



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Проектирование и технический сервис ТТС»

## **Учебное пособие** по дисциплине

# **«Математическое моделирование сельскохозяйственных процессов»**

Авторы

Игнатенко И.В.

Ростов-на-Дону, 2017

## Аннотация

Изложены принципы и методология моделирования. Дана классификация математических моделей. Описаны математические модели процессов на микро- и макроуровне, а также методики построения экспериментальных, вероятностных и оптимизационных моделей. Приведены примеры моделирования типовых сельскохозяйственных процессов, указаны типы инженерных задач, решаемых с применением математических моделей, а также компьютерные технологии для их математического моделирования.

Книга рекомендована в качестве учебного пособия для студентов вузов дневного и заочного отделений по направлению 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

## Авторы

Д.т.н., профессор кафедры «Проектирование и технический сервис ТТС»  
Игнатенко И.В.



## Оглавление

Введение .....	5
Часть 1. Основные понятия моделирования .....	7
1.1. Информационное взаимодействие модели и оригинала .....	8
1.2. Факторные модели.....	10
1.3. Переход от факторной к математической модели ....	15
1.4. Классификация математических моделей .....	18
1.5. Требования к математическим моделям .....	21
Часть 2. Математическое моделирование процессов на микроуровне.....	23
2.1. Общие уравнения процессов на микроуровне .....	23
2.2. Модели механических процессов на микроуровне ..	26
2.3. Модели тепловых процессов на микроуровне .....	29
2.4. Модели гидравлических процессов на микроуровне .....	33
2.5. Модели пневматических процессов на микроуровне	35
Часть 3. Моделирование процессов на макроуровне .....	39
3.1. Принципы моделирования на макроуровне.....	39
3.2. Компонентные и топологические уравнения .....	42
3.3. Построение теоретических моделей .....	45
на макроуровне .....	45
3.4. Уравнения Лагранжа второго рода .....	54
3.5. Последовательность применения методов .....	56
3.6. Усложнение математических моделей .....	57
макроуровня .....	57
3.7. Упрощение математических .....	66
моделей макроуровня.....	66
Часть 4. Вероятностные математические модели .....	69
4.1. Вероятностные представления явлений.....	69
4.2. Моделирование случайных величин .....	74
4.3. Типовые модели распределения вероятностей .....	81
4.4. Случайные процессы.....	90
4.5. Динамические модели при случайном воздействии .....	100
Часть 5. Математические модели в инженерных задачах .....	104
5.1. Разновидности инженерных задач .....	104

5.2. Оптимизационные математические модели .....	107
5.3. Безусловная оптимизация .....	109
5.4. Математическое программирование .....	109
5.5. Модели многокритериальной оптимизации .....	111
5.6. Метод неопределённых множителей Лагранжа.....	114
Часть 6. Априорные математические модели.....	115
6.1. Факторная модель эксперимента .....	115
6.2. Регрессионные модели.....	117
6.3. Планирование эксперимента.....	118
6.4. Регрессионный анализ .....	122
6.5. Модели аппроксимации.....	125
6.6. Метод анализа размерностей.....	127
Часть 7. Типовые математические модели сельскохозяйственных процессов.....	129
7.1. Моделирование процессов движения наземных транспортно-технологических средств .....	129
7.2. Моделирование процессов почвообработки.....	142
7.3. Модели процесса разбрасывания удобрений .....	159
7.4. Моделирование процесса посева.....	164
7.5. Моделирование процесса резания .....	166
7.6. Модели процесса обмолота зерновых культур .....	173
7.7. Модели сепарации вороха на соломотрясе .....	179
7.8. Модели очистки зерна на решётах.....	181
7.9. Модели движения частиц в воздушном потоке .....	185
7.10. Модели процесса дождевания.....	187
Часть 8. Компьютерные технологии в моделировании .....	192
8.1. Виды компьютерного моделирования .....	192
8.2. Принципы компьютерного моделирования .....	193
8.3. Численное моделирование в среде Excel .....	194
8.4. Моделирование в среде Simulink Matlab .....	196
Литература.....	201

## ВВЕДЕНИЕ

Современное сельскохозяйственное производство использует разнообразные технологии преобразования сырья и материалов, изменяющих его состояние. Любое явление, сопровождающееся изменением состояния системы, принято называть процессом. Поэтому многие технологии в сельском хозяйстве называют сельскохозяйственными процессами (СХП).

В зависимости от исходного материала СХП могут быть естественными без вмешательства неприродных сил или производственными, осуществляемыми человеком или машинами.

К естественным относятся процессы роста растений, созревания культур, почвы, изменение их состояния, размеров и свойств от времени. Обычно результат естественного СХП служит исходным материалом для производственных процессов.

Особенностью производственных СХП является то, что исходные материалы представляют сложные и изменчивые среды: почва, листостебельная масса, ворох, валок, удобрения, корма и пр., что делает СХП недоступными современной аэро- и гидродинамике с их идеальными средами. Другой особенностью производственных СХП является участие в них рабочего органа, воздействующего на исходную среду и изменяющего её состояние.

Производственные СХП, освоенные человеком, разнообразны. В растениеводстве это большие группы процессов возделывания, уборки, переработки и хранения, а также процессы движения наземных транспортно-технологических систем по полю.

Процессы возделывания включают подготовку почвы (основную и предпосевную), внесение удобрений, посев, уход за растениями, защиту от вредителей, орошение и пр. Процессы уборки зерновых включают срезание стеблей, транспортирование, обмолот, очистку зерна, сепарацию и др. Процессы уборки корнеплодов включают срезание ботвы, подкапывание, сепарацию (отделение почвы), сортировку и др.

В животноводстве главные производственные процессы – поддержание микроклимата, кормоприготовление, кормораздача, поение, доение, откорм, выращивание, воспроизводство стада и др.

В производственных сельскохозяйственных процессах выделяются типовые физические процессы: движение наземных транспортно-технологических средств (НТТС) по полю и движение рабочего органа в сплошной среде, измельчение, сепарация, сортировка, смешивание; движение частиц по поверхностям рабочих органов, формование, темперирование кормов, распределение, внесение удобрений, посев и пр.

Сложность и недостаточная изученность СХП вызывает большие трудности при разработке новых сельскохозяйственных машин (СХМ), особенно при проведении их расчётов, сложных и трудоёмких, но тем не менее обязательных. В этих условиях единственным выходом для инженера является моделирование – замена сложного явления упрощёнными отображениями.

Моделирование зарекомендовало себя как эффективный способ познания и успешно применяется в различных отраслях науки. Оно включает множество видов: образное, графическое, символьное и др. В инженерной практике широкое применение нашло математическое моделирование, единственное способное точно передавать количественные характеристики процессов.

Создание новой техники традиционно предусматривает три этапа: образное конструирование, расчёты и проектирование. В этой триаде математическое моделирование монопольно обеспечивает проведение различных расчётов: конструктивно-технологических, кинематических, силовых, прочностных и пр. Без них невозможно правильно сконструировать СХМ. В этом и состоит главная миссия математического моделирования СХП.

Кроме того, математическое моделирование СХП позволяет заменять трудоёмкие опыты в натуральных условиях абстрактными математическими описаниями, экономит время и ресурсы, расширяет сферу исследования, делает доступными для анализа недоступные объекты, организационно и морально неосуществимые процессы.

Освоив компьютерные технологии, математическое моделирование выросло к настоящему времени в мощное и универсальное средство познания окружающего мира, пригодное для любых видов интеллектуальной деятельности: науки, инжиниринга, маркетинга, управления, прогнозирования. Термин «математическое моделирование» проник практически во все отрасли науки и техники: физику, химию, механику, экономику, социологию и пр.

Для успешной профессиональной работы инженера – конструктора СХМ и других НТТС знания достижений такой универсальной науки, как математическое моделирование, становится обязательным.

**Цель курса:** изучение методов построения математических моделей сельскохозяйственных процессов, необходимых для решения инженерных задач при создании наземных транспортно-технологических средств сельскохозяйственного назначения.

## ЧАСТЬ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Мир, окружающий человека, неизмеримо сложен, а его восприятие ограничено возможностями органов чувств и человеческого мозга. При отображении окружающего мира человеческий мозг в состоянии отображать только часть процессов, заменяя сложную картину упрощенным отображением.

Замену сложного явления упрощенным отображением, сохраняющим нужные в данной ситуации свойства, принято называть *моделированием*. Степень упрощения зависит от потребностей в данной ситуации и способностей индивида. Моделированием каждое существо овладевает на основе врожденных инстинктов и жизненного опыта.

Моделирование сводится к созданию некоей другой системы, имеющей определённое сходство с моделируемой. Действительный процесс или объект принято называть оригиналом, а отображение его в результате моделирования – моделью. Другими словами: оригинал – объект моделирования, модель – результат моделирования.

**Модель** – это материальный или мысленно представляемый образ, который в процессе изучения имитирует оригинал, сохраняя только важные для данной ситуации характеристики [1].

Модели постепенно создавались и развивались человеком для удовлетворения своих нужд в получении и передаче жизненно важной информации. В зависимости от используемого средства отображения информации развились разные виды моделирования:

- мыслительное или интуитивное в виде образов, формирующихся в человеческом мозгу; недостаток мыслительного моделирования – информацию невозможно ни передать другим людям, ни зафиксировать;
- семантическое моделирование – описание объекта при помощи слов; недостаток – отсутствие наглядности, неточность, субъективность, иногда и специальная ложь;
- физическое (материальное) моделирование – моделирование, при котором реальному объекту сопоставлена его увеличенная или уменьшенная копия (статуи, скульптуры, модели судов, самолётов и пр.); недостаток такого моделирования – большая трудоёмкость;
- аналоговое моделирование, основанное на использова-

нии аналогий процессов, имеющих разную физическую природу; поиск аналогий требует фундаментальных знаний общих законов мироздания;

- **символьное моделирование** – описание объекта различными символами; оно бывает:

**рисуночное** – с помощью рисунков, картин, карт;

**знаковое** – с помощью специальных знаков, обозначений, часто понятных только создателю (криптография);

**письменное** – с помощью общепринятых символов типа азбуки или иероглифов, образующих систему письменности;

**графическое** – описание объекта с помощью стилизованных или нормированных изображений (например, черчение);

**математическое** – описание объекта с помощью абстрактных математических символов и процедур.

Символьное моделирование менее трудоёмко, поэтому нашло широкое применение в жизни человечества как средство хранения, накопления и переработки информации.

### 1.1. Информационное взаимодействие модели и оригинала

В сельскохозяйственном производстве оригиналом, подлежащим моделированию, служит сельскохозяйственный процесс или объект, в котором он происходит. Оригинал представляется по принципу "вход – выход". На его вход действуют различные физические воздействия, на выходе получается результат (рис. 1.1). Такие упрощённые представления можно считать моделированием, но получаемая причинно-следственная модель не содержит нужной информации для установления количественных зависимостей.

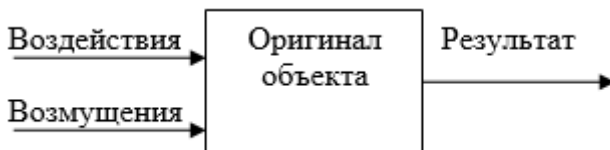


Рис. 1.1. Причинно-следственные представления объекта

Получение нужной информации об оригинале по модели – цель всякого моделирования. Поэтому моделирование сопровождается информационными преобразованиями. Модель и оригинал оказываются информационно связанными.

Взаимодействие оригинала объекта и модели основано на цир-



куляции потоков информации (рис. 1.2). Согласно схеме взаимодействия, модель имеет входную и выходную информацию.

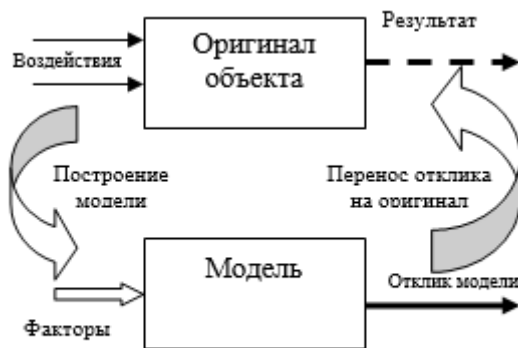


Рис.1.2. Схема взаимодействия модели и оригинала

Объект, подлежащий моделированию, подвергается предварительному изучению для получения первичной информации (представления) об объекте. Устанавливается физика процессов, входные воздействия и возмущения, измеряются параметры объекта. По первичной информации формируется входная информация модели обычно в виде совокупности факторов.

Фактором считается любая изменяемая величина, существенно влияющая на результат функционирования. Фактором могут стать некоторые воздействия, возмущения, а также нужные параметры объекта. При выявлении факторов нужно учитывать их ответственность и требования их независимости.

Формирование факторного множества называется факторизацией. Факторизация – творческий и субъективный процесс; в факторное множество исследователь включает нужные и в то же время необходимые по физике процессов величины.

Факторы делят на режимные (подача, скорость, сила и т.п.), геометрические (форма рабочего органа) и изменяемые свойства материала (влажность, скважность и т.п.) Неизменяемые свойства к факторам по определению не относятся. Количественные характеристики факторов выражаются скалярными величинами – параметрами (параметры воздействий, параметры рабочего органа).

Сама модель представляется системой процедур или программ по переработке входной информации в выходную. Выходная информация, получаемая в результате функционирования модели, носит название отклик.

Процесс преобразования входной информации в выходную

называется функционированием модели.

Модель функционирует с применением различных средств переработки и информации, результат получают в виде новой информации. Его переносят по каким-либо правилам на оригинал.

Взаимодействие оригинала и модели использует все виды работ с информацией: получение, накопление, хранение, анализ, преобразование.

## 1.2. Факторные модели

Графическое представление превращения входных факторов модели объекта в отклик называют **факторной моделью**.

В зависимости от представления структуры объекта различают факторные модели однозвенные и многозвенные.

Однозвенные имеют место, когда объект не имеет структуры или о ней нет информации. Модель тогда представляется в виде одного звена по принципу "вход – выход" (рис. 1.3).

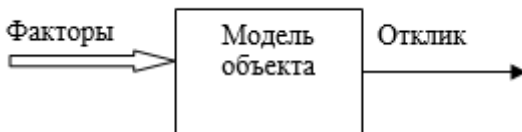


Рис. 1.3. Однозвенная факторная модель

В зависимости от отображаемых категорий объекта модели СХП могут быть функциональные и морфологические [4].

**Функциональные модели** описывают процесс преобразования факторов модели в результат. Название неоднозначное, имеет параллели с функциями в математике.

Следует различать функциональные модели технологических процессов и функциональные модели технических устройств.

**Функциональная модель техпроцесса** – однозвенная модель, выдающая информацию о степени выполнения заданной функции объектом, выполняющим СХП; откликом в ней должны быть получаемые показатели технологического процесса объекта, называемые часто показателями функционирования.

Функциональными моделями СХП обычно моделируют процессы в рабочих органах СХМ, непосредственно воздействующих на материалы и среды. Сложность процессов, происходящих в них, не позволяет детализировать картину преобразования, поэтому обходятся однозвенной моделью типа "чёрного ящика". Например, функциональная модель процесса почвообработки имеет в

качестве факторов скорость движения рабочего органа, параметры формы, геометрии, остроты лезвия; в качестве отклика на выходе – показатели техпроцесса: степень рыхления, крошения, подрезание сорняков и пр. Другой пример: функциональная модель процесса обмолота имеет в качестве факторов скорость вращения молотильного барабана, диаметр, параметры формы, подачу хлебной массы; в качестве отклика – вымолот зерна, соломы, половы.

Функциональные модели технических устройств описывают не техпроцесс, а преобразование физических величин (импеданс). **Импедансная модель** – модель, дающая информацию о преобразовании факторов в результат, являющихся физическими величинами (например, сила, скорость, смещение, напряжение, деформация и т.п.).

**Трансформаторная модель** – импедансная модель, у которой факторы и результат имеют одинаковую физическую природу. Например, редуктор имеет и на входе и на выходе скорости вращения; трансформатор – напряжения.

**Преобразовательная модель** – импедансная модель, у которой факторы и результат имеют разную физическую природу. Например, при резании почв рабочий орган имеет в качестве входного фактора силу сопротивления, а результатом – упругие смещения.

В СХП применяется также особый вид функциональных моделей – **качественная функциональная модель**. В отличие от просто функциональной модели откликом в ней должны быть показатели качества функционирования. Например, та же функциональная модель обмолота зерновых становится качественной, если у неё на выходе будет процент выделения и дробления зерна. Качественная функциональная модель почвообрабатывающего рабочего органа должна иметь в качестве отклика вариацию хода по глубине в процентах, которая получается математической обработкой.

Функциональные модели широко применяются в мировой практике в разных отраслях по единым методологиям. В настоящее время двумя наиболее популярными методологиями построения функциональных моделей являются **SADT и DFD**.

**Методология SADT (Structured Analysis and Design Technique – методология структурного анализа и проектирования), в 1981 г. принята в качестве федерального стандарта на разработку программного обеспечения IDEFO (Icam DEFinition). Под этим названием SADT стала применяться в**

промышленных организациях [20], рекомендована для использования Госстандартом РФ и применяется в отечественных госструктурах (например, в Государственной налоговой инспекции РФ).

Главными компонентами модели являются схемы, на которых функции системы отображаются в виде прямоугольников, а связи между ними и внешней средой изображаются посредством стрелок (рис. 1.4). Прямоугольник обозначает процесс (деятельность, функцию или задачу), который приводит к результату. Имя процесса должно выражать действие (например, «Расчет скоростей», «Формирование ведомости № 3»).



Рис. 1.4. Элементы графической нотации IDEF0

Стрелки в методологии IDEF0 адекватны факторам в моделях СХП; разбиваются на группы в зависимости от их роли в процессе.

В IDEF0 различают 5 видов стрелок-факторов:

- вход – материал или информация, которые используются и преобразуются. Вход отвечает на вопрос «Что подлежит обработке?»;

- управление – регламентирующие и нормативные данные, которыми руководствуется модель (например, чертёж, стандарты, нормативы, расценки). Управление отвечает на вопрос «В соответствии с чем выполняется работа?».

- выход – материал или информация, которые представляют результат выполнения работы. Выход отвечает на вопрос «Что является результатом работы?»;

- механизм – ресурсы, которые выполняют работу. Механизм отвечает на вопрос «Кто выполняет работу?». В качестве механизма могут быть персонал предприятия, станок, оборудование, программа;

- вызов – стрелка указывает, что некоторая часть работы выполняется за пределами рассматриваемого блока.

Методология SADT применима и для моделей СХП. После адаптации однозвенная факторная модель СХП (см. рис. 1.3) приходит к виду (рис 1.5).



Рис. 1.5. Факторная модель сельскохозяйственного процесса в стиле SADT

Здесь на входе в качестве фактора действуют показатели исходного потока продукта (подача, скорость, свойства). В качестве управления могут фигурировать какое-либо изменение пространства или рабочего органа (открытие заслонок, изменения ориентации и т.п.). В качестве ресурса следует использовать режимные факторы – воздействия, получаемые от рабочего органа и его приводов. Результат (отклик) будет представлять показатели переработанного продукта, прошедшего через рабочие органы.

Методология DFD предназначена для информационных систем, а для функциональных моделей СХП неудобна.

Сложные процессы внутри СХМ, требующие системного подхода к объекту моделирования, целесообразно моделировать морфологическими моделями.

**Морфологическая модель** – модель, отражающая структуру объекта, конфигурацию и взаимодействие его частей (элементов). В зависимости от учтённых свойств элементов различают структурные, топологические и геометрические морфологические модели.

**Структурная** морфологическая модель описывает только состав и взаимосвязи элементов без указания их формы. Обычно она представляется структурной схемой (рис. 1.6), где каждому элементу объекта соответствует элемент модели со своими входными и выходными величинами, называемыми в разных науках по-разному: сигналами, воздействиями, реакциями и пр. Отклик модели  $Y$  не содержит информации о внутренних сигналах моде-

ли. Для устранения этого недостатка введено понятие вектора состояния системы, под которым понимается совокупность откликов всех элементов модели  $Y = [Y, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]^T$ .

По сравнению с функциональными моделями объекта структурные морфологические модели более детализованы, содержат больший объём информации, но их разработка требует знаний о внутренних процессах в объекте. Элементы такой морфологической модели сами могут быть импедансными или функциональными моделями. В этом случае структурная морфологическая модель процесса становится структурно-функциональной.

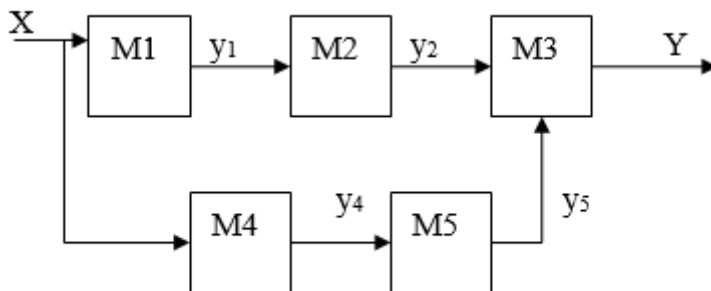


Рис. 1.6. Структурная морфологическая модель

Структурные схемы также могут выполняться по методологии SAD(IDEF0). На рис. 1.7 приведена структурная модель типового процесса изготовления изделия.

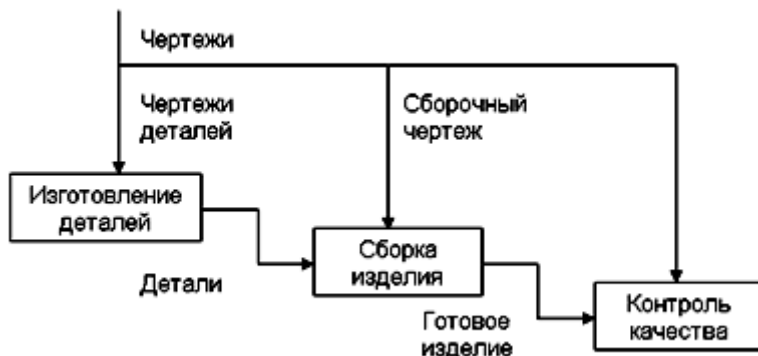


Рис. 1.7. Структурная модель процесса изготовления изделия

Модель имеет три элемента: процессы изготовления деталей, сборки изделия и контроля качества. Отклики-результаты элементов моделируется стрелками: детали и готовое изделие. В каче-

стве управляющего фактора служат чертежи деталей и сборочный чертёж.

Подобным образом можно моделировать сложные СХП, выявляя их структуру.

Процедура выявления структуры процесса или объекта называется **систематизацией**. Определяются состав, взаимодействие элементов и связи между ними. В этом случае говорят о применении системного подхода к объекту моделирования. Диапазон представлений широк: количество элементов может варьироваться от двух до бесконечности. Объекты однозвенные или сплошные среды морфологических представлений не имеют.

**Геометрические** морфологические модели дополнительно приводят сведения о форме элементов (пример – принципиальные и кинематические схемы машин и устройств). Это самая информативная морфологическая модель.

**Топологические** морфологические модели отражают только картину размещения элементов как семейства множеств без указания взаимодействия между элементами. Например, размещение всходов по поверхности почвы.

Для НТТС особенно применимы геометрические морфологические модели. НТТС рассматриваются как техническая система, состоящая из упорядоченного множества взаимодействующих элементов, образующих структуру объекта (устройства, узлы, детали, связанные между собой механическими связями). Изображать их в качестве чёрного ящика, как в факторной модели функционирования, нет необходимости. Морфологические модели НТТС выполняются в виде схем (кинематических, принципиальных и др.).

Морфологические многозвенные модели могут переходить в однозвенные функциональные, используя принцип "вход-выход". Обратный переход требует проведения систематизации процесса.

### 1.3. Переход от факторной к математической модели

Математическая модель (ММ) – совокупность математических процедур, количественно отображающих свойства или состояние технического объекта. ММ – одна из развитых и важных символьных моделей, способная оценивать количественную сторону объектов и процессов. Другой особенностью математической модели является «всеядность» – она пригодна для объектов разной физической природы и для любых физических воздействий.

Математическое моделирование использует достижения математической науки (алгебра, геометрия, тригонометрия, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление, векторный анализ, функции комплексного переменного, дифференциальные и интегральные уравнения, матричное исчисление, тензорный анализ и др. разделы). Использование этих достижений математики требует от инженера определённой математической квалификации.

Объекты и величины обозначают символами, в качестве которых рекомендуется использовать буквы латинского и греческого алфавитов. Отношения между абстрактными символьными объектами выражают математическими процедурами (операциями). Процедуры представляют наборы математических функций.

Математическую модель строят на основе факторной модели оригинала, подвергая её параметризации, формализации и математизации.

**Параметризация** – назначение системы оценок свойств и положения элементов и связей. Параметр — это скалярная величина, количественно характеризующая свойство или состояние элемента. В число параметров системы обычно входят и координаты элементов, для чего выбирается система координат.

Различают внутренние и внешние параметры, они бывают сосредоточенные и распределённые.

**Внутренние параметры**  $a$  — это параметры элементов, из которых состоит технический объект. Обычно внутренние параметры объекта – свойства и массово-геометрические параметры элементов. **Внешние параметры**  $b$  — это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование объекта. **Сосредоточенные параметры** – параметры элементов или факторов, сосредоточенных в точках (масса  $m$ , сила  $P$ ). **Распределённые параметры** – величины, определяющие распределение свойств или взаимодействий по объёму  $\emptyset$ , поверхности  $S$ , линии  $\ell$ . Например, плотность  $\rho(\emptyset)$  кг/м<sup>3</sup>, напряжение  $\sigma(S)$  Н/м<sup>2</sup>, распределённая по оси балки нагрузка  $q(\ell)$  Н/м.

В итоге параметризации структурная схема превращается в схему расчётную (РС).

**Формализация** сводится к выражению всех факторов символами или функциями. Абстрагируются названия. Входные факторы становятся входными переменными (независимыми переменными), отклик – выходными переменными (фазовыми переменными, фазовыми координатами). Фазовым переменным соответствуют координатные оси в гипотетическом многомерном фазо-



вом пространстве. Вектор фазовых переменных задаёт в нём точку.

**Математизация** – определение математических процедур, преобразующих подмножество параметров и входные переменные в выходные переменные. Определение этих математических процедур составляет основное содержание математического моделирования.

В результате процесс заменяется абстрактной символьной математической моделью, а однозвенная факторная модель (см. рис. 1.3) преобразуется в факторную математическую модель (рис. 1.8).

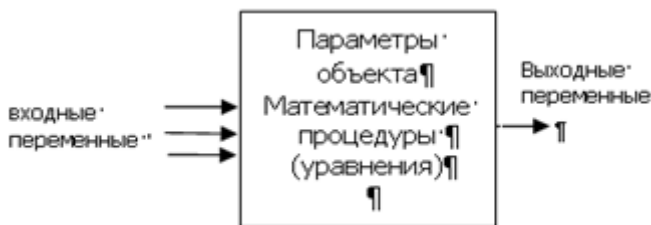


Рис. 1.8. Факторная математическая модель объекта

На практике распространены "чистые" математические модели в виде набора процедур  $\Phi$  над переменными и параметрами. Для однозвенной факторной модели математическая модель (ММ) имеет вид:

$$\Phi(\ddot{\chi}, \dot{\chi}, \ddot{Y}, \dot{Y}, Q, t) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\ddot{\chi}, \dot{\chi}$  – набор производных входных переменных по координатам и по времени соответственно;  $\ddot{Y}, \dot{Y}$  – набор производных выходных переменных по координатам и по времени соответственно;  $Q$  – набор параметров объекта;  $t$  – временная переменная.

В наборы производных включены и производные нулевого порядка, т.е. сами переменные.

Набор процедур  $\Phi$  полагается определению: он весьма многообразен. Форма представления функционала  $\Phi$  определяет название и класс функциональной математической модели.

**Морфологические ММ** отображают структуру объектов, состав и взаимодействие элементов специфическими математическими символами. Используются методы морфологического анализа и синтеза. Параметрами морфологических ММ являются отличительные признаки элементов. Эти параметры называют

### морфологическими переменными.

Особенностью математического моделирования является соподчинённость и взаимодействие морфологических и функциональных моделей, обязательность предварительной разработки морфологической модели. Инженерный результат даёт только ММ функционирования, а морфологические ММ играют роль концептуальных.

## 1.4. Классификация математических моделей

Как и факторные модели, математические модели (ММ) подразделяются на модели морфологические и функциональные, моделирование которых использует различные представления.

**Функциональные ММ** всегда символьные и имеют развитую классификацию [1, п. 1.5].

По выдаваемым переменным различают функциональные ММ положения и функциональные ММ состояния.

**Функциональные ММ положения имеют вид:**

$$\Phi(\bar{x}, \bar{Y}, \bar{Q}, t) = 0, \quad (1.2)$$

где  $\bar{x}$  – вектор входных переменных;  $\bar{Y}$  – вектор выходных переменных, не содержащих производных по времени.

Вектор фазовых переменных определяет только положение точки в фазовом пространстве фазовыми координатами. Это не даёт полной информации о тенденциях развития процесса (изменчивости, направлении движения), что является недостатком таких функциональных ММ.

**ММ состояния** использует представления выходной информации через вектор состояния  $\bar{U}$ , включающий координаты  $\bar{Y}$  и скорости их изменения  $\dot{Y}$ , характеризующие состояние технического объекта:

$$\bar{U} = [\bar{Y}, \dot{\bar{Y}}].$$

Модель состояния строит ММ через вектор состояния  $\bar{U}$ :

$$\dot{\bar{U}} = \Phi(\bar{x}, \bar{U}, \bar{Q}, t). \quad (1.3)$$

Величины, характеризующие состояние технического объекта в процессе его функционирования, принято называть фазовыми координатами (переменными). Вектор фазовых координат задаёт точку в многомерном фазовом пространстве. Размерность определяется числом фазовых координат.

Модели состояния более информативны, чем модели

положения. Они удобны для описания управления процесса, так как учитывают не только состояние в данный момент, но и тенденции их изменения.

В зависимости от степени абстрагирования различают три основных иерархических уровня моделирования: верхний, или метауровень; средний или макроуровень; нижний, или микроуровень.

На **микроуровне** объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Морфологических представлений не имеет. Функциональные ММ на микроуровне получаются из выражения (1.2), если учесть, что переменные распределены по фазовому пространству  $\mathfrak{S}$  :

$$\Phi(\check{x}(\mathfrak{S}), \check{Y}(\mathfrak{S}), \dot{x}, \dot{Y}, Q, t) = 0. \quad (1.4)$$

ММ на микроуровне имеет вид дифференциальных уравнений в частных производных. По ним проводятся расчёты процессов в сельскохозяйственных средах, напряженно-деформированного состояния (НДС) деталей, температурных полей, давлений и т.п.

На **макроуровне** процесс рассматривают как систему с сосредоточенными параметрами. Функциональные ММ на макроуровне получается из выражения (1.2)

$$\Phi(\bar{x}, \bar{U}, \dot{\bar{U}}, \bar{Q}, t) = 0. \quad (1.5)$$

ММ макроуровня представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используют при расчётах рабочих органов СХМ, оптимизации процессов их взаимодействия со средами.

**Метауровень** соответствует концептуальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка технического решения или технического предложения и решаются задачи структурного синтеза. На метауровне применяют морфологические модели, включающие большие множества элементов (например, модели функционирования машинотракторного парка региона). Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов. Функциональные модели здесь имеют ограниченное применение, поскольку исходные данные для них ограничены; некоторое применение находят в задачах прогнозирования.

По способам получения функциональные ММ делятся на теоретические и экспериментальные.

**Теоретические ММ** получают путём математического описания процессов функционирования объекта, а *экспериментальные*

— на основе изучения поведения объекта, рассматривая его как "черный ящик".

**Экспериментальные модели** устанавливают связь между варьируемыми факторами формально. Они не могут быть приняты в качестве физических законов. Эксперименты при этом могут быть **физические** (на техническом объекте или его физической модели) или **вычислительные** (на компьютерной математической модели).

