласно расчётной схеме на плуг действуют векторы сил (см. рис. 3). Их представляем векторами (обозначения векторов выполнены жирными буквами):

G - сила веса плуга, известна, приложена в ЦТ плуга;

R_i - силы сопротивления корпусов плуга, $i=1, \dots, n$; определены, известны их проекции R_x ; R_y , R_z ; Для удобства силы сопротивления корпусов плуга R_i , приводят к одной равнодействующей R . Поскольку векторы R_i параллельны, то величина равнодействующей R равна их сумме, а точку приложения необходимо определять как равнодействующую параллельных векторов.

R_0 - реакция опорных колёс, известна по направлению, величина неизвестна;

F_n - результирующая сила трения полевых досок, известна по направлению и точке приложения, величина подлежит определению;

P — сила тяги, проходит через центр вращения навески; величина и направление подлежат определению.

Прицепной плуг имеет три колеса: полевое, бороздное и заднее.

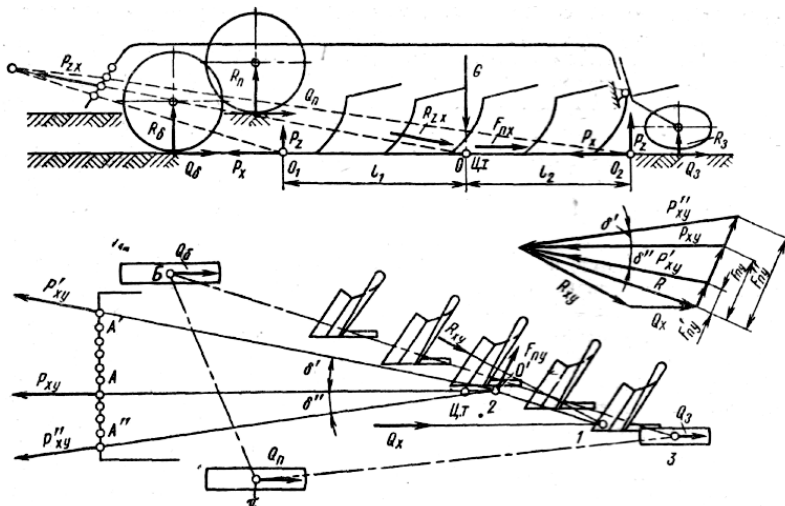


Рис.2.30. Расчётная схема прицепного плуга

На прицепной плуг действует система сил :

$$R_{zx} + G + F_{nx} + R'_n + R'_6 + R'_3 + P_{zx} = 0$$

G - сила веса плуга, известна, приложена в ЦТ плуга;

R_i – вектор силы сопротивления корпусов плуга, $i=1, \dots, n$;

R – вектор равнодействующая сил сопротивления корпусов плуга.

R_6, R_n, R_3 – векторы реакций трёх опорных колёс, бороздного, полевого, заднего, известны по направлению, величина неизвестна;

Q_6 Q_n Q_3 - векторы сопротивлений перекатыванию колёс; известны по направлению, величина пропорциональна

F_n – результирующая сила трения полевых досок, известна по направлению и точке приложения, величина подлежит определению;

P — сила тяги, проходит через точку от крюка трактора на прицеп в т. А; величина и направление подлежат определению.

Полунавесной плуг присоединяется к навеске трактора шарнирно, имеет два колеса: переднее опорное и заднее.

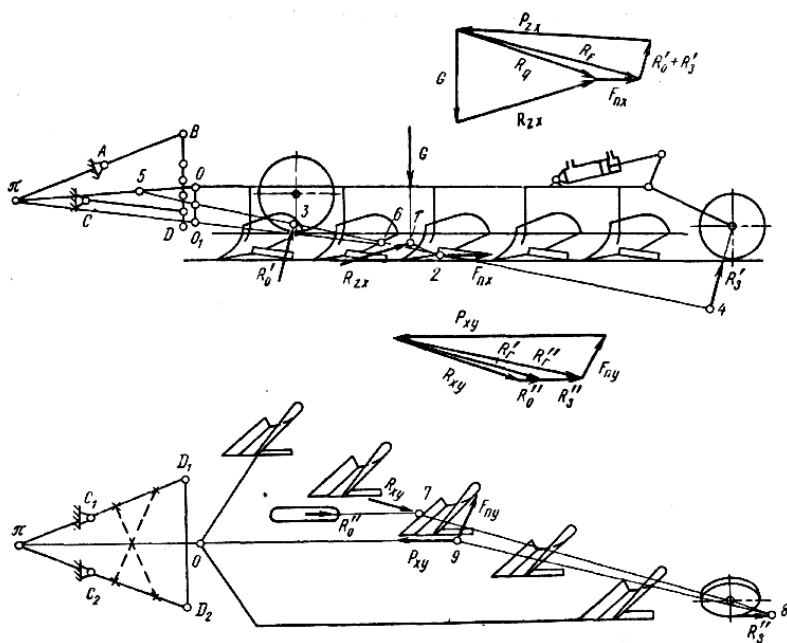


Рис.2.31. Расчётная схема полунавесного плуга

На полунавесной плуг действует система сил (рис.2.31):

G - сила веса плуга, приложена в ЦТ плуга;

R - результирующая сил сопротивления плуга;

R'_0 и R'_3 - реакции опорного и заднего колёс, известны по направлению, величина неизвестна;

F_{nx} – результирующая сил трения полевых досок, известна по направлению и точке приложения, величина подлежит определению;

P — сила тяги, приложена на навеске трактора, величина и направление подлежат определению.

Для применения более выгоден вариант навесного агрегатирования, простая конструкция, меньшая металлоёмкость, компактный, манёвренный. Поэтому расчёт проводится поэтапно: начинается с навесного одноколёсного варианта. Если условия устойчивости не выполняются, переходят к полуприцепному двухколёсному; если этого недостаточно – прицепной вариант трёхколёсный.

5.2.4. Кинетостатический расчёт

Кинетостатический расчёт проводится в статическом режиме, когда агрегат движется медленно и инерционными силами можно пренебречь.

Модель кинетостатики по законам теоретической механики требует, чтобы сумма всех сил должна равняться нулю

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad i = 1, n$$

Сумма моментов всех сил относительно выбранного центра должна равняться нулю

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad i = 1, n$$

Для навесного плуга согласно расчётной схеме уравнение кинетостатики

выражается векторным уравнением

$$\mathbf{G} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_o + \mathbf{P} = 0. \quad (2.49)$$

Векторное уравнение сложно интерпретируется. Практике более удобны проекции уравнения на вертикальную и горизонтальную плоскости.

Равновесие в вертикальной плоскости.

Уравнение (2.49) в проекциях на вертикальную плоскость:

$$G + R_{zx} + F_{nx} + R_o + P_{zx} = 0, \quad (2.55)$$

где R_{zx} - проекция сил сопротивления почвы; F_{nx} - результирующая сил трения полевых досок о стенку борозды; G - вес плуга; P_{zx} - сила тяги; R_o - реакция на ободу опорного колеса.

Реакция R_o известна по направлению; направлена под углом φ к вертикали

$$\varphi = \arcsin \mu,$$

где μ - коэффициент перекачивания колес; на рыхлых почвах $\mu = 0,2$, $\varphi = \arcsin(0,2) = 16^\circ$.

Сила трения $F_{\text{тх}}$ известна по направлению и величине; приложена на полевой доске среднего корпуса, направлена по середине её ширины. Величину силы $F_{\text{тх}}$ принимаем

$$F_{\text{тy}} = f R_y = R_x/3,$$

где f - коэффициент трения; для рыхлых почв $f = 0,5$ и $f = 0,5$. Тогда $F_{\text{тх}} = R_x/6$, где R_x - горизонтальная составляющая равнодействующей R_{zx} .

За известные силы принимаем R_{zx} , G .

Искомыми силами считаем вертикальную составляющую силы тяги P_{zx} и результирующую сил трения $F_{\text{тх}}$, реакцию колеса R'_{o} и, кроме того, силы S , N_1 и N_2 , действующие в верхнем и нижних звеньях механизма ABCD навески трактора.

Уравнение (2.55) решаем графически.

Строим силовой многоугольник, последовательно суммируя векторы уравнения (2.54), получаем векторы:

$R_q = G + R_{\text{zx}}$, точка 1 его приложения на схеме плуга находится пересечением линий сил G и R_{zx} ;

$R_f = R_q + F_{\text{тх}}$, точку 2 его приложения находим на схеме пересечением линией действия сил $F_{\text{тх}}$ и R_q ;

$P_{\text{zx}} = R_f + R_{\text{o}}$, точку 3 его приложения находим на схеме пересечением линией действия сил R_f и R_{o} ;

Равновесие в горизонтальной плоскости:

Уравнение (2.49) в проекциях на горизонтальную плоскость:

$$R_{\text{xy}} + F_{\text{тy}} + R'_{\text{o}} + P_{\text{xy}} = 0, \quad (2.56)$$

где R_{xy} - проекция сил сопротивления почвы; $F_{\text{тy}}$ - результирующая реакция стенки борозды на полевые доски; $R'_{\text{o}} = \mu R_{\text{o}}$, - сила сопротивления качению опорного колеса; P_{xy} - горизонтальная сила тяги, проходит через точку π .

Неизвестным здесь является P_{xy} .

Уравнение (2.56) решаем графически.

Строим силовой многоугольник, последовательно суммируя векторы уравнения (2.56); получаем векторы:

$R_r = R_{\text{xy}} + R'_{\text{o}}$, точка 4 его приложения на схеме плуга находится пересечением линий соответствующих сил, вектор направлен по линии 4-5;

$P_{\text{xy}} = F_{\text{тy}} + R_r$; точка 5 его приложения находится пересечением линий $F_{\text{тy}}$ и R_r , направлена по линии π -5;

3. Определение нагрузок в навеске; S , N_1 , N_2 – реакции в соединениях трактора и навесного плуга, известны по направлению, величины подлежат определению.

Неизвестные величины векторов N_1+N_2 и S получим разложением вектора P_{zx} по направлениям звеньев навесного устройства трактора, т.е. по направлению верхнего звена AB и нижних CD .

$$P_{zx} = S + N_1 + N_2$$

Значения сил $S+N_1+N_2$ N_1+N_2 получим графически разложением вектора P_{zx} по направлениям звеньев навесного устройства трактора AB и CD .

Кинетостатический расчёт прицепного и полуприцепного плуга проводится аналогично. Подробности в пособии, подлежит изучению на практических занятиях.

5. 3. Проверка устойчивости агрегата

Различают устойчивость агрегата в рабочем режиме при движении по полю с нагрузкой как обеспечение глубины хода и направления движения, и устойчивость состояния в транспортном режиме как условия против опрокидывания и потери управления рулевыми колёсами.

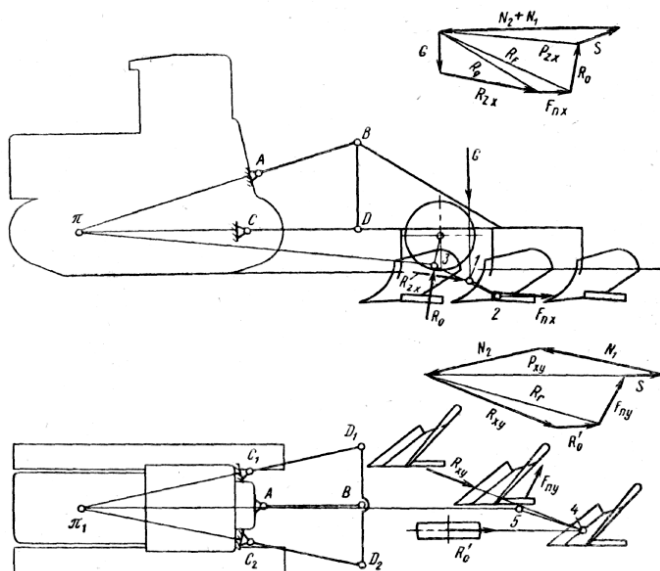
Понятие устойчивости движения НТТС по агротехническим показателям отличается от понятия устойчивости движения в аналитической механике по А. Ляпунову.

Оценка аналитической устойчивости движения проводится по математическим моделям типа формы Коши, описанных в части 3. Модель многомерная, инвариантная, для получения практических соотношений требует трудоёмкого решения систем дифференциальных уравнений, что инженер-расчётчик не может себе позволить в рабочее время.

Практика требует более простых условий устойчивости, отвечающим только агротехническим требованиям к НТТС.

Для плугов агротребования требуют сохранения глубины хода каждого корпуса плуга независимо от колебаний тягового сопротивления. То есть неоднородности почвы или переход плуга на участок с другим типом почвы не должно нарушать положение подошвы плуга.

Агротехнические условия устойчивости движения плуга можно определить по ранее построенным многоугольникам силового расчёта (см. предыдущую задачу).



Условие равновесия в вертикальной плоскости (см. расчётную схему).

Навесной плуг в вертикальной плоскости находится в равновесии, если вектор тягового сопротивления плуга проходит через след центра тяжести плуга.

Для проверки этого необходимо на расчётной схеме продлить линию п-3 и посмотреть, проходит ли он через след центра тяжести на поверхности поля. Если нет, то изменить положение опорного колеса или остроту лезвия плуга.

Условие равновесия в горизонтальной плоскости формулируется так: точка прицепа трактора должна располагаться на линии продольной оси трактора, совпадающей с линией направления действия силы тяги.

Для проверки этого необходимо на расчётной схеме продлить линию 1-5 и посмотреть, находится ли она на продольной оси трактора. Если нет, то изменить положение опорного колеса или остроту лезвия плуга.

Устойчивость состояния означает способность трактора препятствовать опрокидыванию от плуга в рабочем и транспортном состоянии.

Это особенно важно у колёсных тракторов.

Дело в том, что вес трактора распределяется неравномерно между рулевыми и ведущими колёсами. Для тяги важно, чтобы вес

приходился на ведущие задние колёса. Для управления часть веса трактора должна приходиться на передние рулевые колёса. Поэтому производители тракторов ограничивают снижение нагрузок на рулевые колёса от сил сопротивления машины.

Расчётная схема агрегата (трактор + плуг) приведена на рис. 2.33 с учётом сопротивления колёс перекачиванию.

Согласно теории колеса точка приложения реакции почвы на колёса трактора при движении смещается на величину μr , где r – радиус качения колеса, μ – коэффициент деформации шины. Реакция почвы имеет горизонтальные составляющие X'_A , X''_O и вертикальные составляющие Z'_A и Z''_O .

Взяв сумму моментов относительно точки O , получим выражение для нагрузки Z'_A на переднюю ось трактора:

$$Z'_A = \frac{G_T(a_T - \mu r'_k) - P\rho}{L + \mu(r'_k - r''_k)}, \quad (2.57)$$

где r'_k и r''_k – радиусы качения рулевых и ведущих колёс трактора; ρ – плечо силы

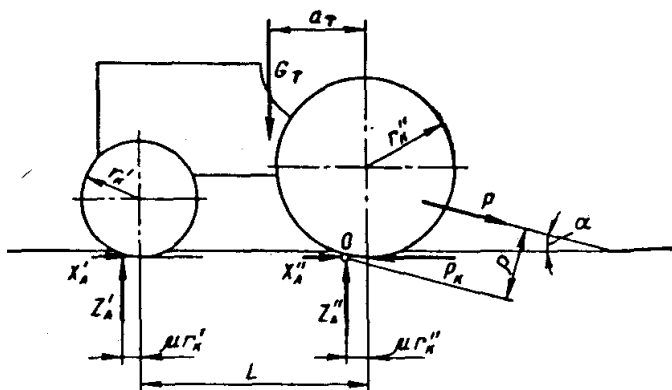


Рис.2.33. Устойчивость агрегата в рабочем положении: G_T – вес трактора, L – база трактора, a_T – положение центра тяжести трактора, P_k – сцепление ведущего колеса.

Проектное значение вертикальной реакции при движении трактора по полю без плуга получаем из формулы (2.57), положив $P=0$.

$$Z'_{АП} = \frac{G_T(a_T - \mu r'_k)}{L + \mu(r'_k - r''_k)}, \quad (2.58)$$

Производитель определяет минимально допустимое снижение вертикальной нагрузки на рулевые колеса, для обеспечения управляемости трактора $Z'_{Amin}=0,5Z'_{АП}$ с работающей машиной

$$\text{Статическая устойчивость трактора с работающей машиной} \\ Z'_A > 0,5Z'_{АП} \quad (2.59)$$

Если полученные значения Z'_A не обеспечивают управляемости трактора, то необходимо изменить направление силы тяги P изменением положения опорного колеса плуга или снизить его тяговое сопротивление (число корпусов, глубина и пр.).

Продольная устойчивость агрегата в транспортном положении. Рассматривается режим, когда агрегат поднимается в гору с углом подъёма α (рис.2.34).

Нагрузка на переднее колесо трактора

$$Z'_A = \frac{(G_T a_T - G_M a_M) \cos \alpha - (G_T a_T + G_M a_M) \sin \alpha}{L} \quad (2.61)$$

где α - наибольший угол подъёма дороги.

Агрегатирование трактора с навесной машиной возможно, если статическая нагрузка Z'_A на переднюю ось трактора с навесной машиной в транспортном положении составляет не менее 60 % статической нагрузки Z' на эту же ось трактора без навесной машины, т.е.

$$Z'_A > 0,6Z'_{АП} \quad (2.60)$$

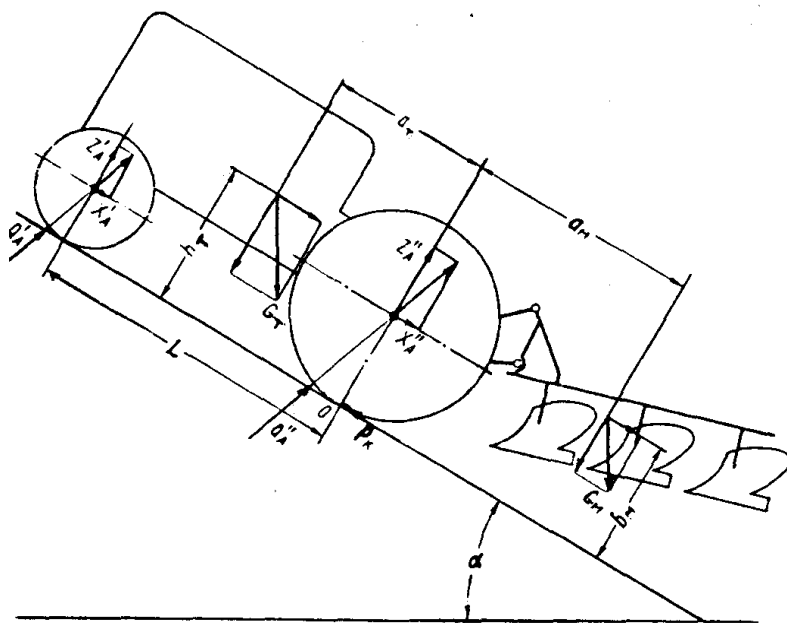


Рис.2.34. Нагружение агрегата в транспортном положении при движении на подъём

При расчётах устойчивости следует учитывать, что при переводе машины из рабочего положения в транспортное к весу машины G_m прибавляется вес пластов почвы, поднимаемых машиной, и сопротивление отрыву этих пластов G_3 . Для навесной машины $G_3 = (0,3 - 0,5) G_m$, для прицепной $G_3 = (1,5 - 2,0) G_m$ [20].