По форме представления применяемых в ММ математических процедур различают инвариантные, алгоритмические, аналитические и имитационные модели объекта проектирования.

В **инвариантной форме** ММ представляется системой дифференциальных или интегральных уравнений, не имеющих однозначного ответа или решения.

В **алгоритмической форме** соотношения модели записаны в виде алгоритма — последовательности вычислений; используются при создании компьютерных программ.

**Имитационные модели**, предназначены для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте.

**Аналитическая модель** представляет собой явные символьные зависимости искомых переменных от исходных величин. Такие модели получают в результате решения модели. Они удобны и всегда предпочтительны.

По виду зависимости между переменными ММ могут быть линейные и нелинейные.

**Линейные модели** содержат только линейные функции фазовых переменных и их производных.

**Нелинейные модели** содержат хотя бы одну нелинейную функцию фазовых переменных или их производных.

По учёту переходных процессов различают динамические и статические ММ. Если при моделировании учитываются инерционные свойства элементов и (или) изменение во времени их параметров, то в уравнении ММ присутствуют производные, и модель называют **динамической**. В противном случае модель *статическая*.

По степени предсказуемости решения (результата) различают детерминированные и стохастические ММ.

**Детерминированная ММ** характеризуется взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие.

**Вероятностной ММ** считается модель, в которой присутствуют случайные функции. При случайных изменениях факторов

(сигналов) модель считается *статистической*. Если в модели случайными являются свойства элементов, то модель считается стохастической.

По назначению различают ММ *описательные* (дискрипционные) и **оптимизационные** – для оптимизации параметров модели по какому-либо критерию.

По характеру отсчётов значений переменных различают модели: **непрерывные и дискретные**, когда состояние и параметры объекта являются дискретными величинами.

Морфологические модели классифицируют по форме представления. С этой точки зрения морфологические ММ могут быть символьными или графическими.

Символьные ММ представляются в виде таблиц, матриц, множеств.

Графически морфологическая ММ представляется в виде различных схем, графов, орграфов. Широко распространены схемы расчётные, эквивалентные и др. В отличие от схем морфологических факторных моделей они обязательно должны иметь математическое описание элементов математическими процедурами.

## 1.5. Требования к математическим моделям

К математическим моделям предъявляются противоречивые требования: адекватности, точности, экономичности, универсальности.

**Адекватность** – степень совпадения поведения модели и объекта при изменении воздействий или параметров.

**Точность ММ** оценивается степенью совпадения модельных значений выходных переменных с их истинными значениями.

**Универсальность ММ** – возможность использовать её при анализе других процессов и объектов.

**Экономичность ММ** – характеризуется затратами времени для её реализации и использования.

**Быстродействие ММ** – время на получение решения.

**Простота и доступность ММ** – ненужность высокой специальной подготовки пользователя.

Требования к модели противоречивы; на практике необходимо придерживаться разумного компромисса всех требований к модели, кроме адекватности. Адекватность – главное и обязательное требование, показатель пригодности модели. Если модель оказалась неадекватной, работать с ней нельзя и определять другие

показатели качества не имеет смысла. Модель следует начинать строить заново.

## ЧАСТЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НА МИКРОУРОВНЕ

### 2.1. Общие уравнения процессов на микроуровне

Микроуровень – это иерархический уровень декомпозиции технических объектов, который имеет минимальную степень абстрагирования. С минимальной степенью абстрагирования в СХП можно рассматривать сплошные среды и перерабатываемые материалы, имеющие границы, но не имеющие структуры.

Сплошные среды в СХП обычно рассматривают в трехмерном фазовом пространстве  $x, y, z$  как объекты с распределёнными параметрами. Для моделирования воспользуемся функциональной однозвенной ММ (1.1), считая, что параметры объекта распределены по объёму  $\Theta$  :

$$\Phi(\check{\chi}(\Theta), \check{Y}(\Theta), \dot{\chi}, \dot{Y}, Q, t) = 0. \quad (2.1)$$

Математические процедуры ММ должны преобразовывать поле входной переменной  $\check{\chi}(\Theta)$  в поле выходной переменной  $\check{Y}(\Theta)$  через функционал  $\Phi$ . Современная математика пока не обладает процедурами преобразования полевых субстанций, доступных для инженерной практики. Существующие конформные отображения сложны и оперируют комплексными переменными.

Чтобы избежать преобразования полей при синтезе ММ на микроуровне применяют интегральные оценки полей на входе и выходе: энергию, массу, количество движения и др. Это даёт возможность использовать для построения ММ объектов с распределёнными параметрами фундаментальные законы сохранения (массы, энергии, количества движения) [1, п. 2.2].

**Закон сохранения: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.**

Уравнение, соответствующее формулировке, имеет вид

$$\partial \varphi / \partial t = -\text{div} \vec{J} + G, \quad (2.2)$$

где  $\varphi$  – фазовая переменная, выражающая субстанцию;  $\vec{J}$  – вектор плотности потока фазовой переменной;  $\text{div} \vec{J}$  – дивергенция вектора  $\vec{J}$ ;  $G$  – скорость генерации или уничтожения суб-

станции.

*Дивергенция вектора  $\vec{j}$*  – скалярная величина вида

$$\operatorname{div} \vec{j} = \partial J_x / \partial x + \partial J_y / \partial y + \partial J_z / \partial z. \quad (2.3)$$

Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму притока-стока субстанции через поверхность элементарного объема.

В качестве субстанции могут выступать масса, энергия, количество движения и др.

*Уравнение закона сохранения массы*

$$\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div} \vec{J}_\rho, \quad (2.4)$$

где  $\rho$  – плотность массы, кг/м<sup>3</sup>;  $\vec{J}_\rho = \rho \vec{v}$  – вектор плотности потока массы, кг/(м<sup>2</sup>с), где  $\vec{v}$  – вектор скорости переноса массы, м/с.

Уравнение (2.4) в гидроаэродинамике называют *уравнением неразрывности*.

*Уравнение закона сохранения энергии*

$$\partial(\rho E) / \partial t = -\operatorname{div} \vec{J}_E + G_E, \quad (2.5)$$

где  $E = e + v^2/2$  – полная энергия единицы массы;  $e$  – внутренняя энергия единицы массы;  $\rho E$  – энергия единицы объема, Дж/м<sup>3</sup>;  $J_E$  – вектор плотности потока энергии, Дж/(м<sup>2</sup>с);  $G_E$  – скорость генерации или поглощения энергии в единице объема, Дж/(м<sup>3</sup>с).

**Уравнение закона сохранения количества движения** используют при моделировании движения потоков жидкости. Для потока идеальной жидкости (без учета сил трения, обусловленных вязкостью) уравнение имеет вид

$$\partial(\rho v) / \partial t = -\vec{v} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) - \operatorname{grad} p, \quad (2.6)$$

где  $\rho \vec{v}$  – вектор количества движения единицы объема жидкости кг/(м<sup>2</sup>с);  $p$  – давление жидкости, Па;  $\operatorname{grad} p$  – градиент давления.

Градиентом называют векторную функцию скалярного аргумента:

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.7)$$

На основе этих фундаментальных физических законов получают уравнения математических моделей микроуровня объектов разной физической природы в виде дифференциальных уравнений в частных производных:



$$\hat{O}\left\{\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \dots, Q, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \dots, t\right\} = 0, \quad (2.8)$$

где  $x, y, z$  – координаты текущей точки среды;  $\mathbf{u}(x, y, z)$  – фазовая переменная – функция распределения выходного параметра в пространстве.

Уравнению (2.8) соответствует факторная модель (рис. 2.1).

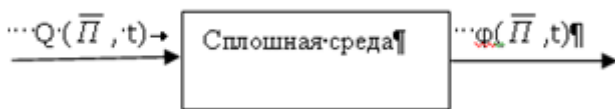


Рис. 2.1. Факторная модель процесса на микроуровне:

$$\vec{I} = [x, y, z]^T$$

Обычно в краевых задачах СХП  $\mathbf{u}(x, y, z)$  – искомая функция, которую нужно найти. Например, картина распределения напряжений в почве  $\sigma(x, y, z)$ .

Уравнение (2.6) – основное уравнение ММ на микроуровне. Иногда его называют уравнением равновесия или баланса. Основное уравнение определяет класс всей модели.

Если фазовая переменная  $\mathbf{u}(x, y, z)$  не является функцией  $t$ , то модель называется стационарной, а если  $\partial u / \partial t \neq 0$ , то нестационарной или динамической.

Примечательно, что в основном уравнении отсутствуют входные воздействия, в силу чего уравнение (2.6) имеет множество решений. Для получения единственного решения необходимо задать краевые условия, т.е значения воздействий и фазовых координат по краям области среды и в определённые моменты времени.

Краевые условия включают граничные и начальные условия.

**Граничные условия** – это сведения о значениях  $\mathbf{u}(x, y, z)$  на границе области определения объекта «S».

**Начальные условия** – это значения тех же функций  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  в начальный момент времени.

Существуют разные виды граничных условий.

Граничные условия первого рода – означают задание фазовой переменной  $\mathbf{u}(x, y, z)$  на границе области определений S.

Граничные условия второго рода задают на границе области определения S значения производных фазовых переменных  $\partial u / \partial t$ .

Граничные условия третьего рода представляют собой уравнения баланса потоков энергии между объектами и внешней средой.

Совокупность основного уравнения граничных и начальных

условий составляет полную ММ на микроуровне.

## 2.2. Модели механических процессов на микроуровне

ММ механических процессов на микроуровне определяют напряженно-деформированное состояние (НДС) перерабатываемых сред и нагруженных деталей. Находят широкое применение при расчетах конструкции на прочность, а также при исследовании НДС сельскохозяйственных сред, подвергающихся механическим воздействиям (например, почвенной среды).

Входными факторами являются нагрузки и массово-геометрические параметры, выходными – поля напряжений  $\sigma(x, y, z)$  и деформаций  $\varepsilon(x, y, z)$  (рис. 2.2).

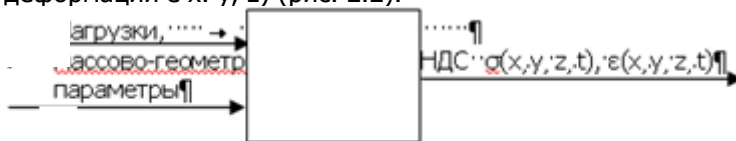


Рис. 2.2. Факторная модель сельскохозяйственных сред на микроуровне

Свойства сельскохозяйственных сред описываются сложными реологическими зависимостями напряжения от деформации. Из простых следует отметить линейную однозначную реологическую модель упругого тела. При построении моделей упругих сплошных сред используется хорошо развитая теория упругости [1, п. 2.5].

Математическая модель НДС упругой среды строится из условия динамического равновесия его конечного элемента под действием приложенных к нему сил, включая и силу инерции. В качестве элемента в классической теории упругости принимается элементарный параллелепипед (рис. 2.3).

На гранях параллелепипеда действуют распределенные нагрузки и массовая сила. Распределенные нагрузки представляются нормальными  $\sigma_{ii}$  ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ ), и касательными  $\sigma_{ij}$  ( $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ ) напряжениями.

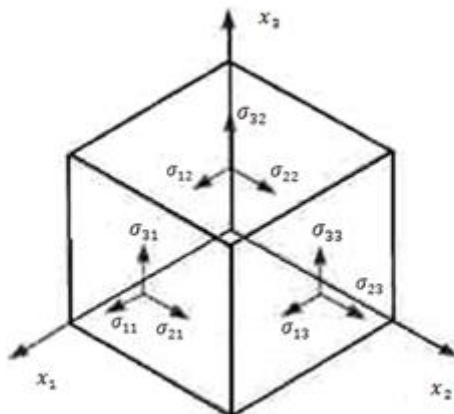


Рис. 2.3. Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда

Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда образуют тензор напряжений  $T$ .

$$T = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Условия равновесия: геометрическая сумма сил, приложенных к выделенному элементарному параллелепипеду, включая его силу инерции, равна нулю.

Учитывая закон о парности касательных напряжений, согласно которому  $\sigma_{12}=\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23}=\sigma_{32}$ ,  $\sigma_{31}=\sigma_{13}$ , получаем уравнения равновесия в проекциях на оси  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$ :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad i=1,2,3 \quad (2.10)$$

где  $\rho$  – плотность материала твердого тела;  $u_i$  – перемещение элемента вдоль оси  $x_i$ ;  $\sigma_{ij}$  – напряжение, действующее в направлении оси  $x_i$  на грани элемента, перпендикулярной оси  $x_j$ ;  $\rho g_i$  – проекция вектора массовых сил  $\rho g$  на ось  $x_i$ ;  $g$  – вектор ускорения свободного падения.

Уравнения равновесия (2.10) связывают напряжения  $\sigma_{ik}$  с перемещениями  $u_i$ . Согласно теории упругости напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны также с деформациями  $\varepsilon_{ij}$ , а они – с перемещениями  $u_i$ .

Зависимость между напряжениями  $\sigma_{ik}$  и деформацией  $\varepsilon_{ij}$  устанавливает закон Гука; для анизотропного тела он имеет вид:

$$\sigma_{ii} = \lambda \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jj} + 2\mu\varepsilon_{ii} \quad ; \quad (2.11)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{при } i \neq j. \quad (2.12)$$

Зависимость между деформациями  $\varepsilon_{ij}$  и смещениями  $u_i$ , устанавливает формула Коши

$$\varepsilon_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.13)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства среды:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad (2.14)$$

$$\mu = \frac{E\nu}{2(1+\nu)}, \quad (2.15)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Зависимости могут быть представлены в матричной, более компактной форме [1, п.2.6].

Используя эти зависимости между напряжениями, деформациями и смещениями, уравнениям равновесия можно придавать разный вид.

Заменяя в уравнениях равновесия (2.10) напряжения на перемещения, получаем основное уравнение теории упругости в перемещениях, называемое уравнением Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad} \cdot \text{div} \vec{U} + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g}, \quad (2.16)$$

где  $\vec{U}$  – вектор перемещений;  $\rho$  – плотность материала;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (2.17)$$

Уравнения равновесия, в которых все переменные выражены через напряжения, называют уравнениями Бельтрами-Митчела.

**Решить задачу теории упругости на микроуровне** – значит найти: поле напряжений  $\sigma_{ik}$  ( $x, y, z$ ) с шестью неизвестными  $\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{23}$ ; поле деформаций  $\varepsilon_{ik}$  ( $x, y, z$ ) с шестью неизвестными  $\varepsilon_{11k} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \varepsilon_{12} \varepsilon_{13} \varepsilon_{23}$ ; поле перемещений  $u_i$  ( $x, y, z$ ) с тремя неизвестными  $u_1 u_2 u_3$ . Всего 15 неизвестных. Уравнений равновесия 3, уравнений формулы Коши 6, уравнений обобщённого закона Гука 6. Итого 15 уравнений с 15 неизвестными, и задача

имеет однозначное решение.

Задачи теории упругости относятся к краевым задачам. Помимо уравнений равновесия, формул Коши и Гука они должны включать граничные и начальные условия.

Существуют два метода аналитического решения системы уравнений упругости: прямой, когда исходные уравнения интегрируют; обратный – заранее задаются уравнениями изменения переменных с неизвестными коэффициентами, что подстановка их в дифференциальные уравнения сводит задачу к уравнениям алгебраическим.

Модели упругости идеализированы и в СХП имеют ограниченное применение (для почвогрунтов). Для сельскохозяйственных сред со сложными свойствами и применяют реологические модели, модели пластичности и др. [10, 26].

Однако оба метода пригодны только для частных простых задач. Для сложных задач расчёты НДС объектов на микроуровне осуществляют на основе приближенных математических моделей. К ним относятся вариационные модели и модели аппроксимации: метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ).

МКР применяют при моделировании теплообменных процессов и движения жидкостей и газов в трубопроводах.

МКЭ нашел самое широкое применение при прочностных расчётах, связанных с определением НДС элементов конструкций. МКЭ хорошо компьютеризирован. Существуют специализированные программы расчёта НДС на основе МКЭ: ANSYS, SCAD, APM Win-machine, MSC, NASTRAN, Cosmos Design Star и др. МКЭ требует быстродействующих ЭВМ и с большой памятью.

### 2.3. Модели тепловых процессов на микроуровне

Математические модели тепловых процессов описывают **теплообмен** – процесс переноса тепловой энергии в среде с неоднородным полем температуры. Факторная модель тепловой системы (рис. 2.4) в качестве входных факторов использует тепловой поток  $Q$ , в качестве выходных – температурное поле  $T(x, y, z, t)$ .

**Температурным полем  $T(x, y, z)$**  называется совокупность значений температуры для всех точек пространства в данный момент времени. Совокупность точек объекта, имеющих одинаковую температуру, образует поверхность равных температур, называе-

мую *изотермической*. Различают стационарный процесс теплообмена и нестационарный, если температура изменяется во времени.

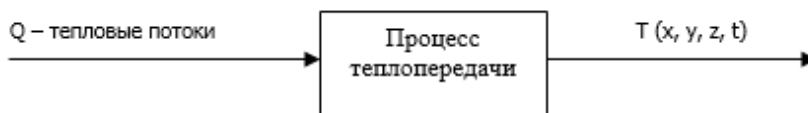


Рис. 2.4. Факторная модель теплового процесса

Теплообмен может осуществляться **теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением** [1, п. 2.3].

**Уравнение теплопроводности**, связывающее температуру и тепловой поток, получается на основе закона сохранения энергии (2.8). Применительно к тепловой системе его можно записать в виде

$$\partial Q / \partial t = -\text{div} \cdot \bar{q} + G_Q, \quad (2.18)$$

где  $Q$  – количество тепловой энергии в единице объема, Дж/м<sup>3</sup>;  $\bar{q}$  – вектор плотности теплового потока, Дж/(м<sup>2</sup>с);  $G_Q$  – количество тепловой энергии, выделяемое в единицу времени в рассматриваемом объеме, Дж/(м<sup>3</sup>с).

Величина  $G_Q$  характеризует мощность внутренних источников теплоты: внутреннее трение, химические реакции и т.п.

Согласно закону теплотехники изменение количества тепловой энергии  $dQ$  пропорционально изменению температуры  $dT$ :

$$dQ = C \rho dT, \quad (2.19)$$

где  $C$  – удельная теплоемкость материала, Дж/(кг °К);  $\rho$  – плотность материала, кг/м<sup>3</sup>.

**Плотность теплового потока  $\bar{q}$**  в соответствии с **законом Фурье** пропорциональна градиенту температуры:

$$\bar{q} = \lambda \text{grad} T, \quad (2.20)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала объекта, Дж/(см°К).

С учетом выражений (2.19) и (2.20) уравнение (2.18) приводится к виду

$$\tilde{N} \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + G_Q. \quad (2.21)$$

Для большинства теплотехнических объектов внутренние источники тепла отсутствуют и  $G_Q=0$ .

Для однородного изотропного тела  $\lambda = \text{const}$ , и уравнение (2.21) упростится:

$$\partial T / \partial t = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) / C\rho. \quad (2.22)$$

Выражение дивергенции градиента температуры можно записать в виде

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T, \quad (2.23)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

В этом случае ММ теплопередачи изотропного материала выражается в виде уравнения

$$\partial T / \partial t = a_T \nabla^2 T, \quad (2.24)$$

где  $a_T = \lambda / (C\rho)$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с.

Для решения уравнения (2.20) должны быть заданы *краевые условия* – начальные и граничные.

В зависимости от наличия информации о теплообмене применяют **граничные условия** первого, второго, третьего и четвертого рода.

**Граничные условия первого рода** описывают распределение температуры на граничной поверхности S:

$$T_s = \varphi(x, y, z), \quad \dots \dots \dots x, y, z \in S. \quad (2.25)$$

**Граничные условия второго рода** описывают распределение производных температуры по координатам на поверхности S:

$$\left( \partial T / \partial n \right)_s = \psi(x, y, z, t), \quad (2.26)$$

где  $\partial T / \partial n$  – модуль вектора градиента температуры.

При отсутствии на границе теплового потока теплообмен с внешней средой не осуществляется. В этом случае говорят, что граничная поверхность объекта теплоизолирована.

Граничные условия теплоизолированного объекта

$$\left( \partial T / \partial n \right)_s = 0. \quad (2.27)$$

**Граничные условия третьего рода** конкретизируют распределение плотности теплового потока на граничной поверхности в зависимости от способа теплообмена.

**При конвективном теплообмене** плотность теплового потока на граничной поверхности выражает *закон Ньютона*

$$q_s = \alpha(T_c - T_s), \quad (2.28)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена (теплопередачи) через конвекцию, Дж/(с м<sup>2</sup> °К);  $T_c$  – температура окружающей среды;  $T_s$  – температура граничной поверхности.

Принимая во внимание выражение (2.28), можно записать граничного условия третьего рода при конвективном теплообмене:

$$\lambda \cdot \partial T / \partial n + \alpha(T_C - T_S) = 0. \quad (2.29)$$

Выражения граничных условий первого и второго рода являются частными случаями уравнения (2.29). Так, при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\lambda = \text{const}$ , получаем  $T_C = T_S$  и приходим к граничным условиям первого рода. Если положить  $\alpha \rightarrow 0$ , получим частный случай граничных условий второго рода – теплоизолированная граничная поверхность.

**При генерировании теплового потока па граничной поверхности**, что характерно для фрикционных механизмов, подшипников скольжения и т.п., уравнение граничного условия третьего рода имеет вид:

$$\lambda \partial T / \partial n + q_s = 0. \quad (2.30)$$

**При лучистом теплообмене** между твердым телом и внешней средой плотность теплового потока определяется по **закону Стефана – Больцмана**:

$$q_s = \varepsilon \sigma (T_C^4 - T_S^4). \quad (2.31)$$

где  $\varepsilon$  – степень черноты поверхности, характеризующая ее излучательную (или поглощающую) способность;  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана.

**Граничные условия четвертого рода** – условия сопряжения, выражающие равенство температур и равенство плотностей тепловых потоков на соприкасающихся поверхностях многослойных объектов:

$$T_{1s} = T_{2s}; \quad (2.32)$$

$$\lambda_1 (\partial T_1 / \partial n)_s = \lambda_2 (\partial T / \partial n)_s. \quad (2.33)$$

Для *нестационарных* процессов теплопередачи надо кроме краевых условий задавать и *начальные условия*. Задается распределение температуры по области определения  $\Omega$  в начальный момент времени при  $t_0 = 0$

$$T_{\Omega 0} = \Phi(x, y, z) \quad x, y, z \in \Omega. \quad (2.34)$$

Совокупность уравнений теплопроводности и граничных условий составляет математическую модель теплового объекта на микроуровне. Результатом решения ММ теплового объекта является **температурное поле** объекта.



## 2.4. Модели гидравлических процессов на микроуровне

ММ гидравлического процесса устанавливает связь между давлениями и расходами (рис. 2.5).

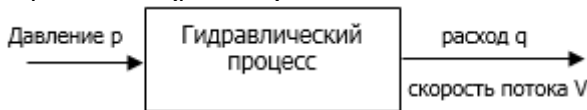


Рис. 2.5. Факторная модель гидравлического процесса

Все применяемые на практике жидкости и газы представляют обычно **ньютоновские вязкие среды**. В такой среде возникают силы внутреннего трения, пропорциональные относительным скоростям или скоростям сдвига.

Жидкости обычно имеют сравнительно большую вязкость и слабую сжимаемость. Газы, наоборот, отличаются малой вязкостью и высокой сжимаемостью. Тем не менее, математическое описание движения жидкостей и газов на микроуровне можно выполнить на основе одних и тех же законов текучей сплошной среды, рассматриваемых в единой науке, называемой гидродинамикой [18].

Для описания движения жидкости используют два закона: закон сохранения массы (2.4) и закон сохранения количества движения (2.6).

Производную произведения двух переменных в уравнении (2.6) представим в виде

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} v + \frac{\partial v}{\partial t} \rho. \quad (2.35)$$

С учётом этого соотношения из уравнения закона сохранения количества движения (2.7), учитывая массовые силы, силы трения, получаем основную ММ гидродинамики – уравнение Навье – Стокса пространственного движения вязкой жидкости в виде [1, п. 2.4]:

$$\partial \bar{v} / \partial t = G_M - (\text{grad} \cdot P - \eta \nabla^2 \bar{v} - \eta \cdot \text{grad} \cdot \text{div} \cdot \bar{v} / 3) / \rho, \quad (2.36)$$

где  $V$  – скорость потока;  $P$  – давление;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\eta$  – динамическая вязкость;  $G_M = \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$  – напряженность

поля массовых сил;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

**Уравнение Навье – Стокса** в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = G_M - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.37)$$

При анализе движения жидкости в трубопроводе обычно массовыми силами пренебрегают. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.38)$$

Пренебрегая вязкими силами, приняв в этом выражении  $\eta=0$ , получаем уравнение Эйлера для одномерного потока в трубопроводе постоянного сечения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.39)$$

Уравнение Эйлера – излишне упрощённая ММ, оно учитывает лишь инерционные свойства потока, а уравнение Навье – Стокса – инерционные и диссипативные.

**Закон сохранения массы** (2.4) выражает условие непрерывности потока жидкости и для трубопровода имеет вид

$$\partial p / \partial t = -\partial(\rho v) / \partial x. \quad (2.40)$$

Уравнения (2.35) и (3.40) составляют ММ гидравлической системы в виде нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями: скорости  $v$ , давления  $P$  и плотности  $\rho$ . Чтобы сделать систему определенной, необходимо в нее добавить уравнение связи между давлением  $p$  и плотностью  $\rho$ .

Уравнение связи для жидкостей представляют обобщенным нелинейным уравнением изотропы:

$$(P+B)/\rho^n = \text{const}, \quad (2.41)$$

где  $B$  – коэффициент;  $n$  – показатель степени.

При проектировании гидроприводов в качестве уравнения связи часто принимают линейную аппроксимацию зависимости изменения давления от изменения объема жидкости по *закону Гука*. Он учитывает слабую сжимаемость рабочих жидкостей гидроприводов и в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.42)$$

где  $E$  – модуль объемной упругости жидкости.

Значение модуля объемной упругости  $E$  зависит также от температуры и наличия в жидкости пузырьков нерастворенного воздуха. Подробнее этот вопрос изложен в работе [12, с. 43-45].

Следует также учитывать зависимость динамической вязкости

$\eta$  от температуры, для чего обычно используют степенную зависимость

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{T_0}{T} \right)^n. \quad (2.43)$$

Формула годится и для газов, и для рабочих жидкостей, используемых в гидроприводах.

Для решения уравнений (2.35) и (3.40) необходимо задать краевые условия.

**Граничные условия** обычно принимают первого рода, задавая давление и скорость на границах участка трубопровода.

**Начальными условиями** являются значения этих же функций в начальный момент времени  $t_0=0$  во всех контролируемых точках трубопровода. Если функции не зависят от времени, процесс движения жидкости в трубопроводе будет стационарным, в противном – случае нестационарным (переходным).

## 2.5. Модели пневматических процессов на микроуровне

Моделирование пневматических процессов в принципе можно проводить на основе тех же уравнений Навье-Стокса (2.36) и их разновидностей из гидродинамики.

Однако газы в отличие от жидкости являются особой легко сжимаемой средой со свойствами, сильно зависимыми от температуры, поэтому движение их имеет особенности. Они рассматриваются в отдельной науке – аэродинамике. Её основы заложены Н.Е. Жуковским, С.А. Чаплыгиным на заре авиации [18].

Изучение движения газов удобнее моделировать методом Эйлера, рассматривающего среду как движение струй, а не частиц. В сельскохозяйственном производстве широко используют аэротехнологии, в которых активной средой является движущийся воздух. К ним относятся процессы сепарации, зерноочистки, пневмотранспорта и др. В пневматических СХП воздух движется со значительными скоростями и перепадами давления, при которых существенно проявляется сжимаемость воздуха.

Уравнения движения газа по Эйлеру при неустановившемся движении:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i}; \quad i = x, y, z, \quad (2.44)$$

где  $\rho$  – массовая плотность;  $p$  – давление;  $v_x, v_y, v_z$  – проекции

вектора скорости на координатные оси.

Уравнения установившегося движения получаются из уравнений (2.44), приняв

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0. \quad (2.45)$$

Уравнения Эйлера в форме (2.44) удобны при безвихревом движении воздушной среды. Для вихревого движения удобнее преобразовать уравнения Эйлера к форме Громека (1885 г.):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial i} + \Omega_1(i) - \Omega_2(i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i}, \quad i=x, y, z, \quad (2.46)$$

где

$$\Omega_1(i) = v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} \quad (2.47)$$

$$\Omega_2(i) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial i} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial i} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial i} \quad (2.48)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (2.49)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.50)$$

При движении газа меняется его скорость, давление и плотность. Они определяются решением уравнений движения. Пространственная задача сложна и обычно решается компьютерно в цифровом виде.

Для установления характера процессов, происходящих в движущемся газе, достаточно рассмотреть случай одномерного установившегося движения, описываемого уравнением Бернулли. Его можно получить из уравнения движения (2.46), которое для одномерной задачи примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.51)$$

Уравнение Бернулли в приращениях

$$\frac{1}{2} dv^2 = -\frac{1}{\rho} dp \quad (2.52)$$

даёт важную закономерность: при установившемся движении газа его давление, скорость и плотность меняются так, что поддерживается постоянным соотношение

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const = C. \quad (2.53)$$

При расчётах обычно предполагают, что процесс адиабатический, воздушный поток изолирован от притока тепла извне. Для адиабатического процесса выполняется определённое соотношение скоростей и давления при движении газа:

$$p v^k = const, \quad (2.54)$$

где  $k$  – показатель адиабаты (для воздуха  $k=1,4$ );

$$k = C_p / C_v, \quad (2.55)$$

где  $C_p, C_v$  – удельные теплоёмкости газа при постоянном давлении и постоянном объёме.

Показатель адиабаты характеризует не только динамические, но и тепловые свойства газа. Величину  $h = C_p T$  называют энтальпией газа.

Постоянная  $C$  в уравнении Бернулли определяется для покоящегося газа при давлении  $p_0$ , плотности  $\rho_0$  с учётом показателя адиабаты  $k$ :

$$C = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} R T_0, \quad (2.56)$$

где  $R$  – газовая постоянная;  $T_0$  – температура, К;  $k$  – показатель адиабаты.

Отношение давления и плотности – важный показатель состояния газа. Он определяет и температуру  $T$ , и скорость распространения звука  $c$ .

$$\frac{p}{\rho} = RT; \quad c = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (2.57)$$

Скорость звука оказывается зависимой от температуры.

Так, для воздуха скорость звука  $c = 20,1 \sqrt{T}$ , м/с.

Скорость движения  $v$  воздушной струи принято выражать числом Маха по отношению к скорости звука в нём:  $M = v/c$ .

Движущиеся струи воздуха оказывают силовое воздействие на окружающие поверхности. Различают скоростной напор и динамический. Скоростной – от удара движущей массы воздуха о препятствие:

$$q = 0,5 \rho v^2. \quad (2.58)$$

Динамический напор  $D_p$  – от изменения давления в среде и появления боковых сил вокруг среды:

$$D_p = p_0 - p \quad (2.59)$$

Динамический напор определяется в долях скоростного напора

ра:

$$D_p/q = \frac{2}{kM^2} \left[ \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right]. \quad (2.60)$$

Приведённые соотношения даже по простой одномерной ММ Бернулли говорят о сложной взаимосвязи скорости, давления, плотности и температуры движущейся воздушной среды. Быстрое расширение воздуха вызывает падение давления и температуры до вымораживания в нём влаги; сужение потока повышает давление и температуру так, что появляется возможность подогрева воздуха и сушки динамическим путём.

Полные объёмные представления о состоянии воздушной среды должны получаться по трёхмерным ММ (2.25), (2.26) с добавлением уравнения непрерывности (2.22), граничных и начальных условий. Результатом такого моделирования должны быть поля скоростей, давлений, плотностей и температур воздуха, распределённых по объёму движущейся воздушной среды, что представляет весьма сложную и трудоёмкую задачу. Для её решения следует применять компьютерные технологии и специальные программные средства. Хорошие результаты даёт применение системы Flowvision и т.п. Но и в этом случае получают только цифровой результат, не обладающий общностью и не раскрывающий аналитических зависимостей и закономерностей функционирования.

Подводя итог рассмотрению ММ на микроуровне, отметим, что представление их дифференциальными уравнениями в частных производных даёт полное описание процессов, но пользование ими очень сложно и требуют для решения задачи высокой математической квалификации и больших затрат времени.

Для получения аналитических моделей, пусть приближённых, но менее сложных и доступных для инженерной практики, переходят с микро- на макроуровень.

## ЧАСТЬ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НА МАКРОУРОВНЕ

### 3.1. Принципы моделирования на макроуровне

В отличие от систем с распределёнными параметрами, не имеющими понятия структуры, объекты на макроуровне рассматриваются как сложные системы, имеющие структуру, т.е. состоящие из совокупности взаимодействующих элементов.

Эти модели получают **структуризацией** распределенных в пространстве объектов. Структуризация сводится к выделению в объекте элементов с сосредоточенными параметрами [1, гл. 3].

Основанием для структуризации является наличие дискретного спектра собственных частот колебаний системы в рабочем диапазоне (для механических систем – до 100 Гц).

Назначение несуществующей структуры – задача творческая. Переход пока слабо формализован, основан на интуиции и опыте.

#### **Требования к результатам структуризации:**

- выделение дискретных элементов должно соответствовать физическим законам;
- дискретные элементы должны быть по возможности простыми (простой элемент наделяется только одним физическим свойством, а сложный – более чем одним).
- модель должна отображать не только статические, но и динамические свойства объекта, что означает обязательное наличие инерционных, упругих и диссипативных элементов;
- элементы, отображающие инерционные свойства, должны содержать сосредоточенную массу;
- при моделировании передач и рычажных механизмов следует добавлять трансформаторные элементы;
- при моделировании сухого трения добавляют фрикционные элементы.

Для выделения дискретных элементов из сплошной среды практика использует метод функционально законченных элементов, методы сеток и метод сосредоточенных масс [1].

**Метод функционально законченных элементов** основан на выделении типовых элементов технического объекта, завершённых в конструктивном и выполняющих определённые функции (например, в гидравлической системе – участок гидро-

магистрала, золотниковый клапан, дроссель, насос, гидромотор и др.). Имея библиотеку математических моделей функционально законченных элементов, можно составить полную математическую модель.

Недостаток метода – трудность применения к сплошным средам и наличие сложных элементов.

**Методы сеток** сводятся к набрасыванию на объект какой-либо сетки, как в МКР и МКЭ. Отличие в том, что в узлах сетки размещаются сосредоточенные массы. Недостаток метода – трудности применения для механизмов с движущимися деталями.

**Метод сосредоточенных масс.** Этот метод применим для технических объектов, у которых масса распределена в пространстве неравномерно и система имеет дискретный спектр собственных частот. Например, в приводе СХМ масса вращающихся деталей в основном сосредоточена в шкивах, барабанах, роторах, а соединяющие их детали (валы, муфты и др.) имеют малые размеры и массу, но обладают упругими свойствами. При построении макромодели массы крупных частей объекта отображают сосредоточенными массами, а элементы с малыми массами отображают невесомыми упругими, диссипативными, фрикционными и трансформаторными элементами. Количество выделяемых сосредоточенных масс определяет число степеней свободы модели. Все элементы должны быть простыми: один вход и один выход (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Названия и обозначения обязательных элементов систем

Система	Элементы		
	инерционный	диссипативный	упругий
Механическая поступательная	масса $m$	затухание $\mu$	жёсткость $c$
Механическая вращательная	момент инерции $J$	затухание $\mu$	крутильная жёсткость $c_{кр}$
Гидравлическая	масса $m_f$	вязкость $\mu_f$	жёсткость $c_f$
Тепловая	нет	тепловое сопротивление $\mu_f$	теплоёмкость $c_f$
Электрическая	Индуктивность $L$	Сопротивление $R$	Емкость $C$

Независимо от применённого метода в результате структуризации распределённой системы появляется структура, которая может представляться графически.

Графическое отображение состава элементов и характера их взаимодействия называется структурной схемой. Для обозначения элементов в ней применяют стандартные графические изображения.



**Пример 3.1.** Используя метод сосредоточенных масс, построить структурную модель для анализа плавности хода мобильной машины (сельхозмашины, автомобиля).

Неровности дороги при движении машины вызывают колебания её кузова. Для их уменьшения применяют подвеску колёс, содержащую упругие элементы и амортизаторы. Упругими и диссипативными свойствами обладают также пневматические шины колес. Подрессоренная масса кузова, массы колес и мостов образуют многомассовую колебательную систему (рис. 3.1, а)

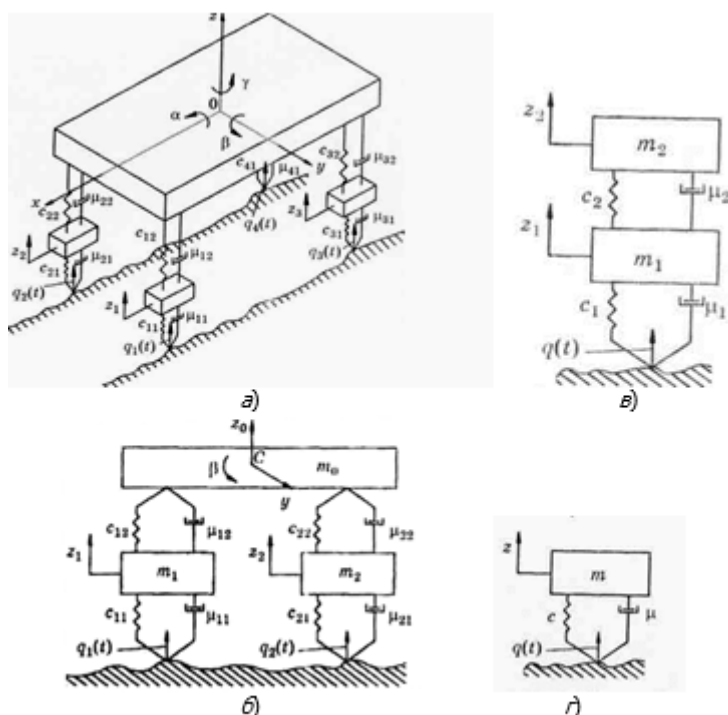


Рис. 3.1. Структурные схемы мобильной машины разной степени упрощения

Внешние случайные воздействия  $\mathbf{q}(t)$  создаются неровностями профиля дороги.

Кузов можно рассматривать как твердое тело с шестью степенями свободы: смещения  $x, y, z$  вдоль трех координатных осей и повороты  $\alpha, \beta, \gamma$  относительно этих же осей. При независимой подвеске колес обычно учитывают только их вертикальные перемещения и каждое колесо имеет одну степень свободы  $z_i, i=1,4$ . Тогда модель колебательной системы автомобиля с независимой подвеской колёс имеет  $6+4=10$  степеней свободы.

Такая структурная модель сложна для анализа. Поэтому на ранних этапах проектирования применяют упрощения.

Если исключить из рассмотрения поперечные смещения, то приходим к структурной модели плоских колебаний (рис. 3.1, б), в которой учитываются вертикальные колебания кузова  $z_0$ , двух мостов  $z_1, z_2$ , угловые колебания  $\beta$  вокруг оси  $y$  (тангаж). Колебательная система имеет четыре степени свободы с координатами  $z_0, \beta, z_1, z_2$ .

Если при анализе плавности хода ограничиться только вертикальными смещениями центра масс кузова и колёс, то возможно использование двухмассовой структурной модели (рис. 3.1, в). Сосредоточенные массы  $m_1$  и  $m_2$  могут перемещаться только вертикально. Следовательно, система имеет две степени свободы.

Одномассовая динамическая модель (рис. 3.1, г) описывает только вертикальные колебания кузова и не учитывает колебаний колес, вызывающих тряску машины. Поэтому такое упрощение даёт потерю важной информации и неприемлемо.

Таким образом, в зависимости от степени абстрагирования при моделировании технического объекта можно получать структурные модели различной сложности и информативности.

### 3.2. Компонентные и топологические уравнения

Состояние системы с сосредоточенными массами описывается компонентными и топологическими уравнениями [1, п. 3.3].

**Компонентные уравнения** описывают каждый элемент (компонент) по принципу «вход – выход». Считается, что на входе действует переменная типа потенциала  $U$ , а на выходе – переменная типа потока  $I$ . Названия и размерности фазовых переменных для систем разной физической природы приведены в табл. 3.2.

Состояние простого элемента характеризуется одной фазовой

переменной типа потока I и одной переменной типа потенциала U. Математическую зависимость  $U=f(I)$  между фазовыми переменными называют компонентным уравнением.

Таблица 3.2

Названия и размерности фазовых переменных

Система	Фазовая переменная	
	Типа потенциала	Типа потока
Механическая поступательная	Сила F, Н	Скорость V, м/с
Механическая вращательная	Вращающий момент M, Нм	Угловая скорость $\omega$ , рад/с
Гидравлическая	Давление p, Н/м <sup>2</sup> (Па)	Расход Q, м <sup>3</sup> /с
Тепловая	Тепловой поток q, Вт (Дж/с)	Температура T, К
Электрическая	Напряжение U, В	Ток I, А

Компонентные уравнения имеют общий вид:

для инерционного элемента  $U_{II} = k_{II} dI_{II} / dt$  ;

(3.1)

для диссипативного элемента  $U_{\Delta} = k_{\Delta} I_{\Delta}$  ;

(3.2)

для упругого элемента  $U_V = k_V \int I_V dt$  .

(3.3)

Индексы при коэффициентах фазовых переменных указывают на принадлежность их соответствующим элементам. Обозначения и размерности коэффициентов k приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Коэффициенты компонентных уравнений

Система	Коэффициенты		
	$k_{II}$	$k_{\Delta}$	$k_V$
Механическая поступательная	m , кг	$\mu$ , Н с/м	c , Н/м
Механическая вращательная	J, кг·м <sup>2</sup>	$\mu$ , Нмс/рад	$c_{вр}$ , Нм/рад
Гидравлическая	$m_r$ , кг/м <sup>4</sup>	$\mu_r$ , Нс/м <sup>2</sup>	$c_r$ , Н/м <sup>2</sup>
Тепловая	нет	$\mu_T$ , Дж/(сК)	1/с <sub>T</sub> , К/Дж
Электрическая	L , Гн	R, Ом	1/с, 1/Ф

Для вывода компонентных уравнений систем используются соответствующие физические законы.

Компонентные уравнения механической системы используют 2-ой закон Ньютона, уравнения Ньютона для вязких сред, закон Гука.

Компонентные уравнения гидравлической системы используют уравнения Эйлера, Навье–Стокса и Гука.

Компонентные уравнения тепловой системы используют уравнения Эйлера, закон Фурье.

Полученные на основе этих законов компонентные уравнения систем разной физической природы приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Компонентные уравнения систем

Система	Тип элемента		
	Инерционный	Диссипативный	Упругий
Механическая поступательная	$F_u = m \, dV/dt$	$F_d = \mu \, V$	$F_y = c \int V dt$
Механическая вращательная	$M_u = J \, d\omega/dt$	$M_d = \mu \, \omega$	$M_y = c \int \omega dt$
Гидравлическая	$P_u = m \cdot dQ/dt$	$P_d = \mu_r \, a$	$P_y = c \cdot \int Q dt$
Тепловая	$\Phi_u = c_T dT/dt$	$\Phi_d = \mu_T \, T$	отсутствует
Электрическая	$U_u = L \, dI/dt$	$U_d = R \, I$	$U_y = C^{-1} \int I dt$

**Топологические уравнения** выражают условия равновесия и непрерывности фазовых переменных.

Условия равновесия для переменных типа потенциала

$$\sum_i U_i = 0, \quad (3.4)$$

Условия непрерывности для переменных типа потока

$$\sum_k I_k = 0. \quad (3.5)$$

Топологические уравнения систем разной физической природы приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Топологические уравнения

Система	Топологическое уравнение	
	равновесия	непрерывности
Механическая поступательная	$\sum_i \dot{F}_i = 0$	$\sum_k \dot{v}_k = 0$
Механическая вращательная	$\sum_i \dot{M}_i = 0$	$\sum_k \dot{\omega}_k = 0$
Гидравлическая	$\sum P_i = 0$	$\sum Q_i = 0$
Тепловая	$\sum T_i = 0$	$\sum Q_i = 0$
Электрическая	$\sum U_i = 0$	$\sum I_i = 0$

**Топологические уравнения механической системы.** Уравнение равновесия выражает принцип Даламбера: геометрическая сумма всех сил, приложенных к твердому телу, включая силу инерции, равна нулю.

Условие непрерывности фазовых координат типа потока выражает принцип сложения скоростей при сложном движении твердого тела: геометрическая сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю.

**Топологические уравнения гидравлической системы включают:** уравнение равновесия давлений, действующих на сосредоточенные массы, уравнение непрерывности потоков жидкости.

**Топологические уравнения тепловой системы:** условие равновесия потенциалов на поверхностях контакта дискретных элементов; условие непрерывности тепловых потоков. Инерционными свойствами тепловая система не обладает. Тепловой поток в твердом теле всегда направлен противоположно градиенту температуры и меняется мгновенно.

**Топологические уравнения электрической системы:**

Уравнение равновесия выражает второй закон Кирхгофа. Оно составляется для замкнутых контуров электрической схемы.

Уравнение непрерывности выражает первый закон Кирхгофа. Он формулируется так: алгебраическая сумма токов для любого узла электрической схемы равна нулю.

Форма компонентных и топологических уравнений одинакова для систем различной физической природы (см. табл. 3.4, 3.5). В этих аналогиях проявляется единство физических законов, проявление общих законов мироздания, пока не сформулированных.

### 3.3. Построение теоретических моделей на макроуровне

Теоретической в литературе называют символьную ММ, полученную теоретически, т.е. математическими процедурами.

При построении теоретических моделей используется два подхода: физический и формальный. Физический подход основан на непосредственном применении физических законов, а формальный использует общие математические принципы Гамильтона, Лагранжа и др. [1, гл. 4].

Исходным пунктом для обоих подходов является структурная модель объекта. Структурную схему превращают в расчётную, добавляя оси координат и внешнюю нагрузку. Например, двухмассовая структурная схема транспортного средства на рис. 3.1, в превращается таким образом в расчётную схему (рис. 3.2.)

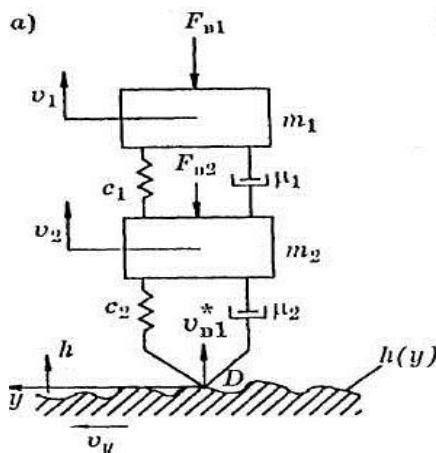


Рис. 3.2. Расчётная схема транспортного средства для структурной схемы рис. 3.1, в

### 3.3.1. Физический подход при моделировании

Теоретическая модель технического объекта формируется на основе компонентных и топологических уравнений технической системы (ТС). Используют следующие способы создания модели: табличный, контурный, метод функционально законченных элементов, графический, матричный, узловый метод, метод переменных состояний.

**Табличный метод** использует исходные компонентные и топологические уравнения непосредственно, без каких-либо преобразований. Однако математическая модель при этом оказывается переопределенной. Количество уравнений значительно превышает число степеней свободы системы.

Рассмотрим динамическую модель на рис. 3.2. Она является механической поступательной системой. Фазовые переменные типа потока – скорости  $V$ , а типа потенциала – силы  $F$ . На систему действуют источники потенциалов  $F_{v1}$  и  $F_{v0}$  и источник потока  $V^*_{v1}(t)$  от кинематического воздействия неровностей дороги.

Потенциалы внешних воздействий  $F_{v1}$  и  $F_{v2}$  представляют собой силы тяжести соответственно кузова и колес автомобиля.

Система имеет две сосредоточенные массы, две степени свободы и две обобщённые координаты  $z_1, z_2$ .

Структурная схема имеет 7 компонентов: две сосредоточенные массы  $m_1$  и  $m_2$ , четыре элемента связи  $c_1, c_2, \mu_1, \mu_2$  и один безмассовый элемент нагружения в точке  $D$ .

Система компонентных уравнений:

$$\begin{aligned}
 m_1 \, d^2z_1/dt^2 &= F_1 + R_{c1} + R_{\mu 1} ; \\
 R_{c1} &= -C_1(z_1 - z_2); \\
 R_{\mu 1} &= -\mu_1 (v_1 - v_2); \\
 m_2 \, d^2z_2/dt^2 &= F_2 - R_{c1} + R_{c2} - R_{\mu 1} + R_{\mu 2} ; & (3.6) \\
 R_{c2} &= -C_2(z_2 - h(y)); \\
 R_{\mu 2} &= -\mu_2 (v_2 - v^*); \\
 V_{в1}^*(t) &= V_y(t)[dh(y)/dy],
 \end{aligned}$$

где  $V_y(t)$  – скорость движения автомобиля вдоль оси  $y$ ;  $h(y)$  – функция микропрофиля поверхности дороги;  $R$  – реакции соответствующих связей;  $z_1, z_2$  – вертикальные смещения сосредоточенных масс;  $v_1, v_2$  – вертикальные скорости сосредоточенных масс.

Система уравнений (3.6) составляет ММ табличного метода. Число уравнений – 7, неизвестных два –  $z_1, z_2$ . Система переопределена.

Переопределённость приводит к неустойчивости вычислительных алгоритмов при решении на ЭВМ. Поэтому табличный метод применим только для простых систем.

**Метод функционально законченных элементов.** Выделяемые функционально законченные элементы описываются готовыми моделями из банка описаний, который за много лет создан на специализированном предприятии. Однако разнородные ММ трудно стыкуются; создание банка требует много времени. Тем не менее, при создании специализированных систем проектирования этому методу отдается предпочтение.

**Графический метод.** В инженерной практике получили распространение графические формы моделей в виде графов и эквивалентных схем.

**Эквивалентная схема** – графическое изображение состава и взаимодействия элементов с помощью стандартизированных условных обозначений (рис. 3.3).

Эквивалентная схема отображает топологию и компонентный состав модели. Ветви эквивалентной схемы соответствуют инерционным, упругим и диссипативным элементам модели и источникам внешних воздействий. Узлы эквивалентной схемы соответствуют сосредоточенным массам. Добавляются узлы источников потока и базовый (нулевой) узел, соответствующий инерциальной системе отсчета фазовых координат.

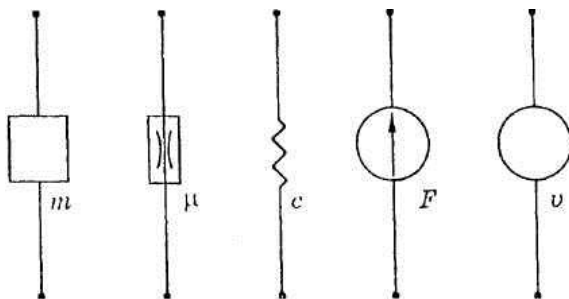


Рис. 3.3. Обозначение компонентов эквивалентной схемы:  
 $m$  – инерционной;  $\mu$  – диссипативной;  $c$  – упругой;  
 $F$  – источника потенциала;  $v$  – источника потока

В качестве примера на рис. 3.4 приведена эквивалентная схема системы 3.2. Узлы 1 и 2 отображают сосредоточенные массы, а узел  $1^*$  – внешнюю среду, генерирующую воздействие типа потока  $V_{B1}^*(t)$ , передаваемое на упругий и диссипативный элементы  $C_2$  и  $\mu_2$  колес автомобиля. Узлы источников потока имеют свою нумерацию и обозначаются звездочкой. Элементы связей  $C_1$  и  $\mu_1$ ,  $C_2$  и  $\mu_2$  соединяют соответствующие узлы, образуя ветви упругих и диссипативных компонентов.

Обозначения параметров элементов и фазовых переменных соответствуют обозначениям параметров компонентов.

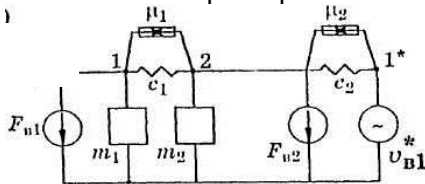


Рис. 3.4. Эквивалентная схема мобильной машины

Эквивалентная схема имеет хорошую наглядность, но не имеет аналитического описания. Её применяют при предметном моделировании в виде схемы замещения.

**Граф** представляет собой совокупность узлов (вершин) и соединяющих их ветвей (рёбер), отображающих сосредоточенные массы и связи системы (рис. 3.5). Узлы графа обозначают точками, а ветви – линиями. Граф является графической моделью только топологии системы. В отличие от эквивалентной схемы компоненты не изображаются и их условные изображения не применяются.



Узлам присваивают номера сосредоточенных масс, а ветвям дают обозначения параметров элементов модели или обозначения фазовых переменных для источников внешних воздействий.

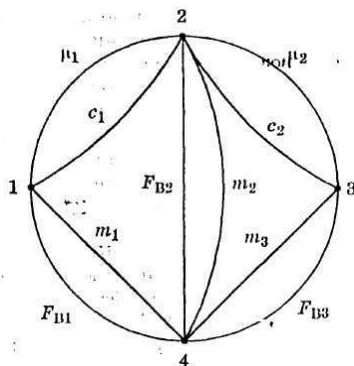


Рис. 3.5. Граф мобильной машины

**Оргграф** (ориентированный граф) – граф, у которого указаны направления передачи сигналов в ветвях графа. Направления сигналов в ветвях графа изображают стрелками (рис. 3.6).

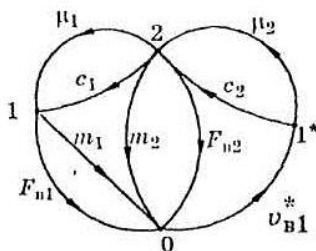


Рис. 3.6. Оргграф мобильной машины

В ветвях источников внешних воздействий сигналы направляют от базы к узлу, если энергия подводится к узлу. При отводе энергии на преодоление сопротивлений направление сигнала источника – от узла к базе. В ветвях инерционных компонентов направления сигналов – от узлов к базе. В случае, когда нельзя однозначно указать направление передачи энергии в ветвях графа, их задают произвольно, а истинное направление определяют по знакам решения.

Число узлов орграфа  $n$  (без базового) равно числу сосредоточенных масс.

Граф имеет и математическое описание:  $\Gamma = (U, B, I)$ , где  $U$  –

множество узлов;  $V$  – множество ветвей;  $I$  – инцидентор – указатель способа соединения ветвей.

**Матричный метод.** Матричная форма представления математической модели основана на представлении орграфа в виде матрицы инцидентий размерности  $\alpha * \beta$ , где  $\alpha$  – число строк, равное числу узлов орграфа;  $\beta$  – число столбцов, равное числу ветвей орграфа [1, п. 4.3]. Каждому узлу орграфа, за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви – столбец матрицы. Единицами в матрице отмечается наличие соединений между узлами и ветвями орграфа, а нулями – их отсутствие. Направления сигналов в ветвях учитывают знаками единиц: знак минус, если сигнал направлен от узла, знак плюс – если к узлу.

При составлении матрицы инцидентий в неё включаются не только узлы, отображающие сосредоточенные массы, но и узлы источников потока, отмечаемые на орграфе и в матрице звездочкой. Сами источники потока в матрице инцидентий формально замещаются источниками реактивных потенциалов  $F_j^*$ .

В табл. 3.6 приведена матрица инцидентий для орграфа мобильного объекта на рис. 3.6. Источник потока  $V_{в1}^*(t)$  учтён добавлением столбцов  $m_1^*$  и  $F_1^*$ .

Таблица 3.6

Матрица инцидентий графа

Узлы	Ветви									
	инерционная			диссипативная		упругие		воздействия потенциалов		
	$m_1$	$m_2$	$m_1^*$	$\mu_1$	$\mu_2$	$C_1$	$C_2$	$F_{в1}$	$F_{в2}$	$F_1^*$
1	-1	0	0	1	0	1	0	-1	0	0
2	0	-1	0	-1	1	-1	1	0	-1	0
3	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	1
Подматрицы	$A_{и}$			$A_{д}$		$A_{у}$		$A_{в}$		

Матрица инцидентий обозначается  $A = (a_{ij})$ ,  $i = 1, \alpha$ ;  $j = 1, \beta$ , где  $\alpha$  – число узлов графа, за исключением базового;  $\beta$  – суммарное число ветвей орграфа – инерционных, диссипативных, упругих и источников внешних воздействий.

Матрицу инцидентии  $A$  можно представить состоящей из подматриц инерционных  $A_{и}$ , диссипативных  $A_{д}$ , упругих  $A_{у}$  ветвей и подматрицы ветвей источников потенциалов  $A_{в}$ :

$$A = [A_{и}, A_{д}, A_{у}, A_{в}]. \quad (3.7)$$

Матричное представление орграфа теряет в наглядности, но является более удобной формой для общения с компьютером.

### Узловой метод формирования математической модели.

Узловой метод основан на использовании компонентных и топо-

логических уравнений и матрицы инциденции [1, п. 4.4].

Компонентные и топологические уравнения для механической поступательной системы:

уравнения инерционных элементов

$$\bar{F}_H = m(d\bar{v}_H / dt); \quad (3.8)$$

уравнения диссипативных элементов

$$\bar{F} = \mu\bar{v}_L; \quad (3.9)$$

уравнения упругих элементов

$$\bar{F}_y = c \int \bar{v}_y dt, \quad (3.10)$$

где  $F_H$ ,  $F_D$ ,  $F_y$  – векторы потенциалов соответственно инерционных, диссипативных и упругих элементов;  $m$ ,  $\mu$ ,  $c$  – диагональные матрицы параметров этих же элементов;  $\bar{v}_H$ ,  $\bar{v}_D$ ,  $\bar{v}_y$  – векторы потоковых переменных для соответствующих элементов.

Топологические уравнения механической поступательной системы:

уравнение равновесия потенциалов ветвей орграфа, инцидентных  $i$ -му узлу:

$$\left( \sum_j \bar{F}_j \right)_i = 0, \quad i=1, \dots, n; \quad (3.11)$$

уравнение непрерывности фазовых переменных типа потока  $l$ -й ветви орграфа:

$$\left( \sum_k \bar{v}_k \right)_l = 0, \quad l=1, \dots, L \quad (3.12)$$

где  $n$  – число узлов орграфа, за исключением базового;  $L$  – число ветвей.

Используя матрицу инциденций, топологические уравнения можно записать в компактной форме

$$A\bar{F} = 0; \quad (3.13)$$

$$\bar{v}_B + A_B^T \bar{v} = 0, \quad v = i, d, y, \quad (3.14)$$

где  $A$  – матрица инциденций;  $A^T$  – транспонированная матрица  $A$ ;  $\bar{F}$  – вектор потенциалов ветвей;  $\bar{v}_B$ ,  $\bar{v}$  – векторы потоковых переменных соответственно ветвей и узлов графа.

Отличительной чертой узлового метода является использование в качестве базисных координат узловых потоковых переменных

ных  $\bar{v}$ , характеризующих состояния узлов графа.

Вектор потенциалов системы  $F$  представим состоящим из под-векторов потенциалов компонентов: инерционных  $F_{и}$ , диссипативных  $F_{д}$ , упругих,  $F_{у}$  и источников внешних воздействий  $F_{в}$ :

$$\bar{F}^T = [\bar{F}_{и}, \bar{F}_{д}, \bar{F}_{у}, \bar{F}_{в}] \quad (3.15)$$

Матрицу инциденций можно представить состоящей из соответствующих подматриц:

$$A = [A_{и}, A_{д}, A_{у}, A_{в}] \quad (3.16)$$

Используя представления (3.15) и (3.16), приведем уравнение равновесия (3.13) к виду:

$$A_{и}\bar{F}_{и} + A_{д}\bar{F}_{д} + A_{у}\bar{F}_{у} + A_{в}\bar{F}_{в} = 0. \quad (3.17)$$

Подстановка значений потенциалов ветвей из уравнений (3.8)–(3.10) в равенство (3.17) даёт:

$$A_{и}m(d\bar{v}_{и} / dt) + A_{д}\mu\bar{v}_{д} + A_{у}c \int \bar{v}_{у} dt + A_{в}\bar{F}_{в} = 0. \quad (3.18)$$

В уравнении присутствуют три потоковых переменных  $\bar{v}_{и}$ ,  $\bar{v}_{д}$ ,  $\bar{v}_{у}$ , что неудобно. Их можно выразить через узловые потоковые переменные  $\bar{v}$  из уравнения (3.14):

$$\bar{v}_B = -A_B^T \bar{v} \quad \text{в = и, д, у.} \quad (3.19)$$

В результате получаем теоретическую модель узлового метода в виде системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$A_{и}mA_{и}^T(d\bar{v} / dt) + A_{д}\mu A_{д}^T \bar{v} + A_{у}cA_{у}^T \int \bar{v} dt = A_{в}\bar{F}_{в}. \quad (3.20)$$

Достоинство узлового метода – возможность получения полноценной теоретической модели, недостаток – избыточность фазовых координат усложняет анализ и численные решения.

Математическую модель простой системы можно получать узловым методом непосредственно от матрицы инциденции. Уравнения модели получаются суммированием потенциалов (сил и моментов), инцидентных узлам, т.е. суммируя потенциалы в строке соответствующего узла матрицы.

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{\ell=1}^L F_{Bi\ell} + \sum_{j=1}^N F_{yij} + \sum_{k=1}^K F_{Дik}, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.21)$$

где  $L$  – количество внешних воздействий типа потенциала;  $N$  – количество упругих элементов системы;  $K$  – количество диссипативных элементов;  $n$  – количество сосредоточенных масс, равное числу степеней свободы.

Узловой метод хорошо приспособлен для моделирования элек-

трических цепей, гидравлических и тепловых систем. Для механических систем он применим лишь в случае простого движения твердых тел. При сложном движении узловой метод неприменим. Неприменим он также к объектам, содержащим трансформаторные и фрикционные элементы, элементы с неголономными, виртуальными связями, которые невозможно отобразить матрицей инцидентий.

### 3.3.2. Уравнения состояния в нормальной форме Коши

Метод ориентирован на получение математической модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, хорошо приспособленных для численных решений на ЭВМ. Поэтому система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши является предпочтительной формой теоретической модели.

Преобразование интегро-дифференциальных уравнений (3.20) к нормальной форме Коши осуществляется путем расширения координатного базиса за счёт добавления в него функции потенциалов упругих компонентов:

$$\bar{F}_y = -c * A_y^T \int \bar{v} dt. \quad (3.22)$$

Разрешим уравнение (3.20) относительно производной  $dv/dt$  и учтём, что матричное произведение  $(A_u m A_u^T)^{-1} = m^{-1}$ . Добавим производную по времени от вектор-функции  $\bar{F}_y$ . В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с базисными координатами  $\bar{v}$  и  $\bar{F}_y$ :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = [A_u m A_u^T]^{-1} [A_B \bar{F}_B - A_A \mu \dot{A}_A \bar{v} + A_u \bar{F}_u]; \\ \frac{d\bar{F}_y}{dt} = -c A_y^T \bar{v}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Первое матричное уравнение системы (3.23) выражает принцип Даламбера, а второе является компонентным уравнением упругих элементов. Число неизвестных функций  $v$  и  $F_y$  равно числу дифференциальных уравнений. Следовательно, метод переменных состояния устраняет избыточность фазовых координат узлового метода и позволяет избежать переопределённости уравнений табличного метода, повышая устойчивость вычислительных алгоритмов.