Если условия устойчивости агрегата в транспортном положении выполнить не удаётся, то следует отказаться от навесного агрегатирования и перейти к полунавесному или прицепному агрегатированию, вернувшись на соответствующий пункт расчётов КТП.

Глава 6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

6.1. Вероятностные представления явлений

Машины возделывания при работе испытывают сопротивление перерабатываемых продуктов и сред, свойства которых непостоянны. Например механические свойства почвы при движении в ней рабочих органов, свойства высеваемых сред и растений, несущие свойства почвы под колёсами машины, неровности поля и др. Можно сказать, что на машину действует бесчисленное множество факторов. Проследить все это множество факторов принципиально невозможно.

Поэтому при моделировании процессов исследователь обычно ограничивается лишь основными факторами \bar{X} и пренебрегает большим количеством второстепенных, неконтролируемых факторов \bar{Z} (рис. 4.1). Неконтролируемые факторы в реальном процессе вызывают необъяснимые и непредсказуемые по упрощённой модели отклонения фазовых координат (результата, исхода) \bar{Y}_S на выходе случайного характера.

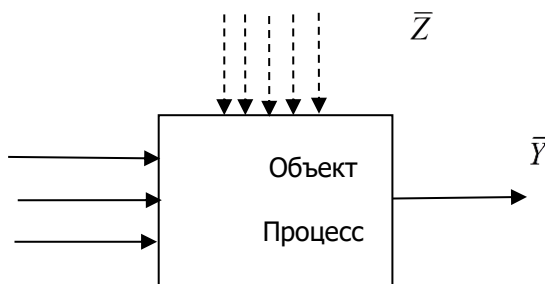


Рис. 4.1. Факторная модель машин возделывания: \bar{X} - вектор входных учитываемых факторов; \bar{Z} - вектор входных неучитываемых факторов; \bar{Y}_S - результат с непредсказуемыми отклонениями

Значительные непредсказуемые отклонения делают модель неадекватной, непригодной или недостаточно точной. Такую модель надо переделать. Но во многих случаях непредсказуемые отклонения носят характер небольших колебаний (флуктуаций),

терпимых для моделировщика. В этом случае всякие непредсказуемые колебания процесса от модельных значений принято считать случайностями.

Наличие случайностей в модели означает, что она может отображать, предсказывать процесс с некоторой вероятностью. Поэтому такая модель считается вероятностной.

В вероятностной модели случайностями могут обладать входные факторы (воздействия) X_s или параметры самой модели p_s (рис. 4.2). Результат Y_s (исход, фазовые координаты) случаен всегда.

Вероятностная модель со случайными воздействиями X_s называется статистической.

Вероятностная модель со случайными параметрами p_s называется стохастической.

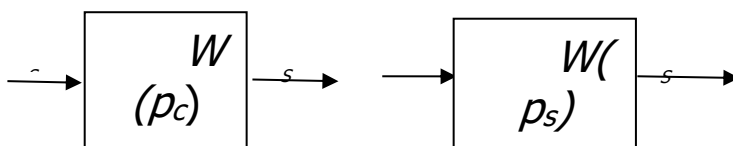


Рис. 4.2. Вероятностные модели: а – статистическая; б – стохастическая; X_s – случайные факторы (воздействия), Y_s – случайный процесс.

Изучением теории и закономерностей вероятностного моделирования занимается особая математическая наука — теория вероятностей [Г. Корн, 1975]. В настоящее время она включает: определения вероятностей,

алгебру и событийную логику,
распределения одномерные, многомерные и специальные,
условия сходимости и предельные теоремы,
функции от случайных величин,
теорию случайных процессов и действия над ними.

В современной теории вероятностей случайности в представлены в разных видах: случайными событиями, случайными явлениями, случайными функциями, случайными процессами.

Случайное событие – любой факт (исход, результат) который может появиться или не появиться в процессе опыта и оценивается по типу "был – не был". Количественная мера возможности наступления случайного события называется вероятностью. Вероятность P события A определяется в теории как предел отношения

числа совершившихся событий n_A к числу опытов N , при их стремлении к бесконечности:

$$P(A) = n_A/N \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

Такое определение вероятности события несколько архаично; оно привязано к опытам (повторностям) игровой ситуации "орёл-решка"; в нём не учитывается величина, время протекания и смены события. Это объясняется условиями зарождения теории вероятностей в европейской культуре в середине XVII столетия (труды Гюйгенса, Паскаля, Ферма и Бернулли), когда она обслуживала азартные игры в карты, кости и пр.

Последующее развитие теории вероятности в трудах Лапласа, Гаусса и Пуассона, П.Л. Чебышева, А.А. Маркова и А.М. Ляпунова показало, что вероятностные эффекты распространяются на более широкий круг явлений: случайные величины, случайные функции, случайные процессы.

Случайная величина — это величина, значение которой подвержено неконтролируемому разбросу при повторениях данного опыта. Например, диаметр и высота стеблей растений, масса колоса, масса, твёрдость и влажность почвы в разных точках поля, глубина хода рабочего органа в разных точках борозды, высота среза стерни и другие величины, не являющихся функциями.

Случайные величины принято обозначать большими латинскими буквами (например, X , Y , Z), а их числовые значения малыми: x , y , z . Тогда реализации случайной величины будут представлять числовые ряды $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$.

Понятия случайных событий и величин связаны: каждое случайное событие помечается значениями случайной величины X . Например, результат измерения толщин стеблей растений на участке поля. Поэтому для случайных величин приняты те же понятия вероятностей, как и для классических случайных событий (1).

Случайные величины могут принимать непрерывные или дискретные значения.

Случайная величина непрерывна, если область всех возможных ее значений непрерывна (например, усилие на крюке трактора, высота неровностей поля и т. п.).

Случайная величина дискретна, если ее значения изменяются ступенями и не могут отличаться друг от друга меньше, чем на некоторую величину (количество отказов техники, количество семян на единицу площади и т.п.).

Случайной функцией $X(y)$ называется такая функция X от параметра y , значение которой при каждом данном значении аргумента является случайной величиной. Определения связывают случайную функцию со случайной величиной. Поэтому для случайных функций можно использовать понятия вероятностей, аналогичные для случайных величин и событий (1). Но в отличие от числовых характеристик случайных величин вероятности случайных функций P будут неслучайными функциями $P(S)$.

Конкретные значения, принимаемые случайной функцией в результате опыта, называются *реализацией случайной функции*, а все полученные реализации данной случайной функции составляют *семейство или ансамбль реализаций* случайного процесса (рис. 4), включающий реализации $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, где N – число опытов.

Случайный процесс в литературе определяется по-разному. В теории вероятностей случайный процесс это случайная функция $Y(t)$, аргументом которой является время t [16]. Определение не делает разницы между входами и выходами вероятностной модели и не соответствуют модельной терминологии технических систем.

В моделях технических систем переменные на выходе модели считаются фазовыми координатами, определяющими состояние системы. Поэтому более приемлемо определение случайного процесса из БСЭ. Согласно ей любой процесс – это изменение во времени состояния некоторой системы. "Случайный процесс – процесс, состояние которого может быть различным в зависимости от случая" (например, броуновское движение). Поскольку состояние системы в технике определяют фазовые координаты, то случайный процесс – это случайные изменения фазовых координат системы во времени. Входные переменные в определении не участвуют.

В СХП случайными являются естественные процессы (например, рост растений), а также многие производственные процессы, сопровождающиеся случайными флуктуациями фазовых координат (взаимодействие рабочего органа со средами, процессы обработки почвы, резания, измельчения, дробления, сепарации, орошения и т.п.) .

Классификация случайных процессов проводится по характеру изменений значений фазовых координат и времени.

Если значения и время непрерывны, то случайный процесс считается *непрерывным*.

Если множество состояний, в которых может находиться процесс, счётное (они могут быть пронумерованы), то такой процесс называется *дискретным*. Различают:

- *дискретнозначный процесс*, у которого дискретной является только область значений, а время непрерывно.

- *случайная последовательность* - процесс, у которого дискретным является только время; название подчеркивает, что при формировании множества состояний переставлять их нельзя.

- *дискретная случайная последовательность* – процесс, у которого дискретны и область значений, и область определения (время).

Конкретные значения, принимаемые случайным процессом в результате опыта, называют *реализацией случайного процесса*, а все полученные реализации данной случайной функции составляют *семейство или ансамбль реализаций* случайного процесса (рис. 4.3), включающий реализации y_1, y_2, \dots, y_N , где N – число опытов.

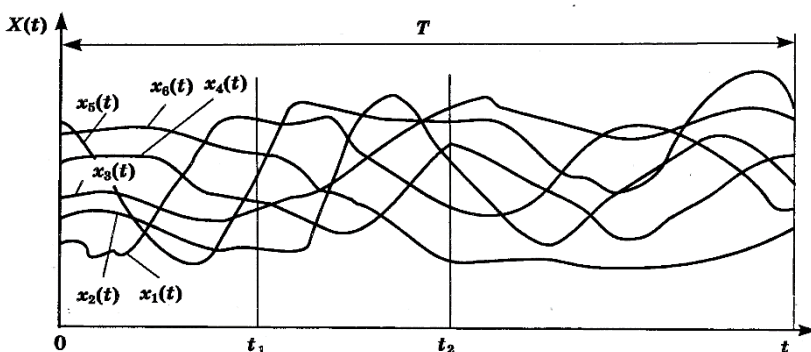


Рис. 4.3. Ансамбль реализаций случайного процесса

Сечение ансамбля реализаций в момент t_1 превращает случайный процесс в N значений случайной величины $Y_1=[y_1, y_2, \dots, y_N]$ на интервале $(0, T)$.

Таким образом, случайный процесс совмещает в себе черты случайной функции и случайной величины. Это позволяет использовать при его описании те же характеристики, что и для случайных величин.

Реализации $x_i(t)$, $i=\underline{1, N}$, можно получить проведением опыта одновременно на нескольких одинаковых объектах; или проведением нескольких опытов на одном объекте с одинаковыми условиями; что для СХП имеет проблемы.

От реализаций случайного процесса можно перейти к реализациям случайной функции заменой временной переменной t на переменный параметр S . Например, результат измерения неровностей поля на определенном отрезке является реализацией случайной функции $Y(S)$. Те же измерения при замене переменной $S=Vt$ будут реализациями случайного процесса $Y(t)$. Обратная замена $t=S/V$ переводит случайный процесс в случайную функцию.

Сечение ансамбля реализаций в момент t_1 превращает случайный процесс в N значений случайной величины $Y_1=[y_1, y_2, \dots, y_M]$ на интервале $(0, T)$. Тем самым, случайный процесс совмещает в себе черты случайной функции и случайной величины. Это позволяет использовать при его описании те же характеристики, что и для случайных величин.

6.2. Моделирование случайных величин

Случайная величина переменчива, может принимать множество разных значений. Реализации случайных величин представляют громоздкие массивы чисел, неудобные для исследователя. Для решения этой проблемы применяются приёмы моделирования – замены сложного явления упрощённым, но сохраняющим главные свойства объекта.

Громоздкие реализации случайных величин моделирование заменяет некими компактными и неслучайными показателями - характеристиками. В этом суть моделирования случайных величин в агроинженерии.

Обоснование таких неслучайных характеристик случайных величин составляет основную парадигму теории вероятностей. Следуя ей, теория вероятностей излагает определения, теоремы и закономерности случайных явлений, но оперирует теоретическими вероятностями как аксиомами. Их методы получения не приводятся. Это затрудняет использование теории для решения практических задач.

Широкое внедрение теории вероятностей в практику измерений и обработки результатов опытов требовало разработки таких методик обработки экспериментальных данных, которые превращали бы массивы случайных чисел в неслучайные характеристики к тому же по ограниченным выборкам данных.

Для решения этих проблем создана математическая статистика – наука по обоснованию и использованию т. н. статистик – неслучайных характеристик случайностей по ограниченным выборкам. Вначале она была прикладным разделом теории вероятностей, но по мере развития стала самостоятельной.

Современная математическая статистика содержит статистические описания выборок, статистики и выборочные распределения, типовые распределения, их связи с теоретическими, методики проверки статистических гипотез, статистики случайных процессов и стохастических систем. [25].

Процедуры математической статистики по замене хаотического процесса неслучайными характеристиками являются типичным моделированием.

На практике построение моделей случайных величин связано с процедурами создания выборок [8].

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов по какому-либо признаку (например, высоту колоса пшеницы на поле). Можно провести на нём *сплошное обследование*, т.е. обследовать каждый объект совокупности и получить т. н. *генеральную совокупность*.

На практике, однако, сплошное обследование трудоёмко, а иногда физически невозможно или связано с уничтожением объекта. Например, измерение длины корня растения. Выход найден простой - отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов (выборку) и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность отобранных объектов.

Для того чтобы по данным выборки можно было уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно представляли её пропорции. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть *репрезентативной (представительной)*.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 стеблей отобрано для обследования 100, то объем генеральной совокупности $N=1000$, а объем выборки $n=100$.

ПЕРЕХОД ОТ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ К ВЫБОРКЕ, СНИЖАЯ ТРУДОЁМКОСТЬ ПОЛУЧЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ, ВЫЗЫВАЕТ СУЩЕСТВЕННУЮ ПОТЕРЮ ИНФОРМАЦИИ. ПРОЦЕДУРА ПЕРЕХОДА ОТ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ К ВЫБОРОЧНОЙ СЛАБО ФОРМАЛИЗОВАНА, НЕ НОРМИРОВАНА И ИМЕЕТ МНОГО ВАРИАНТОВ: ПРОСТОЙ СЛУЧАЙНЫЙ ОТБОР; ТИПИЧЕСКИЙ ОТБОР; МЕХАНИЧЕСКИЙ ОТБОР; СЕРИЙНЫЙ ОТБОР И ДР. [СМ. ЕРМОЛЬЕВ Ю.И., 2013].

В итоге после формирования выборок получаем случайную величину X с n возможными значениями x_1, x_2, \dots, x_n . Каждое из этих значений может получено с некоторой вероятностью p .

$$P(X=x_i)=p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Случайная величина будет полностью описана, если будет указано, какой вероятностью обладает каждое из событий. Правило установления вероятности событий устанавливает закон распределения случайной величины.

Закон распределения случайной величины - всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчинена данному закону распределения.

Простейшей формой задания такого закона является табличная, при которой перечисляются возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:



Такую таблицу называют *рядом распределения* случайной величины X .

Другой способ - графический: по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины x_i , а по оси ординат – вероятности этих значений p_i (рис. 4.1, а). Полученная фигура называется – многоугольником распределения. Значения p_i на таком графике называют относительными частотами событий.

В литературе зависимость $P(X=x_i)=p_i, i = 1, \dots, n$ часто изображают в виде гистограммы (рис. 4.1, б).

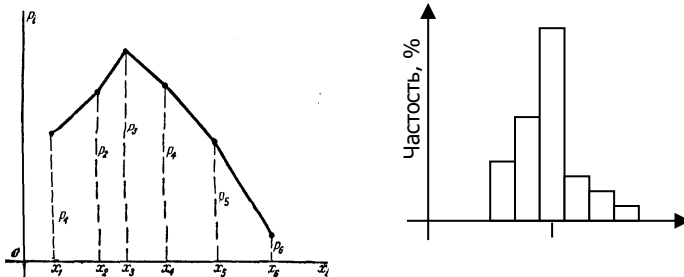


Рис.4.4. Многоугольник распределения

Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. (4.3)

Но в теории вероятностей представление вероятности как события $X=x$ в форме (4.2) не получило распространения. Теория вероятностей оперирует вероятностью события $X < x$, когда величина будет меньше некоторого значения x - текущая переменная.

Вероятность события $X < x$ в зависимости от x называется *функцией распределения* случайной величины X и обозначается $F(x) = P(X < x)$. (4.4)

Функцию распределения $F(x)$ иногда называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*. Она самая универсальная характеристика случайной величины, существует для всех величин: как прерывных, так и непрерывных. График функции распределения $F(x)$ представляет собой неубывающую функцию (рис.4.2), заключённую между нулем и единицей: $0 \leq F(x) \leq 1$.

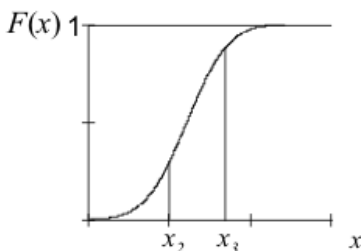


Рис. 4.5. График функции распределения $F(x)$

В отдельных точках $F(x)$ может иметь скачки (разрывы).

Графики функций распределения $F(x)$ (4.5) визуально трудноразличимы. Поэтому их принято характеризовать параметрами, в качестве которых популярны квантили и медианы.

Квантилем порядка P , называют такое значение случайной величины X_p , при котором функция распределения принимает значение, равное заданному уровню вероятности P (рис.4. 6, а).

Медианой M_{ex} распределения называют квантиль, отвечающий значению $p = 1/2$ (рис.4.6. б).

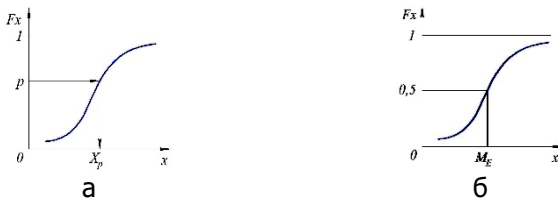


Рис.4.6. Параметры графика функции распределения: а -квантиль X_p ; б – медиана M_E для уровня вероятности $p=0,5$

Производная функции распределения $F(x)$ называется *плотностью распределения $f(x)$* (или *плотностью вероятности*) случайной величины X .

$$f(x) = dF(x) / dx \quad (4.5)$$

Иногда функцию $f(x)$ называют «дифференциальной функцией распределения» или «дифференциальным законом распределения» величины X .

Вероятность того, что результат измерения x будет находиться в интервале (x_2, x_3) записывается так:

$$P(x_2 < x < x_3) = \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = F(x_3) - F(x_2). \quad (4.6)$$

График плотности распределения обычно имеет максимум (рис. 4.7).

Значение случайной величины, при котором $f(X)$ достигает максимума, называется *модой непрерывного распределения*. Если максимумов два, то распределение называется *двумодальным*, если три – то *трехмодальным* и т.д.

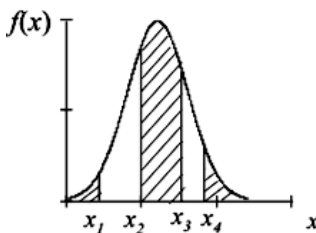


Рис. 4.7.

Плотность распределения связана с функцией распределения интегральной зависимостью:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \cdot \quad (4.7)$$

Геометрически $F(x)$ есть площадь кривой плотности распределения, лежащая левее точки x (рис. 4.8).

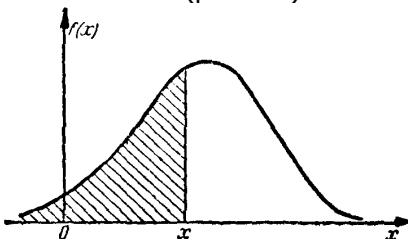


Рис.4.8. Геометрическое представление функции распределения $F(x)$

Графические модели вероятностных характеристик наглядны, но неточны, не дают точных количественных показателей. Для их получения применяют числовые характеристики случайных величин.

В числовых характеристиках наибольшее распространение получили *моменты распределения вероятностей*. Их получают путём возведения значений случайных величин в степень, называемую порядком этого момента.