Если образовать в левой части вектор состояния системы

$$\bar{u} = \left| \frac{\bar{v}}{\bar{F}_y} \right|, \quad (3.24)$$

то теоретическая модель (3.22) представится через переменные состояния  $\bar{u}$  в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = [J] \cdot \bar{u} + [B] \cdot \bar{x}, \quad (3.25)$$

где  $[J]$  – матрица собственных свойств системы (матрица Якоби), образуемая из подматриц  $A_y, A_y^T$ ;  $[B]$  – матрица выбора возмущений, составленная из подматриц  $A_b, A_d$ ;  $\bar{x}$  – вектор возмущений, составленный из векторов потенциалов  $F_b, F_d$ .

Следует отметить, что вышеприведённые математические модели макроуровня получены из простых элементов, совершающих только простые движения: поступательные или вращательные. Но они являются базой для построения более сложных моделей.

### 3.4. Уравнения Лагранжа второго рода

Широкое применение для построения математических моделей технических объектов находит **формальный подход**. Он основан на использовании вариационных принципов аналитической механики. Наиболее развит вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [1, п. 4.5]. Для систем с сосредоточенными параметрами и голономными связями этот вариационный принцип приводит к уравнениям Лагранжа второго рода вида:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.26)$$

где  $q_i$  – обобщенная координата;  $E_k$  – кинетическая энергия системы;  $Q_i$  – обобщенная сила;  $n$  – число степеней свободы системы.

В качестве обобщенных координат  $q_i$  выбирают независимые переменные, определяющие состояние исследуемой системы. Каждой обобщенной координате  $q_i$  соответствует своя обобщенная сила  $Q_i$ .

Кинетическая энергия представляется квадратичной формой от обобщённых скоростей:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.27)$$

где  $m_{ij}$  – элемент инерционной матрицы системы.

Недостаток представления (3.26) – смешивание всех обобщённых сил независимо от их происхождения в одном векторе. Обобщенные силы  $Q_i$  удобнее разделить на потенциальные  $Q_n$ , диссипативные  $Q_d$  и нагрузки  $Q_v$ , которые не относятся к упругим и диссипативным (внешние, силы трения и др.).

Обобщенная сила  $Q_i$ , соответствующая  $i$ -ой обобщенной координате, выражается через разные виды работ и энергий:

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} - \frac{\partial E_{II}}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.28)$$

где  $E_n$  – потенциальная энергия;  $\Phi$  – диссипативная функция Рэля,  $W$  – силовая функция (работа сил).

Потенциальная энергия представляется квадратичной формой от обобщённых координат:

$$E_{II} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j, \quad (3.29)$$

где  $c_{ij}$  – элемент матрицы упругости системы.

Диссипативная функция Рэля  $\Phi$  представляется квадратичной формой от обобщённых скоростей:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.30)$$

где  $\mu_{ij}$  – элемент диссипативной матрицы системы.

Подставляя значение  $Q_i$  в уравнение (3.26), получим более удобное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_f}{\partial q_i} + \frac{\partial \hat{O}}{\partial \dot{q}_i} = Q_{Ai}, \quad i=1, \dots, n. \quad (3.31)$$

Здесь  $Q_{Bi}$  - внешние и внутренние реальные нагрузки, определяемые по их работе на возможных перемещениях:

$$Q_{Bi} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad i=1, \dots, n. \quad (3.32)$$

Подстановка выражений (3.27, 3.29, 3.30) в уравнение (3.31), приводит к формированию ММ в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\bar{F}(\ddot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}, \bar{q}, t) = 0. \quad (3.33)$$

В эту систему входит  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка ( $n$  – число степеней свободы системы).

Достоинство метода Лагранжа – возможность получения аналитического решения. Недостаток – большой объём выкладок и отсутствие должного программного обеспечения.

### 3.5. Последовательность применения методов

Все вышеприведённые методы построения теоретических моделей не являются независимыми, а должны взаимодействовать. Результат работы одной модели даёт исходные данные для другой.

Выстраивается следующая последовательность математического моделирования при проведении инженерных расчётов объектов:

1. Структуризация сплошной среды или объекта. Назначение структуры, выделение простых элементов и связей.
2. Разработка структурной схемы с указанием переменных типа потенциала и потока.
3. Параметризация и формализация задачи. Получение расчётной схемы (РС).

Далее пути моделирования разделяются на три направления.

**Первое направление** использует табличный метод:

4. Формулировка компонентных и топологических уравнений.
5. Объединение компонентных уравнений в систему.
6. Аналитическое решение системы компонентных уравнений. Направление пригодно для простых одномерных систем.

**Второе направление** более трудоёмко, но эффективнее:

4. Разработка эквивалентной схемы.
5. Разработка оргграфа системы.
6. Матричный метод, получение матрицы инциденции  $A$ .
7. Узловой метод; получение интегро-дифференциальных уравнений.



8. Метод переменных состояния; получение матричных уравнений в нормальной форме Коши.

9. Решение уравнений состояния с использованием мощного программного обеспечения аналитической механики, позволяющего эффективно решать сложные расчётные и исследовательские задачи.

**Третье направление.** Формальный метод Лагранжа:

4) назначение системы обобщённых координат  $q_i$ ,  $i=1, n$ ;

3) составление выражений кинетической, потенциальной энергий, диссипативной функции Рэля и работы внешних сил;

4) составление выражений для обобщённых сил.

5) выполнение всех операций дифференцирования, предусмотренных уравнением Лагранжа. Получают теоретическую модель в виде дифференциальных уравнений;

6) получение аналитического решения.

Переходы с одного направления на другое затруднены; в частности, существуют трудности формализации перехода от компонентных уравнений к уравнениям состояний, которые пока нельзя доверять компьютеру.

### 3.6. Усложнение математических моделей макроуровня

Полученные математические модели макроуровня с простыми элементами не могут описывать системы со сложными свойствами, но при необходимости допускают усовершенствование путём учёта соответствующих особенностей [1, гл.5].

#### 3.6.1. Учёт трансформаторных элементов

Трансформаторные элементы (ТЭ) отображают безынерционное преобразование переменных типа потока и типа потенциала. В технических объектах часто используются механические (зубчатые, цепные, фрикционные, рычажные, клиноременные), гидравлические (гидрообъемные и гидродинамические) и электрические трансформаторные элементы.

Особенностью ТЭ как компонента является наличие двух входов и выходов. На рис. 3.7 приведён механический ТЭ в виде зубчатой передачи, на входе которого действуют угловые скорости  $\omega_1$ , и крутящий момент  $M_1$ ; на выходе они становятся  $\omega_2$  и  $M_2$ . Угловые скорости – потоковые переменные; крутящие моменты – потенциалы.

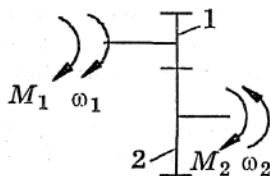


Рис. 3.7. Схема зубчатой передачи: 1, 2 – зубчатые колеса

Физические свойства ТЭ характеризуются передаточным числом и коэффициентом трансформации. Потери учитываются КПД.

Передаточное число  $u$  определяется отношением потоковых переменных на входе и выходе элемента:

$$u = \omega_1 / \omega_2. \quad (3.34)$$

Обратная величина называется передаточным отношением  $i=1/u$ .

**Коэффициент трансформации**  $K$  представляет собой отношение потенциала на выходе трансформаторного элемента к потенциалу на его входе. Для зубчатой передачи

$$K = M_2 / M_1. \quad (3.35)$$

КПД трансформаторного элемента выражаются через его передаточное число и коэффициент трансформации:

$$\eta = |K / u|. \quad (3.36)$$

Формулы для определения параметров ТЭ другой физической природы аналогичны; меняются обозначения фазовых переменных в соответствии с табл. 3.2.

Для формирования математической модели объектов с ТЭ используется структурно-матричный метод.

**Пример.** Механическая вращательная система с двумя зубчатыми передачами имеет вид, представленный на рис. 3.8, а. Сосредоточенная масса с моментом инерции  $J_1$  связана с двигателем, а масса  $J_2$  – с рабочим органом машины. Каждая зубчатая передача рассматривается как ТЭ. Промежуточный вал, связывающий ТЭ<sub>11</sub> и ТЭ<sub>21</sub>, имеет жёсткость  $c_1$  и диссипацию  $\mu_1$ .

Система с ТЭ может изображаться орграфом (рис. 3.8, б). Узлами орграфа являются две сосредоточенные массы  $J_1$  и  $J_2$ ; ветви отображают потенциалы  $M_{B1}$  и  $M_{B2}$ , воздействующие на узлы. ТЭ на орграфе невозможно отобразить в виде ветви, так как у него два входа и выхода. Поэтому расположение трансформаторных элементов на орграфе отмечают выносными линиями, проведенными от узлов  $i$  к ветвям  $j$ , которые взаимодействуют посредством ТЭ.

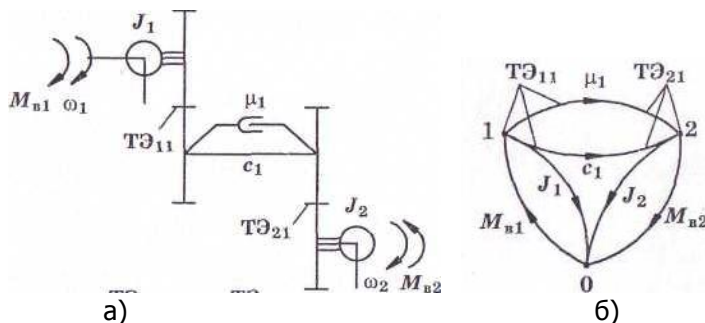


Рис. 3.8. Динамическая модель механической вращательной системы с двумя зубчатыми передачами (а) и ее орграф (б)

Информация о структуре орграфа с механическими трансформаторными элементами дается двумя матрицами: матрицей инцидентий  $A$  без учёта ТЭ и матрицей ТЭ [1, п. 5.2]. Матрица ТЭ показывает соединение ветвей орграфа с узлами, имеющими ТЭ. В ней фигурируют лишь упругие и диссипативные элементы. Матрицы можно объединять, дополняя матрицу инцидентий  $A$  столбцами матрицы ТЭ. Для орграфа на рис. 3.8, б получаем:

Узлы	Ветви					
	МВ <sub>1</sub>	МВ <sub>2</sub>	С <sub>1</sub>	μ <sub>1</sub>	С <sub>1</sub>	μ <sub>1</sub>
1	1	0	-1	-1	1	1
2	0	-1	1	1	1	1
Подматрицы	A <sub>B</sub>		A <sub>γ</sub>	A <sub>д</sub>	TЭ <sub>1</sub>	TЭ <sub>2</sub>

Уравнения модели строим по строкам матрицы инцидентий, используя правило (3.21):

$$\begin{aligned}
 J_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= \left[ M_{B1} - \frac{M_{y1} + M_{d1}}{u_1 \eta_1^{R1}} \right]; \\
 J_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= \left[ -M_{B2} + (M_{y1} + M_{d1}) u_2 \eta_2^{R1} \right], \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

где  $u$ ,  $\eta$  – передаточные числа и КПД соответствующих ТЭ;  $M_y$ ,  $M_d$  – моменты от упругого и диссипативного элемента.

В ветвях потенциала крутящие моменты умножаются на коэффициенты трансформации, а в ветвях диссипации – делятся.

В учебнике [1, п. 5.2] приводятся универсальные выражения уравнений системы с ТЭ (5.25 – 5.27) для любого числа упругих и трансформаторных элементов. Формула имеет сложное правило учёта знаков потенциалов и скоростей.

### 3.6.2. Учёт сложного движения

Сложное движение – движение тела, сочетающее поступательное и вращательное движение. По правилам механики его можно разложить на две составляющие: переносное поступательное вместе с полюсом  $O$  и относительное сферическое вокруг полюса. Скорость  $i$  – ой точки тела  $V_i$  тогда:

$$V_i = V_o + V_{Qi}, \quad (3.38)$$

где  $V_o$  – вектор скорости полюса;  $V_{Qi}$  – вектор скорости относительного сферического движения.

Скорость  $V_{Qi}$  может определяться через углы Эйлера или векторным произведением [1, с. 174]. Однако пользоваться ими при вычислениях неудобно. Целесообразно использовать для определения скорости сложного движения матричное уравнение:

$$V_i = \Omega r_i, \quad (3.39)$$

где  $r_i$  – радиус-вектор точки в подвижной системе координат;  $\Omega$  – кососимметричная матрица:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Элементы матрицы  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  представляют угловые квазискорости сферического движения тела вокруг соответствующей координатной оси и имеют традиционные названия: скорости крена, тангажа и рыскания соответственно.

Развёрнутое выражение (3.39) определяет проекции вектора скорости  $i$ -ой точки на оси координат в сферическом движении тела:

$$\begin{aligned} V_{xi} &= \omega_y Z_i - \omega_z Y_i; \\ V_{yi} &= \omega_z X_i - \omega_x Z_i; \\ V_{zi} &= \omega_x Y_i - \omega_y X_i. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Выражения получены в 1765 г. Эйлером и носят его имя.

Динамическая модель тела, совершающего сложное движение, включает компонентные уравнения инерционных, упругих и диссипативных элементов (см. табл. 3.3) и уравнения Эйлера (3.41) по соответствующим осям координат.

### 3.6.3. Учёт нелинейностей системы

Математические модели, созданные на основе простых компонентных уравнений, являются линейными. Их следует считать идеализацией реальных ТС, поскольку большинство их нелинейно.

Нелинейности по степени влияния на результаты делят на **не-**

**существенные и существенные.**

**Несущественные нелинейности** это те, которыми можно пренебречь без заметного искажения функционирования объекта.

**Существенные нелинейности** это те, которыми нельзя пренебречь, так как это может привести к недопустимому искажению результатов моделирования. В этом случае для обеспечения адекватности линейную ММ следует усовершенствовать учётом нелинейностей, превратить линейную ММ в нелинейную.

Существуют два способа учёта нелинейностей: добавление в линейные уравнения нелинейных элементов или добавление нелинейных связей в систему линейных уравнений [1, гл. 6].

**Нелинейные элементы (НЭ).** Элемент относится к нелинейным, если в его компонентном уравнении переменные  $\bar{I}(t)$ ,  $\bar{U}(t)$  и их производные связаны нелинейной зависимостью  $\psi_{\text{нел}}$ .

Общая форма записи:

$$\bar{U}(t) = \psi_{\text{нел}}[\bar{I}, d\bar{I}/dt, d^2\bar{I}/dt^2, \dots, t]. \quad (3.42)$$

НЭ называется **динамическим**, если в уравнение (3.42) входят и фазовые переменные, и их производные. НЭ называется **статическим**, если его уравнение не содержит производных от фазовых координат.

Если функция  $\psi_{\text{нел}}$  не зависит от времени, НЭ является **стационарным**, в противном случае – **нестационарным**.

Простые НЭ, содержащие производные не выше первых, называют **безинерционными**. Уравнение (3.42) для безинерционного НЭ упрощается:

$$y = f(x). \quad (3.43)$$

Общая динамическая модель существенных НЭ (3.42) сложна для практического пользования. Рациональным приёмом учёта нелинейностей при моделировании ТС является разделение нелинейной характеристики  $\psi_{\text{нел}}$  на линейную динамическую часть  $\psi_{\text{лин}}$  и нелинейную безынерционную связь  $y(x)$ , концентрирующую все нелинейные свойства модели:

$$\psi_{\text{нел}} = \psi_{\text{лин}}[\bar{I}, d\bar{I}/dt, d^2\bar{I}/dt^2, \dots, t] * y(x). \quad (3.44)$$

Виды нелинейных характеристик  $y(x)$  безинерционных элементов можно разделить на группы (рис. 3.9): непрерывные и разрывные, симметричные и несимметричные, однозначные и неоднозначные, гладкие и с изломами (кусочно-линейные).

У **однозначного НЭ** выходная координата  $y$  зависит только от значений входной координаты  $x$ , а у **неоднозначного** – не только от  $x$  в данный момент времени, но и от знака первой производной; поэтому его относят к динамическим.

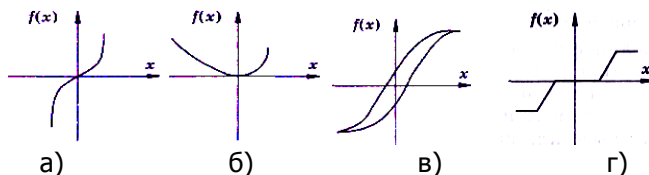


Рис. 3.9. Виды безинерционных нелинейных характеристик: непрерывные (а, б – гладкие; г – с изломами); симметричные (а, г); несимметричные (б, д); однозначные (а б, г); неоднозначные (в);

Нелинейные свойства наиболее характерны для упругих и диссипативных элементов технической системы.

Учёт нелинейностей приводит к добавлению в структурную схему безинерционных нелинейных звеньев или связей подходящего типа. Их математическое описание обычно проводится двумя способами:

а) аналитические уравнения для однозначных непрерывных нелинейностей типа  $y=f(x)$ ; для неоднозначных добавляется слагаемые типа  $\text{sign } \dot{x}$ , и уравнение НЭ становится

$$y=f(x, \dot{x}); \quad (3.45)$$

в) кусочно-линейная аппроксимация.

Наиболее удобны для ММ так **называемые типовые нелинейности** с кусочно-линейными характеристиками (рис. 3.10). Они хорошо изучены; их описания, параметры аппроксимации и линеаризации приводятся в справочниках. Математические описания для разных типовых нелинейностей приведены в [1, с. 230-231].

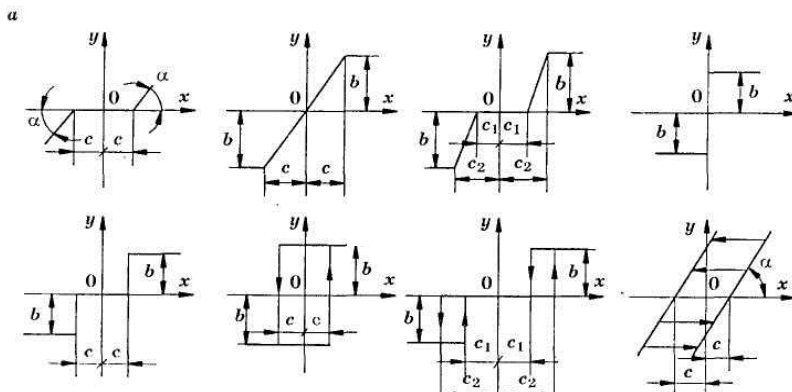


Рис. 3.10. Типовые нелинейности: а – зона нечувствительности; б – зона насыщения; в – зона нечувствительности и зона насыщения; г – идеальный релейный; д – идеальный релейный с зоной нечувствительности; е – релейный с гистерезисом; ж – с гистерезисом и зоной нечувствительности; з – люфт, зазор или сухое трение

Пример математического описания НЭ с кусочно-линейной аппроксимации для НЭ: *зона нечувствительности и зона насыщения* (рис. 3.10, в):

$$\begin{aligned}
 y &= -b && \text{при } x \leq -c_2; \\
 y &= k(x + c_1) && \text{при } -c_2 < x < -c_1; \\
 y &= 0 && \text{при } |x| \leq c_1; \\
 y &= k(x - c_1) && \text{при } c_1 < x < c_2; \\
 y &= b && \text{при } x \geq c_2,
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

где  $k = b / (c_2 - c_1)$ .

Кусочно-линейная характеристика позволяет рассматривать модель на каждом интервале как линейную. Конечное состояние на границе предыдущего участка служит начальными условиями для последующего участка. Пример – модель гасителя колебаний в трансмиссии мобильных машин [1, с. 284-285].

После учёта нелинейностей модель состояния примет вид

$$d\bar{U}/dt = F(\bar{U}) + B\bar{X}, \quad (3.47)$$

где  $F(\bar{U})$  – нелинейный функционал.

#### 3.6.4. Учёт ограничений и связей

Движение элементов технической системы не может быть беспредельным; их взаимные перемещения в пространстве ограничены. Ограничения на изменения геометрических координат и скоростей движения элементов системы называют связями. Связь может накладываться внешняя среда либо другие сосредоточенные массы, взаимодействующие с данной массой [1, п. 6.4].

Связи учитываются добавлением в ММ уравнений связи вида

$$f(\bar{X}, \dot{\bar{X}}, t) \leq 0, \quad (3.48)$$

где  $\bar{X}$  – вектор координат, определяющих положение всех элементов ТС в пространстве;  $\dot{\bar{X}}$  – вектор скоростей этих элементов;  $t$  – время.

Различают связи: **геометрические (позиционные) и кинематические; удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние); стационарные и нестационарные; голономные и неголономные.**

Связь называют **нестационарной**, если уравнение связи содержит явно время  $t$ . В противном случае связь **стационарная**.

Связь называется **удерживающей**, если в выражении (3.48) стоит знак равенства, и **неудерживающей**, если стоит знак неравенства.

Неудерживающие связи, которые в процессе функционирования технического объекта могут возникать и исчезать, называются **виртуальными**. На рис. 3.11 приведена динамическая модель двухмассовой механической системы с виртуальными связями. Система в целом линейная, имеет две массы и две степени свободы. Но перемещение массы  $m_2$  **ограничено** пределами  $0 < x_2 < L_{2k}$ . При нарушении этого неравенства возникает виртуальная связь от внешней среды, и система лишается одной степени свободы, превращается в нелинейную; ММ изменяет свою структуру.



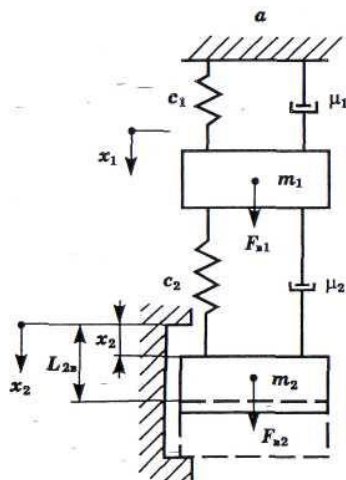


Рис. 3.11. Схема механической системы с виртуальной связью

Моделирование таких систем использует приёмы описания объектов переменной структуры [см. 1, п. 3.5, пример 3.6].

Связь, накладывающая ограничения только на геометрические координаты сосредоточенной массы ТС, называется **позиционной** или **голономной**. Уравнение её имеет вид:

$$f(\vec{X}, t) = 0. \quad (3.49)$$

Связь, накладывающая ограничения и на геометрические координаты, и на скорость сосредоточенной массы, называется **кинематической**; описывается уравнением вида (3.48).

Если уравнение кинематической связи элементов системы нельзя интегрированием привести к виду (3.49), то такая связь называется **неголономной** или **неинтегрируемой**. Система, имеющая неголономные связи, называется также неголономной.

При расчётах технических систем обычно ограничиваются линейными уравнениями неголономных связей:

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \dot{q}_i + b_k = 0, \quad k=1, N, \quad i = 1, n, \quad (3.50)$$

где  $\dot{q}_i$  - обобщенные скорости;  $n$  - число обобщённых координат;  $N$  - число линейных связей;  $a_{ki}$ ,  $b_k$  - коэффициенты уравнений. Число степеней свободы системы будет равно  $s = n - N$ .

Неголономные системы распространены в НТТС. В качестве примеров можно назвать качение тел по плоской поверхности, работу ремённых передач. Классическим примером неголономной

системы является автомобильное или тракторное колесо с эластичной шиной при его качении по поверхности дороги.

### 3.7. Упрощение математических моделей макроуровня

Распространены следующие способы упрощения: линеаризация, снижение жёсткости системы, сокращение диапазона частот [1, гл. 7].

**Линеаризация гладких нелинейностей.** Нелинейная математическая модель технического объекта в нормальной форме Коши (3.48), имеющая гладкую нелинейность  $F(\bar{U})$ , может быть линеаризована разложением нелинейной функции  $F(\bar{U})$  в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки  $\bar{U}_0$ :

$$F(\bar{U}) = F(\bar{U}_0) + \frac{\partial \bar{F}(\bar{U}_0)}{\partial \bar{U}} \bar{u} + \frac{1}{2} \bar{u}^T \frac{\partial^2 \bar{F}(\bar{U}_0)}{\partial \bar{U}^2} \bar{u} + \dots, \quad (3.51)$$

где  $\bar{u} = (\bar{U} - \bar{U}_0)$  – вектор приращений фазовых координат от точки с координатами  $\bar{U}_0$ .

Удерживая члены не выше первого порядка, получаем линейное уравнение в приращениях:

$$d\bar{u}/dt = J \bar{u} + B \bar{X}, \quad (3.52)$$

где  $J = \frac{\partial \bar{F}(\bar{U}_0)}{\partial \bar{U}}$  – квадратная матрица коэффициентов линеаризации порядка  $n \times n$ , называемая матрицей Якоби.

Элементами матрицы Якоби являются частные производные от нелинейной вектор-функции  $F(\bar{U}) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ :

$$J_{jk} = \partial f_j / \partial u_k. \quad (3.53)$$

Матрица Якоби играет роль матрицы  $A$  в линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (3.25) и характеризует важнейшие свойства системы.

**Линеаризация разрывных нелинейностей.** Для линеаризации разрывных нелинейностей  $F(\bar{U})$  применим метод статистической линеаризации. Случайную функцию  $\bar{U}(t)$  представляют в виде

$$\bar{U}(t) = \bar{U}_m + \bar{u}, \quad (3.54)$$

где  $\bar{U}_m$  – математическое ожидание функции;  $\bar{u}$  – центрированные значения функции (колебания вокруг среднего).

Нелинейная функция выражается через эти составляющие:

$$F(\vec{U}) = F(\vec{U}_m) + K(\vec{U}_m) \vec{U}, \quad (3.55)$$

где  $K(\vec{U}_m)$  – матрица коэффициентов линеаризации. Для всех типовых нелинейностей она приводится в справочной литературе.

Снижение жёсткости модели – способ уменьшения числа степеней свободы моделируемой системы, а значит, и числа уравнений модели.

Оценкой жесткости системы дифференциальных уравнений является число обусловленности матрицы Якоби  $\mu$ , представляющее в общем случае отношение каких-либо норм матрицы  $J$ .

В технических системах под числом обусловленности  $\mu$  обычно понимают отношение максимального и минимального модулей собственных значений матрицы Якоби:

$$\mu = \max\{|\lambda_k|\} / \min\{|\lambda_k|\}; \quad k \in [1 : n]. \quad (3.56)$$

Собственными значениями матрицы  $J$  порядка  $n$  называют корни её характеристического уравнения  $\lambda_k$ ,  $k = 1, n$ ,

$$\det(J - \lambda E) = 0, \quad (3.57)$$

где  $\det$  – символ определителя матрицы;  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Множество собственных значений  $\lambda_k$ ,  $k = 1, n$  называется спектром матрицы Якоби.

Жесткой системой обыкновенных дифференциальных уравнений называют такую систему, у которой число обусловленности  $\mu > 10^5$ . Модули собственных значений, различающиеся на несколько порядков, делают систему плохо обусловленной. Стремление проектировщиков учитывать как можно большее количество факторов зачастую приводит к необоснованно широкому спектру резонансных частот динамической модели объекта, причем высшие из них могут практически не влиять на характеристики исследуемых процессов. Такую модель следует признать чрезмерно подробной и необоснованно усложнённой.

Поэтому после построения ММ необходимо провести анализ спектра матрицы Якоби, сравнить получаемые резонансные частоты с частотами внешних воздействий и в случае значительного превышения первых над вторыми осуществить упрощение динамической модели объекта.

Упрощение проводится разделением технической системы на части с существенно различными физическими свойствами. У однородных процессов части с высокими собственными частотами можно исключить, устранив лишние степени свободы. Разнородные части можно интегрировать отдельно. В любом случае порядок модели снижается, что кардинально упрощает решение и



анализ.

## ЧАСТЬ 4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 4.1. Вероятностные представления явлений

В окружающем нас мире все явления взаимно связаны и влияют друг на друга (закон всеобщей связи явлений). Поэтому каждый наблюдаемый процесс связан причинной зависимостью и зависит от бесчисленного множества факторов. Проследить все это множество связей принципиально невозможно. При моделировании процессов исследователь обычно ограничивается лишь основными факторами  $\bar{X}$  и пренебрегает большим количеством второстепенных, неконтролируемых факторов  $\bar{Z}$  (рис. 4.1). Неконтролируемые факторы в реальном процессе вызывают необъяснимые и непредсказуемые по упрощённой модели отклонения фазовых координат (результата, исхода)  $\bar{Y}_S$  на выходе.

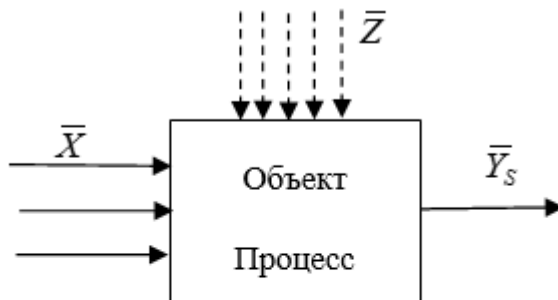


Рис. 4.1. Факторная модель реального процесса:

$\bar{X}$  – вектор входных учитываемых факторов;

$\bar{Z}$  – вектор входных неучитываемых факторов;

$\bar{Y}_S$  – результат с непредсказуемыми отклонениями

Значительные непредсказуемые отклонения делают модель неадекватной, непригодной или недостаточно точной. Такую модель надо переделать. Но во многих случаях непредсказуемые отклонения носят характер небольших колебаний (флуктуаций), терпимых для моделировщика. В этом случае всякие непредсказуемые колебания процесса от модельных значений принято считать случайностями.

Наличие случайностей в модели означает, что она может отображать, предсказывать процесс с некоторой вероятностью. Поэтому такая модель считается вероятностной.

В вероятностной модели случайностями могут обладать входные факторы (воздействия)  $X_s$  или параметры самой модели  $p_s$  (рис. 4.2). Результат  $Y_s$  (исход, фазовые координаты) случаен всегда.

Вероятностная модель со случайными воздействиями  $X_s$  называется статистической.

Вероятностная модель со случайными параметрами  $p_s$  называется стохастической.

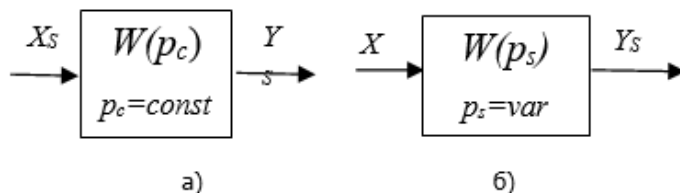


Рис. 4.2. Вероятностные модели: а – статистическая; б – стохастическая;  $X_s$  – случайные факторы (воздействия),  $Y_s$  – случайный процесс

Изучением теории и закономерностей вероятностного моделирования занимается особая математическая наука – теория вероятностей [Г. Корн, 1975]. В настоящее время она включает: определения вероятностей, алгебру и событийную логику, распределения одномерные, многомерные и специальные, условия сходимости и предельные теоремы, функции от случайных величин, теорию случайных процессов и действия над ними.

Случайности в современной теории вероятностей представлены в разных видах: случайными событиями, случайными явлениями, случайными функциями, случайными процессами.

**Случайное событие** – любой факт (исход, результат), который может появиться или не появиться в процессе опыта и оценивается по типу "был – не был". Количественная мера возможности наступления случайного события называется вероятностью. Вероятность  $P$  события  $A$  определяется в теории как предел отношения числа совершившихся событий  $n_A$  к числу опытов  $N$  при их стремлении к бесконечности:

$$P(A) = n_A/N \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Такое определение вероятности события несколько архаично; оно привязано к опытам (повторностям); в нём не учитывается величина, время протекания и смены события; оно больше подходит к игровой ситуации "орёл-решка". Это объясняется услови-

ями зарождения теории вероятностей в европейской культуре в середине XVII столетия (труды Гюйгенса, Паскаля, Ферма и Бернулли), когда теория обслуживала азартные игры в карты, кости и пр. Последующее развитие теории вероятностей в трудах Лапласа, Гаусса и Пуассона, П.Л. Чебышева, А.А. Маркова и А.М. Ляпунова показало, что вероятностные эффекты распространяются на более широкий круг явлений: случайные величины, случайные функции, случайные процессы.

**Случайная величина** – это величина, значение которой подвержено неконтролируемому разбросу при повторениях данного опыта. Например, диаметр и высота стеблей растений, масса колоса, масса прессованных тюков, твёрдость и влажность почвы в разных точках поля, глубина хода рабочего органа в разных точках борозды, высота среза стерни и другие величины, не являющиеся функциями.

Случайные величины принято обозначать большими латинскими буквами (например,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), а их числовые значения – малыми:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тогда реализации случайной величины будут представлять числовые ряды  $X=[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$ .

Понятия случайных событий и величин связаны: каждое случайное событие помечается значениями случайной величины  $X$ ., Например, результат измерения толщин стеблей растений на участке поля. Поэтому для случайных величин приняты те же понятия вероятностей, как и для классических случайных событий [16].

Случайные величины могут принимать непрерывные или дискретные значения.

Случайная величина непрерывна, если область всех возможных ее значений непрерывна (например, усилие на крюке трактора, высота неровностей поля и т. п.).

Случайная величина дискретна, если ее значения изменяются ступенями и не могут отличаться друг от друга меньше, чем на некоторую величину (количество отказов техники, количество семян на единицу площади и т.п.).

**Случайной функцией**  $X(y)$  называется такая функция  $X$  от параметра  $y$ , значение которой при каждом данном значении аргумента является случайной величиной. Определение связывают случайную функцию со случайной величиной. Поэтому для случайных функций можно использовать понятия вероятностей, аналогичные для случайных величин и событий (4.1). Но в отличие от числовых характеристик случайных величин вероятности случайных функций  $P$  будут неслучайными функциями  $P(S)$ .

Конкретные значения, принимаемые случайной функцией в результате опыта, называются **реализацией случайной функции**, а все полученные реализации данной случайной функции составляют **семейство или ансамбль реализаций** случайного процесса (рис. 4.3), включающего реализации  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ , где  $N$  – число опытов.

**Случайный процесс** в литературе определяется по-разному. В теории вероятностей случайный процесс — это случайная функция  $Y(t)$ , аргументом которой является время  $t$  [16]. Определение не делает разницы между входами и выходами вероятностной модели и не соответствуют модельной терминологии технических систем.

В моделях технических систем переменные на выходе модели считаются фазовыми координатами, определяющими состояние системы. Поэтому более приемлемо определение случайного процесса из БСЭ. Согласно ей любая процесс – это изменение во времени состояния некоторой системы в зависимости от случая" (например, броуновское движение). Поскольку состояние системы в технике определяют фазовые координаты, то случайный процесс – это случайные изменения фазовых координат системы во времени. Входные переменные в определении не участвуют.

В СХП случайными являются естественные процессы (например, рост растений, привесы животных и т.п.), а также многие производственные процессы, сопровождающиеся случайными флуктуациями фазовых координат (взаимодействие рабочего органа со средами, процессы обработки почвы, резания, измельчения, дробления, сепарации, орошения и т.п.) .

Классификация случайных процессов проводится по характеру изменений значений фазовых координат и времени. Характер изменения входной переменной не учитывается [1, гл. 10].

Если значения и время непрерывны, то случайный процесс считается **непрерывным**.

Если множество состояний, в которых может находиться процесс, счётное (они могут быть пронумерованы), то такой процесс называется **дискретным**. Различают:

- **дискретнозначный процесс**, у которого дискретной является только область значений, а время непрерывно;
- **случайная последовательность** – процесс, у которого дискретным является только время; название подчеркивает, что при формировании множества состояний переставлять их нельзя;
- **дискретная случайная последовательность** – процесс, у которого дискретны и область значений, и область определения



(время).

Конкретные значения, принимаемые случайным процессом в результате опыта, называют **реализацией случайного процесса**, а все полученные реализации данной случайной функции составляют **семейство или ансамбль реализаций** случайного процесса (рис. 4.3), включающий реализации  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , где  $N$  – число опытов.

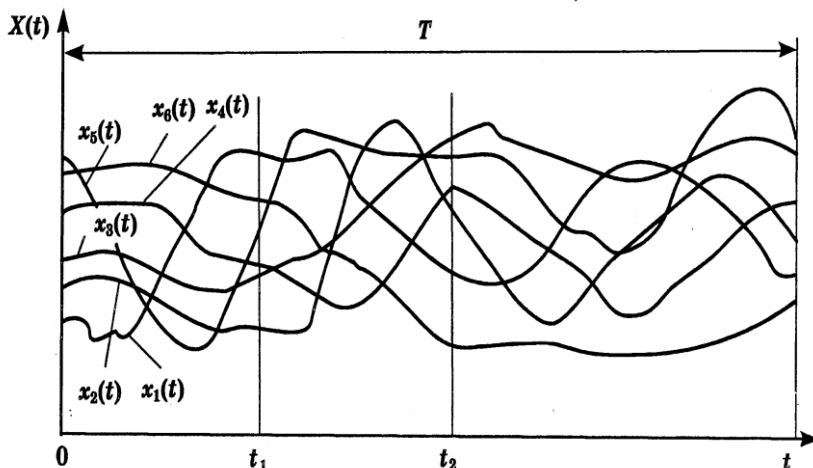


Рис. 4.3. Ансамбль реализаций случайного процесса

Реализации  $x_i(t)$ ,  $i=1, N$  можно получить проведением опыта одновременно на нескольких одинаковых объектах или проведением нескольких опытов на одном объекте с одинаковыми условиями, что для СХП имеет проблемы.

От реализаций случайного процесса можно перейти к реализациям случайной функции заменой временной переменной  $t$  на переменный параметр  $S$ . Например, результат измерения неровностей поля на определенном отрезке является реализацией случайной функции  $Y(S)$ . Те же измерения при замене переменной  $S=Vt$  будут реализациями случайного процесса  $Y(t)$ . Обратная замена  $t=S/V$  переводит случайный процесс в случайную функцию.

Сечение ансамбля реализаций в момент  $t_i$  превращает случайный процесс в  $N$  значений случайной величины  $Y_1=[y_1, y_2, \dots, y_M]$  на интервале  $(0, T)$ . Тем самым, случайный процесс совмещает в себе черты случайной функции и случайной величины. Это позволяет использовать при его описании те же характеристики, что и для случайных величин.

## 4.2. Моделирование случайных величин

Случайная величина переменчива, может принимать множество разных значений. Реализации случайных величин представляют громоздкие массивы чисел, неудобные для исследователя. Для решения этой проблемы применяются приёмы моделирования – замены сложного явления упрощённым, но сохраняющим главные свойства объекта. Громоздкие реализации случайных величин моделирование заменяет некими компактными и неслучайными показателями – характеристиками.

Обоснование неслучайных характеристик случайных величин составляет основную парадигму теории вероятностей. Следуя ей, теория вероятностей излагает определения, теоремы и закономерности случайных явлений, но делает это сугубо теоретически, оперирует теоретическими вероятностями как аксиомами. Их методы получения не приводятся. Это затрудняет использование теории для решения практических задач.

Широкое внедрение теории вероятностей в практику измерений и обработки результатов опытов требовало разработки таких методик обработки экспериментальных данных, которые превращали бы массивы случайных чисел в неслучайные характеристики к тому же по ограниченным выборкам данных.

Для решения этих проблем создана математическая статистика – наука по обоснованию и использованию т. н. статистик – неслучайных характеристик случайностей по ограниченным выборкам. Вначале она была прикладным разделом теории вероятностей, но по мере развития стала самостоятельной.

Современная математическая статистика содержит статистические описания выборок, статистики и выборочные распределения, типовые распределения, их связи с теоретическими, методики проверки статистических гипотез, статистики случайных процессов и стохастических систем [25].

Процедуры математической статистики по замене хаотического процесса неслучайными характеристиками являются типичным моделированием.

На практике построение моделей случайных величин связано с процедурами создания выборок [8].

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов по какому-либо признаку (например, высота колоса пшеницы на поле). Можно провести на нём **сплошное обследование**, т.е. обследовать каждый объект совокупности и получить т. н. *генеральную совокупность*.

На практике, однако, сплошное обследование трудоёмко, а иногда физически невозможно или связано с уничтожением объекта. Например, измерение длины корня растения. Выход найден простой – отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов (выборку) и подвергают их изучению.

**Выборочной совокупностью** или просто выборкой называют совокупность отобранных объектов.

Для того чтобы по данным выборки можно было уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно представляли её пропорции. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть **репрезентативной (представительной)**.

**Объемом совокупности** (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 стеблей отобрано для обследования 100, то объем генеральной совокупности  $N=1000$ , а объем выборки  $n=100$ .

Переход от генеральной совокупности к выборке, снижая трудоёмкость получения и обработки данных, вызывает существенную потерю информации. Процедура перехода от генеральной совокупности к выборочной слабо формализована, не нормирована и имеет много вариантов: простой случайный отбор, типический отбор, механический отбор, серийный отбор и др. [См. Ю.И. Ермолев, 2013].

В итоге после формирования выборок получаем случайную величину  $X$  с  $n$  возможными значениями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Каждое из этих значений может быть получено с некоторой вероятностью  $p$ .

$$P(X=x_i)=p_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Случайная величина будет полностью описана, если будет указано, какой вероятностью обладает каждое из событий. Правило установления вероятности событий устанавливает закон распределения случайной величины.

**Закон распределения случайной величины** – всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчинена данному закону распределения.

Простейшей формой задания такого закона является табличная, при которой перечисляются возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Такую таблицу называют **рядом распределения** случайной величины  $X$ .

Другой способ – графический: по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины  $x_i$ , а по оси ординат – вероятности этих значений  $p_i$  (рис. 4.4, а). Полученная фигура называется **многоугольником распределения**. Значения  $p_i$  на таком графике называют **относительными частотами событий**.

В литературе зависимость  $P(X=x_i)=p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  часто изображают в виде гистограммы (рис. 4.4, б).

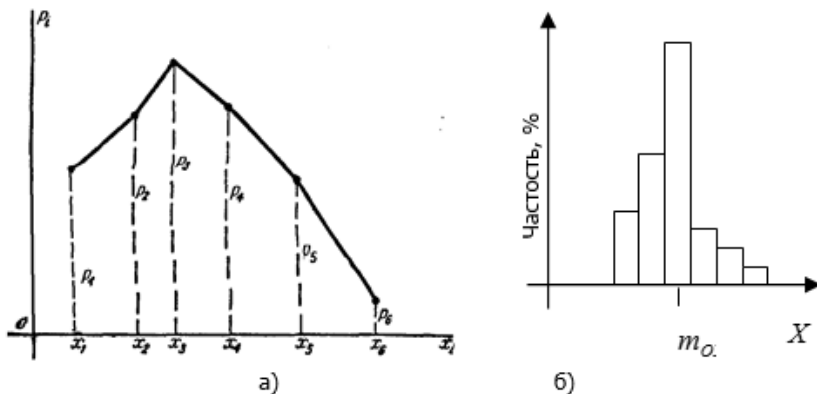


Рис.4.4. Многоугольник распределения

Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (4.3)$$

Но в теории вероятностей представление вероятности как события  $X=x$  в форме (4.2) не получило распространения. Теория вероятностей оперирует вероятностью события  $X < x$ , когда величина будет меньше некоторого значения  $x$  – текущая переменная.

Вероятность события  $X < x$  в зависимости от  $x$  называется **функцией распределения** случайной величины  $X$  и обозначается

$$F(x) = P(X < x). \quad (4.4)$$

Функцию распределения  $F(x)$  иногда называют **интегральной**

**функцией распределения или интегральным законом распределения.** Она самая универсальная характеристика случайной величины, существует для всех величин: как прерывных, так и непрерывных. График функции распределения  $F(x)$  представляет собой неубывающую функцию (рис.4.5), заключённую между нулем и единицей:  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

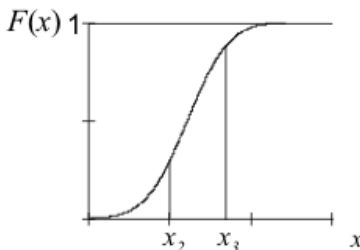


Рис. 4.5. График функции распределения  $F(x)$

В отдельных точках  $F(x)$  может иметь скачки (разрывы).

Графики функций распределения  $F(x)$  визуально трудноразличимы. Поэтому их принято характеризовать параметрами, в качестве которых популярны квантили и медианы.

**Квантилем порядка  $P$**  называют такое значение случайной величины  $X_p$ , при котором функция распределения принимает значение, равное заданному уровню вероятности  $P$  (рис.4. 6, а).

**Медианой  $M_e$**  распределения называют квантиль, отвечающий значению  $p=1/2$  (рис.4.6, б).

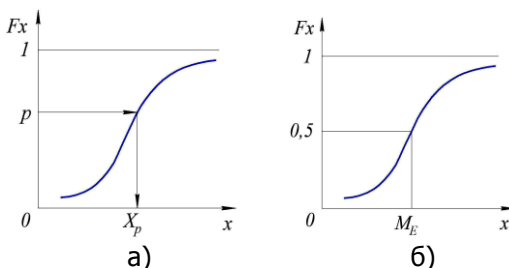


Рис.4.6. Параметры графика функции распределения:

а – квантиль  $X_p$  ; б – медиана  $M_e$  для уровня вероятности  $p=0,5$

Производная функции распределения  $F(x)$  называется **плотностью распределения  $f(x)$  (или плотностью вероятности)** случайной величины  $X$ .

$$f(x) = dF(x) / dx. \quad (4.5)$$

Иногда функцию  $f(x)$  называют «дифференциальной функцией распределения» или «дифференциальным законом распределения» величины  $X$ .

Вероятность того, что результат измерения  $x$  будет находиться в интервале  $(x_2, x_3)$ , записывается так:

$$P(x_2 < x < x_3) = \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = F(x_3) - F(x_2) \quad (4.6)$$

График плотности распределения обычно имеет один максимум (рис. 4.7) – унитодальность.

Значение случайной величины, при котором  $f(x)$  достигает максимума, называется *модой непрерывного распределения*. Если максимумов два, то распределение называется *двумодальным*, если три – то *трехмодальным* и т.д.

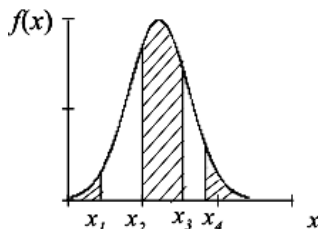


Рис. 4.7. График плотности распределения

Плотность распределения связана с функцией распределения интегральной зависимостью

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (4.7)$$

Геометрически  $F(x)$  есть площадь кривой плотности распределения, лежащая левее точки  $x$  (рис. 4.8).

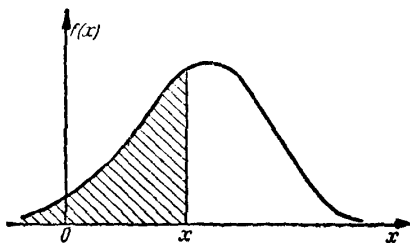


Рис.4.8. Геометрическое представление функции распределения  $F(x)$

Графические модели вероятностных характеристик наглядны, но неточны, не дают точных количественных показателей. Для их получения **применяют числовые характеристики случайных величин.**

В числовых характеристиках наибольшее распространение получили **моменты распределения вероятностей.** Их получают путём возведения значений случайных величин в степень, называемую порядком этого момента.

Моменты бывают начальные и центральные.

Начальный момент  $k$ -го порядка непрерывной случайной величины  $X$  получают усреднением степеней исходных неприглаженных данных по формуле

$$m_k(x) = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx. \quad (4.8)$$

Из начальных моментов широкое применение нашёл момент первого порядка ( $k = 1$ ), обозначаемый обычно  $m_x$  и называемый **математическим ожиданием случайной величины  $X$ ,**

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (4.9)$$

Отклонение случайной величины от ее математического ожидания называют *центрированной случайной величиной  $\dot{X}$ ,*

$$\dot{X} = X - m_x. \quad (4.10)$$

Для центрированных случайных величин  $\dot{X}$  центральные моментные функции  $\mu_k(x)$   $k$ -го порядка определяют по выражениям:

$$\mu_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx. \quad (4.11)$$

Важное значение в статистике имеют центральные моменты второго порядка: дисперсия и среднеквадратичное отклонение.

*Дисперсия* характеризует энергию разброса случайной величины:

$$D = \int (x - M)^2 f(x) dx. \quad (4.12)$$

*Среднеквадратическое отклонение* (СКО) характеризуют рассеяние случайной величины относительно математического ожидания

$$\sigma = \sqrt{D}. \quad (4.13)$$

СКО иногда называют стандартом случайной величины.

В качестве меры взаимозависимости случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  используют безразмерный коэффициент **корреляции**

$$\rho_{x_1x_2} = \frac{K_{x_1x_2}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}, \quad (4.14)$$

где  $K_{x_1x_2}$  – смешанный центральный момент второго порядка двух случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , называемый *корреляционным моментом*:

$$K_{x_1x_2} = \mu_{11}(\dot{X}_1, \dot{X}_2) = M[\dot{X}_1, \dot{X}_2]. \quad (4.15)$$

Коэффициент корреляции может принимать значения в диапазоне  $-1 \leq \rho_{x_1x_2} \leq 1$ . Он определяет характер линейной связи между  $X_1$  и  $X_2$ . При  $\rho_{x_1x_2} > 0$  увеличение одной из случайных величин приводит к возрастанию другой, а при отрицательном  $\rho_{x_1x_2}$  – к уменьшению. При  $\rho_{x_1x_2} = 0$  случайные величины некоррелированы. Обратное утверждение в общем случае неверно, особенно если связь нелинейная. Если  $\rho_{x_1x_2} = 1$ , то  $X_1$  и  $X_2$  линейно связаны, т. е.  $X_2 = aX_1 + b$ .

Третий и четвертый центральные моменты используются как характеристики графиков распределения вероятностей.

Третий центральный момент  $\mu_3(x)$  определяет асимметрию графика характеристики распределения, показателем которой служит **коэффициент асимметрии**

$$K_A = \mu_3(x) / \sigma_x^3. \quad (4.16)$$

**Коэффициент эксцесса** характеризует степень острровершинности графика плотности распределения (4.6) и выражается через центральный момент четвёртого порядка:

$$\varepsilon = \mu_4(x) / \sigma_x^4. \quad (4.17)$$

Математическая статистика использует числовые характеристики случайных величин на конечных выборках, называемые **статистиками**. Главное требование к ним – статистическая устойчивость, под которой понимается возрастание точности статистик с возрастанием объема выборки. Большинство физических процессов в СХП являются статистически устойчивыми.

В выражениях для моментов дискретной функции на конечных выборках интегрирование заменяется суммированием. Момент первого порядка для выборки из  $n$  начальных значений случайной величины  $X$  даёт среднее **арифметическое**:

$$m_c = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n}. \quad (4.18)$$

Центральный момент второго порядка – дисперсия  $D$ :

$$D = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i - X_c)^2}{n-1}. \quad (4.19)$$

Среднее линейное отклонение



$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m_x|}{n}. \quad (4.20)$$

Размах – разность между наибольшими и наименьшими значениями  $x_i$  случайной величины  $X$ .

В качестве относительной меры рассеивания используют коэффициент вариации  $v_x$ , в процентах:

$$v_x = \sigma_x / m_x * 100\%. \quad (4.21)$$

Числовые величины оказались удобными показателями характеристик распределения случайных величин. Их несложно получать по результатам испытаний или в процессе эксплуатации машин; в этом случае их называют статистическими оценками. Достоинство числовых показателей характеристик – простота и малая трудоёмкость получения. Недостаток – малый объём информации: точечные оценки не могут описать весь закон распределения.

Более информативны функции  $F(x)$  и плотности  $f(x)$  распределения, представляющие аналитические зависимости.

В силу исторических обстоятельств базовыми моделями оказались модели случайных величин. Модели случайных функций и случайных процессов сводятся к ним через ансамбли реализаций.

### 4.3. Типовые модели распределения вероятностей

Аналитические функции распределения  $F(x)$  и их плотности  $f(x)$  представляют фактически математические модели вероятностных свойств случайных величин. Определение таких аналитических зависимостей – процесс сложный и трудоёмкий. Чтобы упростить его, подходящий закон распределения принято выбирать из набора известных типов так, чтобы они, с одной стороны, максимально точно соответствовали опытным данным, а с другой стороны, были бы простыми в использовании. Накопленные к настоящему времени ММ типовых законов распределения разнообразны.

Рассмотрим часто встречающиеся в практике ММ одномерные **распределения случайных величин** [<http://ru.wikipedia.org/>].

Типовые модели распределения имеют специфические обозначения, включающие англоязычную аббревиатуру и параметры, указываемые в скобках. Например, нормальный закон обозначается  $N(m, \sigma^2)$ , где  $m, \sigma^2$  – его параметры. Гамма-распределение обозначается  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha, \beta$  – параметры. В отличие от обозна-

чений функций, переменную аргумента  $x$  в скобках не указывают.

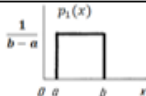
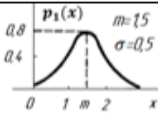
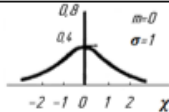
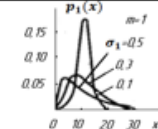
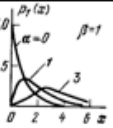
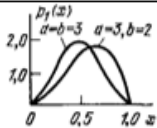
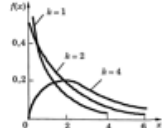
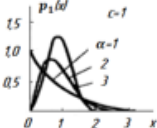
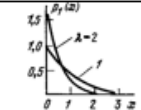
Форма графика зависит от параметров. Изменяя параметры, пользователь получает возможность изменять конфигурацию графика, подгоняя его под опытные данные. У простых законов имеется один параметр, у сложных – до трёх.

Типовые модели плотности распределения непрерывных случайных величин, применяемые в СХП, приведены в табл. 4.1. К ним относятся: равномерное  $U(a, b)$ , нормальное (Гауссово)  $N(m, \sigma^2)$ , нормальное нормированное  $N(u)$ , логарифмически нормальное  $LN(m, \sigma^2)$ , экспоненциальное  $\text{Exp}(\lambda)$ , Пирсона  $\chi^2(k)$ , Вэйбулла  $W(c, a)$ , Стьюдента  $t(n)$ , Фишера  $F(n_1, n_2)$ , а также бета-распределение  $Be(a, b)$  и гамма-распределение  $\Gamma(a, \beta)$  и др.

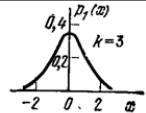
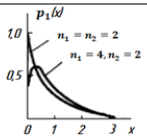
Наиболее простое – *равномерное распределение*  $U(a, b)$ . Плотность вероятности случайной величины  $X$  постоянна в области возможных значений  $a < X < b$ , границы которой являются и параметрами распределения. Равномерное распределение используют при измерениях и при генерировании случайных величин. На его основе составлены таблицы случайных чисел для разных практических задач: случайного взятия проб из каких-либо партий, проведения опытов в случайной последовательности и т.п.

Таблица 4.1

Модели плотности распределения непрерывных случайных величин

ММ плотности распределения и область значений X	Графики <sup>***</sup> плотности распределения
1	2
Равномерный U(a, b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x < a, x > b. \end{cases}$	
Нормальное распределение N(m, σ²) $f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$	
Нормированное нормальное N(u) $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5u^2}$ $U=(x-m_x)/\sigma_x$	
Логнормальное LN(m, σ²) $p_1(x) = \frac{\log e}{x\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma_x^2}\right]$	
Гамма-распределение Γ(α, β) $p_1(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$ Γ - гамма-функция <sup>**</sup>	
Бета-распределение Be(a, b) $p_1(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ Γ - гамма-функция <sup>**</sup>	
Распределение χ²(k) $f(x) = \frac{e^{-0,5x}}{2^{0,5k} \Gamma(0,5k)} x^{0,5k-1} \quad x > 0$ Γ - гамма-функция <sup>**</sup>	
Распределение Вейбулла W(c, a) $f(x) = C a x^{\alpha-1} e^{-C x^{\alpha}}$	
Экспоненциальное Exp(λ) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$	

Окончание табл. 4.1

1	2
t- распределение Стьюдента $t(k)$ $p_1(x) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi} \Gamma(\frac{k}{2})} (1 + \frac{x^2}{k})^{-(k+1)/2}$ $\Gamma$ – гамма-функция*	
F-распределение Фишера $F(n_1, n_2)$ $P_1(x) = \frac{\Gamma(\frac{n_1 + n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} (\frac{n_1}{x})^{n_1} x^{n_1-1} (1 + \frac{n_1}{n_2} x)^{-(n_1+n_2)}$ $\mu_1=0,5n_1$ ; $\mu_2=0,5n_2$ $\Gamma$ – гамма-функция*	

\*гамма-функция  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ , находится из таблиц.

\*\* графики [Горяинов В.Т., 1980].

*Нормальное распределение*  $N(m, \sigma^2)$  (Гауссово) наиболее распространено в СХП и во многих областях науки. Популярность нормального распределения вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей: "Если результат наблюдения является суммой многих случайных слабо взаимосвязанных величин, то при увеличении числа слагаемых распределение результата стремится к нормальному". Многофакторность СХП приводит именно к такой ситуации. Нормальное распределение считается предельной формой многих распределений (отсюда и его наименование).

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: математическим ожиданием  $m_x$  и дисперсией  $D_x = \sigma_x^2$ , являющимися числовыми характеристиками случайной величины.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx. \quad (4.22)$$

График плотности распределения (см. табл. 4.1) обладает симметрией и является эталоном островершинности (эксцесса). Площадь под кривой равна единице, но максимум кривой и масштаб зависят от параметров, что создаёт неудобства.

**Нормальное нормированное распределение**  $N(u)$  имеет стандартный вид графика центрированной случайной величины  $x$ .

Нормированный вид получают введением переменной  $u$ :

$$u = (x - m_x) / \sigma_x. \quad (4.23)$$

Интегралы, входящие в формулу (4.22), не выражаются через элементарные функции. Для вычисления **F(u)** созданы таблицы функции

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp(-0,5u^2) du, \quad (4.24)$$

которая называется **функцией Лапласа (интегралом вероятностей)**.

Вероятность попадания случайной величины  $X$  в интервал  $a < X < b$  через функцию Лапласа (4.24) будет:

$$P(a < X < b) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1), \quad (4.25)$$

$$\text{где } u_1 = (a - m_x) / \sigma_x; \quad u_2 = (b - m_x) / \sigma_x.$$

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины  $X$  от её среднего значения при  $m_x = 0$  на величину  $\pm 3\sigma_x$  по выражению (4.25):

$$P[(-3\sigma_x) < X < (+3\sigma_x)] = \Phi(3) - \Phi(-3). \quad (4.26)$$

По таблице значений функции Лапласа находим:

$$\Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,4987 \approx 0,997. \quad (4.27)$$

Получаем известное правило "трех сигм": для нормально распределенной случайной величины разброс ее от математического ожидания практически не превосходят  $3\sigma_x$  (с погрешностью 0,3%).

В силу симметричности графика плотности вероятностей нормального распределения все нечетные центральные моменты равны нулю и коэффициенты асимметрии  $A_x$  и эксцесса  $E_x$  согласно (4.22) и (4.23) равны нулю.

**Логарифмически нормальное распределение  $LN(m, \sigma^2)$**  – двухпараметрическое распределение логарифма случайной величины с областью определения  $0 < x < \infty$ . В отличие от обычного нормального распределения с его симметрией имеет более широкий диапазон и разные несимметричные графики плотности распределения. Описывает распределение семян вдоль рядков при посеве [19].

**Экспоненциальное распределение  $Exp(\lambda)$**  определяется одним параметром  $\lambda$ , который называют интенсивностью потока событий.  $Exp(\lambda)$  используется в теории надежности и теории массового обслуживания. Описывает также распределение семян по площади [5]. Область определения  $0 < x < \infty$ .

**Распределение хи-квадрат  $\chi^2(k)$  (Пирсона)** описывает распределение суммы квадратов  $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$   $k$  независимых случайных величин, каждая из которых имеет нормальное распределение с  $m_x = 0$  и  $\sigma_y^2 = 1$ . Используют как критерий согласия для оценки согласованности априорных распределений с теоретическими. Область определения  $0 < x < \infty$ .

**Бета-распределение  $Be(a, b)$**  описывает различные распределения случайных величин на конечных интервалах. Форма графика  $Be(a, b)$  в зависимости от выбора параметров может быть выпуклой, вогнутой, убывающей, возрастающей, унимодальной; а

при  $a=1$ ,  $b=1$  будет постоянной, и значит, равномерное распределение  $U[0, 1]$  будет частным случаем бета-распределения  $U[0, 1]=B[1, 1]$ . Широко используется в байесовской статистике, априорно сопряжено с распределениями биномиальным, геометрическим. Область определения  $0 < x < 1$ .

**Гамма-распределение  $\Gamma(\alpha, \beta)$**  – двухпараметрическое распределение суммы независимых случайных величин  $X_1, \dots, X_k$ , каждая из которых распределена по экспоненциальному закону. Если  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $i=1, \dots, k$ ; тогда  $Y = \sum X_i \sim \Gamma(1/\lambda, k)$ .

Область определения  $0 < Y < \infty$ .

По гамма-распределению распределяются расстояния между семенами при пунктирном посеве [19].

Частными случаями гамма-распределения являются экспоненциальное распределение  $\Gamma(1/\lambda, 1) = \text{Exp}(\lambda)$  и распределение хи-квадрат  $\Gamma(2, k/2) = \chi^2(k)$ . При больших  $k$  гамма-распределение может быть *приблизительно* нормальным распределением.

**Распределение Вейбулла  $W(c, \alpha)$**  – двухпараметрическое семейство непрерывных распределений с областью значений  $0 < x < \infty$ . Применяется для описания случайных процессов смешивания и разрушения сред, износа и старения материалов. Частным случаем распределения Вейбулла является экспоненциальное распределение  **$W(c, 1) = \text{Exp}(1/c)$** . Обобщая экспоненциальный закон, распределение Вейбулла  $W(c, \alpha)$  содержит ещё дополнительный параметр  $\alpha$ , позволяющий получить лучшее соответствие опытным данным. При  $\alpha=2$  получаем распределение Рэлея, описывающее процессы, состоящие из нескольких последовательных этапов. При  $\alpha > 3,5$  распределение Вейбулла близко к нормальному.

**t-распределение Стьюдента  $t(n)$**  – однопараметрическое симметричное распределение семейства независимых централизованных случайных величин  $X_i$   $i = 0, \dots, n$ , имеющих стандартное нормальное распределение  $X_i \sim N(0, 1)$ . Функция  $t(n)$

$$t(n) = \frac{x_0}{S_n}, \text{ где } S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (4.28)$$

устанавливает соотношение централизованных значений одной реализации  $x_0$  к среднеквадратичному значению остальных реализаций ансамбля в текущий момент времени. Считается, что  $t(n)$  имеет  $n$  степеней свободы. Область значений  $-\infty < x < \infty$ .

Ценным свойством распределения Стьюдента оказалось то, что вероятность  $P\{|t| > |t|_{1-\alpha}\}$  равна  $\alpha$ . Квантили  $|t|_{1-\alpha}$  табулированы; но в некоторых книгах значения  $|t|_{1-\alpha}$  в таблицах обозначаются

как  $t_0$ .

Распределение Стьюдента используется в статистике для точечного оценивания, построения доверительных интервалов и тестирования гипотез, касающихся определения закона распределения экспериментальных данных.