Моменты бывают начальные и центральные .

Начальный момент k -го порядка непрерывной случайной величины X получают усреднением степеней исходных неприглаженных данных по формуле:

$$m_k(x) = M [X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \quad (4.8)$$

Из начальных моментов широкое применение нашёл момент первого порядка ($k = 1$), обозначаемый обычно m_x и называемый *математическим ожиданием случайной величины X*

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx, \quad (4.9)$$

Отклонение случайной величины от ее математического ожидания называют *центрированной случайной величиной \check{X}*

$$\check{X} = X - m_x \quad (4.10)$$

Для центрированных случайных величин X центральные моментные функции моменты $\mu_k(x)$ k -го порядка определяют по выражениям:

$$\mu_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx; \quad (4.11)$$

Важное значение в статистике имеют центральные моменты второго порядка: дисперсия и среднеквадратичное отклонение.

Дисперсия характеризует энергию разброса случайной величины :

$$D = \int (x - M)^2 f(x) dx \quad (4.12)$$

Среднеквадратическое отклонение (СКО) характеризуют рассеяние случайной величины относительно математического ожидания

$$\sigma = \sqrt{D} \quad (4.13)$$

СКО иногда называют стандартом случайной величины.

В качестве меры взаимозависимости случайных величин X_1 и X_2 используют безразмерный *коэффициент корреляции*

$$\rho_{x_1x_2} = \frac{K_{x_1x_2}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}. \quad (4.14)$$

где $K_{x_1x_2}$ – смешанный центральный момент второго порядка двух случайных величин X_1 и X_2 , *называемый корреляционным моментом*:

$$K_{x_1x_2} = \mu_{11}(\dot{X}_1, \dot{X}_2) = M[\dot{X}_1, \dot{X}_2] \dots \dots \dots (4.15)$$

Коэффициент корреляции может принимать значения в диапазоне $-1 \leq \rho_{x_1x_2} \leq 1$. Он определяет характер линейной связи между X_1 и X_2 . При $\rho_{x_1x_2} > 0$ увеличение одной из случайных величин приводит к возрастанию другой, а при отрицательном $\rho_{x_1x_2}$ - к уменьшению. При $\rho_{x_1x_2} = 0$ случайные величины не коррелированы. Обратное утверждение в общем случае неверно, особенно если связь нелинейная. Если $\rho_{x_1x_2} = 1$, то X_1 и X_2 линейно связаны, т. е. $X_2 = aX_1 + b$

Третий и четвертый центральные моменты используются как характеристики графиков распределения вероятностей.

Третий центральный момент $\mu_3(x)$ определяет асимметрию графика характеристики распределения, показателем которой служит *коэффициент асимметрии*

$$A_x = \mu_3(x) / \sigma_x^3 \quad (4.16)$$

Коэффициент эксцесса характеризует степень островершинности графика плотности распределения (4.6) и выражается через центральный момент четвёртого порядка :

$$\varepsilon = \mu_4(x) / \sigma_x^4 . \quad (4.17)$$

Математическая статистика использует числовые характеристики случайных величин на конечных выборках, называемые *статистиками*. Главное требование к ним - статистическая устойчивость, под которой понимается возрастание точности статистик с возрастанием объема выборки. Большинство физических процессов в СХП являются статистически устойчивыми.

В выражениях для моментов дискретной функции на конечных выборках интегрирование заменяется суммированием. Момент первого порядка для выборки из n начальных значений случайной величины X ; даёт *среднее арифметическое*:

$$m_c = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n} , \quad (4.18)$$

Центральный момент второго порядка - *дисперсия* D :

$$D = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i - X_c)^2}{n - 1} , \quad (4.19)$$

Среднее линейное отклонение

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m_x|}{n} . \quad (4.20)$$

Размах - разность между наибольшими и наименьшими значениями x ; случайной величины X .

В качестве относительной меры рассеивания используют коэффициент вариации v_x , в процентах:

$$v_x = \sigma_x / m_x * 100\% . \quad (4.21)$$

Числовые величины оказались удобными показателями характеристик распределения случайных величин. Их несложно получать по результатам испытаний или в процессе эксплуатации машин; в этом случае их называют статистическими оценками. Достоинство числовых показателей характеристик – простота и малая трудоёмкость получения. Недостаток – малый объём информации; точечные оценки не могут описать весь закон распределения.

Более информативны функции $F(x)$ и плотности $f(x)$ распределения, представляющие аналитические зависимости.

В силу исторических обстоятельств базовыми моделями оказались модели случайных величин. Модели случайных

функций и случайных процессов сводятся к ним через ансамбли реализаций.

6.3. Типовые модели распределения вероятностей

Аналитические функции распределения $F(x)$ и их плотности $f(x)$ представляют фактически математические модели вероятностных свойств случайных величин. Определение таких аналитических зависимостей – процесс сложный и трудоёмкий. Чтобы упростить его, подходящий закон распределения принято выбирать из набора известных типов так, чтобы они, с одной стороны, максимально точно соответствовали опытным данным, а с другой стороны, были бы простыми в использовании. Накопленные к настоящему времени ММ типовых законов распределения разнообразны.

Рассмотрим часто встречающиеся в практике ММ одномерные *распределения случайных величин* [<https://ru.wikipedia.org/>].

Типовые модели распределения имеют специфические обозначения, включающие англоязычную аббревиатуру и параметры, указываемые в скобках. Например, нормальный закон обозначается $N(m, \sigma^2)$, где m, σ^2 – его параметры. Гамма-распределение обозначается $\Gamma(\alpha, \beta)$, где α, β – параметры. В отличие от обозначений функций, переменную аргумента x в скобках не указывают.

Форма графика зависит от параметров. Изменяя параметры, пользователь получает возможность изменять конфигурацию графика, подгоняя его под опытные данные. У простых законов имеется один параметр, у сложных - до трёх.

Типовые модели плотности распределения непрерывных случайных величин, применимым в СХП, приведены в табл. 4.1. К ним относятся: равномерное $U(a, b)$, нормальное (Гауссово) $N(m, \sigma^2)$, нормальное нормированное $N(u)$, логарифмически нормальное $LN(m, \sigma^2)$, экспоненциальное $\text{Exp}(\lambda)$, Пирсона $\chi^2(k)$, Вейбулла $W(c, a)$, Стьюдента $t(n)$, Фишера $F(n_1, n_2)$, а также бета-распределение $Be(a, b)$ и гамма-распределение $\Gamma(a, \beta)$ и др.

Наиболее простое - *равномерное распределение $U(a, b)$* . Плотность вероятности случайной величины X постоянна в области возможных значений $a < X < b$, границы которой являются и параметрами распределения. Равномерное распределение используют при измерениях и при генерировании случайных величин. На его основе составлены таблицы случайных чисел для разных практических задач: случайного взятия проб из каких-либо партий, проведения опытов в случайной последовательности и т.п.

Нормальное распределение $N(m, \sigma^2)$ (Гауссово) наиболее распространено в СХП и во многих областях науки. Популярность

нормального распределения вытекает из [центральной предельной теоремы теории вероятностей](#): "если результат наблюдения является суммой многих случайных слабо взаимозависимых величин, то при увеличении числа слагаемых распределение результата стремится к нормальному". Многофакторность СХП приводит именно к такой ситуации. Нормальное распределение считается предельной формой многих распределений (отсюда и его наименование).

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: математическим ожиданием m_x и дисперсией $D_x = \sigma_x^2$, являющимися числовыми характеристиками случайной величины.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx. \quad (4.22)$$

График плотности распределения (см. табл. 4.1) обладает симметрией и является эталоном островершинности (эксцесса). Площадь под кривой равна единице, но максимум кривой и масштаб зависят от параметров, что создаёт неудобства.

Нормальное нормированное распределение $N(u)$ имеет стандартный вид графика центрированной случайной величины x .

Нормированный вид получают введением переменной u :

$$u = (x - m_x) / \sigma_x, \quad (4.23)$$

Интегралы, входящие в формулу (4.22), не выражаются через элементарные функции. Для вычисления $F(u)$ созданы таблицы функции

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp(-0,5u^2) du, \quad (4.24)$$

которая называется *функцией Лапласа (интегралом вероятностей)*.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $a < X < b$ через функцию Лапласа (4.24) будет:

$$P(a < X < b) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) \quad (4.25)$$

где $u_1 = (a - m_x) / \sigma_x$; $u_2 = (b - m_x) / \sigma_x$.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X от её среднего значения при $m_x = 0$ на величину $\pm 3\sigma_x$ по выражению (4.25):

$$P[(-3\sigma_x) < X < (+3\sigma_x)] = \Phi(3) - \Phi(-3). \quad (4.26)$$

По таблице значений функции Лапласа находим:

$$\Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,4987 \approx 0,997. \quad (4.27)$$

Получаем известное правило "трех сигм": для нормально распределенной случайной величины разброс ее от математического ожидания практически не превосходят $3\sigma_x$ (с погрешностью 0,3%).

В силу симметричности графика плотности вероятностей нормального распределения все нечетные центральные моменты равны нулю и коэффициенты асимметрии A_x и эксцесса E_x согласно (4.22) и (4.23) равны нулю.

Логарифмически нормальное распределение $LN(m, \sigma^2)$ - двухпараметрическое распределение логарифма случайной величины с областью определения $0 < x < \infty$. В отличие от обычного нормального распределения с его симметрией имеет более широкий диапазон и разные несимметричные графики плотности распределения. Описывает распределение семян вдоль рядков при посеве [5].

Экспоненциальное распределение $Exp(\lambda)$ определяется одним параметром λ , который называют интенсивностью потока событий. $Exp(\lambda)$ используется в теории надежности и теории массового обслуживания. Описывает также распределение семян по площади [5]. Область определения $0 < x < \infty$.

Распределение хи-квадрат $\chi^2(k)$ (Пирсона) описывает распределение суммы квадратов $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ k независимых случайных величин, каждая из которых имеет нормальное распределение с $m_x = 0$ и $\sigma_y^2 = 1$. Используют как критерий согласия для оценки согласованности априорных распределений с теоретическими. Область определения $0 < x < \infty$.

Бета-распределение $Be(a, b)$ описывает различные распределения случайных величин на конечных интервалах. Форма [графика](#) $Be(a, b)$ в зависимости от выбора параметров может быть выпуклой, вогнутой, убывающей, возрастающей, унимодальной; а при $a=1, b=1$ будет постоянной, и значит, равномерное распределение $U[0, 1]$ будет частным случаем бета-распределения $U[0, 1] = B[1, 1]$, Широко используется в [байесовской статистике](#); априорно [сопряжено с распределениями биномиальным, геометрическим](#). Область определения $0 < x < 1$.

Гамма-распределение $\Gamma(a, \beta)$ - двухпараметрическое распределение суммы независимых случайных величин X_1, \dots, X_k , каждая из которых распределена по экспоненциальному закону. Если $X_i \sim Exp(\lambda)$, $i=1, \dots, k$; тогда $Y = \sum X_i \sim \Gamma(1/\lambda, k)$.

Область определения $0 < Y < \infty$.

По гамма-распределению распределяются расстояния между семенами при пунктирном посеве [5].

Частными случаями гамма-распределения являются [экспоненциальное распределение](#) $\Gamma(1/\lambda, 1) = \text{Exp}(\lambda)$ и распределение хи-квадрат $\Gamma(2, k/2) = \chi^2(k)$. При больших k гамма-распределение может быть приближенно [нормальным распределением](#).

Распределение Вейбулла $W(c, a)$ — двухпараметрическое семейство [непрерывных распределений](#) с областью значений $0 < x < \infty$. Применяется для описания случайных процессов смешивания и разрушения сред, износа и старения материалов. Частным случаем распределения Вейбулла является [экспоненциальное распределение](#) $W(c, 1) = \text{Exp}(1/c)$. Обобщая экспоненциальный закон, распределение Вейбулла $W(c, a)$ содержит ещё дополнительный параметр a , позволяющий получить лучшее соответствие опытным данным. При $a=2$ получаем распределение Рэля, описывающее процессы, состоящие из нескольких последовательных этапов. При $a > 3,5$ распределение Вейбулла близко к нормальному.

t-распределение Стьюдента $t(n)$ — однопараметрическое симметричное распределение семейства [независимых центрированных случайных величин](#) $X_i \ i = 0, \dots, n$, имеющих стандартное нормальное [распределение](#) $X_i \sim N(0, 1)$. Функция $t(n)$

$$t(n) = \frac{x_0}{S_n}, \quad \text{где} \quad S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (4.28)$$

устанавливает соотношение центрированных значений одной реализации x_0 к среднеквадратичному значению остальных реализаций ансамбля в текущий момент времени. Считается, что $t(n)$ имеет n степеней свободы. Область значений $-\infty < x < \infty$.

Ценным свойством распределения Стьюдента оказалось то, что вероятность $P\{|t| > |t|_{1-\alpha}\}$ равна α . Квантили $|t|_{1-\alpha}$ табулированы; но в некоторых книгах значения $|t|_{1-\alpha}$ в таблицах обозначаются как t_α .

Распределение Стьюдента используется в [статистике](#) для [точечного оценивания](#), построения [доверительных интервалов](#) и [тестирования гипотез](#), касающихся определения закона распределения экспериментальных данных.

F-распределение Фишера $F(n_1, n_2)$ — двухпараметрическое несимметричное распределение функции $F = (Y_1/d_1)/(Y_2/d_2)$ от двух [случайных величин](#) Y_1, Y_2 , имеющих [распределение хи-квадрат](#): $Y_1 \sim \chi^2(d_1)$, $Y_2 \sim \chi^2(d_2)$. Пишут $F \sim F(d_1, d_2)$, где d_1 и d_2 — степени свободы. Область значений распределения Фишера $0 < x < \infty$.

Квадрат случайной величины, имеющей распределение Стьюдента, имеет [распределение Фишера](#). Если $t \sim t(n)$, то $t^2 \sim F(1, n)$.

Распределение Фишера – ключевой инструмент для обоснования адекватности статистических моделей.

Таблица 4.1. Модели плотности распределения непрерывных случайных величин

ММ плотности распределения
и

область значений X

Равномерный U(a, b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x < a, \quad x > b, \end{cases}$$

Нормальное распределение

N(m, σ²)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right].$$

Нормированное нормальное

N(u)

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5u^2}$$

$$U = (x - m_x) / \sigma_x$$

Логнормальное LN(m, σ²)

$$p_1(x) = \frac{\log e}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

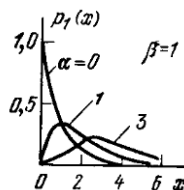
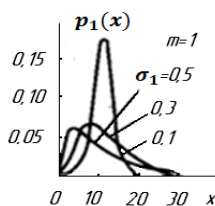
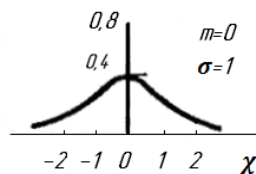
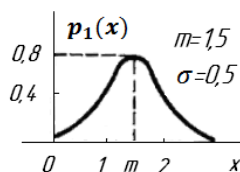
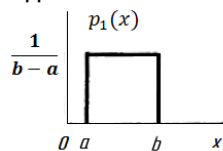
Гамма-распределение Γ(α, β)

$$p_1(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

Γ — гамма-функция*

Графики**

плотности распределения

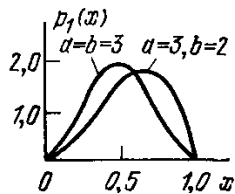


Бета-распределение

Ve(a, b)

$$p_1(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

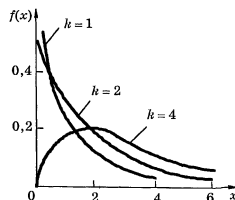
Γ — гамма-функция*



Распределение $\chi^2(k)$

$$f(x) = \frac{e^{-0,5x}}{2^{0,5k} \Gamma(0,5)} x^{0,5k-1} \quad x > 0$$

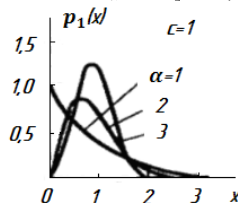
Γ — гамма-функция*



Распределение Вейбулла

W(c, a)

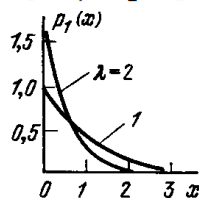
$$f(x) = C a x^{\alpha-1} e^{-C x^\alpha}$$



Экспоненциальное Exp(λ)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$$

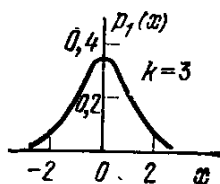


t- распределение Стьюдента

t(k)

$$p_1(x) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi} \Gamma(\frac{k}{2})} (1 + \frac{x^2}{k})^{-(k+1)/2}$$

Γ — гамма-функция*



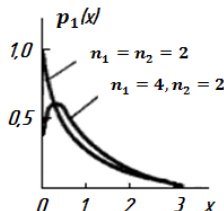
F-распределение Фишера F(n1,

n2)

$$p_1(x) = \frac{\Gamma(\mu_1 + \mu_2)}{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)} \frac{\mu_1^{\mu_1}}{\mu_2^{\mu_2}} x^{\mu_1-1} (1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} x)^{-(\mu_1+\mu_2)}$$

$\mu_1 = 0,5n_1$; $\mu_2 = 0,5n_2$,

Γ — гамма-функция*



*гамма-функция $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$; находится из таблиц.

** графики [Горяинов В.Т., 1980].

Модели распределений *дискретных случайных величин* приведены в таблице 4.2. В СХП используются модели распределений: Пуассона $P(\lambda)$, биномиальное $P(\lambda)$, отрицательное биномиальное $NB(r, p)$, геометрическое $Geom(p)$, гипергеометрическое $HG(M, N, n)$ и др.

Особенность графиков законов распределения дискретных случайных величин состоит в том, что абсцисса принимает дискретные значения $k=0, 1, 2, \dots$ и он становится решётчатой функцией $F(k)$. Абсцисса k в этом случае называется носителем.

Биномиальное распределение $Bin(N, P)$ является унимодальным; определяет вероятность того, что количество "успехов" будет x раз в N независимых опытах, в которых вероятность «успеха» одинакова и равна P .

$$F(x, N) = C_N^x P^x (1 - P)^{N-x} \quad (x = \overline{0, N}), \quad (4.29)$$

где $C_N^x = \frac{N!}{x!(N-x)!}$ — число сочетаний из N элементов по x

раз.

Биномиальное распределение достаточно универсально. При $N=1$, получаем распределение Бернулли. Если N большое, то $Bin(N, P)$ превращается в нормальное распределение $N[NP, NP(1-P)]$ с математическим ожиданием NP и дисперсией $NP(1-P)$.

Если N большое, а λ - фиксированное число, то $Bin(N, \lambda/N)$ превращается в распределение Пуассона $P(\lambda)$ с параметром λ .

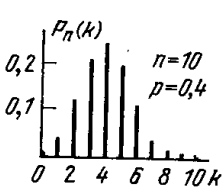
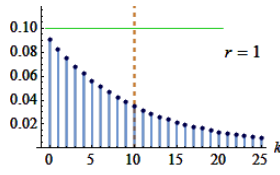
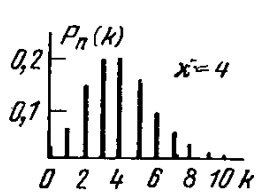
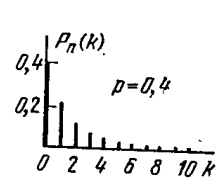
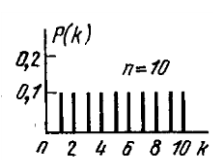
Распределение Пуассона $P(\lambda)$ является предельным для биномиального распределения. При неограниченном увеличении N и уменьшении P так, что при этом $NP = \lambda = \text{const}$, получим

$$F(x, \lambda) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!. \quad (4.30)$$

Величина λ является параметром распределения Пуассона. Оно описывает распределение числа x случайных событий в интервале времени Δt при условии, что вероятность наступления события за интервал пропорциональна этому интервалу. Математическое ожидание m_x и дисперсия σ_x^2 распределения равны λ . Значения функции $F(x, \lambda)$ табулированы.

Отрицательное биномиальное $NB(r, p)$ (называемое также распределением Паскаля) — это распределение количества произошедших неудач в последовательности опытов с вероятностью успеха p , проводимой до r -го успеха.

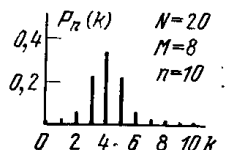
Таблица 6.2. Законы распределения дискретных случайных величин

Плотность распределения	Носитель	Графики плотности распределения
Биномиальное $B(n, p)$	$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0, 1, 2, \dots$	
Отрицательное биномиальное $NB(r, p)$	$P_n(k) = \frac{\Gamma(r+k)}{k! \Gamma(r)} p^r q^k$ $q=1-p, k=0, 1, 2, \dots$	
Распределение Пуассона $P(\lambda)$	$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0, 1, 2, \dots$	
Геометрический $Geom(p)$	$P_n(k) = p(1-p)^k, k=0, 1, 2, \dots$	
Равномерный $UD(n)$	$P(k) = \frac{1}{n}, k=0, 1, 2, \dots$	

Гипергеометрическое

HG(M, N, n)

$$P_n(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$



Геометрическое Geom(p) — распределение случайной величины Y, равной количеству испытаний случайного эксперимента до наблюдения первого «успеха».

Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения $Geom(p) = NB(1, p)$.

Сумма n независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение $Y_i \sim Geom(p)$, также получает отрицательное биномиальное распределение $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim NB(n, p)$.

Гипергеометрическое HG(M, N, n) - симметричное распределение; моделирует количество удачных выборок без возвращения из конечной совокупности.

Типичный пример: осуществлена поставка N объектов, из которых M имеют дефект. Гипергеометрическое распределение описывает вероятность того, что в выборке из n различных объектов, вытянутых из поставки, k объектов являются бракованными.

Если при фиксированном n и M устремим N к бесконечности, то $HG(M, N, n)$ сходится к биномиальному распределению $Bin(n, M/N)$.

Числовые характеристики простых типовых законов распределения приведены в таблице 4.4.

За- кон рас- преде- ния	m_x	D_x	v	Ка	К ε
Но- рмаль- ный	m_x	σx^2	σ x / m_x	0	0
Но- рмаль- ный	0	1		0	0
нор- мирован- ный					

Теория, моделирование и расчёт машин для возделывания сельскохозяйственных культур

Равномерный	$(b-a)/2$	$(b-a)^2/12$	0	9/5
Экспоненциальный	λ^{-1}	λ^{-2}	2	6
Гамма-распределение	$(a+1)\beta$	$(a+1)\beta^2$	$2/\sqrt{b}$	6/b
Биномиальное	NP	NPq		
Пуассона	λ	λ		
Пирсона	k	$2k$	$\sqrt{8/k}$	$1/2k$

Приведённые сведения показывают большое разнообразие типовых моделей распределения вероятностей случайных величин. Для каждого процесса можно выбрать подходящий тип модели и её параметры так, чтобы модель максимально соответствовала выборке опытных данных. Просматривается тенденция к синтезу единой универсальной модели с большим числом настраиваемых параметров.

Закон распределения обычно определяется по выборке экспериментальных данных. Выборка случайных величин случайной длительности даст закон распределения, параметры распределения которого тоже будут величинами случайными. В связи с этим возникает необходимость т. н. статистической оценки выборки и полученных параметров распределения. По результатам такой оценки можно делать выводы не только о степени приближения полученного распределения к типовому, но и о статусе самой выборки и связях её с другими.

Распространены типовые задачи статистической оценки выборки:

- ◆ проверить гипотезу о принадлежности полученной выборки выбранному типовому теоретическому распределению;
- ◆ определить, принадлежат ли несколько выборок одной генеральной совокупности;

- ◆ определить, носят ли различия измерений одного и того же объекта закономерный характер или случайный;
- ◆ определить, действительно ли имеется взаимосвязь процессов или это просто случайность;
- ◆ определить, сколько необходимо произвести измерений, чтобы получить достоверные результаты.

Решение таких задач осуществляется с применением типовых моделей распределения. Исследователь выдвигает гипотезу о принадлежности её к какой-либо типовой, которую принято называть нулевой. Затем проверяет совпадение на основании специализированных критериев на основе распределений: χ^2 -Пирсона, t – Стьюдента, F - Фишера.

Критерии зависят от уровня значимости и числа степеней свободы.

Числом степеней свободы называют разность между числом испытаний и числом коэффициентов (констант), которые вычисляются по результатам этих испытаний. Фактически степени свободы являются мерой объёма априорной информации.

Уровнем значимости считают вероятность, которую следует считать малой. В технике уровень значимости обычно принимают 0,05, т.е. событие произойдет в 95 случаев из 100.

Критические значения критериев в зависимости от уровня значимости и числа степеней свободы приводятся в таблицах.

6.4. Случайные процессы

Случайные процессы – наиболее распространённый и наиболее сложный вид случайностей в сельскохозяйственном производстве. Оно особенно богато специфическими случайными процессами, называемые сельскохозяйственными.

6.4.1. Понятие и характеристики случайных процессов

Теория случайных процессов явилась итогом развития теории вероятностей и могла использовать предыдущие разработки и понятия. [1, гл.10]. Понятие вероятности для случайных процессов сходно с аналогичным понятием для случайных событий, но переход к нему проводится через рассмотрение сечения ансамбля реализаций в фиксированный момент времени $t=t_1$ (см. рис. 4.3). Также как и для случайной величины общей формой представления распределения для случайного процесса является функция распределения $F(x)$, но для текущего сечения в момент времени $t=t_1$, и выражается $F(x, t)$. Эта функция определяет вероятность

того, что случайный процесс в момент времени t_1 примет значение меньше уровня X , т.е.

$$F(x, t) = P[X(t_1) < x]. \quad (4.31)$$

Как и для случайных величин производная функции $F(x, t)$ называется плотностью распределения

$$f(x, t) = dF(x, t)/dx \quad (4.32)$$

$F(x, t)$ и $f(x, t)$ определяют одномерное распределение вероятностей в сечении ансамбля и являются простейшими вероятностными характеристиками случайного процесса. Они характеризуют процесс в отдельных изолированных сечениях и не раскрывают связи между сечениями.

Более полными характеристиками случайного процесса будет двумерное распределение вероятностей по двум сечениям ансамбля при $t=t_1, t=t_2$.

$$F(x_1, x_2) = P[x < x_1; x < x_2] \quad (4.33)$$

Плотность вероятности системы двух случайных величин

$$f(x_1, x_2) = \partial^2 F(x_1, x_2) / \partial x_1 \partial x_2 \quad (4.34)$$

называют двумерной плотностью вероятности. Её преимущество – она в состоянии описывать связи между сечениями ансамбля в разные моменты времени. Геометрически функцию $f(x_1, x_2)$ можно изобразить некоей поверхностью в трёхмерной системе координат (рис. 4.9), называемой поверхностью распределения.

Двумерная плотность вероятности $f(x_1, x_2)$ положительна. Объём пространства под её поверхностью равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \partial x_1 \partial x_2 = 1 \quad (4.35)$$

Двойной интеграл в пределах от $-\infty$ до x_1 и x_2 даёт функцию распределения $F(x_1, x_2)$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) \partial x_1 \partial x_2 = F(x_1, x_2) \quad (4.36)$$

По заданной двумерной плотности вероятности легко находят одномерные распределения каждой из случайных величин:

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \partial x_2 \quad f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \partial x_1 \quad (4.37)$$

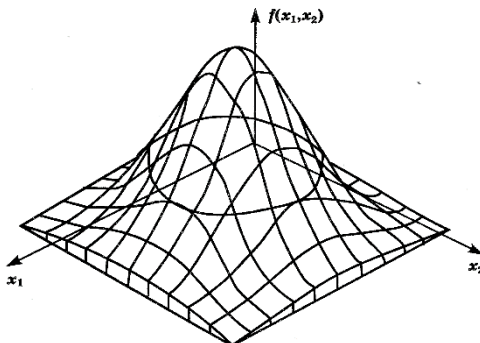


Рис. 4.9. Графическое отображение двумерной плотности вероятности $f(x_1, x_2)$

Соотношения между двумерной и одномерными плотностями вероятности характеризуют зависимости между самими случайными величинами X_1, X_2 . Они считаются зависимыми, если

$$f(x_1, x_2) < f(x_1)f(x_2). \quad (4.38)$$

Две случайные величины считаются независимыми, если их совместная плотность распределения равна произведению одномерных плотностей распределения этих величин:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) \quad (4.39)$$

Как и для случайных величин, в качестве вероятностных характеристик случайных процессов $X(t)$ применяют различные неслучайные характеристики, но уже не числовые, а в виде функций. Обычно используются четыре функции: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция и спектральная плотность. Их выражения основаны на применении вместо моментов *моментных функций*.

Моментные функции, как и моменты, могут быть различного порядка, начальными и центральными.

Начальная моментная функция k-го порядка - математическое ожидание функции $[x(t_1)]^k$; выражается в кратком или интегральном написании:

$$\alpha_k(x, t_1) = M[x(t_1)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_i)]^k f(x, t_i) dx \quad (4.40)$$

Здесь под математическим ожиданием функции понимается её вероятностное усреднение через интеграл с весом, равным плотности вероятности $f(x, t)$.

Начальная моментная функция первого порядка ($k=1$) определяет математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ в момент времени t :

$$\alpha_1(x, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_i) f(x, t_i) dx, \quad (4.41)$$

Функцию $\alpha_1(x, t_i)$ обычно обозначают $m_x(t)$ и называют математическим ожиданием случайного процесса $M[X(t)]$ в сечении t ансамбля ее реализаций.

Значения $m_x(t)$ в общем случае различны для разных сечений ансамбля реализаций случайного процесса $X(t)$ (штриховая линия на рис. 4.10).

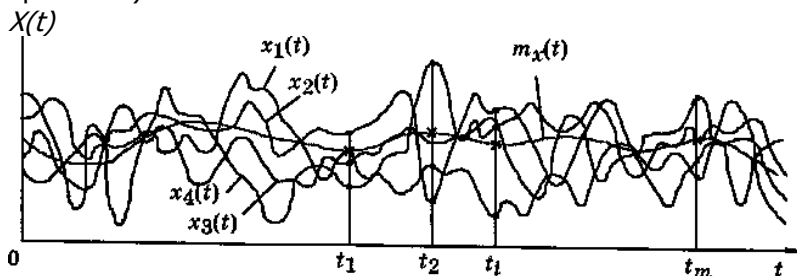


Рис. 4. 10. Ансамбль реализаций $x_i(t)$ случайного процесса $X(t)$ и его математическое ожидание $m_x(t)$

Начальная моментная функция второго порядка ($k=2$) в один момент времени t :

$$\alpha_2(x, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_i)]^2 f(x, t_i) dx. \quad (4.42)$$

Отклонение случайного процесса $X(t)$ от его математического ожидания называют *центрированным случайным процессом* $\dot{X}(t)$

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t) \quad (4.43)$$

Для центрированных случайных процессов $\dot{X}(t)$ моментные функции $\mu_k(x, t_i)$ k -го порядка определяют по выражениям:

$$\mu_k(x, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_i)]^k f(x, t_i) dx; \quad (4.44)$$

Практическое значение имеют центральные моментные функции второго порядка:

$$\mu_2(x, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t_i) \right]^2 f(x, t_i) dx; \quad (4.45)$$

функцию $\mu_2(x, t_i)$ называют *дисперсией случайного процесса* $X(t)$ и обозначают $D_x(t)$. Дисперсия характеризует энергию разброса реализаций случайного процесса относительно математического ожидания $m_x(t)$.

Среднее квадратическое отклонение (СКО) $\sigma_x(t)$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} \quad (4.46)$$

характеризует величину разброса реализаций случайного процесса относительно математического ожидания. В связи с соотношением (4.46) дисперсию случайного процесса иногда обозначают $\sigma^2_x(t)$.

Большое значение приобрели смешанные моментные функции второго порядка, представляющие матожидание произведения значений функций $X(t_1)$ и $X(t_2)$ в разные моменты времени t_1 и t_2 : корреляционные и ковариационные функции.

Автокорреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ *случайного процесса (смешанная начальная функция)* есть матожидание произведения значений случайной функции $X(t)$ в разные моменты времени t_1 и t_2

$$R_x(t_1, t_2) = a_2(X_1, X_2, t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]. \quad (4.47)$$

При $t_1=t_2=t$ получаем $\rho_x(t, t) = 1$; значение корреляционной функции равно дисперсии:

$$R_x(t, t) = D_x(t) = \sigma^2_x(t). \quad (4.48)$$

Статистической характеристикой связи двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ является *взаимная корреляционная функция* $R_{xy}(t_1, t_2)$. *Взаимная корреляционная функция* $R_{xy}(t_1, t_2)$ *случайных процессов* есть матожидание произведения значений случайных функции $X(t)$ и $Y(t)$ в разные моменты времени t_1 и t_2

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[X(t) Y(t)]. \quad (4.49)$$

Эта функция характеризует степень связи между сечениями процесса $X(t)$ и $Y(t)$. В отличие от автокорреляционной функции $R_x(t_1, t_2)$ она несет в себе информацию о фазовом сдвиге случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Часто применяют нормированные корреляционные функции:

$$\rho_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) / [\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)], \quad (4.50)$$

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) / [\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)], \quad (4.51)$$

Они безразмерные, изменяются от 0 до 1, и их графики легко сравнивать.

В случае, когда процесс содержит периодическую составляющую, то корреляционная функция тоже будет содержать периодическую составляющую с тем же периодом.

В инженерных приложениях корреляционную функцию $R(\tau)$ часто аппроксимируют подходящим аналитическим выражением. Так для определения усилий, действующих на разрушающие элементы сельхозорудий, корреляционную функцию принимают в виде:

$$K(\tau) = De^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau. \quad (4.52)$$

где α и β - параметры, подбираемые из условия наилучшего приближения опытной кривой $K(\tau)$. Для твердых почв $\alpha > 5$, $\beta > 15$, для средних почв $\alpha = 2 \dots 4$, $\beta = 5 \dots 12$, для рыхлых почв $\alpha < 2$, $\beta < 5$.

Ковариационной функцией случайного процесса $X_k(t_1, t_2)$ (смешанная центральная моментная функция) называют математическое ожидание произведения центрированных его значений в разные моменты времени t_1 и t_2 : $X_1 X_2$

$$K(t_1, t_2) = K(\tau) = \mu_{11}(\dot{X}_1, \dot{X}_2, t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] \quad (4.53)$$

Ковариацией процессов X_1 и X_2 называют математическое ожидание произведения центрированных их значений :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = M[\dot{X}_1 \dot{X}_2] \quad (4.54)$$

Нормированное её значение принято называть *коэффициентом корреляции (иногда ковариации)* между случайными функциями X_1 и X_2 .

Корреляционную функцию не следует путать с ковариационной. Различие их в том, что первая выражается моментом между нецентрированными величинами, а вторая – между центрированными. Соотношение между ними

$$K(\tau) = R_x(\tau) - m_x^2 \quad (4.55)$$

Для центрированных процессов, когда $m_x = 0$ ковариационная и корреляционная функции совпадают. Отсюда и многочисленные некорректности в названиях. Во избежание путаницы предпочитают называть моментные функции второго порядка корреляционными, так как этот термин пригоден и для центрированных и нецентрированных функций.

Приведённые выше неслучайные характеристики служат параметрами при построении аналитических моделей двумерных плотностей вероятности $f(x, y)$. Но в отличие от моделей одномерных (см. табл. 4.2) используются не только математические ожидания, дисперсии, но и нормированные корреляционные функции ρ_{xy} .

$$f(x, y) = \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \rho_{xy}) \quad (4.56)$$

Такие модели сложны и громоздки. Распространение получила модель двумерной плотности вероятности $f(x, y)$ для нормального распределения [2].

Для некоррелированных величин $\rho_{xy}=0$ и двумерная плотность распределения будет представлять произведение одномерных плотностей распределения $f(x)$ и $f(y)$:

$$f(x, y) = f(x) f(y) \quad (4.57)$$

Это соотношение используется для оценки связи между X и Y .

Вся вышеизложенная теория оценок вероятностных характеристик случайных функций и процессов базируется на рассмотрении сечений ансамбля реализаций. Это позволяло теоретикам использовать методологию ранних наработок теории вероятности, увязывать вероятностные характеристики случайного процесса и случайных событий, обеспечить преемственность теорий случайных величин и случайных процессов. Однако для практики такой подход создал проблемы.

Дело в том, что ансамбли реализаций подразумевают наличие многих объектов изучения, функционирующих одновременно и в одинаковых условиях (например, парк одинаковых станков в цехе, изготавливающих одинаковые детали). Такого в СХП нет. Поле не цех. В нём работает одна машина, да и то в разных условиях. Получение классического ансамбля реализаций невозможно. Возникла необходимость определения вероятностных характеристик по одной длинной реализации.

И такая теория была создана для стационарных процессов.

Стационарным случайный процесс считают, если его характеристики (моментные функции, функции распределения и пр.) не зависят от начала отсчета времени. Если же вероятностные характеристики зависят от начала отсчета времени, то процессы относятся к *нестационарным*.

Различают стационарные процессы в узком и широком смысле. Стационарными в узком смысле называют такие процессы, у которых все конечномерные распределения вероятностей не изменяются во времени, но меняются в зависимости от величины интервала $\tau = t_2 - t_1$ между сечениями процесса. Стационарными в широком смысле называют случайные процессы, у которых математическое ожидание и дисперсия всегда постоянны $m_x(t) = m_x = const$; $D_x(t) = D_x = const$, и лишь корреляционная функция зависит от разности $\tau = t_2 - t_1$,

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau). \quad (4.58)$$

Для стационарных случайных процессов оказалось возможным избежать получения ансамбля реализаций, и получать вероятностные характеристики усреднением по времени, а не по ансамблю реализаций. Для этого введено понятие *эргодических случайных процессов* [19].

Случайный процесс обладает эргодическим свойством, если по истечении достаточно большого промежутка времени вероятности состояний $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ стремятся к предельным значениям p_1, \dots, p_n , не зависящим от начальных вероятностей $P_1(0), \dots, P_n(0)$ и от текущего момента времени t ; то есть:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(\infty) = \mathbf{P}, \quad (4.59)$$

Доказывается, что условием эргодичности стационарной функции является неограниченное убывание ее корреляционной функции по модулю при $\tau \rightarrow \infty$.

У эргодических процессов вероятностные характеристики, полученные из ансамбля реализаций, совпадают с характеристиками, полученными усреднением по аргументу t . Это снимает необходимость получения ансамблей реализации и открывает большие перспективы для оперативного контроля и управления.