**F-распределение Фишера  $F(n_1, n_2)$**  – двухпараметрическое несимметричное распределение функции  $F=(Y_1/d_1)/(Y_2/d_2)$  от двух случайных величин  $Y_1, Y_2$ , имеющих распределение хи-квадрат:  $Y_1 \sim \chi^2(d_1)$ ,  $Y_2 \sim \chi^2(d_2)$ . Пишут  $F \sim F(d_1, d_2)$ , где  $d_1$  и  $d_2$  – степени свободы. Область значений распределения Фишера  $0 < x < \infty$ .

Квадрат случайной величины, имеющей распределение Стьюдента, имеет распределение Фишера. Если  $t \sim t(n)$ , то  $t^2 \sim F(1, n)$ .

Распределение Фишера – ключевой инструмент для обоснования адекватности статистических моделей.

Модели распределений *дискретных случайных величин* приведены в табл. 4.2. В СХП используются модели распределений: Пуассона  $P(\lambda)$ , биномиальное  $P(\lambda)$ , отрицательное биномиальное  $NB(r, p)$ , геометрическое  $Geom(p)$ , гипергеометрическое  $HG(M, N, n)$  и др.

Особенность графиков законов распределения дискретных случайных величин состоит в том, что абсцисса принимает дискретные значения  $k=0, 1, 2, \dots$  и график становится решётчатой функцией  $F(k)$ . Абсцисса  $k$  в этом случае называется носителем.

**Биномиальное распределение  $Bin(N, P)$**  является унимодальным; определяет вероятность того, что количество "успехов" будет  $x$  раз в  $N$  независимых опытах, в которых вероятность «успеха» одинакова и равна  $P$ :

$$F(x, N) = C_N^x P^x (1 - P)^{N-x} \quad (x = \overline{0, N}), \quad (4.29)$$

где  $C_N^x = \frac{N!}{x!(N-x)!}$  – число сочетаний из  $N$  элементов по  $x$  раз.

Биномиальное распределение достаточно универсально. При  $N=1$  получаем распределение Бернулли. Если  $N$  большое, то  $Bin(N, P)$  превращается в нормальное распределение  $N[NP, NP(1-P)]$  с математическим ожиданием  $NP$  и дисперсией  $NP(1-P)$ .

Если  $N$  большое, а  $\lambda$  – фиксированное число, то  $Bin(N, \lambda/N)$  превращается в распределение Пуассона  $P(\lambda)$  с параметром  $\lambda$ .

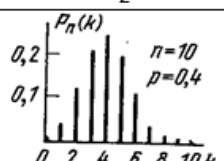
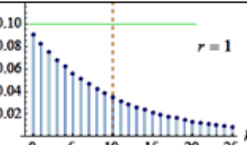
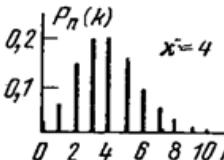
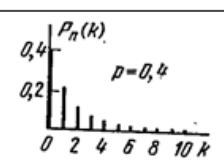
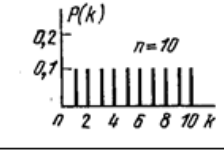
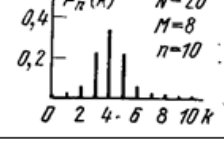
*Распределение Пуассона  $P(\lambda)$*  является предельным для биномиального распределения. При неограниченном увеличении  $N$  и уменьшении  $P$  так, что при этом  $NP = X = \text{const}$ , получим

$$F(x, \lambda) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!. \quad (4.30)$$

Величина  $\lambda$  является параметром распределения Пуассона. Оно описывает распределение числа  $x$  случайных событий в интервале времени  $\Delta t$  при условии, что вероятность наступления события за интервал пропорциональна этому интервалу. Математическое ожидание  $m_x$  и дисперсия  $\sigma^2_x$  распределения равны  $\lambda$ . Значения функции  $F(x, \lambda)$  табулированы.

Таблица 4.2

Законы распределения дискретных случайных величин

Плотность распределения Носитель	Графики плотности распределения
1	2
Биномиальное распределение $B(n, p)$ $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0, 1, 2, \dots$	
Отрицательное биномиальное $NB(r, p)$ $P_n(k) = \frac{\Gamma(r+k)}{k! \Gamma(r)} p^r q^k$ $q=1-p, k=0, 1, 2, \dots$	
Распределение Пуассона $P(\lambda)$ $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0, 1, 2, \dots$	
Геометрическое распределение $Geom(p)$ $P_n(k) = p(1-p)^k, k=0, 1, 2,$	
Равномерное распределение $UD(n)$ $P(k) = \frac{1}{n}, k=0, 1, 2, \dots$	
Гипергеометрическое $HG(M, N, n)$ $P_n(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	



**Отрицательное биномиальное  $NB(r, p)$**  (называемое также распределением Паскаля) – это распределение количества произошедших неудач в последовательности опытов с вероятностью успеха  $p$ , проводимой до  $r$ -го успеха.

**Геометрическое  $Geom(p)$**  – распределение случайной величины  $Y$ , равной количеству испытаний случайного эксперимента до наблюдения первого «успеха».

Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения  $Geom(p) = NB(1, p)$ .

Сумма  $n$  независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение  $Y_i \sim Geom(p)$ , получает отрицательное биномиальное распределение  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim NB(n, p)$ .

**Гипергеометрическое  $HG(M, N, n)$**  – симметричное распределение; моделирует количество удачных выборок без возвращения из конечной совокупности.

Типичный пример: осуществлена поставка  $N$  объектов, из которых  $M$  имеют дефект. Гипергеометрическое распределение описывает вероятность того, что в выборке из  $n$  различных объектов, вытянутых из поставки,  $k$  объектов являются бракованными.

Если при фиксированном  $n$  и  $M$  устремим  $N$  к бесконечности, то  $HG(M, N, n)$  сходится к биномиальному распределению  $Bin(n, M/N)$ .

Числовые характеристики простых типовых законов распределения приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Числовые характеристики законов распределения

Закон распределения	$m_x$	$D_x$	$K_a$	$K_e$
Нормальный	$m_x$	$\sigma^2$	0	0
Нормальный нормированный	0	1	0	0
Равномерный	$(b-a)/2$	$(b-a)^2/12$	0	9/5
Экспоненциальный	$\lambda^{-1}$	$\lambda^{-2}$	2	6
Гамма-распределение	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2/\sqrt{b}$	$6/b$
Биномиальное	$NP$	$NPq$		
Пуассона	$\lambda$	$\lambda$		
Пирсона	$k$	$2k$	$\sqrt{8/k}$	$12/k$

Приведённые сведения показывают большое разнообразие типовых моделей распределения вероятностей случайных величин. Для каждого процесса можно выбрать подходящий тип модели и её параметры так, чтобы модель максимально соответствовала

выборке опытных данных. Просматривается тенденция к синтезу единой универсальной модели с большим числом настраиваемых параметров.

Поскольку элементы выборки являются случайными величинами, то случайными будут и значения параметров, определенных по этой выборке. В связи с этим возникает необходимость т. н. статистической оценки полученных параметров распределения. Распространены следующие задачи оценки:

- проверить гипотезу о принадлежности полученной выборки выбранному типовому теоретическому распределению;
- определить, принадлежат ли несколько выборок одной генеральной совокупности;
- определить, носят ли различия измерений одного и того же объекта закономерный характер или случайны;
- определить, действительно ли имеется взаимосвязь каких-либо показателей процесса или это просто случайность;
- определить, сколько необходимо произвести измерений, чтобы получить достоверные результаты.

Решение таких задач осуществляется с применением типовых моделей распределения. Исследователь выдвигает какую-либо гипотезу, а затем проверяет ее на основании некоторых критериев, в основе которых лежат распределения:  $\chi^2$  -Пирсона,  $t$  – Стьюдента,  $F$ - Фишера. Особенность этих распределений состоит в том, что они зависят только от уровня значимости и числа степеней свободы.

**Число степеней свободы** в статистике называют разность между числом испытаний и числом коэффициентов (констант), которые вычисляются по результатам этих испытаний. Фактически степени свободы являются мерой объема априорной информации.

**Уровнем значимости** считают вероятность, которую следует считать малой. В технике уровень значимости обычно принимают 0,05, т.е. событие произойдет в 95 случаев из 100.

Критические значения критериев в зависимости от уровня значимости и числа степеней свободы приводятся в таблицах.

## 4.4. Случайные процессы

Случайные процессы – наиболее распространённый и сложный вид случайностей в сельскохозяйственном производстве. Оно особенно богато разнообразными специфическими случайными

процессами, называемыми сельскохозяйственными (СХП) .

Теория случайных процессов явилась итогом развития теории вероятностей и могла использовать предыдущие разработки и понятия [1, гл.10]. Понятие вероятности для случайных процессов сходно с аналогичным понятием для случайных событий, но переход к нему проводится через рассмотрение сечения ансамбля реализаций в фиксированный момент времени  $t=t_1$  (см. рис. 4.3). Так же как и для случайной величины, общей формой представления распределения для случайного процесса является функция распределения  $F(x)$ , но для текущего сечения в момент времени  $t=t_1$ , и выражается  $F(x, t)$ . Эта функция определяет вероятность того, что случайный процесс в момент времени  $t_1$  примет значение меньше уровня  $X$ , т.е.

$$F(x, t) = P[X(t_1) < x]. \quad (4.31)$$

Как и для случайных величин, производная функции  $F(x, t)$  называется плотностью распределения

$$f(x, t) = dF(x, t)/dx. \quad (4.32)$$

$F(x, t)$  и  $f(x, t)$  определяют одномерное распределение вероятностей в сечении ансамбля и являются простейшими вероятностными характеристиками случайного процесса. Они характеризуют процесс в отдельных изолированных сечениях и не раскрывают связи между сечениями.

Более полными характеристиками случайного процесса будет двумерное распределение вероятностей по двум сечениям ансамбля при  $t=t_1, t=t_2$ .

$$F(x_1, x_2) = P[x < x_1; x < x_2] \quad (4.33)$$

Плотность вероятности системы двух случайных величин

$$f(x_1, x_2) = \partial^2 F(x_1, x_2) / \partial x_1 \partial x_2 \quad (4.34)$$

называют двумерной плотностью вероятности. Её преимущество – она в состоянии описывать связи между сечениями ансамбля в разные моменты времени. Геометрически функцию  $f(x_1, x_2)$  можно изобразить некоей поверхностью в трёхмерной системе координат (рис. 4.9), называемой поверхностью распределения.

Двумерная плотность вероятности  $f(x_1, x_2)$  положительна. Объём пространства под её поверхностью равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \partial x_1 \partial x_2 = 1. \quad (4.35)$$

Двойной интеграл в пределах от  $-\infty$  до  $x_1$  и  $x_2$  даёт функцию распределения  $F(x_1, x_2)$ :

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) \partial x_1 \partial x_2 = F(x_1, x_2). \quad (4.36)$$

По заданной двумерной плотности вероятности легко находят-ся одномерные распределения каждой из случайных величин:

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2; \quad f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1. \quad (4.37)$$

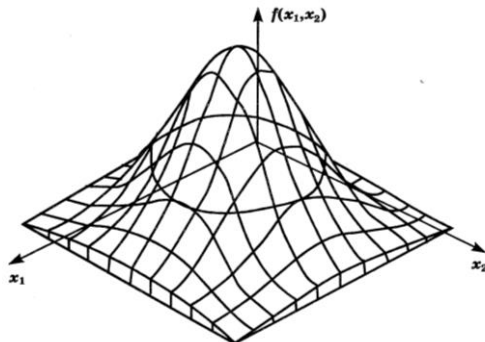


Рис. 4.9. Графическое отображение двумерной плотности вероятности  $f(x_1, x_2)$

Соотношения между двумерной и одномерными плотностями вероятности характеризуют зависимости между самими случайными величинами  $X_1, X_2$ . Они считаются зависимыми, если

$$f(x_1, x_2) < f(x_1)f(x_2). \quad (4.38)$$

Две случайные величины считаются независимыми, если их совместная плотность распределения равна произведению одномерных плотностей распределения этих величин:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2). \quad (4.39)$$

Как и для случайных величин, в качестве вероятностных характеристик случайных процессов  $X(t)$  применяют различные неслучайные характеристики, но уже не числовые, а в виде функций. Обычно используются четыре функции: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция и спектральная плотность. Их выражения основаны на применении вместо моментов моментных *функций*.

Моментные функции, как и моменты, могут быть различного порядка, начальными и центральными.

**Начальная моментная функция k-го порядка** – математическое ожидание функции  $[x(t_1)]^k$ ; выражается в кратком или интегральном написании:

$$\alpha_k(x, t_1) = M[x(t_1)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1)]^k f(x, t_1) dx. \quad (4.40)$$

Здесь под математическим ожиданием функции понимается её вероятностное усреднение через интеграл с весом, равным плотности вероятности  $f(x, t)$ .

Начальная моментная функция первого порядка ( $k=1$ ) определяет математическое ожидание случайного процесса  $X(t)$  в момент времени  $t_i$ :

$$\alpha_1(x, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_i) f(x, t_i) dx, \quad (4.41)$$

Функцию  $\alpha_1(x, t_i)$  обычно обозначают  $m_x(t)$  и называют математическим ожиданием случайного процесса  $M[X(t)]$  в сечении  $t$  ансамбля ее реализаций.

Значения  $m_x(t)$  в общем случае различны для разных сечений ансамбля реализаций случайного процесса  $X(t)$  (см. рис. 4.10).

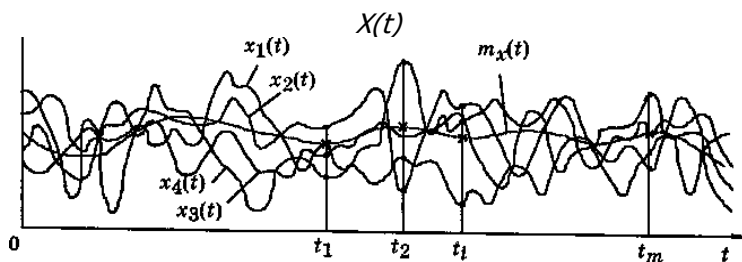


Рис. 4.10. Ансамбль реализаций  $x_i(t)$  случайного процесса  $X(t)$  и его математическое ожидание  $m_x(t)$

Начальная моментная функция второго порядка ( $k=2$ ) в один момент времени  $t_i$ :

$$\alpha_2(x, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_i)]^2 f(x, t_i) dx. \quad (4.42)$$

Отклонение случайного процесса  $X(t)$  от его математического ожидания называют **центрированным случайным процессом**  $\dot{X}(t)$ ,

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t). \quad (4.43)$$

Для центрированных случайных процессов  $\dot{X}(t)$  моментные функции  $\mu_k(x, t_i)$   $k$ -го порядка определяют по выражениям:

$$\mu_k(x, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_i)]^k f(x, t_i) dx. \quad (4.44)$$

Практическое значение имеют центральные моментные функции второго порядка:

$$\mu_2(\overset{\circ}{x}, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \overset{\circ}{x}(t_i) \right]^2 f(x, t_i) dx. \quad (4.45)$$

Функцию  $\mu_2(\overset{\circ}{x}, t_i)$  называют *дисперсией случайного процесса*  $X(t)$  и обозначают  $D_x(t)$ . Дисперсия характеризует энергию разброса реализаций случайного процесса относительно математического ожидания  $m_x(t)$ .

### Среднее квадратическое отклонение (СКО)

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} \quad (4.46)$$

характеризует величину разброса реализаций случайного процесса относительно математического ожидания. В связи с соотношением (4.46) дисперсию случайного процесса иногда обозначают  $\sigma_x^2(t)$ .

Большое значение приобрели смешанные моментные функции второго порядка, представляющие матожидание произведения значений функций  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$  в разные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ : корреляционные и ковариационные функции.

**Автокорреляционная функция  $R_x(t_1, t_2)$  случайного процесса (смешанная начальная функция)** есть матожидание произведения значений случайной функции  $X(t)$  в разные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$

$$R_x(t_1, t_2) = a_2(X_1, X_2, t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]. \quad (4.47)$$

При  $t_1=t_2=t$  получаем  $\rho_x(t, t) = 1$ ; значение корреляционной функции равно дисперсии:

$$R_x(t, t) = D_x(t) = \sigma_x^2(t). \quad (4.48)$$

Статистической характеристикой связи двух случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  является **взаимная корреляционная функция  $R_{xy}(t_1, t_2)$** . **Взаимная корреляционная функция  $R_{xy}(t_1, t_2)$  случайных процессов** есть матожидание произведения значений случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  в разные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[X(t) Y(t)]. \quad (4.49)$$

Эта функция характеризует степень связи между сечениями процесса  $X(t)$  и  $Y(t)$ . В отличие от автокорреляционной функции  $R_x(t_1, t_2)$  она несет в себе информацию о фазовом сдвиге случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

Часто применяют нормированные корреляционные функции:

$$\rho_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) / [\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)], \quad (4.50)$$

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) / [\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)]. \quad (4.51)$$

Они безразмерные, изменяются от 0 до 1, и их графики легко сравнивать.

В случае, когда процесс содержит периодическую составляющую

щую, то корреляционная функция тоже будет содержать периодическую составляющую с тем же периодом.

В инженерных приложениях корреляционную функцию  $R(\tau)$  часто аппроксимируют подходящим аналитическим выражением. Так, для определения усилий, действующих на разрушающие элементы сельхозорудий, корреляционную функцию принимают в виде

$$K(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau. \quad (4.52)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, подбираемые из условия наилучшего приближения опытной кривой  $K(\tau)$ . Для твердых почв  $\alpha > 5$ ,  $\beta > 15$ , для средних почв  $\alpha = 2 \dots 4$ ,  $\beta = 5 \dots 12$ , для рыхлых почв  $\alpha < 2$ ,  $\beta < 5$ .

**Ковариационной функцией случайного процесса**  $K_x(t_1, t_2)$  (смешанная центральная моментная функция) называют математическое ожидание произведения центрированных его значений в разные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :  $X_1 X_2$ ,

$$K(t_1, t_2) = K(\tau) = \mu_{11}(\dot{X}_1, \dot{X}_2, t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)]. \quad (4.53)$$

**Ковариацией процессов  $X_1$  и  $X_2$**  называют математическое ожидание произведения центрированных их значений :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = M[\dot{X}_1 \dot{X}_2]. \quad (4.54)$$

Нормированное её значение принято называть *коэффициентом корреляции (иногда ковариации)* между случайными функциями  $X_1$  и  $X_2$ .

Корреляционную функцию не следует путать с ковариационной. Различие их в том, что первая выражается моментом между нецентрированными величинами, а вторая – между центрированными. Соотношение между ними:

$$K(\tau) = R_x(\tau) - m_x^2. \quad (4.55)$$

Для центрированных процессов, когда  $m_x = 0$ , ковариационная и корреляционная функции совпадают. Отсюда и многочисленные некорректности в названиях. Во избежание путаницы предпочитают называть моментные функции второго порядка корреляционными, так как этот термин пригоден и для центрированных и нецентрированных функций.

Приведённые выше неслучайные характеристики служат параметрами при построении аналитических моделей двумерных плотностей вероятности  $f(x, y)$ . Но в отличие от моделей одномерных (см. табл. 4.2) используются не только математические ожидания, дисперсии, но и нормированные корреляционные функции  $\rho_{xy}$ .

$$f(x, y) = \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \rho_{xy}). \quad (4.56)$$

Такие модели сложны и громоздки. Распространение получила модель двумерной плотности вероятности  $f(x, y)$  для нормального

распределения [2].

Для некоррелированных величин  $\rho_{xy}=0$ , и двумерная плотность распределения будет представлять произведение одномерных плотностей распределения  $f(x)$  и  $f(y)$ :

$$f(x,y) = f(x) f(y). \quad (4.57)$$

Это соотношение используется для оценки связи между  $x$  и  $y$ .

Вся вышеизложенная теория оценок вероятностных характеристик случайных функций и процессов базируется на рассмотрении сечений ансамбля реализаций. Это позволяло теоретикам использовать методологию ранних наработок теории вероятности, увязывать вероятностные характеристики случайного процесса и случайных событий, обеспечить преемственность теорий случайных величин и случайных процессов. Однако для практики такой подход создал проблемы.

Дело в том, что ансамбли реализаций подразумевают наличие многих объектов изучения, функционирующих одновременно и в одинаковых условиях (например, парк одинаковых станков в цехе, изготавливающих одинаковые детали). Такого в СХП нет. Поле не цех. В нём работает одна машина, да и то в разных условиях. Получение классического ансамбля реализаций невозможно. Возникла необходимость определения вероятностных характеристик по одной длинной реализации.

И такая теория была создана для стационарных процессов.

Стационарным случайный процесс считают, если его характеристики (моментные функции, функции распределения и пр.) не зависят от начала отсчета времени. Если же вероятностные характеристики зависят от начала отсчета времени, то процессы относятся к нестационарным.

Различают стационарные процессы в узком и широком смысле. Стационарными в узком смысле называют такие процессы, у которых все конечномерные распределения вероятностей не изменяются во времени, но меняются в зависимости от величины интервала  $\tau = t_2 - t_1$  между сечениями процесса. Стационарными в широком смысле называют случайные процессы, у которых математическое ожидание и дисперсия всегда постоянны:  $m_x(t) = m_x = const$ ;  $D_x(t) = D_x = const$ , и лишь корреляционная функция зависит от разности  $\tau = t_2 - t_1$ ,

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau). \quad (4.58)$$

Для стационарных случайных процессов оказалось возможным избежать получения ансамбля реализаций и получать вероятностные характеристики усреднением по времени, а не по ансамблю реализаций. Для этого введено понятие *эргодических*



случайных процессов [19].

Случайный процесс обладает эргодическим свойством, если по истечении достаточно большого промежутка времени вероятности состояний  $P = (P_1 \dots P_n)$  стремятся к предельным значениям  $p_1, \dots, p_n$ , не зависящим от начальных вероятностей  $P_1(0), \dots, P_n(0)$  и от текущего момента времени  $t$ , то есть:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P(\infty) = P. \quad (4.59)$$

Доказывается, что условием эргодичности стационарной функции является неограниченное убывание ее корреляционной функции по модулю при  $\tau \rightarrow \infty$ .

У эргодических процессов вероятностные характеристики, полученные из ансамбля реализаций, совпадают с характеристиками, полученными усреднением по аргументу  $t$ . Это снимает необходимость получения ансамблей реализации и открывает большие перспективы для оперативного контроля и управления.

При моделировании вероятностных процессов в СХП часто полагают, что случайные процессы стационарные и эргодические. Для таких процессов вероятностные характеристики вычисляются по одной реализации процесса  $X(t)$  усреднением по времени на конечной длительности  $T$ . Формулы (4.44), (4.47) упрощаются:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad (4.60)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt; \quad (4.61)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt. \quad (4.62)$$

Стационарность и эргодичность позволяют перейти к спектральным представлениям случайных функций и процессов в комплексной области.

**Спектральные представления случайной функции  $x(t)$** , удовлетворяющей условиям Дирихле (конечное число точек разрыва, максимумов и минимумов), основаны на разложении её в ряд Фурье:

$$x(t) = \int_0^{\infty} A(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.63)$$

где  $A(i\omega)$  – комплексная амплитуда:

$$A(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.64)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \text{ – частота } k\text{-й гармоника.}$$

Распределение амплитуд по частотам  $A_k(i\omega)$  называется *спектром случайного процесса*. Спектральное представление процесса удобно осуществлять с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). Каждому дискретному значению частоты  $\omega_k$  будет соответствовать значение амплитуды  $A_k$ , а шаг по оси  $\omega$  между соседними гармониками составит  $2\pi T$ . С увеличением  $T$  интервалы между спектральными линиями сокращаются, и спектр в пределе при  $T \rightarrow \infty$  превращается в непрерывную последовательность точек (непрерывная кривая) на комплексной плоскости.

Неудобство такого представления связано с тем, что амплитуды  $A_k(i\omega)$  – величины комплексные и графически трудно воспроизводимы.

Более удобно спектры характеризовать *спектральной плотностью*  $S(\omega)$ , которая всегда вещественна. Она характеризует распределение энергии колебаний по частотному диапазону. Её можно получать через спектры  $X(-i\omega)$   $X(i\omega)$ :

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} [X(-i\omega)X(i\omega)]/2T, \quad (4.65)$$

где  $T$  – время реализации случайного процесса при преобразовании Фурье  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Удобство спектральной плотности мощности в том, что она теряет комплексность, становится вещественной величиной и имеет компактное графическое представление (рис. 4.11).

Взаимная спектральная плотность

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} [X(-i\omega)Y(i\omega)]/2T \quad (4.66)$$

остаётся комплексной.

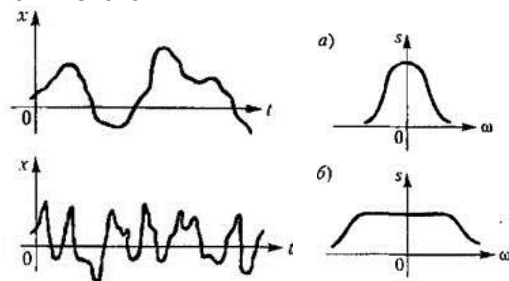


Рис. 4.11. Преобразование случайного сигнала в спектральную функцию: а – узкополосный сигнал; б – широкополосный сигнал

Получать спектральную плотность можно преобразованием Фурье ковариационной  $K(\tau)$  или корреляционной функции  $R_x(\tau)$ :

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (4.67)$$

Формулы (4.65) и (4.66) называются соотношениями Хинчина – Винера.

Графики корреляционной функции и спектральных плотностей для различных случайных процессов (1, 2, 3, 4) приведены на рис. 4.12. Общая тенденция: монотонно убывающая функция  $K(\tau)$  преобразуется в тоже монотонно убывающую  $S(\omega)$ . Чем уже график функции  $K(\tau)$ , тем более пологим и широким является график функции  $S(\omega)$ .

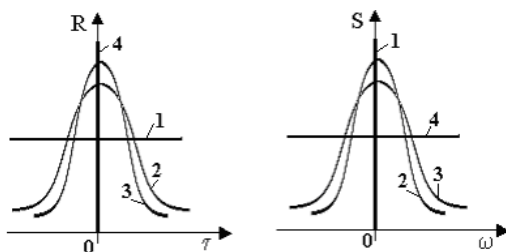


Рис. 4.12. Соотношения графиков корреляционной функции и спектральных плотностей

Если  $S(\omega)$  имеет максимум при некоторой частоте  $\omega_0$  и симметрична относительно неё, то корреляционная функция будет иметь характер затухающих колебаний с частотой  $\omega_0$ .

Обратное преобразование выражает корреляционную функцию через спектральную плотность:

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (4.68)$$

Начальное значение корреляционной функции есть дисперсия процесса:

$$D = K(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (4.69)$$

Значения корреляционной функции при любом  $\tau$  не превышают величины  $K(0)$ .

Спектральная плотность производной случайной стационарной функции  $x(t)$  со спектральной плотностью  $S(\omega)$ :

$$S_v(\omega) = \omega^2 S(\omega). \quad (4.70)$$

## 4.5. Динамические модели при случайном воздействии

Динамическими моделями будем считать модели, которые описываются дифференциальными уравнениями, содержащими производные обобщённых координат (скорости, ускорения).

Современной общепризнанной формой динамической модели являются матрично-дифференциальные уравнения состояния первого порядка в форме Коши по типу (3.25). Для вероятностной модели (см. рис. 4.2, а) вектор  $\bar{x}(t)$  на входе – случайная функция:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = [J] \cdot \bar{u} + [B] \cdot \bar{x}(t), \quad (4.71)$$

где  $[J]$  – блочная матрица собственных свойств системы (матрица Якоби);  $[B]$  – матрица выбора возмущений;  $\bar{u} = [Y, \dot{Y}]$  – вектор состояния, содержащий фазовую переменную  $Y(t)$  и её производную  $\dot{Y}(t)$ .

Для динамических СХП вектор состояния будет состоять из векторов смещений и скорости. Поэтому модели состояния более информативны, чем обычные функциональные модели.

Блочная матрица Якоби содержит матрицы жёсткости, инерции и диссипации, но в форме Коши они не просматриваются, что создаёт трудности для понимания физики явлений. Физика явлений будет лучше заметна, если перейти от формы Коши к системе дифференциальных уравнений второго порядка.

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + C\bar{Y} = \bar{X}(t), \quad (4.72)$$

где  $A, B, C$  – квадратные матрицы размерности  $n \times n$  соответственно инерции, диссипации и жёсткости;  $X(t)$  – вектор случайных воздействий.

Наличие случайных воздействий на входе делают все динамические модели СХП статистическими [Лурье А.Б., 1970].

Чтобы избавиться от необходимости создавать ансамбли реализаций, для СХП обычно делают допущения о стационарности и эргодичности процессов. СХП имеют большую длительность, благодаря чему даже отдельные случайные выбросы будут повторяться многократно, переходя в разряд стационарных, не нарушающих серьёзно постоянство математического ожидания  $m_x$  и дисперсии  $D_x$ , т.е. СХП имеют стационарность и в широком смысле. По этим причинам многие СХП можно считать эргодическими и использовать спектральные представления переменных.

Важное значение при моделировании СХП имеют инерционные свойства сельскохозяйственных машин, которые обладают способностью нормализовать распределения фазовых переменных, даже если распределения воздействий будут от нормальных отличаться. Нормальный случайный процесс хорош тем, что полностью определяется математическим ожиданием и корреляционной функцией. Кроме того, сумма двух нормальных процессов дает тоже нормальный процесс, а распределение вероятностей производной стационарного процесса также нормально.

Стационарность, эргодичность и нормальное распределение позволяет перевести уравнения (4.72) в комплексную форму через преобразование Фурье [18] и получать его в виде

$$[(i\omega)^2 A + i\omega B + C] \bar{Y}(i\omega) = X(i\omega), \quad (4.73)$$

где  $i\omega$  – частотный оператор Фурье;  $X(i\omega)$ ,  $\bar{Y}(i\omega)$  – спектры входных и выходных сигналов.

По спектру входных воздействий можно находить спектр процесса  $\bar{Y}(i\omega)$  на выходе:

$$\bar{Y}(i\omega) = [(i\omega)^2 A + i\omega B + C]^{-1} X(i\omega), \quad (4.74)$$

выражение

$$W(i\omega) = [(i\omega)^2 A + i\omega B + C]^{-1} \quad (4.75)$$

носит название КЧХ – комплексной частотной характеристики (некоторые ошибочно называют её передаточной функцией). Она представляет квадратную матрицу размерности  $n \times n$ :

$$[W(i\omega)] = \begin{bmatrix} W_{11}(i\omega) & W_{12}(i\omega) & \dots & W_{1n}(i\omega) \\ W_{21}(i\omega) & W_{22}(i\omega) & \dots & W_{2n}(i\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}(i\omega) & W_{n2}(i\omega) & \dots & W_{nn}(i\omega) \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Её элементы получаются обращением матрицы  $[(i\omega)^2 A + i\omega B + C]$ . Аналитически они выражаются сложно, но определённно содержат элементы матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Через КЧХ связь (4.74) между входом и выходом многомерной модели станет простым соотношением:

$$\bar{Y}(i\omega) = W(i\omega) X(i\omega). \quad (4.77)$$

Для одномерной системы соотношение принимает вид:

$$\bar{Y}(i\omega) = [(c - \omega^2 a + i\omega b)^{-1}] X(i\omega), \quad (4.78)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – масса и коэффициенты жёсткости и диссипации.

Соотношение (4.77) является аналитическим решением модели в комплексной области. Оно связывает комплексные спектры воздействий и результата. Недостаток – в уравнениях отсутствуют вероятностные характеристики.

Для построения вероятностной модели соотношение (4.78)

следует выразить через вероятностные характеристики случайных функций: спектральные плотности и корреляционные функции.