При моделировании вероятностных процессов в СХП часто полагают, что случайные процессы стационарные и эргодические. Для таких процессов вероятностные характеристики вычисляют по одной реализации процесса $X(t)$ усреднением по времени на конечной длительности T . Формулы (4.44), (4.47) упрощаются:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad (4.60)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt; \quad (4.61)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt; \quad (4.62)$$

Стационарность и эргодичность позволяет перейти к спектральным представлениям случайных функций и процессов в комплексной области.

6.4.2 Спектральные представления случайной функции

Спектральные представления случайной функции $x(t)$, удовлетворяющей условиям Дирихле (конечное число точек разрыва,

максимумов и минимумов) основаны на разложении её в ряд Фурье:

$$x(t) = \int_0^{\infty} A(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.63)$$

где $A(i\omega)$ - комплексная амплитуда:

$$A(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.64)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \text{ - частота } k\text{-ой гармоники.}$$

Распределение амплитуд по частотам $A_k(i\omega)$ называется *спектром случайного процесса*. Спектральное представление процесса удобно осуществлять с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). Каждому дискретному значению частоты ω_k будет соответствовать значение амплитуды A_k , а шаг по оси ω между соседними гармониками составит $2\pi/T$. С увеличением T интервалы между спектральными линиями сокращаются, и спектр в пределе при $T \rightarrow \infty$ превращается в непрерывную последовательность точек (непрерывная кривая) на комплексной плоскости.

Неудобства такого представления связано с тем, что амплитуды $A_k(i\omega)$ – величины комплексные и графически трудно воспроизводимы.

Более удобно спектры характеризовать *спектральной плотностью* $S(\omega)$, которая всегда вещественна. Она характеризует распределение энергии колебаний по частотному диапазону. Её можно получить через спектры $X(-i\omega)$ $Y(i\omega)$:

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} [X(-i\omega)X(i\omega)]/2T; \quad (4.65)$$

где T – время реализации случайного процесса при преобразовании Фурье $x(t)$ и $y(t)$.

Удобство спектральной плотности мощности в том, что она теряет комплексность, становится вещественной величиной и имеет компактное графическое представление (рис. 4.11).

Взаимная спектральная плотность $S_{XY}(\omega)$

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} [X(-i\omega)Y(i\omega)]/2T \quad (4.66)$$

остаётся комплексной. Формулы (4.65) и (4.66) называются соотношениями Хинчина – Винера.

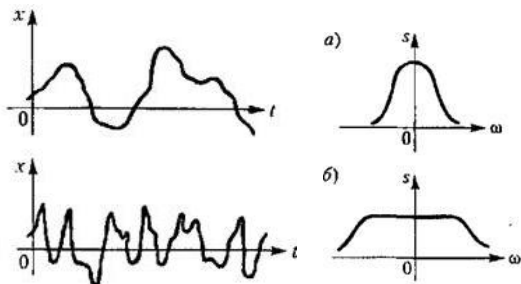


Рис. 4.11. Преобразование случайного сигнала в спектральную функцию: а – узкополосный сигнал; б – широкополосный сигнал.

Получать спектральную плотность можно преобразованием Фурье ковариационной $K(\tau)$ или корреляционной функции $R_x(\tau)$:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (4.67)$$

Графики корреляционной функции и спектральных плотностей для различных случайных процессов (1, 2, 3, 4) приведены на рис. 4.12. Общая тенденция: монотонно убывающая функция $K(\tau)$ преобразуется в тоже монотонно убывающую $S(\omega)$ от ω . Чем уже график функции $K(\tau)$, тем более пологой и широкой является график функции $S(\omega)$.

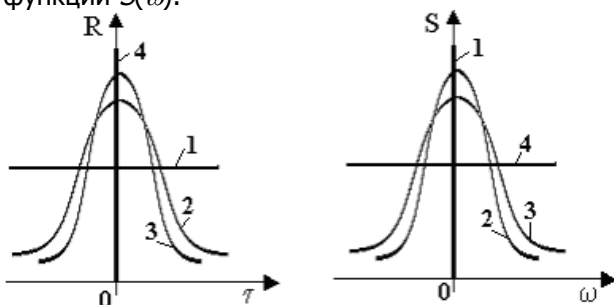


Рис. 4.12.

Если $S(\omega)$ имеет максимум при некоторой частоте ω_0 и симметрична относительно неё, то корреляционная функция будет иметь характер затухающих колебаний с частотой ω_0 .

Обратное преобразование выражает корреляционную функцию через спектральную плотность:

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (4.68)$$

Начальное значение корреляционной функции есть дисперсия процесса:

$$D = K(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (4.69)$$

Значения корреляционной функции при любом τ не превышают величины $K(0)$.

Спектральная плотность производной случайной стационарной функции $x(t)$ со спектральной плотностью $S(\omega)$:

$$S_v(\omega) = \omega^2 S(\omega) \quad (4.70)$$

Спектральные представления позволяют получать информацию о реакции динамической системы на случайный процесс на входе. Динамические модели при случайном воздействии на входе становятся вероятностными.

Современной общепризнанной формой динамической модели являются матрично-дифференциальные уравнения состояния первого порядка в форме Коши по типу (3.25). Для вероятностной модели (см. рис. 4.2. а) на входе случайная функция - вектор $\bar{x}(t)$:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = [J] \cdot \bar{u} + [B] \cdot \bar{x}(t) \quad (4.71)$$

где $[J]$ – блочная матрица собственных свойств системы (матрица Якоби); $[B]$ – матрица выбора возмущений; $\bar{u} = [Y, \dot{Y}]$ вектор состояния, содержащий фазовую переменную $Y(t)$ и её производную $\dot{Y}(t)$.

Блочная матрица Якоби содержит матрицы жёсткости, инерции и диссипации, но в форме Коши они не просматриваются, что создаёт трудности для понимания физики явлений. Физика явлений будет лучше заметна, если перейти от формы Коши к системе дифференциальных уравнений второго порядка.

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + C\bar{Y} = \bar{X}(t) \quad (4.72)$$

где A, B, C – квадратные матрицы размерности $n \times n$ соответственно инерции, диссипации и жёсткости; $\bar{X}(t)$ – вектор случайных воздействий.

Наличие случайных воздействий на входе делают все динамические модели СХП статистическими [Лурье А.Б., 1970].

Современная математика не имеет способов получения фазовой координаты $\bar{u}(t)$ из уравнения (4.71) как ансамбля

реализаций. Но спектральные представления делают возможным получать его характеристики.

Чтобы избавиться от необходимости создавать ансамбли реализаций, для СХП обычно делают допущения о стационарности и эргодичности процессов. СХП имеют большую длительность, благодаря чему даже отдельные случайные выбросы будут повторяться многократно, переходя в разряд стационарных, не нарушающих серьёзно постоянство математического ожидания m_x и дисперсии D_x , т.е. СХП имеют стационарность и в широком смысле. По этим причинам многие СХП можно считать эргодическими и использовать спектральные представления переменных.

Важное значение при моделировании СХП имеют инерционные свойства сельскохозяйственных машин, которые обладают способностью нормализовать распределения фазовых переменных, даже если распределения воздействий будут от нормальных отличаться. Нормальный случайный процесс хорош тем, что полностью определяется математическим ожиданием и корреляционной функцией. Кроме того, сумма двух нормальных процессов даёт тоже нормальный процесс, а распределение вероятностей производной стационарного процесса также нормально.

Стационарность, эргодичность и нормальное распределение позволяет перевести уравнения (4.72) в комплексную форму через преобразование Фурье [18] и получать его в виде:

$$[(i\omega)^2 A + i\omega B + C] \bar{Y}(i\omega) = X(i\omega) \quad (4.73)$$

$i\omega$ – частотный оператор Фурье;

$X(i\omega)$, $\bar{Y}(i\omega)$ – спектры входных и выходных сигналов.

По спектру входных воздействий можно находить спектр процесса $\bar{Y}(i\omega)$ на выходе:

$$\bar{Y}(i\omega) = [W(i\omega)] X(i\omega) \quad (4.74)$$

где $W(i\omega) = [(i\omega)^2 A + i\omega B + C]^{-1}$ носит название КЧХ - комплексной частотной характеристики (некоторые ошибочно называют её передаточной функцией).

Глава 7 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ НТТС

Любая НТТС, в том числе СХМ, должна передвигаться по дорогам и полям со сложным рельефом и большими нагрузками. К процессу движения НТТС предъявляется ряд требований по устойчивости движения и реакции на рельеф. В зависимости от назначения машины требования варьируются от полной нечувствительности к колебаниям рельефа до его точного копирования при гарантиях курсовой устойчивости.

7.1. Моделирование курсовой устойчивости НТТС

В процессе движения на НТТС действуют случайные возмущения, способные нарушить движение в заданном направлении. Способность сохранять заданное направление движения, невзирая на возмущения, называется в автомобилях и судах курсовой устойчивостью. В НТТС эта проблема более выражена. Если у автомобилей возмущения нетехнологичны, идут от дороги и могут специально уменьшаться (плавный колёсный ход, асфальтированное покрытие и т.п.), то у НТТС они реализуют техпроцесс (например, почвообрабатывающие агрегаты) и нейтрализовать их недопустимо. В таких условиях курсовая устойчивость есть важное и специфичное требование к их движению в горизонтальной плоскости. Теорию курсовую устойчивость НТТС заложил Гячев Л.В. в ряде работ, начиная с 1976 г., называя её динамикой или механикой СХМ.

7.2.1. Устойчивость движения прицепного агрегата

Гячев Л.В. изучал движение агрегатов, состоящих из движителя (трактора) и СХМ [5]. Прицепную машину рассматривал как физический маятник (рис. 7.1.1), который колеблется в горизонтальной плоскости $X_1 O_1 Y_1$ вокруг точки прицепа O , движущейся с постоянной скоростью $V_0 = \text{const}$.

Машина совершает сложное движение: переносное поступательное, (прямолинейное и равномерное) и относительное вращательное вокруг точки прицепа O .

Равнодействующая сил сопротивления рабочих органов R приложена в точке D , называемой «центром сопротивления», со-

ставляя угол δ с осью машины OD . Она противоположна абсолютной скорости точки D и всегда постоянна по величине, т.е. $|R| = \text{const}$.

Рассмотрим текущее положение машины в плоскости XOY , когда продольная ось OD машины отклонена от направления переносной скорости V_Q на угол φ

Дифференциальное уравнение относительного колебания машины строим как для колебания маятника по принципу Даламбера:

$$I_o \ddot{\varphi} = \sum M_o (\bar{F}_i), \quad (7.1.1)$$

где I_o — момент инерции маятника относительно оси прицепа, $\ddot{\varphi}$ — угловое ускорение колебаний машины; M_o — момент сил относительно оси прицепа O .

Единственной силой, дающей момент относительно оси прицепа O , является сила R сопротивления рабочих органов.

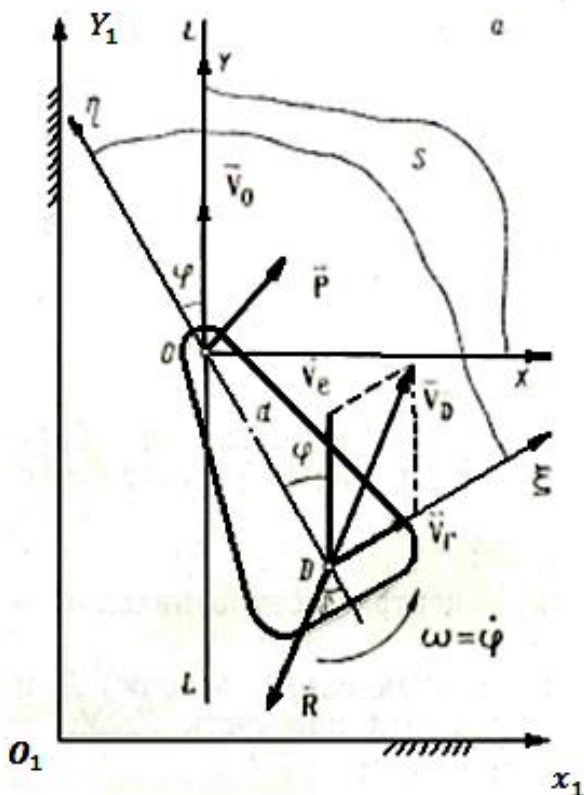


Рис. 7.1.1. Расчётная схема движения прицепной машины: O - точка прицепа; P - крюковое усилие; $V_e = V_o$ - переносная скорость; V_D переносная скорость «центра сопротивления»; V_r - относительная вращательная скорость «центра сопротивления»; $d = OD$ - расстояние между точкой прицепа и центром сопротивления.

Момент силы R относительно точки O (при $\delta > 0$)

$$M_o(\bar{R}) = Rd \sin \delta \quad (7.1.2)$$

где $d \sin \delta = h$ — плечо силы R относительно точки O .

Угол δ , составленный силой R с продольной осью машины, можно выразить через проекции абсолютной скорости на оси координат V_ξ , V_η , связанные с

прицепной машиной. Будем считать угол δ D_η положительным, когда вектор V_D отклонен от оси машины против часовой стрелки; это связано с использованием здесь правой системы координат. Тогда

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{V_\xi}{V_\eta} \quad ; \quad \delta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{V_\xi}{V_\eta}\right) \quad (7.1.3)$$

Выразим проекции скорости V_ξ , V_η через скорости, заданные в расчётной схеме. Учитывая, что абсолютная скорость точки D равна векторной сумме переносной V_0 и относительной V_{DO} скоростей

$$\bar{V}_D = \bar{V}_\xi + \bar{V}_\eta \quad , \quad (7.1.4)$$

Окружная скорость V_{DO} связана с угловой $\dot{\varphi}$;

$$\bar{V}_{DO} = \dot{\varphi}d \quad (7.1.5)$$

где d — расстояние точки D от оси прицепа;

Проекции векторного равенства (2.2) на оси ξ и η , связанные с прицепной машиной (см. рис. 7.1):

$$v_\xi = v_0 \sin \varphi + v_{DO} \quad , \quad v_\eta = v_0 \cos \varphi. \quad (7.1.6)$$

Подставка этих выражений в уравнение (7.3), даёт:

$$\delta = -\operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin \varphi + \dot{\varphi}d}{\cos v_0}. \quad (7.1.7)$$

Для малых амплитуд колебаний угол φ мал, и можно принять $\sin \varphi \approx \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, фактически линеаризуя задачу. Тогда:

$$\delta = -\frac{1}{v_0} (v_0 \varphi + \dot{\varphi}d). \quad (7.1.8)$$

Полученное выражение является уравнением кинематической связи координат системы неголономного типа. Подставив это выражение в (7.2) и учитывая малость угла δ , $\sin \delta \approx \delta$, Гячевым Л.В. получено выражение для момента сил:

$$M_0(\bar{R}) = -\frac{d}{v_0} (v_0 \varphi + \dot{\varphi}d)R \quad (7.1.9)$$

Уравнение (7.1) колебаний машины относительно точки прицепа получает вид дифуравнения 2-ого порядка:

$$I_0 \ddot{\varphi} = - \frac{d}{v_0} (v_0 \varphi + \dot{\varphi} d) R \quad (7.1.10)$$

Уравнение (7.10) можно считать математической моделью движения прицепной машины в горизонтальной плоскости. Модель детерминированная, инвариантная, не всегда линейная.

Гячев Л.В. представил уравнение (7.10) в классической форме линейного однородного дифуравнения 2-ого порядка:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad (7.1.11)$$

где все коэффициенты положительны

$$n = \frac{Rd^2}{2I_0v_0} > 0; \quad k^2 = \frac{Rd}{I_0} > 0 \quad (7.1.12)$$

В коэффициенты входит внешняя нагрузка R – входной фактор задачи, считающийся постоянным; это не соответствует физике процесса и наряду с допущением о малости отклонений от равновесного состояния сильно обедняет ММ. Но для проверки на устойчивость линейного однородного уравнения достаточно.

Поскольку коэффициенты n и k^2 положительные, то согласно положениям аналитической механики, движение машины в горизонтальной плоскости по Ляпунову всегда устойчиво.

Общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами по правилам математики имеет вид:

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (7.1.13)$$

где λ_i – корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0, \quad (7.1.14)$$

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}; \quad \lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}; \quad (7.1.15)$$

C_1, C_2 – неизвестные постоянные интегрирования. Они находятся из начальных условий: при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

В зависимости от значений коэффициентов n и k дифуравнение (7.11) может иметь разные решения.

1) При $n > k$ или $Rd^3 > 4I_0v_0^2$ имеет место аperiodическое движение

$$\varphi = e^{-nt} [C_1 e^{(\sqrt{n^2 - k^2})t} + C_2 e^{-(\sqrt{n^2 - k^2})t}] ; \quad (7.1.16)$$

колебания машины отсутствуют. Прицепная машина, выведенная из равновесного положения случайным импульсом, постепенно возвращается в равновесное положение без колебаний.

2. При $n < k$ или $Rd^3 < 4I_0v_0^2$ движение представляется затухающими колебаниями:

$$\varphi = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2}t). \quad (7.1.17)$$

После возмущений машина возвращается к равновесному состоянию, совершая затухающие колебания. Период и декремент колебаний выразятся формулами:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} ; D = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}} \quad (7.1.18)$$

5. При $n = k$ или $Rd^3 = 4I_0v_0^2$ система имеет равные корни и поворот машины относительно точки прицепа имеет вид предельного аperiodического движения

$$\varphi = e^{-nt} (C_1 + C_2 t), \quad (7.1.19)$$

Равенство корней может наступить только при определённом значении силы сопротивления R , которая в реальном процессе непостоянна и зависит от угла поворота машины φ . Появление такого решения – следствие принятых автором допущений о постоянстве R и однородности дифференциального уравнения ММ.

7.1.2. Устойчивость движения агрегата с навесной машиной

Навесная машина присоединена к трактору при помощи механизма навески. Этот пространственный механизм допускает перемещение рамы прицепной машины относительно трактора как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях.

Машинно-тракторный агрегат, состоящий и трактора с навешенной сзади машиной, совершает относительно неподвижной плоскости $X_1 O_1 Y_1$ (рис. 25) прямолинейное и равномерное поступательное движение. Этому движению соответствует поступательное движение плоскости XOY со скоростью $\overline{V_0} = const$. Центр

масс трактора будем считать совпадающим сеточкой O — началом координат системы XOY .

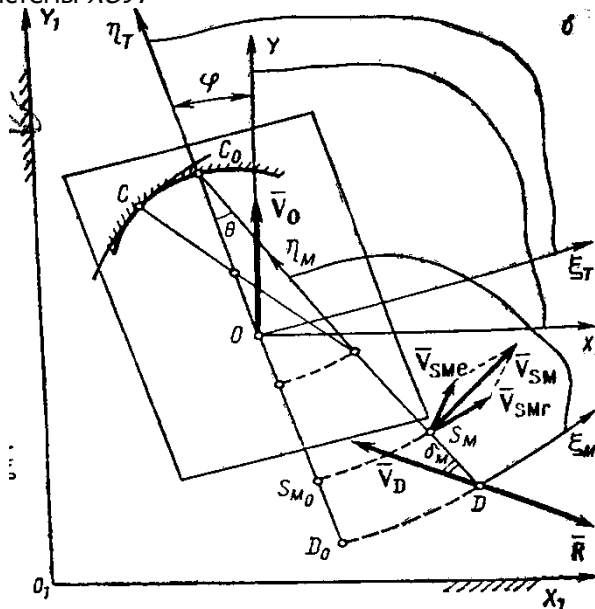


Рис. 25. Расчётная схема движения агрегата с задней навесной машины в текущем положении.

По отношению к навесной машине примем обозначения:

$C_0S_M = h$ — расстояние от мгновенного центра вращения машины относительно трактора до центра масс машины;

$C_0D = d$ — расстояние от мгновенного центра C до центра D сопротивления рабочих органов машины;

$C_0O = C_0S_T = c$ — расстояние от начального положения C_0 мгновенного центра относительного вращения машины до центра масс трактора.

В процессе работы агрегата его звенья — трактор и навесная машина — под действием случайных факторов отклоняются от первоначальных положений и получают дополнительные скорости; начинается относительное движение системы по отношению к плоскости XOY . При этом плоскость $\xi_T O \eta_T$, связанная с трактором (см. рис. 25), вращается относительно плоскости XOY вокруг оси OZ ($S_T \xi$), проходящей через точку O . Мерой этого поворота служит угол φ , составленный продольной осью $O \eta_T$ трактора с осью OY . Система координат

$\xi_M D\eta_M$ связанная с рамой машины, совершает относительно трактора (плоскости $\xi_T O\eta_T$) плоско-параллельное движение, определяемое обобщенной координатой Θ .

Таким образом, весь агрегат по отношению к плоскости XOY имеет две степени свободы; им соответствуют две обобщенные координаты углы φ и Θ ; φ – угол поворота трактора относительно плоскости XOY ; Θ – угол поворота рамы машины относительно трактора.

Кинетическая энергия агрегата состоит из кинетической энергии вращательного движения трактора и энергии плоско-параллельного движения рабочей машины:

$$T = \frac{1}{2}(I_{ST}\omega_T^2 + m_M v_M^2 + I_{SM}\omega_M^2, \quad (7.29)$$

где I_{ST} и I_{SM} – моменты инерции трактора и рамы навесной машины (всех деталей, жестко связанных с рамой машины) относительно их вертикальных центральных осей;

ω_T и ω_M – угловые скорости трактора и рамы рабочей машины относительно плоскости XOY ;

v_{MS} – скорость центра масс машины относительно плоскости XOY .

Очевидно

$$\left. \begin{aligned} \omega_T &= \dot{\varphi}; \\ \omega_M &= \dot{\varphi} + \dot{\Theta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Подставив значения v_{SM} , ω_T и ω_M в выражение кинетической энергии агрегата, получим

$$T = \frac{1}{2} \left\{ I_{ST} \dot{\varphi}^2 + I_{SM} (\dot{\varphi} + \dot{\Theta})^2 + m [(h - c)\dot{\varphi} + h\dot{\Theta}]^2 \right\} \quad (7.34)$$

Выполнив дифференцирование кинетической энергии системы по обобщенным координатам, скоростям и времени, запишем уравнения Лагранжа в виде:

$$\left. \begin{aligned} [I_{ST} + I_{SM} + m(h - c)^2]\dot{\varphi} + [I_{SM} + mh(h - c)]\dot{\Theta} &= Q_\varphi \\ [I_{SM} + mh(h - c)]\dot{\varphi} + (I_{SM} + mh)\dot{\Theta} &= Q_\Theta \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

где Q_φ , Q_Θ – неизвестные обобщенные силы по соответствующим координатам.

Для отыскания обобщенных сил необходимо найти углы; составленные силой \bar{R} с осями координат $\xi_T O\eta_T$ и $\xi_M D\eta_M$. Сила \bar{R} направлена противоположно абсолютной скорости точки D .

Абсолютная скорость точки D

$$\bar{V}_D = \bar{V}_0 + \bar{V}_{De} + \bar{V}_{Dr} \quad (7.36)$$

где \bar{V}_0 - скорость движения плоскости XOY;

\bar{V}_{De} — скорость точки D во вращательном движении вместе с трактором (плоскостью $\eta_T O \eta_T$), направленная перпендикулярно отрезку OD в сторону переносного вращения;

\bar{V}_{Dr} — скорость точки D относительно трактора, направленная перпендикулярно отрезку CD в сторону относительного вращения.

На рис. 26 Изображена векторная сумма (7.36) и оси координат XOY, $\xi_T O \eta_T$ и $\xi_M O \eta_M$. Отклонения вектора абсолютной скорости точки D от направлений осей y, η_T и η_M имеют углы δ_y ; δ_T и δ_M

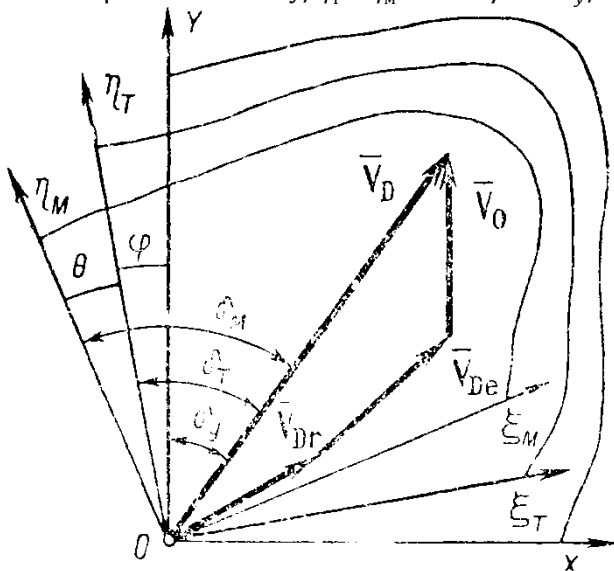


Рис. 26. Скорость центра D сопротивления навесной машины как сумма скоростей в трех движениях.

Исходя из геометрии схемы, можно получить формулы для углов

$$\left. \begin{aligned} \delta_y &= -\frac{v_x}{v_y} = -\frac{1}{v_0} [(d-c)\dot{\varphi} + d\dot{\Theta}]; \\ \delta_T &= -\frac{v_{\xi T}}{v_{\eta T}} = -\frac{1}{v_0} [v_0\varphi(d-c)\dot{\varphi} + d\dot{\Theta}]; \\ \delta_M &= -\frac{v_{\xi M}}{v_{\eta M}} = -\frac{1}{v_0} [v_0(\varphi + \Theta) + (d-c)\dot{\varphi} + d\dot{\Theta}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

При отыскании обобщенной силы Q_φ , соответствующей обобщенной координате φ , поворачиваем всю систему (агрегат), как одно твердое тело на угол $\delta\varphi$ относительно центра O и подсчитываем работу всех внешних (задаваемых) сил на этом перемещении. Здесь работу проводит главный момент системы сил, приложенных к агрегату, относительно центра поворота. Этот момент и является обобщенной силой Q_φ

$$Q_\varphi = -aT_A + bT_B + M_A + M_B + aS_A\psi_A + bSF_B\psi_B + ROD(\delta_m - \varepsilon) \quad (7.39)$$

Силы T_A, T_B , моменты M_A и M_B определяются формулами (4.9) угол δ_m — формулой (7.38); угол $\varepsilon = \angle C_0DO$ — формулой (7.28). Кроме того $OD \approx d - c$.

Подставив значения величин в формулу (7.39), перепишем выражение обобщенной силы в виде

$$Q_\varphi = M\Delta_A - N\Delta_B - (d - c) \left(\varphi + \frac{d-c}{v_0} \dot{\varphi} + \frac{d}{d-c} \Theta + \frac{d}{v_0} \dot{\Theta} \right) R \quad (7.40)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= ac_A - f_A k_A + ak_A S_A \\ N &= bc_B - f_B k_B - bk_B (S_A + R) \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

Δ_A и Δ_B — поперечные деформации шин, определяемые формулами (4.7).

При отыскании обобщенной силы Q_θ , соответствующей координате Θ , поворачиваем раму машины относительно трактора сна угол $\delta\theta$ и подсчитываем работу силы R . Обобщенная сила Q_θ оказывается равной моменту силы R относительно мгновенного центра вращения — точки C .

Следовательно $Q_\theta = R \times CD \times \delta_m$

$$\text{или } Q_\theta = -\frac{d}{v_0} [v_0(\varphi + \Theta) + (d - c)\dot{\varphi} + d\dot{\Theta}]R. \quad (7.42)$$

Если в левых частях уравнений Лагранжа ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} I_{SM} + I_{ST} + m(h - c)^2 &= I_1; \\ I_{SM} + mh^2 &= I_2; \\ I_{SM} + m(h - c) &= I_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

то с учетом значений обобщенных сил (7.39) и (7.42) получим математическую модель движения агрегата в виде двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} I_1\dot{\varphi} + I_3\dot{\Theta} &= M\Delta_A - N\Delta_B - R[(d-c)\varphi + d\Theta] - \frac{d-c}{v_0}[(d-c)\varphi + d\Theta]R; \\ I_3\dot{\varphi} + I_2\dot{\Theta} &= -dR(\varphi + \Theta) - \frac{d}{v_0}[(d-c)\dot{\varphi} + d\dot{\Theta}]R. \end{aligned} \right\}$$

(7.44)

Проведем линеаризацию уравнений. Положив в уравнениях (7.47) $\gamma = ae^{\lambda t}$; $\theta = \beta^{\lambda i}$. получим характеристическое уравнение в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} (a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4); & (a_5\lambda^4 + a_6\lambda^3 + a_7\lambda^2 + a_8\lambda + a_9) \\ (b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2); & (b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5) \end{vmatrix} = 0$$

Систму можно привести к одному уравнению шестого порядка

$$m_0\lambda^6 + m_1\lambda^5 + m_2\lambda^4 + m_3\lambda^3 + m_4\lambda^2 + m_5\lambda + m_6 = 0,$$

где m_i – коэффициенты, выражающиеся через массово-геометрические параметры агрегата. Подробнее см. Гячева Л.В. [5] глава 7.

$$m_0 = a_0b_3 - a_5b_0;$$

$$m_1 = a_0b_4 + a_1b_3 - a_5b_1 - a_6b_0;$$

$$m_2 = a_0b_5 + a_1b_4 + a_2b_3 - a_5b_2 - a_6b_1 - a_7b_0;$$

$$m_3 = a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 - a_6b_2 - a_7b_1 - a_8b_0;$$

$$m_4 = a_2b_5 + a_3b_4 + a_4b_3 - a_7b_2 - a_8b_1 - a_9b_0;$$

$$m_5 = a_3b_5 + a_4b_4 - a_8b_2 - a_9b_1;$$

$$m_6 = a_4b_5 - a_9b_2$$

Характеристическое уравнение (7.50) не имеет нулевых корней, поскольку в общем случае все его коэффициенты $m_i \neq 0$.

Условия устойчивости

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} m_1 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_0 & 0 \\ m_5 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \\ 0 & m_6 & m_5 & m_4 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & m_6 & m_5 \end{vmatrix} > 0 \quad (7.51)$$

требует, чтобы все коэффициенты были бы положительны. Получаем систему условий

$$m_1 > 0; m_2 > 0; m_3 > 0;$$

$$m_4 > 0; m_5 > 0; m_6 > 0;$$

Наиболее жесткие ограничения на параметры агрегата накладывают последние из коэффициентов m_i Соответствующие им условия устойчивости имеют вид:

$$\begin{aligned} M_5 &= (ak_B - 1)M + (bk_A + 1)N + d(k_A N - k_A M) - \\ &c[k_A + k_B + k_A k_B (d - c)]R > 0 \end{aligned} \quad (7.55)$$

Как следует из последнего неравенства (7.55), с увеличением расстояния s и силы R опасность нарушения устойчивости движения агрегата возрастает. Однако путем регулировки механизма навески и изменения расстояния s можно достичь наиболее быстрого затухания возмущений, т. е. получить параметры агрегата, обеспечивающие наиболее устойчивое в практическом смысле его движение.

7.2. Моделирование плавности хода НТТС

В теории НТТС распространена задача снижения вертикальных колебаний машины, обеспечения плавности хода при движении по неровностям рельефа. Для плавности хода машина должна сглаживать колебания рельефа, что в технике называют амортизацией. Амортизацию в современных НТТС осуществляют, применяя различные упругие элементы (резиновые шины, рессоры, пружины и др.).

Рассмотрим пространственное движение машины на резиновых шинах по неровностям поля [1, п.5.4]. Расчётная схема в отличие от схемы на рис. 3.1 принята одномассовой, без подрессоривания (рис. 7.1.2). Резиновые шины считаются упругими и диссипативными элементами по направлениям смещений крайних точек A, B, C, D машины: вертикальных 1-4, курсовых 5-6, боковых 7-8.

Входными факторами являются кинематические воздействия $u_{B1}(t), u_{B2}(t), u_{B3}(t), u_{B4}(t)$ от неровностей поля, передающиеся на машину через упругие и диссипативные элементы колёс 1 — 4. Результат моделирования – колебания центра масс $s_k(t), k=1, 2, 3$. Движение машины относится к категории сложных: поступательное движение центра масс $s_k(t)$ по трём осям координат x, y, z и относительное вращательное движение вокруг трёх осей – итого шесть степеней свободы.

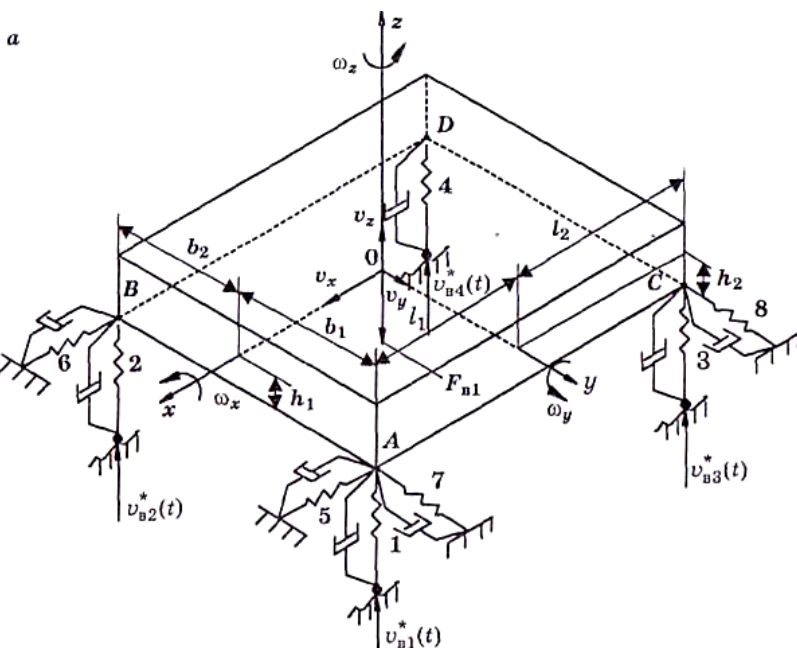


Рис. 7.1.2. Расчётная схема колебаний неподрессоренной машины на резиновых шинах

Полная динамическая модель тела включает инерционные, упругие и диссипативные компонентные уравнения.

Инерционные компонентные уравнения представляют систему из шести уравнений: три уравнения для поступательного движения центра масс тела и три уравнения для вращения тела вокруг центра масс:

$$F_{ик} = m \frac{d^2 s_k}{dt^2}, \quad k=x, y, z; \quad (7.1.20)$$

$$M_{ик} = \sum_j \delta_{jk} J_{jk} d\omega_j / dt, \quad k=x, y, z; \quad j=x, y, z; \quad (7.1.21)$$

$$\delta_{jk}=0 \text{ при } j=k; \quad \delta_{jk}=-1 \text{ при } j \neq k.$$

где $F_{ик}$ - проекции силы инерции в переносном поступательном движении; $M_{ик}$ — проекции момента сил инерции в относительном движении с угловыми скоростями $\omega_j, j=x, y, z$.

Компонентные уравнения упругих элементов системы для малых колебаний определяются через кинематические уравнения Эйлера (3.41). Специфика уравнений Эйлера (3.41) приводит к

тому, что в компонентных уравнениях упругих элементов системы появляются переменные вращательного движения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$:

для вертикальных упругих элементов 1 — 4:

$$dF_{yi}/dt = c_i(u_{z0} + \omega_x y_i - \omega_y x_i - u_{bi}^*), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (7.1.22)$$

для горизонтальных упругих элементов 5 и 6:

$$dF_{yi}/dt = c_i(u_{x0} + \omega_y z_i - \omega_z y_i), \quad i = 5, 6; \quad (7.1.23)$$

для поперечных упругих элементов 7 и 8 :

$$dF_{yi}/dt = c_i(u_{y0} + \omega_z x_i - \omega_x z_i), \quad i = 7, 8.$$

(7.1.24)

Здесь индекс i означает номер упругого элемента.

Компонентные уравнения диссипативных элементов аналогичны, поскольку они параллельны упругим элементам.

Компонентные уравнения преобразуют угловые скорости в линейную скорость точек тела подобно преобразованиям в трансформаторных элементах (ТЭ).

В итоге получаем инвариантную иномерную математическую модель одномассовой НТТС в виде громоздкой системы 17 дифференциальных и алгебраических уравнений [1, с.185, уравнения 5.70]. В то время как без учёта углов поворота одномассовая система описывалась тремя уравнениями, а двухмассовая – шестью.

7.3. Моделирование процесса копирования рельефа

Важным агротехническим требованием к выполнению многих сельскохозяйственных операций (посев, пахота, культивация и др.) является требование копирования макрорельефа агрофона при наличии возмущений от микрорельефа и неровностей.

Моделированием копирования рельефа занимался проф. Жаров В.П. В работе [Жаров В.П., Устинов С.Ю. Моделирование и оптимизация копирующей системы комбинированного сельскохозяйственного агрегата.- Вестник ДГТУ, 2005. Т.5. №5(27)] рассмотрен агрегат, состоящий из колесного трактора, заднего механизма навески, и многосекционной комбинированной машины, каждая секция которой содержит опорное колесо, культиваторную лапу, сошник для высева мелкосеменных овощных культур и прикатывающее колесо (рис. 7.1.7).

Построение математических моделей копирующих систем мобильных сельскохозяйственных агрегатов необходимо проводить с учётом дополнительно налагаемых на них условий связи и

соответствующих им обобщённых реакций [9, Жаров В.П., 1980.].
Дополнительные связи копирования принуждают рабочие органы агрегата двигаться по агрофону без отрыва.