Соотношение (4.77) в комплексно сопряжённом виде:

$$Y(-i\omega) = W(-i\omega) X(-i\omega). \quad (4.79)$$

Соотношение (4.77) в транспонированном виде:

$$Y^T(i\omega) = X^T(i\omega) W(i\omega)^T. \quad (4.80)$$

Умножим части соотношения (4.79) на соответствующие части соотношения (4.80) справа; получим

$$Y(-i\omega) Y^T(i\omega) = W(-i\omega) X(-i\omega) X^T(i\omega) W(i\omega)^T. \quad (4.81)$$

Поделив обе части на  $T$ , получим по определению (4.65):

$$S_Y(\omega) = W(-i\omega) S_X(\omega) W(i\omega)^T. \quad (4.82)$$

Эти соотношения позволяют связать спектральные плотности на входе и выходе модели. Характеристики многомерного случайного сигнала  $X(t)$  на входе модели можно вычислять по формулам (4.60) – (4.62). С учётом многомерности сигналов получим:

вектор математического ожидания

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad (4.83)$$

матрицу корреляционной функции:

$$K(\tau) = \begin{bmatrix} K_{11}(\tau) & K_{12}(\tau) & \dots & K_{1n}(\tau) \\ K_{21}(\tau) & K_{22}(\tau) & \dots & K_{2n}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(\tau) & K_{n2}(\tau) & \dots & K_{nn}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

**Матрицу ковариации [K] (её иногда называют дисперсионной матрицей [D]) получают из матрицы корреляционных функций, полагая  $\tau=0$ :**

$$[K] = [K(0)] = [D]. \quad (4.85)$$

Диагональ матрицы [D] есть значения вектора дисперсий  $D = \text{diag}[D] = [D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn}]^T$ .

Матрицу спектральной плотности получают косинус преобразованием элементов корреляционной матрицы [K( $\tau$ )] по формуле Хитчина-Винера (4.67); структура матрицы:

$$[S_X(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2n}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1}(\omega) & S_{n2}(\omega) & \dots & S_{nn}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

По известным характеристикам случайного воздействия получим характеристики случайного процесса на выходе.

**Математическое ожидание**

$$m_Y = [C] m_X. \quad (4.87)$$

Матрица спектральной плотности

$$[S_Y(\omega)] = [W(i\omega)] [S_X(\omega)] [W^*(i\omega)], \quad (4.88)$$

где  $[W^*(i\omega)]$  – сопряжённая матрица; для преобразования Фурье её получают простым переходом  $[W^*(i\omega)] = [W(-i\omega)]$ .

Корреляционную функцию выходного случайного процесса  $R_{YY}(\tau)$  находим обратным косинус преобразованием по типу (4.68):

$$[R_{YY}(\tau)] = \int_0^{\infty} [S_Y(\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega \quad (4.89)$$

Для оценки связи колебаний процесса на выходе с колебаниями воздействий на входе полезно одновременно определять матрицу взаимных корреляционных функций  $[R_{YX}(\tau)]$ .

$$[R_{YX}(\tau)] = \int_0^{\infty} [S_{YX}(\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (4.90)$$

где  $[S_{YX}(\omega)]$  – матрица взаимной спектральной плотности, получаемая из матричного соотношения:

$$[S_{YX}(\omega)] = [W(i\omega)]^T [S_X(\omega)]. \quad (4.91)$$

Приведённые соотношения позволяют решать типовые задачи анализа вероятностных моделей (пример см. в п.7.1).

## ЧАСТЬ 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

### 5.1. Разновидности инженерных задач

Математические модели используются для решения широкого круга инженерных задач, среди которых типовые: анализ, синтез, идентификация, оптимизация, оптимальное управление ТС.

В качестве математической модели при решении инженерных задач обычно используют уравнение состояния (3.47), в котором учитывается, что функционал  $\Phi$  содержит не только вектор состояния  $\bar{U}$ , но и коэффициенты при его компонентах, составляющие вектор параметров системы  $par$ . Уравнение (3.47) примет вид:

$$d\bar{U}/dt = \Phi(\bar{U}, par) + B \bar{X}. \quad (5.1)$$

Определение изменений вектора состояния  $\bar{U}(t)$  при известном функционале, параметрах и возмущениях  $B$  называется решением модели.

**Задачи анализа.** Задачей анализа считается определение состояния или каких-либо показателей объекта, считая известными его структуру, параметры и действующие входные воздействия.

Задача анализа проводится по разработанной ММ.

Различают задачу анализа состояния (рис. 5.1, а) и анализа качества функционирования (рис. 5.1, б).

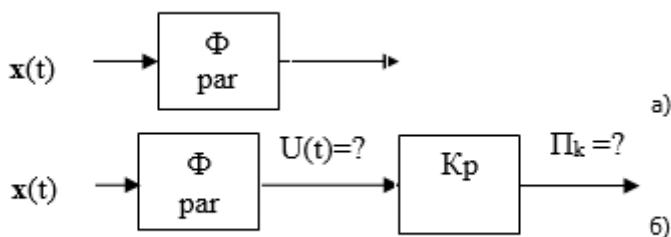


Рис. 5.1. Факторные модели задач анализа:  
а – состояния; б – качества функционирования

**Задача анализа состояния.** Провести анализ состояния объекта означает получить значение вектора состояния  $\mathbf{U}(t)$  в уравнении (5.1), то есть решить его. По решению ценно получить характеристику  $\mathbf{U}\{x(t)\}$  – зависимости вектора состояния на выходе модели от её входных факторов. Примеры: определение скоростей, ускорений, усилий, траекторий, напряжений и деформаций в деталях машин и т.п. и их зависимостей от нагрузок и режимов функционирования. Ценным является получение аналитического решения, позволяющего установить зависимости в удобной форме.

Задача анализа состояния является самой популярной задачей в



инженерной практике. Она является обязательной составной частью других задач.

Таким образом, инженерное прикладное математическое моделирование должно начинаться с разработки представлений о структуре и факторах объекта, а заканчиваться получением математической зависимости между факторами и результатом.

**Задача качественного анализа.** Для моделей функционирования машин, выполняющих технологический процесс, требуется определять показатели качества функционирования  $\Pi_k$  (энергоёмкость, равномерность хода по глубине, процент потерь и т.п.). Определения вектора состояния  $U(t)$  оказывается недостаточным; необходимо преобразовать состояние  $U(t)$  в показатели качества  $\Pi_k$ .

Показатель качества связывают с решением модели  $U(t)$  через некоторый функционал, называемый критерием качества  $Kp$ , т.е.  $\Pi_k = Kp\{U(t)\}$ . Применяемые критерии качества, как правило, носят интегральный характер:

$$\Pi_k = \int_{t_1}^{t_2} f\{u(t)\} dt, \quad (5.2)$$

например, средняя глубина хода рабочих органов, средняя глубина заделки семян и т.п.

Целью качественного анализа становится получение зависимости  $\Pi_k\{x(t)\}$  между показателями качества  $\Pi_k$  и входными воздействиями  $x(t)$ .

**Синтез.** Задача синтеза заключается в определении неизвестной структуры или параметров объекта проектирования, которые обеспечат при заданных воздействиях необходимые значения показателя качества  $\Pi_{kзад}$  (рис. 5.2).



Рис. 5.2. Факторная модель задачи синтеза

В инженерной практике наиболее распространен синтез параметрический, когда структура объекта известна и нужно определить лишь параметры  $par$ .

**Задача идентификации** – это установление структуры или параметров объекта по известным сигналам на входе и выходе (рис. 5.3).

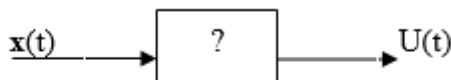


Рис. 5.3. Факторная модель задачи идентификации

Практически идентификация проводится на основе экспериментальных данных.

**Задача оптимизации** – задача, в которой определяется структура или значения параметров объекта, дающих экстремум (минимум или максимум) показателям качества (рис 5.4). Имеет преимущества перед задачей обычного синтеза, но математический аппарат сложнее. В настоящее время вытесняет задачи простого синтеза.

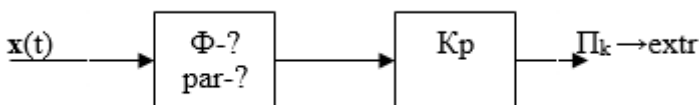


Рис. 5.4. Факторная модель задачи оптимизации

**Оптимальное управление** – определение для объекта известной структуры и параметрами значений вектора управления  $x(t)$ , которые дают минимум расхождения  $\delta$  между фактическим  $U(t)$  и желаемым  $U_{\text{ж}}(t)$  изменением вектора состояния. Факторная модель приведена на рис. 5.5.

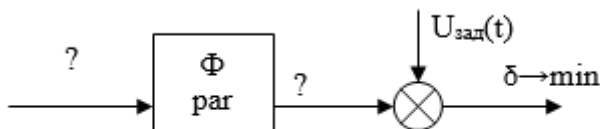


Рис. 5.5. Факторная модель задачи оптимального управления

Обычно невязка  $\delta$  оценивается по методу наименьших квадратов (МНК):

$$\delta = \int [u_{\text{зад}}(t) - u(t)]^2 dt \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

**Пример: вождение агрегата по борозке скошенного поля или по борозде.**

## 5.2. Оптимизационные математические модели

При проектировании наиболее распространенной задачей является поиск наилучшего варианта в условиях множества альтернатив. Процесс поиска наилучшего варианта при известных ограничениях называют оптимизацией. Для оптимизации строят оптимизационную математическую модель (ОММ).

ОММ строится на основе полученной теоретической ММ и кроме неё включает категории:

1. параметры оптимизации;
2. цель и целевую функцию;
3. критерий оптимизации;
4. систему ограничений.

Обязательным этапом в постановке задачи оптимизации является параметризация задачи и формализация понятия «наилучший».

**Параметризация** задачи сводится к назначению так называемых параметров оптимизации  $X$ , в качестве которых принимают интересующие исследователя параметры модели, характеристики её структуры или динамических свойств. Выбранные для оптимизации параметры модели должны быть доступны для варьирования, поэтому зачастую их называют управляемыми параметрами.

Применительно к модели ТС в форме Коши (3.25) параметрами оптимизации могут быть элементы матрицы  $[J]$  или  $[B]$ ; их объединяют в вектор параметров оптимизации  $X$  (не путать с  $x$ ).

Для формализации понятия "наилучший" необходимо сформулировать правило предпочтения одного варианта над другим. Самой массовой формой предпочтения является экстремум какой-либо функции от параметров оптимизации ( $\max$  или  $\min$ ). Практически все задачи оптимизации в сельскохозяйственном производстве являются экстремальными. В качестве функции, экстремум которой следует найти, служит так называемая целевая функция от параметров оптимизации  $\zeta(X)$ .

**Целевая функция** выражает цель, которую преследует при оптимизации исследователь. В качестве цели в сельскохозяйственном производстве служат обычно удельные ресурсные, экономические или качественные показатели.

**Критерий оптимизации  $K_p$**  – выражение правила предпочтения нужных значений целевой функции:

$$K_p(\bar{X}) = \zeta(\bar{X}) \rightarrow \text{extr.} \quad (5.4)$$

Здесь  $Kp(\bar{X})$  называется критериальной функцией. Для простой однокритериальной оптимизации она совпадает с целевой функцией. Критерий (5.4) означает, что в качестве предпочитаемых значений целевой функции принимаются вершины или впадины её гиперповерхности.

**Ограничениями** называются выражения связей, налагаемых на управляемые параметры. Различают:

а) прямые ограничения в форме неравенств:

$$a < X_i < b. \quad (5.5)$$

Область в пространстве параметров, ограниченная этими значениями, называют областью допустимых значений;

б) функциональные ограничения вида:

$$\varphi(\bar{X}) \geq 0; \psi(\bar{X}) \leq 0; \theta(\bar{X}) = 0. \quad (5.6)$$

Задачи оптимизации классифицируют по разным признакам:

- по категории оптимизации: структурная и параметрическая;
- по характеру взаимосвязи между параметрами – линейные или нелинейные;
- в зависимости от учета ограничений: условная, если учитываются какие-либо ограничения, и безусловная, когда их нет;
- по учету фактора времени: статистические и динамические;
- по полноте информации о переменных: при полной информации – детерминированные; при неполной информации – неопределенные;
- по числу критериев: одно- и многокритериальные;
- по количеству параметров: одно- и многопараметрические;
- по охвату области поиска: локальная в окрестности какой-либо точки с нахождением одного экстремума и глобальная по всей области с нахождением наибольшего экстремума.

При проектировании распространены задачи локальной параметрической оптимизации [1, гл. 12].

**Типовая формулировка задачи локальной оптимизации** параметров выглядит так. Отыскать для математической модели те значения  $\bar{X}$ , при которых целевая функция  $\zeta(X_1, X_2, \dots, X_n)$  принимает экстремум при ограничениях типа неравенств:

$$X_{in} < X_i < X_{i6}; \quad i = 1, \dots, N$$

и функциональных ограничениях:

$$\varphi_i(\bar{X}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, L; \quad \psi_j(\bar{X}) = 0, \quad k = 1, \dots, M;$$

где  $N$  – количество прямых ограничений на параметры  $\bar{X}$ ;  $L$  и  $M$  – количество функций ограничений-неравенств и ограничений-равенств соответственно.

Решением задачи оптимизации является нахождение места

расположения экстремума критериальной функции в допустимой области пространства управляемых параметров:

$$\bar{X}_{opt} = \arg\{extr[Kp(\bar{X})]\} \text{ при } x \in x_{доп}. \quad (5.7)$$

Критериальная поверхность отклика для экстремальной задачи в общем случае нелинейная.

### 5.3. Безусловная оптимизация

Поиск оптимального параметра осуществляется по экстремуму критериальной или целевой функции с общим обозначением  $F(x)$ .

Если функция одномерная, то задача сводится к поиску экстремума аналитически заданной функции  $F(x)$ .

Условие наличия экстремума:

$$dF/dx=0. \quad (5.8)$$

Из этого уравнения определяется значение  $X_{opt}$ .

Причем экстремум есть минимум, если вторая производная

$$\frac{d^2F}{dx^2} > 0 \text{ и максимум, если } \frac{d^2F}{dx^2} < 0. \quad (5.9)$$

Для многомерных задач условия экстремума выражаются через градиент:

$$grad\{F(\bar{x})\}_{x=\bar{x}^*} = 0. \quad (5.10)$$

Условие минимума, если матрица Гессе  $H(x)$  – положительно **определённая** матрица, и максимум, если матрица Гессе – отрицательно определённая матрица.

Матрица Гессе  $H(x)$  составлена из вторых производных функции  $F(x)$ :

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \quad (5.11)$$

К задаче безусловной оптимизации сводятся многие задачи математического программирования.

### 5.4. Математическое программирование

**Математическим программированием** называют область математики, рассматривающая вопросы теории и методологии

задач условной оптимизации [16].

В зависимости от вида функций  $Kp(\bar{X})$ ,  $\bar{\varphi}(\bar{X})$ ,  $\bar{\psi}(\bar{X})$  различают линейное и нелинейное программирование.

**Линейное программирование** – поиск наилучшего варианта при линейной критериальной функции  $Kp(\bar{X})$ , не имеющей явного экстремума. Оно является частным случаем оптимизационных задач. Получило распространение в экономике и бизнесе.

При линейном программировании ищется условный локальный экстремум с учетом линейных ограничений.

Задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом: найти такое значение независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , для которых линейная целевая функция с коэффициентами веса  $p_i$ :

$$U = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n. \quad (5.12)$$

принимает экстремальное значение на множестве точек, координаты которых удовлетворяют условиям 2-х типов: в виде функциональных неравенств:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq c_1 \quad (5.13)$$

или простых ограничений:

$$x_i < x_{i0}, \quad i=1, \dots, n. \quad (5.14)$$

По умолчанию предполагается, что все  $x_i > 0$ .

### Типы задач линейного программирования (ЗЛП).

1. Задача использования ресурсов (составить план выпуска продукции из имеющихся ресурсов, дающий максимальную прибыль).

2. Задача о смесях (составить питательную смесь из имеющихся компонентов, чтобы получить для реализации продукцию максимальной стоимости).

3. Задача о загрузке оборудования (какое количество оборудования необходимо поставить, чтобы выполнить производственное задание при  $\min$  затратах).

4. Задача о планировании производства (составить план работы, определив, сколько и каких изделий должно выпускать производство, чтобы получить  $\max$  эффект).

5. Задача о перевозках (составить план перевозок между объектами при минимальных затратах).

6. Задача о коммивояжере (найти маршрут поездок по  $n$  городам с минимальными затратами (одна поездка в каждый город)).

**Нелинейное программирование** – решение задачи условной оптимизации, если хотя бы одна из критериальных  $Kp(\bar{X})$

или ограничительных  $\bar{\varphi}(\bar{X})$ ,  $\bar{\psi}(\bar{X})$  функций нелинейна.

Решение задач нелинейного программирования зависит от класса разработанной модели, вида и количества ограничений.

Определение оптимальных параметров при однокритериальной условной оптимизации проводится в следующей последовательности:

- 1) формулировка задачи;
- 2) разработка математической модели;
- 3) выбор управляемых параметров  $x_i$ ;
- 4) формирование целевой функции  $\zeta(X)$ ;
- 5) формирование критерия  $Kp(X)$ ;
- 6) формирование ограничений;
- 7) применение процедур или алгоритмов решения.

Для решения применяют различные процедуры и алгоритмы численных решений на ЭВМ (программы оптимизации).

Обычно задачи условной оптимизации сводят к задачам безусловной оптимизации с помощью штрафных функций или множителей Лагранжа.

## 5.5. Модели многокритериальной оптимизации

Всесторонняя оценка эффективности и качества всего объекта требует использования множества критериев. Задача оптимизации в этом случае становится **многокритериальной**.

В многокритериальных задачах критерий векторный. Это создает проблему формирования целевой функции. Обычно критерии **конфликтные**, т.е. улучшение одного из критериев приводит к ухудшению других. Непосредственное их использование в алгоритме оптимизации невозможно, возможно лишь компромиссное решение.

При решении многокритериальной задачи строят скалярную обобщенную целевую функцию, учитывающую все критерии по мере возможности. Это сводит задачу к однокритериальной. Процесс построения скалярной целевой функции при многокритериальной оптимизации называется **сверткой векторного критерия**.

Принцип построения свертки векторного критерия называют стратегией решения многокритериальной задачи оптимизации. Различают следующие виды стратегий: **стратегия частного критерия; стратегия взвешенной аддитивной компенсации противоречий критериев; стратегия мультипликативной**

компенсации противоречий критериев; максиминная стратегия. [1, гл. 12].

**Стратегия оптимально-компромиссного решения на основе точек Парето множеств.** Множество  $\bar{X}_{эф}$  составляет область, границы которого получают соединением точек экстремумов функций  $F_i(\bar{X})$  и точек касания линий равного уровня функций. На рис. 5.6 показано множество  $\bar{X}_{эф}$  для случая трех критериев.

Для точек Парето целевая функция строится по условию

$$F(\bar{X}_{yó}) = \sum_{j=1}^m c_j F_j(\bar{X}_{yó}), \quad (5.15)$$

где  $c_j$  – коэффициент веса, характеризующий значимость  $j$ -го критерия;  $m$  – количество критериев оптимальности.

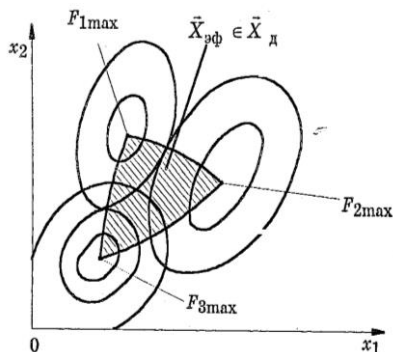


Рис. 5.6. Область точек Парето в трехкритериальной задаче

Коэффициенты веса выбирают из условия

$$\sum_{j=1}^m c_j = 1, c_j > 0, \quad (5.16)$$

Построение области точек Парето встречает трудности.

**Стратегия частного критерия.** В качестве целевой функции принимают один из критериев оптимальности, характеризующий важнейшее его качество, и поэтому наиболее значимый. Все остальные критерии оптимальности используются для назначения ограничений.

**Стратегии аддитивной и мультипликативной компенсации противоречий критериев** используют весовые коэффици-



енты и имеют недостаток: улучшение одних критериев достигается за счет бесконтрольного ухудшения других.

**Максиминная стратегия.** В ее основе лежит идея добиваться максимума того критерия, который минимально удовлетворяет техническим требованиям на машину. Обычно технические требования составляют множество  $T_j$ , предъявляемого к выходному параметру  $y_j$ ;  $J = 1, N$ .

Количественная оценка степени выполнения технического требования  $T_j$ :

$$S_j(\vec{X}) = [T_j - F_j(\vec{X})] / |T_j|, \quad (5.17)$$

где  $F_j(\vec{X})$  – значение  $j$ -го критерия оптимальности, вычисляемое на каждом шаге процесса поиска.

В качестве целевой функции принимаем те из них, которые оказываются наименьшими:

$$F(\vec{X}) = \min_{j \in [1:M]} S_j(\vec{X}). \quad (5.18)$$

Поскольку требуется ее максимизация, то задача поиска формулируется так:

$$\max_{X \in X_d} \min_{j \in [1:M]} S_j(\vec{X}), \quad (5.19)$$

где  $\vec{X}_d$  – допустимая область в пространстве управляемых параметров.

Максиминная стратегия решения многокритериальных задач лишена недостатков, присущих рассмотренным выше стратегиям. При ее использовании происходит выравнивание оценок степени выполнения технических требований  $S_j(\vec{X})$ . В этом существенное преимущество максиминной стратегии.

Все эти стратегии пригодны только для численных решений на ЭВМ. Программы оптимизации имеют пакеты MatCAD, Matlab и др.

Большинство современных компьютерных программ оптимизации используют методы поисковой оптимизации. Поиск экстремума осуществляется пробными шагами в пространстве параметров и выбором наилучшего. В зависимости от использования производных целевой функции различают методы нулевого, первого и второго порядка.

Методы нулевого порядка производных не используют: это метод покоординатного спуска, случайного поиска, вращающихся координат, сопряжённых направлений, метод многогранника.

Методы первого порядка (градиентные) используют первую производную: метод градиента, сопряжённых градиентов,

наискорейшего спуска, переменной метрики.

Методы второго порядка используют вторую производную: метод Ньютона, метод Марквардта.

Подробно методы поисковой безусловной оптимизации изложены в учебнике [1, п.12.9-12.11]. Выбирается тот, который даст требуемую точность в условиях конкретной задачи.

## 5.6. Метод неопределённых множителей Лагранжа

Из аналитических методов решения задачи условной оптимизации в СХП применим метод неопределённых множителей Лагранжа [1, п.12.11.3].

Пусть задача требует оптимизировать многопараметрическую критериальную функцию  $F(\bar{X})=F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Необходимо найти экстремум при  $m$  ограничениях типа равенств:

$$\psi_j = \psi_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad j = 1, m. \quad (5.20)$$

Согласно методу к этим уравнениям добавляются  $n$  уравнений вида:

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \psi_j}{\partial X_i} = 0, \quad i=1, n, \quad (5.21)$$

где  $\lambda_j$  – неопределённые множители Лагранжа.

Имеем  $m + n$  уравнений для  $m + n$  неизвестных.

Решив совместно уравнения, получаем  $n$  значений вектора  $\bar{X}_{\text{опт}}$  и  $m$  значений неопределённых множителей.

Метод применим только для ограничений типа равенств.

## ЧАСТЬ 6. АПРИОРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 6.1. Факторная модель эксперимента

Вышеизложенные математические модели теоретического характера сложно получать, нужно иметь достаточно высокую квалификацию по математике.

На практике для описания сельскохозяйственных процессов широко применяется экспериментальное моделирование, целью которого является получение информации об объекте без теоретических изысканий. Путем проведения его пробного функционирования происходит получение априорной информации, которую называют экспериментальной.

**Эксперимент** – это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте.

Описание процедур, операций, воздействий и получения наблюдений с указанием применяемых технических средств (измерительных приборов) называется методикой эксперимента.

**Опыт** – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях с регистрацией его результатов. Опыт – отдельная элементарная часть эксперимента.

Различают эксперименты пассивные и активные.

**Пассивным** называется такой эксперимент, когда значениями факторов не управляют, и они принимают случайные значения в режиме нормального функционирования машины. Достоинства: не требуется специальных устройств для задания  $X$  и  $Z$ .

**Активным** называется эксперимент, когда значения факторов нужного уровня задаются искусственно с помощью специальных устройств в соответствии с планом эксперимента.

Преимущества: четко различимые ситуации; повышенная точность; гарантирование полноты эксперимента. В СХП широко распространены.

Перед проведением эксперимента необходимо составить представление о числе учитываемых факторов [1, п. 11.1].

Для учета факторов строят факторную модель в виде «черного ящика» (рис. 6.1).

Переменные факторы на входе делят на управляемые  $X$  и неуправляемые  $Z$ . Кроме того, учитывают различные помехи: случайные и систематические в виде вектора  $\epsilon$ , на выходе – выход-

ной фактор  $Y$ .



Рис. 6.1. Факторная модель эксперимента

Управляемые переменные  $X$ , как правило, детерминированные.

Неуправляемые переменные  $Z$  – контролируемые, но не управляемые, могут изменяться случайным образом.

$\varepsilon$  – это переменные неконтролируемые и неуправляемые, действующие бесконтрольно. Они могут быть случайными помехами, ошибками измерения, погрешностью приборов.

Пространство контролируемых параметров называется факторным пространством.

К факторам в активном эксперименте предъявляются ряд требований. Они должны быть:

- 1) **управляемыми** (допускать установку заданных значений и поддержание их постоянными в процессе опыта);
- 2) **совместимыми** (их взаимное влияние не должно нарушать процесс функционирования объекта);
- 3) **независимыми** (уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных);
- 4) **однозначными** (одни факторы не должны быть функцией других);
- 5) **непосредственно влияющими на выходные параметры.**

Функции отклика должны быть: **численно измеряемыми, иметь четкий физический смысл; однозначными (характеризовать только одно свойство объекта); информативными (полностью характеризовать определенное свойство объекта); статистически эффективными (измеряться с достаточной точностью).**

Целью эксперимента является установление математических зависимостей между факторами  $X$ ,  $Z$  и откликом  $Y$ . Структура этой зависимости может задаваться заранее.

## 6.2. Регрессионные модели

При построении экспериментальной математической модели структуру её выражения обычно выбирают заранее на основе априорной информации об объекте. Такие экспериментальные факторные модели называют регрессионными моделями. Регрессионную модель задают выражением простой структуры вида

$$\bar{Y} = \varphi(\bar{x}, \bar{z}, \bar{b}) + \varepsilon, \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{b}$  – вектор параметров факторной модели.

Они и подлежат определению в результате эксперимента, проводимого в условиях действия помехи  $\varepsilon$ .

Регрессионные модели по сравнению с теоретическими имеют ряд достоинств: не требуют знания физических законов; достаточно простые методы формализации; имеют более доверительный характер; отсутствует излишнее абстрагирование.

Регрессионные модели удобны для описания СХП. При построении функции  $\varphi(x)$  принято пользоваться набором удобных функций  $f_i(x)$ , называемых базисными:

$$\varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^d \beta_i * f_i(\bar{x}), \quad (6.2)$$

где  $\beta_i$  – веса базисных функций (коэффициенты).

В качестве базисных функций применяют простые полиномы, ортогональные полиномы Лежандра, Эрмита, Лаггера, тригонометрические и другие функции.

В СХП чаще используют в качестве базисных полиномы I и II степени. Тогда регрессионные зависимости упрощаются.

Регрессионное уравнение I порядка – линейная регрессионная модель:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i * x_i. \quad (6.3)$$

Регрессионное уравнение II порядка – нелинейная регрессионная модель:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i * x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} * x_i * x_j. \quad (6.4)$$

### 6.3. Планирование эксперимента

**Планирование эксперимента** – назначение числа, порядка опытов и условий их проведения в активном эксперименте, удовлетворяющих поставленным целям [1, п.11.3].

Цель планирования эксперимента – получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов. Для её достижения используются следующие принципы:

отказ от полного перебора всех возможных состояний объекта; постепенное усложнение структуры математической модели; сопоставление результатов с величиной случайных помех; рандомизация систематически действующих помех; оптимальное планирование эксперимента.

**План эксперимента** – совокупность данных, определяющих число, условие и порядок реализации опытов в активном эксперименте.

**Точка плана** – упорядоченная совокупность численных значений факторов при проведении опыта, т.е. одна точка факторного пространства, в которой проводится эксперимент. Точка плана с номером  $i$  описывается вектор-строкой  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ .  $i = 1 \dots n$ .

$$\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}) \quad (6.5)$$

Общая совокупность таких векторов при  $i = 1, L$ , образует план эксперимента  $[X]$ .

$$[X] = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \dots \\ \vec{X}_i \\ \dots \\ \vec{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{Nj} & \dots & X_{Nn} \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

где  $N$  – число разных строк;  $n$  – число факторов – столбцы;  $L$  – число строк-экспериментов;  $L > N$ .

Совокупность неповторяемых векторов « $x$ » носит название *спектра плана*.

Фиксированное значение фактора в активном эксперименте называют *уровнем фактора*. Различают минимальный  $X_j \min$  и максимальный  $X_j \max, j = 1, \bar{n}$ . Уровни всех факторов выделяют в фак-

торном пространстве некоторый гиперпараллелепипед, представляющий собой **область планирования**.

Центр планирования (центр плана) задаётся вектором

$$\overline{X}_0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0), \quad (6.7)$$

где координаты  $X_j^0$  выбирают из соотношения

$$\overline{X}_j^0 = (X_{j_{\max}} + X_{j_{\min}}) / 2. \quad (6.8)$$

**Интервал (или шаг) варьирования фактора  $X_j$ :**

$$\Delta X_j = (X_{j_{\max}} - X_{j_{\min}}) / 2, j = \overline{1, n}. \quad (6.9)$$

Факторы нормируют на основе соотношения

$$x_j = (X_j - X_j^0) / \Delta X_j, j = \overline{1, n}. \quad (6.10)$$

Уровни факторов кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний -1, а основной 0.

**Интервалом (или шагом) варьирования фактора  $X_j$  является**

$$\Delta X_j = (X_{j_{\max}} - X_{j_{\min}}) / 2, j = \overline{1, n}. \quad (6.11)$$

Значения базисных функций во всех опытах представляют собой матрицу  $[F]$ , называемую *матрицей базисных функций*:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N1} & f_{N2} & \dots & f_{Nn} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Матрица базисных функций  $[F]$  придаёт регрессионному уравнению (6.3) компактную форму:

$$Y = [F] \overline{b}. \quad (6.13)$$

Для моделей I и II порядка все базисные функции равны 1.

В этом случае с учётом кодирования матрица базисных функций  $[F]$ , как и матрица плана  $[X]$ , и будут состоять из 1, -1, 0. Матрица базисных функций  $[F]$  отличается от матрицы спектра плана  $X$  только одним дополнительным столбцом, соответствующим базисной функции  $f_0 = (X) = 1$ . Например:

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & +1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & +1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ +1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Матрицы плана создаются теоретически так, чтобы удовлетворить разным требованиям точности и удобства вычислений. К настоящему времени разработано множество различных планов.

Наиболее употребительны планы первого порядка  $+1; -1$ .

Они используются при построении линейных моделей (регрессий первого порядка) или нелинейных без квадратов факторов, когда каждый фактор можно варьировать только на двух уровнях.

Разновидности планов первого порядка:

*однофакторного эксперимента;*

*полного факторного эксперимента;*

*дробного факторного эксперимента.*

*Однофакторный* планы предусматривает поочередное варьирование каждого из факторов при фиксированных значениях остальных факторов.

$$x_c = \begin{bmatrix} + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Число точек плана в этом случае  $N = 2n$ , где  $n$  – количество факторов. Планы имеет низкую точность.

Матрица  $F$  значений базисных функций отличается от матрицы спектра плана  $X$  только одним дополнительным столбцом, соответствующим базисной функции  $f_0 = (X) = 1$ .