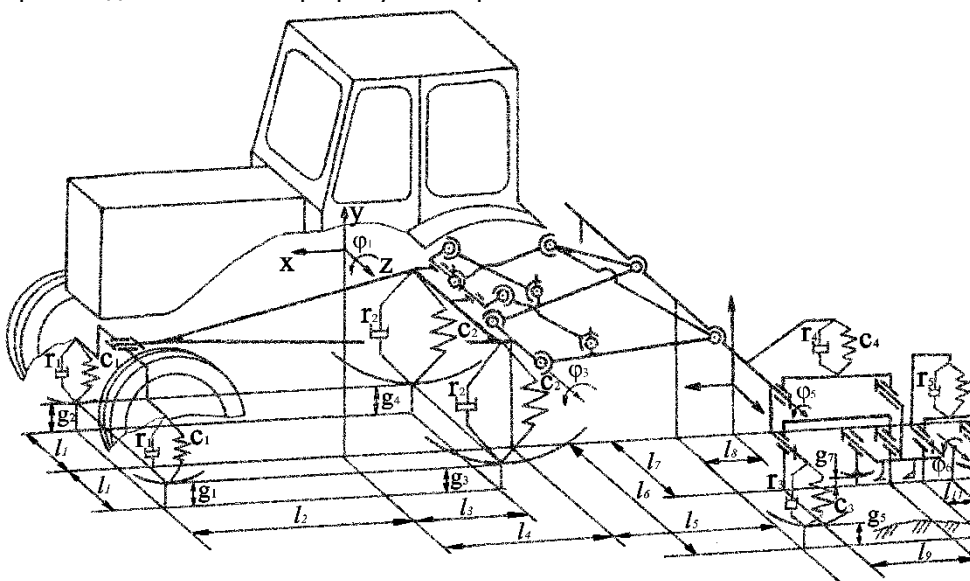


Рис. 7.1.7. Расчётная схема комбинированного сельскохозяйственного агрегата: g_i – колебания макрорельефа под каждым колесом и катком, C_i – жёсткости колёс и подвесок, r_i – демпфирование элементов, l_i расстояния – координаты расположения элементов, ϕ_i – углы поворота элементов агрегата в продольно-вертикальной плоскости

Для составления уравнений движения колебательной системы используются уравнения Лагранжа с неопределёнными множителями.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu} * \frac{\partial F_{\mu}}{\partial q_j} = Q_j', \quad (7.1.34)$$

где T – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия системы; Φ – диссипативная функция; q_j ($j=1, \dots, n$) – обобщённые координаты; Q_j ($j=1, \dots, n$) – обобщённые силы; λ_{μ} ($\mu=1, \dots, m$) – неопределённые множители Лагранжа; F_{μ} ($\mu=1, \dots, m$) – дополнительно налагаемые связи.

В качестве обобщённых координат приняты:

$q_1 = y$ – линейное перемещение трактора вдоль вертикальной оси;

$q_2 = \varphi_1$ – угловые колебания трактора относительно поперечной оси z ;

$q_3 = \varphi_3$ – угловые колебания механизма навески относительно поперечной оси (Oz);

$q_4 = \varphi_4$ – угловые колебания механизма навески относительно продольной оси (Ox);

$q_5 = \varphi_5$ – угловые колебания секции относительно поперечной оси (Oz);

$q_6 = \varphi_6$ – угловые колебания механизма прикатывающего колеса относительно поперечной оси (Oz).

В общем виде конфигурация системы определяется совокупностью n обобщённых координат и подчиняется m дополнительным связям. Реакции дополнительно налагаемых связей представлены в виде выходов системы. Для обеспечения показателей назначения этих машин необходимо обеспечить копирование агрофона так, чтобы динамические реакции на опорах рабочих агрегатов не превышали допустимых значений.

После нахождения T, Π, Φ, Q_j , подстановки их в (7.34) и учёта связей копирования получена математическая модель в виде матричного уравнения, описывающая динамику рассматриваемой системы при возмущениях со стороны неровностей агрофона:

$$[M_1] \ddot{\bar{q}} + [M_2] \dot{\bar{q}} + [M_3] \bar{q} = [K_1] \ddot{\bar{g}} + [K_2] \dot{\bar{g}} + [K_3] \bar{g} + \bar{F}_s + \bar{F}_k \quad (7.1.35)$$

где $\bar{g} = [g_f, g_b, g_5, g_6, g_7, g_8]^T$ – вектор входных случайных переменных – возмущений от рельефа;

$\bar{q} = [y, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \lambda_1, \lambda_2]^T$ – вектор выходных переменных колебаний элементов системы, в котором присутствуют случайные процессы;

$\bar{F}_s = [F_{sy}, l_4 F_{sy}, l_4 F_{sy}, l_4 F_{sy}, l_4 F_{sy}, 0]^T$ – вектор связей секции;

$\bar{F}_k = [F_{ky}, l_4 F_{ky}, l_4 F_{ky}, l_4 F_{ky}, l_4 F_{ky}, 0]^T$ – вектор связей культиватора;

$[M_1], [M_2], [M_3]$ – матрицы собственных свойств системы: инерционных, диссипативных, жёсткостных соответственно;

$$[M_1] = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l_4 & m_2 l_5 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 l_4 & J_1 + m_2 l_4^2 & m_2 l_4 l_5 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 l_5 & m_2 l_4 l_5 & m_2 l_5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.36)$$

$$[M_2] = \begin{pmatrix} 2(r_1 + r_2) & 2(-l_2 r_1 + l_3 r_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(-l_2 r_1 + l_3 r_2) & 2(l_2^2 r_1 + l_3^2 r_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r_3 l_5^2 & r_3 l_5 (-l_6 + l_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 l_6 (-l_5 + l_5) & 2r_3 l_6^2 & 0 & 0 \\ -\frac{r_4}{l_9} & -\frac{r_4 l_4}{l_9} & -\frac{r_4 l_5}{l_9} & -\frac{r_4 l_7}{l_9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.37)$$

$$[M_3] = \begin{pmatrix} 2(C_1 + C_2) & 2(-l_2 C_1 + l_3 C_2) & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2(-l_2 C_1 + l_3 C_2) & 2(l_2^2 C_1 + l_3^2 C_2) & 0 & 0 & -l_1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 2C_3 l_5^2 & C_3 l_5 (-l_6 + l_6) & -l_5 & -l_5 \\ 0 & 0 & C_3 l_6 (-l_5 + l_5) & 2C_3 l_6^2 & -l_7 & -l_7 \\ -\frac{C_4}{l_9} & -\frac{C_4 l_4}{l_9} & -\frac{C_4 l_5}{l_9} & -\frac{C_4 l_7}{l_9} & -l_9 & -l_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{12} \end{pmatrix} \quad (7.1.38)$$

$[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ – матрицы связей масс, сложно зависящими от расстояний между элементами .

Полученная математическая модель процесса копирования рельефа является многомерной, линейной, динамической, стационарной, инвариантной с сосредоточенными

параметрами. Наличие случайных возмущений и отклика делает её вероятностной. Связь характеристик случайных переменных модель прямо не отражает, но может быть использована для этого по методике п. 5.7 и примеру выше в п.7.1.2.

Глава 8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНЖЕНЕРИИ

8.1. Разновидности исследовательских задач

Математические модели используются для решения широкого круга исследовательских задач, среди которых типовые: анализ; синтез; идентификация; оптимизация; оптимальное управление ТС.

В качестве математической модели при решении инженерных задач обычно используют уравнение состояния (3.47), в котором учитывается, что функционал Φ содержит не только вектор состояния \bar{U} , но и коэффициенты при его компонентах, составляющие вектор параметров системы par .

Уравнение (3.47) примет вид:

$$d\bar{U}/dt = \Phi(\bar{U}, par) + B\bar{X} \quad (5.1)$$

Определение изменений вектора состояния $\bar{U}(t)$ при известном функционале, параметрах и возмущениях \bar{X} называется решением модели.

Задачи анализа. Задачей анализа считается определение состояния или каких-либо показателей объекта, считая известными его структуру, параметры и действующие входные воздействия.

Задача анализа проводится по разработанной ММ.

Различают задачу анализа состояния (рис. 5.1, а) и анализ качества функционирования (рис. 5.1, б).

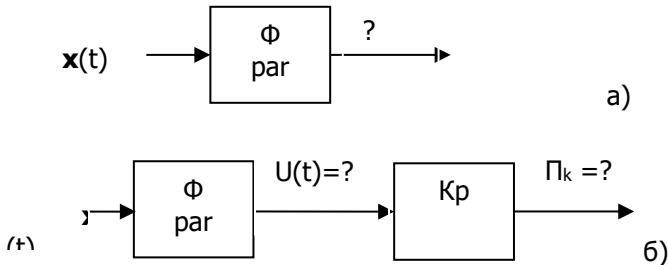


Рис. 5.1. Факторные модели задач анализа: а – состояния; б – качества функционирования

Задача анализа состояния. Провести анализ состояния объекта означает получить значение вектора состояния $\mathbf{U}(t)$ в уравнении (5.1), то есть решить его. По решению ценно получить характеристику $\mathbf{U}\{\mathbf{x}(t)\}$ - зависимости вектора состояния на выходе модели от её входных факторов. Примеры: определение скоростей,

ускорений, усилий, траекторий, напряжений и деформаций в деталях ТС и т.п. и их зависимостей от нагрузок и режимов функционирования. Ценным является получение аналитического решения, позволяющего установить зависимости в удобной форме.

Задача анализа состояния является самой популярной задачей в исследовательских работах. Она является обязательной составной частью других задач. Именно анализ строит представления о структуре и факторах объекта создаёт математические модели зависимостей между факторами и результатом. Главным инструментом анализа является математическое моделирование.

Задача качественного анализа. Для моделей функционирования машин, выполняющих технологический процесс, требуется определять показатели качества функционирования Π_k (энергоёмкость, равномерность хода по глубине, процент потерь и т.п.). Определения вектора состояния $U(t)$ оказывается недостаточным; необходимо преобразовать состояние $U(t)$ в показатели качества Π_k .

Показатель качества связывают с решением модели $U(t)$ через некоторый функционал, называемый критерием качества Kp , т.е. $\Pi_k = Kp\{U(t)\}$. Применяемые критерии качества, как правило, носят интегральный характер:

$$\Pi_k = \int_{t_1}^{t_2} f\{u(t)\} dt \quad , \quad (5.2)$$

Например, средняя глубина хода рабочих органов, средняя глубина заделки семян и т.п.

Целью качественного анализа становится получение зависимости $\Pi_k\{\mathbf{x}(t)\}$ между показателями качества Π_k и входными воздействиями $\mathbf{x}(t)$.

Синтез. Задача синтеза заключается в определении неизвестной структуры или параметров объекта проектирования, которые обеспечат при заданных воздействиях необходимые значения показателя качества $\Pi_{kзад}$ (рис. 5.2).

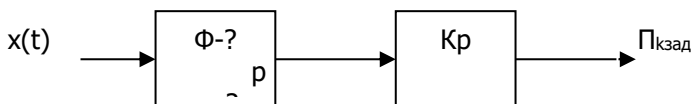


Рис. 5.2. Факторная модель задачи синтеза

В инженерной практике наиболее распространен синтез параметрический, когда структура объекта известна, и нужно определить лишь параметры par .

Задача идентификации – это установление структуры или параметров объекта по известным сигналам на входе и выходе (рис. 5.3).

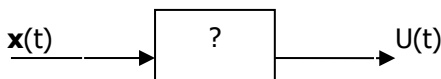


Рис. 5.3. Факторная модель задачи идентификации

Практически идентификация проводится на основе экспериментальных данных.

Задача оптимизации – задача, в которой определяется структура или значения параметров объекта, дающих экстремум (минимум или максимум) показателям качества (рис 5.4).

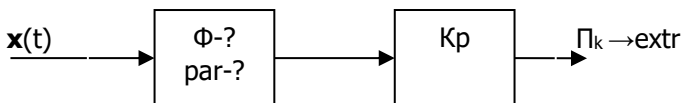


Рис. 5.4. Факторная модель задачи оптимизации

Имеет преимущества перед задачей обычного синтеза, но математический аппарат сложнее. В настоящее время вытесняет задачи простого синтеза.

Оптимальное управление – определение для объекта известной структуры и параметрами значений вектора управления $x(t)$, которые дают минимум расхождения δ между фактическим $U(t)$ и желаемым $U_{ж}(t)$ изменением вектора состояния. Факторная модель приведена на рис. 5.5.

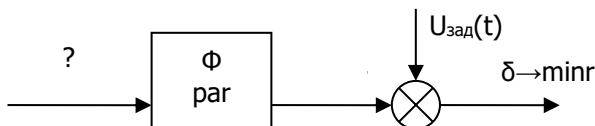


Рис. 5.5. Факторная модель задачи оптимального управления

Обычно невязка δ оценивается по методу наименьших квадратов (МНК):

$$\delta = \int [u_{зад}(t) - u(t)]^2 dt \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

Пример: вождение агрегата по бровке скошенного поля или по борозде.

8.2. Модели анализа режимов функционирования технических объектов

В зависимости от характера внешних возмущающих и управляющих воздействий технический объект может находиться в установившемся или неустойчивом состоянии. Изменение его состояния выявляется анализом поведения фазовых переменных.

Установившееся состояние технической системы достигается при неизменных характеристиках внешних воздействий. Если воздействия непрерывно меняются, то состояние системы будет неустойчивым. Режим работы системы при этом называют динамическим. Он сопровождается непрерывным изменением фазовых координат, определяющих характер движения системы в динамическом неустойчивом режиме.

Характерные примеры установившегося режима — состояние покоя и состояние равномерного движения всех элементов технической системы. Такие состояния также называют статическими или равновесными. Статичность состояния определяется неизменностью реакций взаимодействия всех элементов технической системы при постоянных внешних воздействиях.

Предположим, что на техническую систему, находящуюся в установившемся состоянии равновесия, в некоторый момент времени t_0 приложено ступенчатое воздействие вида

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & t \geq t_0 \\ 0, & t \leq t_0 \end{cases}$$

(1.4)

где $F_0 = const$ — модуль ступенчатого воздействия.

Движение системы будет определяться ее внутренними физическими свойствами и внешним воздействием. Пусть состояние технической системы характеризуется фазовой координатой $x(t)$. Изменение ее после приложения ступенчатого воздействия можно

представить в виде суммы двух составляющих: переходной $x_n(t)$ и вынужденной $x_e(t)$. Переходная составляющая

устойчивой технической системы с течением времени затухает (стремится к нулю) и система приходит в новое установившееся состояние равновесия, характеризуемое вынужденной составляющей $x_B(t) = x_K = const$. Следовательно, при приложении

ступенчатого воздействия система осуществляет переход из одного установившегося состояния в другое, находясь при этом в течении некоторого времени в динамическом режиме. Такой динамический режим называют переходным процессом, а графики изменения фазовых координат системы — переходными характеристиками.

Если внешние воздействия на систему переменны во времени, то они вызывают в ней непрерывный ряд переходных процессов и состояние системы в течение всего времени наблюдения будет неустановившимся.

Переходные процессы возникают также при изменении структуры или параметров технической системы в процессе ее функционирования.

Если внешнее воздействие $F(t)$ — периодическая функция, для которой $F_0 = A \sin(\omega_B t + \varphi)$ (см. формулу (1.4)), то после затухания свободных колебаний (переходной составляющей) в устойчивой системе установятся вынужденные колебания с частотой ω_B и некоторыми постоянными амплитудами $A_{B_i} = k_i A$, k_i — постоянный коэффициент, i — номер фазовой координаты системы. Такое состояние системы также относится к установившемуся, а режим называют стационарным режимом колебаний.

Рассмотренные динамические режимы технических объектов являются модельными. Они предназначены для проведения сравнительного анализа множества альтернативных вариантов в процессе синтеза. На самом деле в техническом объекте такие режимы в чистом виде практически не встречаются. Однако модельные режимы позволяют значительно облегчить и ускорить

решение проектных задач, так как детерминированные модели гораздо проще вероятностных. Получаемая при этом информация об объекте хотя и не претендует на полноту, но оказывается практически полезной. Детерминированное моделирование ши-

роко используется на начальных стадиях проектирования. Заключительные стадии проектирования выполняют на вероятностных моделях.

Внешние воздействия реальной среды обитания технической системы описываются случайными функциями, а изменения фазовых координат системы представляют собой случайные процессы. Техническая система в этом случае все время находится в динамическом режиме.

При постоянных характеристиках случайных процессов их называют стационарными, а при переменных — нестационарными. Способы анализа и оценки выходных параметров системы при стационарных и нестационарных случайных процессах различны. В последнем случае они значительно сложнее, чем в первом, поэтому необходимость учета не стационарности при моделировании должна быть обоснованной.

Рассмотрим основные задачи анализа, решаемые при проектировании технических систем. В зависимости от модельного режима, положенного в основу решения конкретной проектной задачи, различают следующие виды анализа:

- статических состояний
- переходных процессов
- устойчивости
- стационарных режимов колебаний
- частотных характеристик
- чувствительности
- статистический

Анализ статических состояний относится к задачам статики, а остальные виды анализа — к задачам динамики.

На макро уровне проектирования исходная математическая модель технического объекта представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в нормальной форме Коши имеет вид

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = F(\bar{V}, t) \quad (1.5)$$

где \bar{V} — вектор фазовых координат; t — независимая переменная — время.

Параметры элементов технического объекта X тоже входят в математическую модель (1.5), но только в качестве коэффициентов при переменных \bar{V} .

Выходные параметры объекта Y непосредственно не фигурируют в системе (1.5). Они определяются по результатам решения $V(t)$ системы уравнений. Большинство выходных параметров имеют смысл функционалов зависимостей фазовых координат

$$\bar{Y} = \bar{\Phi} \left| \bar{V}(t) \right|$$

Функционал представляет собой отображение класса функций в класс чисел. Примеры функционалов: определенные интегралы, экстремальные значения функций, значения функций при заданных значениях аргументов и т. п.

Система уравнений (1.5) описывает динамические режимы функционирования технического объекта. Анализ этих режимов заключается в решении системы уравнений (1.5) и последующем определении выходных параметров объекта. Задавая начальные условия $V(0) = V_0$, находят решения $V(t)$, а затем вычисляют

значения выходных параметров Y , используемых в качестве критериев при оптимизации внутренних параметров объекта X .

Критерии — это показатели качества и эффективности технического объекта. Их подразделяют на следующие группы: назначения; надежности; экономного использования сырья, материалов, топлива, энергии и трудовых ресурсов (экономичности); ограничения вредных воздействий продукции (экологические); безопасности; стандартизации и унификации.

Математическая модель в виде (1.5) непосредственно используется при анализе переходных процессов, устойчивости, стационарных режимов колебаний. Эта же модель позволяет решать и задачи анализа статических состояний. Численное решение системы уравнений (1.5) при неизменных внешних воздействиях через конечный отрезок времени t_K приводит к

стационарной точке V , в которой $dV/dt = 0$. Это и будет точкой решения задачи статики.

Математической моделью статических состояний является система алгебраических уравнений. Очевидно, что при $dV/dt = 0$ система дифференциальных уравнений (1.5) оказывается системой алгебраических уравнений

$$\bar{F} \left(\bar{V} \right) = 0.$$

(1.6)

Решение уравнений (1.6), безусловно, проще, однако не всегда процедура перехода от уравнений (1.5) к уравнениям (1.6) тривиальна. Например, для получения математической модели, описывающей состояние покоя технической системы, требуются соответствующие преобразования уравнений, обусловленные необходимостью перехода к геометрическим координатам, определяющим пространственное положение элементов системы. Этим и объясняется широкое применение в САПР уравнений (1.5), когда анализ статических состояний лежит в основе технологического маршрута проектирования технического объекта (см. рис. 1.1).

Частотный анализ проводится для определения резонансных режимов, для исследования передачи или преобразования информационных сигналов, представленных в частотной области. Если математическая модель линейная, используют преобразование Фурье и система уравнений (1.5) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений с комплексными переменными, которая затем используется для определения частотных характеристик объекта. Процедура преобразования дифференциальных уравнений в алгебраические называется алгебраизацией исходной дифференциальной задачи. Но полученная при этом модель тем не менее описывает динамические свойства объекта. При алгебраизации нелинейной системы применяют метод гармонической линеаризации.

Частотными методами можно также решать задачи анализа устойчивости и стационарных режимов колебаний. Они часто используются на верхнем иерархическом уровне проектирования.

Анализ чувствительности выполняется для оценки влияния вариации параметров объекта на изменение целевой функции. Сложный технический объект обычно имеет множество внутренних параметров. Решение задачи оптимизации в этом случае вызывает значительные трудности. Вместе с тем не все параметры эффективно изменяют целевую функцию. Поэтому целесообразно их классифицировать и отобрать для оптимизации лишь те параметры, которые оказывают наибольшее влияние на целевую функцию. Такие параметры называют управляемыми. Выбор управляемых параметров осуществляют до решения проектных задач синтеза.

8.3. Оптимизационные математические модели

8.3.1. Категории оптимизации

При проектировании наиболее распространенной задачей

является поиск наилучшего варианта в условиях множества альтернатив. Процесс поиска наилучшего варианта при известных ограничениях называют оптимизацией. Для оптимизации строят оптимизационную математическую модель (ОММ).

ОММ строится на основе полученной теоретической ММ и кроме неё включает категории:

- параметры оптимизации;
- цель и целевую функцию;
- критерий оптимизации;
- систему ограничений.

Обязательным этапом в постановке задачи оптимизации является параметризация задачи и формализация понятия "наилучший".

Параметризация задачи сводится к назначению так называемых параметров оптимизации \mathbf{X} , в качестве которых принимаются интересующие исследователя параметры модели, характеристики её структуры или динамических свойств. Выбранные для оптимизации параметры модели, должны быть доступны для варьирования; поэтому зачастую их называют управляемыми параметрами.

Применительно к модели ТС в форме Коши (3.25) параметрами оптимизации могут быть элементы матрицы $[J]$ или $[B]$; их объединяют в вектор параметров оптимизации \mathbf{X} (не путать с \mathbf{x}).

Для формализации понятия "наилучший" необходимо сформулировать правило предпочтения одного варианта над другим. Самой массовой формой предпочтения является экстремум какой-либо функции от параметров оптимизации (max или min). Практически все задачи оптимизации в сельскохозяйственном производстве являются экстремальными. В качестве функции, экстремум которой следует найти, служит так называемая целевая функция от параметров оптимизации $\zeta(\mathbf{X})$.

Целевая функция выражает цель, которую преследует при оптимизации исследователь. В качестве цели в сельскохозяйственном производстве служат обычно удельные ресурсные, экономические или качественные показатели.

Критерий оптимизации Kp - выражение правила предпочтения нужных значений целевой функции:

$$Kp(\bar{X}) = \zeta(\bar{X}) \rightarrow \text{extr} \quad (5.4)$$

Здесь $Kp(\bar{X})$ называется критериальной функцией. Для простой однокритериальной оптимизации она совпадает с целевой

функцией. Критерий (5.4) означает, что в качестве предпочитаемых значений целевой функции принимаются вершины или впадины её гиперповерхности.

Ограничениями называются выражения связей, налагаемых на управляемые параметры. Различают:

а) прямые ограничения в форме неравенств:

$$a < X_i < b \quad (5.5)$$

Область в пространстве параметров, ограниченная этими значениями, называют областью допустимых значений.

б) функциональные ограничения вида:

$$\varphi(\bar{X}) \geq 0; \psi(\bar{X}) \leq 0; \theta(\bar{X}) = 0. \quad (5.6)$$

Задачи оптимизации классифицируют по разным признакам:

- по категории оптимизации: структурная и параметрическая;

- по характеру взаимосвязи между параметрами – линейные или нелинейные;

- в зависимости от учета ограничений: условную, если учитываются какие-либо ограничения, и безусловная, когда их нет;

- по учету фактора времени: статистические и динамические;

- по полноте информации о переменных: (при полной информации – детерминированные; при неполной информации – неопределенные);

- по числу критериев: одно- и многокритериальные;

- по количеству параметров: одно и многопараметрические;

- по охвату области поиска: локальная в окрестности какой-либо точки с нахождением одного экстремума и глобальная по всей области с нахождением наибольшего экстремума.

При проектировании распространены задачи локальной параметрической оптимизации [1, гл. 12].

Типовая формулировка задачи локальной оптимизации параметрической оптимизации так. Отыскать для математической модели те значения \bar{X} , при которых целевая функция $\zeta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ принимает экстремум при ограничениях типа неравенств:

$$X_{i1} < X_i < X_{i6}; i = 1, \dots, N$$

и функциональных ограничениях:

$$\varphi_j(\bar{X}) \geq 0, j = 1, \dots, L; \psi_k(\bar{X}) = 0, k = 1, \dots, M;$$

N — количество прямых ограничений на параметры \bar{X} ;

L и M — количество функций ограничений

неравенств и ограничений-равенств соответственно.

Решением задачи оптимизации является нахождение места расположения экстремума критериальной функции в допустимой области пространства управляемых параметров:

$$\bar{X}_{opt} = \arg\{extr[Kp(\bar{X})]\} \text{ при } x \in x_{don} \quad (5.7)$$

Критериальная поверхность отклика для экстремальной задачи в общем случае нелинейная.

8.3.2. Безусловная оптимизация

Поиск оптимального параметра осуществляется по экстремуму критериальной или целевой функции с общим обозначением $F(x)$.

Если функция одномерная, то задача сводится к поиску экстремума аналитически заданной функции $F(x)$.

Условие наличия экстремума:

$$dF/dx=0. \quad (5.8)$$

Из этого уравнения определяется значение X_{opt} .

Причем экстремум есть минимум, если вторая производная

$$\frac{d^2F}{dx^2} > 0 \text{ и максимум, если } \frac{d^2F}{dx^2} < 0. \quad (5.9)$$

Для многомерных задач условия экстремума выражаются через градиент: $grad\{F(\bar{x})\}_{x=x^*} = 0$ (5.10)

Условие минимума, если матрица Гессе $H(x)$ - положительно определённая матрица, и максимум, если матрица Гессе - отрицательно определённая матрица.

Матрица Гессе $H(x)$ составлена из вторых производных функции $F(x)$:

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \quad (5.11)$$

К задаче безусловной оптимизации сводятся многие задачи математического программирования.

8.3.3. Математическое программирование

Математическим программированием называют область математики, рассматривающая вопросы теории и методологии задач условной оптимизации [16].

В зависимости от вида функций $Kp(\bar{X})$, $\bar{\varphi}(\bar{X})$, $\bar{\psi}(\bar{X})$ различают линейное и нелинейное программирование

Линейное программирование - поиск наилучшего варианта при линейной критериальной функции $Kp(\bar{X})$, не имеющей явного экстремума. Оно является частным случаем оптимизационных задач. Получило распространение в экономике и бизнесе.

При линейном программировании ищется условный локальный экстремум с учетом линейных ограничений.

Задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом: найти такое значение независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n , для которых линейная целевая функция с коэффициентами веса p_i :

$$U = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \quad (5.145)$$

принимает экстремальное значение на множестве точек, координаты которых удовлетворяют условиям 2-х типов: в виде функциональных неравенств:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq c_1 \quad (5.146)$$

или простых ограничений:

$$x_i < x_{i0}, \quad i=1, \dots, n. \quad (5.147)$$

По умолчанию предполагается, что все $x_i > 0$.

Типы задач линейного программирования (ЗЛП).

1. Задача использования ресурсов (составить план выпуска продукции из имеющихся ресурсов, дающий максимальную прибыль).

2. Задача о смесях (составить питательную смесь из имеющихся компонентов, чтобы получить для реализации продукцию максимальной стоимости).

3. Задача о загрузке оборудования (какое количество оборудования необходимо поставить, чтобы выполнить производственные задание при \min затратах).

4. Задача о планировании производства (составить план работы, определив, сколько и каких изделий должно выпускать производство, чтобы получить \max эффект).

5. Задача о перевозках (составить план перевозок между объектами при минимальных затратах).

6. Задача о коммивояжере (найти маршрут поездок по n городам с минимальными затратами, побывав в каждом городе один раз и вернувшись обратно).

Нелинейное программирование - решение задачи условной

оптимизации, если хотя бы одна из критериальных $Kp(\bar{X})$, или ограничительных $\bar{\varphi}(\bar{X})$, $\bar{\psi}(\bar{X})$ функций нелинейна.

Решение задач нелинейного программирования зависит от класса разработанной модели, вида и количества ограничений.

Определение оптимальных параметров при однокритериальной условной оптимизации проводится в следующей последовательности:

- 1) формулировка задачи;
- 2) разработка математической модели;
- 3) выбор управляемых параметров x_i ;
- 4) формирование целевой функции $\zeta(\mathbf{X})$;
- 5) формирование критерия $Kp(\mathbf{X})$;
- 6) формирование ограничений;
- 7) применение процедур или алгоритмов решения.

Для решения применяют различные процедуры и алгоритмы численных решений на ЭВМ (программы оптимизации).

Обычно задачи условной оптимизации сводят к задачам безусловной оптимизации с помощью штрафных функций или множителей Лагранжа.

8.3.4. Модели многокритериальной оптимизации

Всесторонняя оценка эффективности и качества всего объекта требует использовании множества критериев. Задача оптимизации в этом случае становится *многокритериальной*.

В многокритериальных задачах критерий векторный. Это создает проблему формирования целевой функции. Обычно критерии *конфликтные*, т.е. улучшение одного из критериев приводит к ухудшению других. Непосредственное их использование в алгоритме оптимизации невозможно; возможно лишь компромиссное решение.

При решении многокритериальной задачи строят скалярную обобщенную целевую функцию, учитывающую все критерии по мере возможности. Это сводит задачу к однокритериальной. Процесс построения скалярной целевой функции при многокритериальной оптимизации называется *сверткой векторного критерия*.

Принцип построения свертки векторного критерия называют стратегией решения многокритериальной задачи оптимизации. Различают следующие виды стратегий: *стратегия частного критерия*; *стратегия взвешенной аддитивной компенсации противоречий критериев*; *стратегия мультипликативной компенсации противоречий критериев*; *максиминная стратегия*. [1, гл. 12].

Стратегия оптимально-компромиссного решения на основе точек Парето множеств. Множество $\vec{X}_{\text{эф}}$ составляет область, границы которого получают соединением точек экстремумов функций $F_i(\vec{X})$ и точек касания линий равного уровня функций. На рис. 5.6 показано множество $\vec{X}_{\text{эф}}$ для случая трех критериев.

Для точек Парето целевая функция строится по условию:

$$F(\vec{X}_{\text{эф}}) = \sum_{j=1}^m c_j F_j(\vec{X}_{\text{эф}}), \quad (5.148)$$

где c_j — коэффициент веса, характеризующий значимость j -го критерия; m — количество критериев оптимальности.

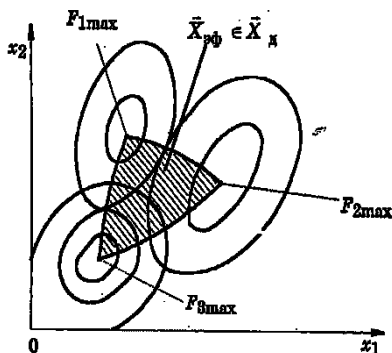


Рис. 5.6. Область точек Парето в трехкритериальной задаче

Коэффициенты веса выбирают из условия

$$\sum_{j=1}^m c_j = 1, c_j > 0, \quad (5.149)$$

Построение области точек Парето встречает трудности.

Стратегия частного критерия. В качестве целевой функции принимают один из критериев оптимальности, характеризующий важнейшее его качество, и поэтому наиболее значимый. Все остальные критерии оптимальности используются для назначения ограничений.

Стратегии аддитивной и мультипликативной компенсации противоречий критериев используют весовые коэффициенты и имеют недостаток: улучшение одних критериев достигается за счет бесконтрольного ухудшения других.

Максиминная стратегия. В ее основе лежит идея добиваться максимума того критерия, который минимально удовлетворяет техническим требованиям на машину. Обычно технические требования составляют множество T_j , предъявляемого к выходному параметру y_j ; $J = 1, N$.

Количественная оценка степени выполнения технического требования T_j :

$$S_j(\vec{X}) = [T_j - F_j(\vec{X})] / |T_j|, \quad (5.150)$$

где $F_j(\vec{X})$ - значение j -го критерия оптимальности, вычисляемое на каждом шаге процесса поиска.

В качестве целевой функции принимаем те из них, которые оказываются наименьшими:

$$F(\vec{X}) = \min_{j \in [1:M]} S_j(\vec{X}), \quad (5.151)$$

Поскольку требуется ее максимизация, то задача поиска формулируется так:

$$\max_{X \in X_D} \min_{j \in [1:M]} S_j(\vec{X}) \quad (5.152)$$

где \vec{X}_D — допустимая область в пространстве управляемых параметров.

Максиминная стратегия решения многокритериальных задач лишена недостатков, присущих рассмотренным выше стратегиям. При ее использовании происходит выравнивание оценок степени выполнения технических требований $S_j(\vec{X})$. В этом существенное преимущество максиминной стратегии.

Все эти стратегии пригодны только для численных решений на ЭВМ. Программы оптимизации имеют пакеты MatCAD, Matlab и др.

Большинство современных компьютерных программ оптимизации используют методы поисковой оптимизации. Поиск экстремума осуществляется пробными шагами в пространстве параметров и выбором наилучшего. В зависимости от использования производных целевой функции различают методы нулевого, первого и второго порядка.

Методы нулевого порядка производных не используют: это метод покоординатного спуска, случайного поиска, вращающихся координат, сопряжённых направлений, метод многогранника.

Методы первого порядка (градиентные) используют первую производную: метод градиента, сопряжённых градиентов, наискорейшего спуска, переменной метрики.

Методы второго порядка используют вторую производную: метод Ньютона, метод Марквардта.

Подробно методы поисковой безусловной оптимизации изложены в учебнике [1, п.12.9-12.11]. Выбирается тот, который даст требуемую точность в условиях конкретной задачи.

8.3.5. Метод неопределённых множителей Лагранжа

Из аналитических методов решения задачи условной оптимизации в СХП применим метод неопределённых множителей Лагранжа [1, п.12.11.3].

Пусть требуется оптимизировать многопараметрическую критериальную функцию $F(\bar{X})=F(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Необходимо найти экстремум при m ограничениях типа равенств:

$$\psi_j = \psi_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad j = 1, m. \quad (5.153)$$

Согласно методу к этим уравнениям добавляются n уравнений вида:

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \psi_j}{\partial X_i} = 0 \quad i=1, n \quad (5.154)$$

где λ_j - неопределённые множители Лагранжа.

Имеем $m + n$ уравнений для $m + n$ неизвестных.

Решая совместно уравнения получаем n значений вектора $\bar{X}_{\text{опт}}$ и m значений неопределённых множителей.

Метод применим только для ограничений типа равенств.

Процедуры оптимизации функционирования технических объектов не доведены до аналитических моделей, используют поисковые технологии компромиссных решений в условиях большой неопределённости. Такие задачи имеют большую трудоёмкость, требуют применения высокопроизводительных компьютерных технологий на уровне искусственного интеллекта.

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Босой Е.С. Теория, конструкция и расчёт сельскохозяйственных машин: учебник для вузов/ Е.С. Босой, И.И. Смирнов, О.В. Верняев и др.; под ред. Е.С. Босого. – М.: Машиностроение, 1977. – 568 с.
2. Бурченко П.Н. Механико-технологические основы почвообрабатывающих машин нового поколения / П.Н. Бурченко. – М.: ВИМ, 2002. – 211 с.
3. Гордеев А.С. Моделирование в агроинженерии: учебник. – 2-е изд., испр. и доп. / А.С. Гордеев. – М.: «Лань», 2014. – 384 с.
4. Гячев Л.В. Динамика машинно-тракторных и автомобильных агрегатов / Л.В. Гячев. – Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1976.- 192с.
5. Долгов И.А. Машины для обработки почвы, посева и посадки сельскохозяйственных культур и ухода за ними. Теория, конструкция, расчёт/И.А. Долгов. - Ростов н/Д: Изд. отдел ДГТУ, 2008.- 625 с.
6. Дьяченко Г.Н. Ротационные рабочие органы почвообрабатывающих орудий: учеб. пособие / Г.Н. Дьяченко, И.В. Игнатенко, Д.Г. Литенко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2004. – 103 с.
7. Ермольев Ю.И. Основы научных исследований: учеб. пособие / Ю.И. Ермольев. – Ростов н/д, Издательский центр ДГТУ, 2013. – 276 с.
8. Жаров В.П. Научные основы оптимизации колебательных систем мобильных сельскохозяйственных машин по их показателям качества. – Дис. ... д-ра техн. наук. – Ростов-н/Д, 1980. – 391 с.
9. Жилкин В.А. Расчёты на прочность и жёсткость элементов сельскохозяйственных машин / В.А. Жилкин; под ред. В.В.Бледных / ЧГАУ. – Челябинск, 2004. – 427 с.
10. Иванюк В.Х. Моделирование сельскохозяйственных процессов: конспект лекций / В.Х. Иванюк. – Челябинск. – 2005. - 240 с.

11. Игнатенко И.В. Энергетические аспекты взаимодействия упруго закреплённого рабочего органа с почвой в земледельческой механике: монография / И.В. Игнатенко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2002. – 160 с.

12. Игнатенко И.В. Задача терраупругости в почвообработке / И.В. Игнатенко // Вестник Донск. гос. техн. ун-та. – 2008. – Т.8, №3(38). – С. 268-277.

13. Игнатенко И.В., Дьяченко Г.Н., Литенко Д.Г. Ротационные рабочие органы почвообрабатывающих орудий: Уч. пособие УМО.- Ростов н/Д: Изд. центр ДГТУ, 2004 – 103 с.

14. Игнатенко И.В., Ермольев Ю.И. Машины для возделывания с.х. культур. ДГТУ, 2009 – 239 С.

15. Игнатенко В.И. Моделирование сельскохозяйственных процессов в среде Matlab: учеб. пособие / В.И. Игнатенко, И.В. Игнатенко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2012. – 143 с.

16. Канарёв Ф.М. Ротационные почвообрабатывающие машины и орудия / Ф.М. Канарёв. – М.: Машиностроение, 1983.

17. Корн Ю. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Ю. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

18. Красовский Г.И. Планирование эксперимента / Г.И. Красовский, Г.Ф. Филаретов. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 372 с.

19. Лурье А.Б. Статистическая динамика сельскохозяйственных агрегатов / А.Б. Лурье. – Л.: Колос, 1970.

20. Марка Д.А. Методология структурного анализа и проектирования SADT / Д.А. Марка, К. МакГоуэн. – М.: МетаТехнология, 1995. – 243 с.

21. Матяшин Ю.И. Расчёт и проектирование ротационных почвообрабатывающих машин / Ю.И. Матяшин, И.М. Гринчук, Г.М. Егоров. – М.: Агропромиздат, 1988 – 172 с.

22. Мударисов С.Г. Моделирование процесса взаимодействия рабочих органов с почвой / С.Г. Мударисов //Тракторы и СХМ. – 2005, №7. – С.13-17.

23. Синеоков Г.Н. Теория и расчёт почвообрабатывающих машин / Г.Н. Синеоков, И.М. Панов.– М.: Машиностроение, 1977. – 328 с.

24. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В.П. Тарасик. – Минск: Дизайн-ПРО, 2004. – 640 с.

25. Трубилин Е.И. Машины для уборки сельскохозяйственных культур (конструкции, теория и расчёт): учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / Е.И. Трубилин, В.А. Абликов, Л.П. Соломатина, А.Н. Лютый / КГАУ. – Краснодар, 2009 – 216 с.



26. Халанский В. М., Сельскохозяйственные машины / В.М. халанский, И.В. Горбачев. — М.: Колосс, 2004. - с. 101 – 104