**Полнофакторный план.** Спектр плана полного факторного эксперимента (ПФЭ) содержит все возможные комбинации значений факторов на всех уровнях их изменения. Число точек  $N$  спектра плана определяется по формуле

$$N = U^n, \quad (6.16)$$

где  $U$  – число уровней варьирования факторов;  $n$  – количество



факторов.

Тогда число точек спектра плана

$$N = 2^n. \quad (6.17)$$

Эти планы учитывают все комбинации факторов, но они неэкономичны. Увеличение количества факторов приводит к быстрому росту числа опытов. Например, при  $n = 10$  спектр плана содержит  $N = 2^{10} = 1024$  опыта.

На практике применяют дробные планы типа, т.е. где  $n$  – число факторов,  $p$  – степень дробности ДФЭ. Дробные планы принято называть *репликами* с указанием их степени дробности. Их число опытов:

$$N = 2^{n-p}; \quad (6.18)$$

Если  $p=1$ , то – это полуреплика, если  $p=2$ , то четверть реплики, если  $p=3$ , то 1/8 реплики. Полуреплика сокращает число опытов в два раза по сравнению с ПФЭ, 1/4-реплика – в четыре раза и т.д.

Если в регрессионную модель входят факторы в квадрате или с более высокими степенями, то необходимо не менее трех уровней варьирования факторов. При построении квадратичных моделей применяют **планы второго порядка**.

**План называют насыщенным**, если общее число точек плана равно числу неизвестных параметров регрессионной модели. Такой план обеспечивает минимум числа опытов.

**План называется композиционным**, если в его спектр в качестве составной части входят точки спектра другого плана.

*Ортогональность* плана у ортогональных планов столбцы матрицы базисных функций  $F$  попарно ортогональны, дисперсии  $\sigma_{b_k}^2$  оценок коэффициентов регрессии  $b_k$  минимальны и независимы, что существенно облегчает их вычисление и анализ.

По форме эллипсоидов рассеивания оценок дисперсии коэффициентов регрессии различают *D*-, *A*- и *E*-оптимальные планы.

*D*-оптимальный план обеспечивает минимальный объем эллипсоида их рассеивания.

*A*-оптимальный план минимизирует среднюю дисперсию всех оценок, а эллипсоид имеет наименьшую сумму квадратов длин осей.

Эллипсоид рассеивания у *E*-оптимального плана имеет минимальную длину своей наибольшей оси.

В зависимости от возможностей предсказания отклика по уравнению регрессии различают планы **ротатабельные и униформные**.

План называется ротатбельным, если дисперсия предсказания отклика постоянна на фиксированном расстоянии от центра эксперимента.

Униформный план обеспечивает практически постоянное ее значение в некоторой области факторного пространства.

Поиск оптимальных планов обычно осуществляется численными методами на ЭВМ.

## 6.4. Регрессионный анализ

**Регрессионный анализ** – это анализ точности и пригодности выбранной регрессионной модели для описания изучаемого процесса [1, п. 11.4]. Регрессионный анализ включает:

- 1-статистический анализ результатов эксперимента;
- 2-получение оценок коэффициентов регрессии;
- 3-оценку адекватности и точности модели.

Исходными данными является кодированная матрица базисных функций  $[F]$  и столбцы результатов измерений значений отклика в  $m$  повторностях  $Y_{ik}$ ,  $i=1, \dots, N$ ;  $k=1, \dots, m$ .

Матрица  $[F]$  в кодированной форме представляет матрицу планирования  $[X]$  с добавлением первого столбца из единиц.

Например, для трёхфакторной модели получаем таблицу

Номер опыта	Матрица $[F]$				Результаты измерений		
1	1	1	1	1	$Y_{11}$	$Y_{21}$	$Y_{31}$
2	1	-1	1	1	$Y_{12}$	$Y_{22}$	$Y_{32}$
3	1	1	-1	1	$Y_{13}$	$Y_{23}$	$Y_{33}$
4	1	-1	-1	1	$Y_{14}$	$Y_{24}$	$Y_{34}$
5	1	1	1	-1	$Y_{15}$	$Y_{25}$	$Y_{35}$
6	1	-1	1	-1	$Y_{16}$	$Y_{26}$	$Y_{36}$
7	1	1	-1	-1	$Y_{17}$	$Y_{27}$	$Y_{37}$
8	1	-1	-1	-1	$Y_{18}$	$Y_{28}$	$Y_{38}$

Матрица не должна иметь одинаковых или противоположных столбцов. Коэффициенты регрессии, соответствующие этим столбцам, оказываются коррелированными, и имеет место смешанная оценка. Такой план непригоден для получения регрессии заявленной структуры. Для выяснения наличия смешивания используют метод определяющих контрастов [см. 1, п.11.16]. Проверку на смешивание следует проводить для дробных планов. Типовые полные планы обычно смешивания не имеют.

**Статистический анализ.** Проверяем полученный массив значений отклика на наличие ошибок. Число опытов  $N$ , число повторностей каждого опыта  $m$ .

**Среднее выборочное значение** для каждого опыта:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} * \sum_{u=1}^m y_{iu}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (6.19)$$

Определяем **дисперсию воспроизводимости опыта**.

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} * \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2; \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.20)$$

где  $S$  – среднее квадратическое значение.

**Отсевание грубых ошибок** по  $t$ -критерию Стьюдента:

$$t_{iu} = \frac{y_{iu} - y_i^*}{S_i}. \quad (6.21)$$

Здесь значения  $S_i^*$  и  $y_i^*$  определяют по тем же формулам (6.19) и (6.20), но без учёта оцениваемого опыта. Полученное значение сравнивают с табличным значением  $t_T$  при выбранном уровне значимости  $q$  и числе степеней свободы  $k = m - 1$ . Для большинства технических средств  $q = 0,05$ . Если  $t_{iu} > t_T$ , то опыт бракуется, и он должен быть повторён.

**Проверка однородности дисперсии.** Используется или критерий Кохрена, или критерий Фишера.

Критерий Кохрена вычисляют по формуле

$$G = \frac{S_{i_{\max}}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2}. \quad (6.22)$$

Его сравнивают с табличным значением  $G_T$  для двух степеней свободы  $k_1 = m - 1$ ;  $k_2 = N$ . Если  $G < G_{\text{табл}}$ , то гипотеза об однородности и воспроизводимости дисперсий принимается. Если  $G > G_{\text{табл}}$ , то полученные данные имеют неприемлемые неточности; необходимо или увеличить число повторностей опытов  $m$ , или провести измерения с большей точностью.

Критерий Фишера

$$F = S_{\max}^2 / S_{\min}^2. \quad (6.23)$$

Дисперсии считаются однородными, если  $F < F_T$ , где  $F_T$  – табличное значение критерия Фишера при числе степеней свободы  $k_1 = m - 1$ ;  $k_2 = N$  и принятом уровне значимости  $q$ .

**Дисперсия воспроизводимости всего эксперимента получается усреднением  $S_i^2$ :**

$$S_y^2 = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N S_i^2, \quad (6.24)$$

при числе степеней свободы  $k = N(m - 1)$ .

После всех проверок формируется вектор средних выборочных

значений  $\bar{Y} = \{y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , называемый вектором эмпирических значений.

**Определение коэффициентов регрессий.** Определяется информационная матрица Фишера:

$$I = F^T * F. \quad (6.25)$$

Определяется дисперсионная матрица:

$$D = (F^T * F)^{-1}. \quad (6.26)$$

Вектор параметров определяется по формуле

$$\bar{b} = D * F^T * \bar{Y}. \quad (6.27)$$

**Дисперсия оценок j-го коэффициента регрессии** определяется по дисперсии воспроизводимости всего эксперимента:

$$S_{bj}^2 = \frac{S_y^2}{Nm}. \quad (6.28)$$

**Значимость j-го коэффициента регрессии** определяется по t-критерию Стьюдента:

$$t_j = \frac{|b_j|}{S_{bj}^2}; \quad j=0 \dots n_b-1. \quad (6.29)$$

Эти значения сравниваются с табличными при уровне значимости  $q$  и числе степеней свободы  $k=N(m-1)$ . Если  $t < t_{\text{табл}}$ , то нулевая гипотеза о незначимости  $b_j$  принимается и данный коэффициент регрессии не учитывается. Если  $t > t_{\text{табл}}$ , то нулевая гипотеза отвергается и коэффициент регрессии  $b_j$  значим.

Доверительный интервал коэффициента регрессии

$$\varepsilon_{b_j} = \pm t_T * S_{b_j}. \quad (6.30)$$

По уравнению регрессии с найденными коэффициентами  $b_j$  определяются для каждого опыта расчётные значения  $\hat{Y}$ .

Проверка адекватности регрессионной модели. Адекватность оценивается по степени расхождения эмпирических  $\hat{Y}$  и расчётных  $\hat{Y}$  значений. Степень расхождения оценивают по дисперсии адекватности:

$$S_{aa}^2 = \frac{m}{N - n_b} * \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2. \quad (6.31)$$

Проверку гипотезы об адекватности модели выполняют по критерию Фишера:

$$F = \frac{S_{ag}^2}{S_g^2}. \quad (6.32)$$

Полученную статистику  $F$  сравнивают с табличным значением критерия Фишера  $F_{\text{табл}}$  при уровне значимости  $g$  и числе степеней свободы  $k_1 = N - n_b$ ;  $k_2 = N(m - 1)$ . Если  $F < F_{\text{табл}}$ , то модель считается адекватной (пригодной). При  $F > F_{\text{табл}}$  адекватность отвергается и модель непригодна. Нужно или изменить структуру модели или уменьшить интервалы варьирования факторов. В любом случае эксперимент необходимо проводить заново.

## 6.5. Модели аппроксимации

Аппроксимацией называют приближённое представление результатов измерения двух зависимых величин подходящей аналитической зависимостью типа  $y = f(x)$ . Такая зависимость называется аппроксимирующей. Существуют типовые зависимости для аппроксимации СХП [4]. Они приведены на рис. 6.2.

Подбор аппроксимирующей зависимости под серию измерений может рассматриваться как частный случай регрессионного анализа и использовать аппарат регрессии.

В отличие от регрессионного анализа аппроксимация всегда однофакторная. В качестве исходных данных приводится только два ряда значений: значения факторной (независимой) переменной  $x$  и значения зависимой переменной  $y$ .

Искомая аппроксимирующая функция  $\varphi$  – аналог уравнения регрессии (6.1):

$$\bar{Y} = \varphi(\bar{x}, \bar{b}). \quad (6.33)$$

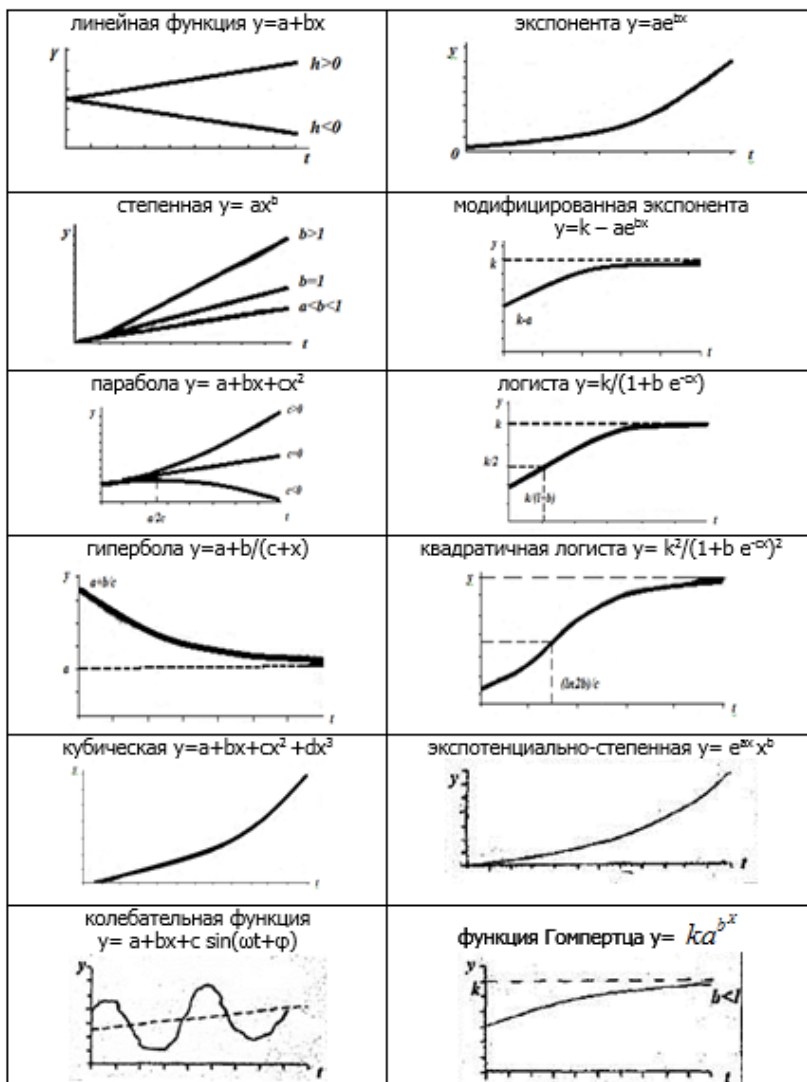


Рис. 6.2. Типовые кривые для аппроксимации

Структуру аппроксимирующей функции  $\varphi$  выбирают по виду исходного тренда. Исходным трендом называют график, соединяющий точки результатов измерения. Обычно это ломаная кривая. На неё накладывается подходящая типовая кривая  $y=f(x)$ .

Слагаемые выбранной аппроксимирующей функции принимают за базисные функции  $f_1, f_2, \dots$ . Например, у линейной функции  $y=a+bx$ ;  $f_1=a$ ;  $f_2=bx$ . Затем формируют таблицу исходных данных

с матрицей планирования  $[F]$ . Факторы не кодируют. Например, для трёх базисных функций:

Номер замеров	Переменная $x$	Матрица $[F]$			Зависимая переменная
		$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	
1	$x_1$	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$f_3(x_1)$	$y_{11}$
2	$x_2$	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_2)$	$y_{12}$
3	$x_3$	$f_1(x_3)$	$f_2(x_3)$	$f_3(x_3)$	$y_{13}$
4	$x_4$	$f_1(x_4)$	$f_2(x_4)$	$f_3(x_4)$	$y_{14}$
5	$x_5$	$f_1(x_5)$	$f_2(x_5)$	$f_3(x_5)$	$y_{15}$
6	$x_6$	$f_1(x_6)$	$f_2(x_6)$	$f_3(x_6)$	$y_{16}$
7	$x_7$	$f_1(x_7)$	$f_2(x_7)$	$f_3(x_7)$	$y_{17}$

По соотношениям регрессионного анализа (6.25), (6.26) определяется информационная матрица Фишера:  $I = F^T * F$ , дисперсионная матрица:  $D = (F^T * F)^{-1}$ .

Вектор параметров определяется по формуле

$$\bar{b} = D * F^T * \bar{Y}. \quad (6.34)$$

Степенные и экспотенциальные аппроксимирующие функции удобнее приводить к линейному виду логарифмированием. Например, для экспотенциальной функции  $y = ae^{bx}$  после логарифмирования получаем:

$$\lg y = \lg a + b * x * \lg e. \quad (6.35)$$

Тогда  $f_1 = \lg a$ ;  $f_2 = x * \lg e$ . Столбец зависимых переменных логарифмируют – в него вносят  $\lg y$ .

Для небольшого числа измерений вычисления можно проводить, не прибегая к матричным представлениям. Коэффициенты  $b_i$  находят решением  $N$  алгебраических уравнений. Пример таких вычислений см. [4, с. 25-26].

Задачи аппроксимации кривых используют метод наименьших квадратов, который хорошо компьютеризирован в среде Excel, MatCAD, Matlab и др.

## 6.6. Метод анализа размерностей

Для моделирования явлений с неявной физической природой (например, резание почв), когда уравнение задачи отсутствует, можно применять для получения ММ **метод анализа размерностей**.

Для его применения достаточно априорной информации о влиянии физических величин на процесс. Пусть по априорной информации показатель процесса  $Y$  существенно зависит от  $n$  факторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Требуется найти зависимость как ММ.

Используется тот факт, что в системе СИ основными единицами является масса [М], длина L, время T, а остальные величины выражаются через них. Тогда размерность i-й величины можно представить выражением со степенями размерностей  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ :

$$[P_i] = [L]^{\alpha_i} [M]^{\beta_i} [T]^{\gamma_i}. \quad (6.36)$$

Согласно второй теореме подобия полное уравнение процесса, записанное в определённой системе единиц, может быть представлено в виде зависимости между безразмерными критериями подобия из входящих в уравнение параметров. Структура критерия строится степенным произведением степеней факторов:

$$P = P_1 z_1^{z_1} P_2 z_2^{z_2} \dots P_n z_n^{z_n}. \quad (6.37)$$

Выражая размерность каждого фактора через основные единицы по соотношению (6.36), получим:

$$P = k [L]^{(\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n)} [M]^{(\beta_1 z_1 + \dots + \beta_n z_n)} [T]^{(\gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_n z_n)}, \quad (6.38)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Так как критерии подобия должны быть безразмерные, то получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n &= 0; \\ \beta_1 z_1 + \dots + \beta_n z_n &= 0; \\ \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_n z_n &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Система является недостаточной, она имеет три уравнения для n неизвестных  $z_i$ . Недостающие уравнения находят на основе допущений и экспериментальным путем.



## ЧАСТЬ 7. ТИПОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

### 7.1. Моделирование процессов движения наземных транспортно-технологических средств

Любые НТТС, в том числе СХМ, должны передвигаться по дорогам и полям со сложным рельефом и большими нагрузками. К процессу движения НТТС предъявляется ряд требований по устойчивости движения и реакции на рельеф. В зависимости от назначения машины требования варьируются от полной нечувствительности к колебаниям рельефа до его точного копирования при гарантиях курсовой устойчивости.

#### 7.1.1. Моделирование курсовой устойчивости

В процессе движения на НТТС действуют случайные возмущения, способные нарушить движение в заданном направлении. Способность сохранять заданное направление движения, невзирая на возмущения, называется в автомобилях и судах курсовой устойчивостью. В НТТС эта проблема более выражена. Если у автомобилей возмущения нетехнологичны, идут от дороги и могут специально уменьшаться (плавный колёсный ход, асфальтированное покрытие и т.п.), то у НТТС они реализуют техпроцесс (например, почвообрабатывающие агрегаты) и нейтрализовать их недопустимо. В таких условиях курсовая устойчивость есть важное и специфичное требование к их движению в горизонтальной плоскости. Теорию курсовой устойчивости НТТС заложил Л.В. Гячев в ряде работ, начиная с 1976 г., называя её динамикой или механикой СХМ.

Изучая движение агрегатов, состоящих из движителя (трактора) и СХМ, Л.В. Гячев рассматривал прицепную машину как физический маятник (рис. 7.1.1), который колеблется в горизонтальной плоскости  $X_1O_1Y_1$  вокруг точки прицепа  $O$ , движущегося с постоянной скоростью  $V_0 = \text{const}$  [5].

Машина совершает сложное движение: переносное **поступательное** (прямолинейное и равномерное) и относительное вращательное вокруг точки прицепа  $O$ .

Равнодействующая сил сопротивления рабочих органов  $R$  приложена в точке  $D$ , называемой «центром сопротивления» и составляет угол  $\delta$  с осью машины  $OD$ . Она противоположна абсолютной скорости точки  $D$  и всегда постоянна по величине, т.е.  $|R|$

= const.

Рассмотрим текущее положение машины в плоскости  $XOY$ , когда продольная ось  $OD$  машины отклонена от направления переносной скорости  $V_0$  на угол  $\varphi$

Дифференциальное уравнение относительного колебания машины строим как для колебания маятника по принципу Даламбера:

$$I_o \ddot{\varphi} = \sum M_o (\bar{F}_i), \quad (7.1.1)$$

где  $I_o$  – момент инерции маятника относительно оси прицепа;  $\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение колебаний машины;  $M_o$  – момент сил относительно оси прицепа  $O$ .

Единственной силой, дающей момент относительно оси прицепа  $O$ , является сила  $R$  сопротивления рабочих органов.

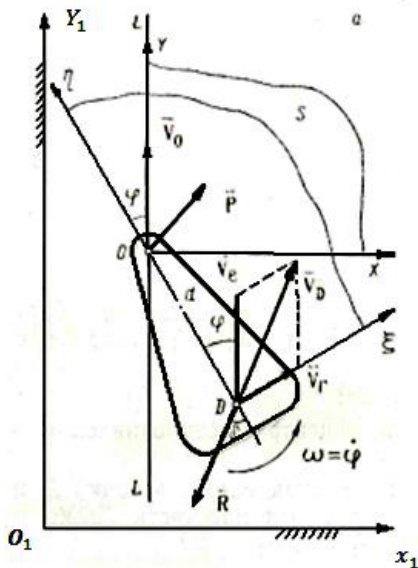


Рис. 7.1.1. Расчётная схема движения прицепной машины:  $O$  – точка прицепа;  $P$  – крюковое усилие;  $V_e = V_0$  – переносная скорость;  $V_D$  – переносная скорость «центра сопротивления»;  $V_r$  – относительная вращательная скорость «центра сопротивления»;  $d=OD$  – расстояние между точкой прицепа и центром сопротивления

Момент силы  $R$  относительно точки  $O$  (при  $\delta > 0$ )

$$M_o(\bar{R}) = Rd \sin \delta, \quad (7.1.2)$$

где  $d \sin \delta = h$  – плечо силы  $R$  относительно точки  $O$ .

Угол  $\delta$ , составленный силой  $R$  с продольной осью машины, можно выразить через проекции абсолютной скорости на оси координат  $V_\xi$ ,  $V_\eta$ , связанные с прицепной машиной. Будем считать угол  $\delta$  положительным, когда вектор  $V_d$  отклонен от оси машины против часовой стрелки; это связано с использованием здесь правой системы координат. Тогда

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{V_\xi}{V_\eta}; \quad \delta = \operatorname{arctg} \left( -\frac{V_\xi}{V_\eta} \right). \quad (7.1.3)$$

Выразим проекции скорости  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  через скорости, заданные в расчётной схеме. Абсолютная скорость точки  $D$  равна векторной сумме переносной  $V_0$  и относительной  $V_{DO}$  скоростей:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_i + \vec{V}_{DO}. \quad (7.1.4)$$

Окружная скорость  $V_{DO}$  связана с угловой  $\dot{\varphi}$ :

$$\vec{V}_{DO} = \dot{\varphi} d, \quad (7.1.5)$$

где  $d$  – расстояние точки  $D$  от оси прицепа.

Проекции векторного равенства (7.1.4) на оси  $\xi$  и  $\eta$ , связанные с прицепной машиной (см. рис. 7.1.1):

$$V_\xi = V_0 \sin \varphi + V_{DO}, \quad V_\eta = V_0 \cos \varphi. \quad (7.1.6)$$

Подставка этих выражений в уравнение (7.1.3), даёт

$$\delta = -\operatorname{arctg} \frac{V_0 \sin \varphi + \dot{\varphi} d}{\cos \varphi}. \quad (7.1.7)$$

Для малых амплитуд колебаний угол  $\varphi$  мал, и можно принять  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ , фактически линеаризуя задачу. Тогда:

$$\delta = -\frac{1}{V_0} (V_0 \varphi + \dot{\varphi} d). \quad (7.1.8)$$

Полученное выражение является уравнением кинематической связи координат системы неголономного типа. Подставив это выражение в (7.1.2) и учитывая малость угла  $\delta$ ,  $\sin \delta \approx \delta$ , Л.В. Гячевым получил выражение для момента сил:

$$M_0(\bar{R}) = -\frac{d}{V_0} (V_0 \varphi + \dot{\varphi} d) R. \quad (7.1.9)$$

Уравнение (7.1.1) колебаний машины относительно точки прицепа получает вид дифуравнения 2-го порядка:

$$I_o \ddot{\varphi} = -\frac{d}{V_0} (V_0 \varphi + \dot{\varphi} d) R. \quad (7.1.10)$$

Уравнение (7.1.10) можно считать математической моделью

движения прицепной машины в горизонтальной плоскости. Модель детерминированная, инвариантная, не всегда линейная.

Л.В. Гячев представил уравнение (7.1.10) в классической форме линейного однородного дифуравнения 2-го порядка:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad (7.1.11)$$

где все коэффициенты положительны:

$$n = \frac{Rd^2}{2I_0v_0} > 0; \quad k^2 = \frac{Rd}{I_0} > 0. \quad (7.1.12)$$

В коэффициенты входит внешняя нагрузка  $R$  – входной фактор задачи, считающийся постоянным; это не соответствует физике процесса и наряду с допущением о малости отклонений от равновесного состояния сильно обедняет ММ. Но для проверки на устойчивость линейного однородного уравнения достаточно.

Поскольку коэффициенты  $n$  и  $k^2$  положительны, то согласно положениям аналитической механики, движение машины в горизонтальной плоскости по Ляпунову всегда устойчиво.

Общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами по правилам математики имеет вид

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (7.1.13)$$

где  $\lambda_i$  – корни характеристического уравнения;

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0, \quad (7.1.14)$$

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}; \quad \lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}; \quad (7.1.15)$$

$C_1, C_2$  – неизвестные постоянные интегрирования. Они находятся из начальных условий: при  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ .

В зависимости от значений коэффициентов  $n$  и  $k$  дифуравнение (7.1.11) может иметь разные решения.

При  $n > k$  или  $Rd^3 > 4I_0v_0^2$  имеет место аperiodическое движение

$$\varphi = e^{-nt} [C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}], \quad (7.1.16)$$

колебания машины отсутствуют. Прицепная машина, выведенная из равновесного положения случайным импульсом, постепенно возвращается в равновесное положение без колебаний.

При  $n < k$  или  $Rd^3 < 4I_0v_0^2$  движение представляется затухающими колебаниями:

$$\varphi = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2}t). \quad (7.1.17)$$

После возмущений машина возвращается к равновесному состоянию, совершая затухающие колебания. Период и декремент

колебаний выразятся формулами:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}; \quad D = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}}. \quad (7.1.18)$$

При  $n=k$  или  $Rd^3=4I_0v_0^2$  система имеет равные корни и поворот машины относительно точки прицепа имеет вид предельного аperiodического движения

$$\varphi = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (7.1.19)$$

Равенство корней может наступить только при определённом значении силы сопротивления  $R$ , которая в реальном процессе непостоянна и зависит от угла поворота машины  $\varphi$ . Появление такого решения – следствие принятых автором допущений о постоянстве  $R$  и однородности дифференциального уравнения ММ.

### 7.1.2. Моделирование плавности хода

В теории НТТС распространена задача снижения вертикальных колебаний машины, обеспечения плавности хода при движении по неровностям рельефа. Для плавности хода машина должна сглаживать колебания рельефа, что в технике называют амортизацией. Амортизацию в современных НТТС осуществляют, применяя различные упругие элементы (резиновые шины, рессоры, пружины и др.).

Рассмотрим пространственное движение машины на резиновых шинах по неровностям поля [1, п.5.4]. Расчётная схема в отличие от схемы на рис. 3.1 принята одномассовой, без подрессоривания (рис. 7.1.2). Резиновые шины считаются упругими и диссипативными элементами по направлениям смещений точек  $A, B, C, D$  машины: вертикальных 1-4, курсовых 5-6, боковых 7-8.

Входными факторами являются кинематические воздействия  $\mathbf{u}_{в1}(\mathbf{t}), \mathbf{u}_{в2}(\mathbf{t}), \mathbf{u}_{в3}(\mathbf{t}), \mathbf{u}_{в4}(\mathbf{t})$  от неровностей поля, передающиеся на машину через упругие и диссипативные элементы колёс 1 – 4. Результат моделирования – колебания центра масс  $s_k(t), k=1, 2, 3$ . Движение машины относится к категории сложных: поступательное движение центра масс  $s_k(t)$  по трём осям координат  $x, y, z$  и относительное вращательное движение вокруг трёх осей – итого шесть степеней свободы.

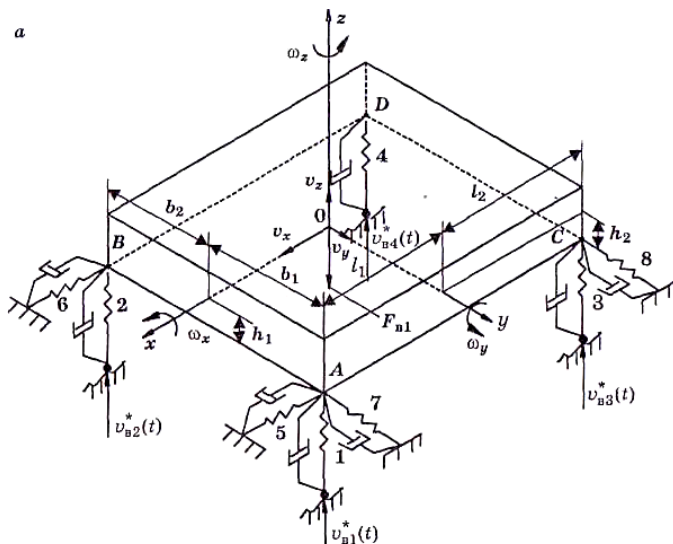


Рис. 7.1.2. Расчётная схема колебаний неподрессоренной машины на резиновых шинах

Полная динамическая модель тела включает инерционные, упругие и диссипативные компонентные уравнения.

**Инерционные компонентные уравнения** представляют систему из шести уравнений: три уравнения для поступательного движения центра масс тела и три уравнения для вращения тела вокруг центра масс:

$$F_{ik} = m \frac{d^2 s_k}{dt^2}, \quad k=x, y, z, \quad (7.1.20)$$

$$M_{ik} = \sum_j \delta_{jk} J_{jk} d\omega_j / dt, \quad k=x, y, z; j=x, y, z; \quad (7.1.21)$$

$\delta_{jk}=0$  при  $j=k$ ;  $\delta_{jk}=-1$  при  $j \neq k$ .

где  $F_{ik}$  – проекции силы инерции в переносном поступательном движении;  $M_{ik}$  – проекции момента сил инерции в относительном движении с угловыми скоростями  $\omega_j, j=x, y, z$ .

**Компонентные уравнения упругих элементов** системы для малых колебаний определяются через кинематические уравнения Эйлера (3.41). Специфика уравнений Эйлера (3.41) приводит к тому, что в компонентных уравнениях упругих элементов системы появляются переменные вращательного движения  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ :

для вертикальных упругих элементов 1 – 4:  
 $dF_{yi}/dt = c_i(u_{z0} + \omega_x y_i - \omega_y x_i - u_{vi}^*)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ; (7.1.22)

для горизонтальных упругих элементов 5 и 6:  
 $dF_{yi}/dt = c_i(u_{x0} + \omega_y z_i - \omega_z y_i)$ ,  $i = 5, 6$ ; (7.1.23)

для поперечных упругих элементов 7 и 8 :  
 $dF_{yi}/dt = c_i(u_{y0} + \omega_z x_i - \omega_x z_i)$ ,  $i = 7, 8$ . (7.1.24)

Здесь индекс  $i$  означает номер упругого элемента.

**Компонентные уравнения диссипативных элементов** аналогичны, поскольку они параллельны упругим элементам.

Компонентные уравнения преобразуют угловые скорости в линейную скорость точек тела подобно преобразованиям в трансформаторных элементах (ТЭ).

В итоге получаем инвариантную многомерную математическую модель одномассовой НТТС в виде громоздкой системы 17 дифференциальных и алгебраических уравнений [1, с.185, уравнения 5.70]. В то время как без учёта углов поворота одномассовая система описывалась тремя уравнениями, а двухмассовая – шестью.

### 7.1.3. Вероятностные модели упругой подвески

В зависимости от формы представления рельефа детерминированными или случайными функциями ММ колебаний НТТС от неровностей поля может быть детерминированной или статистической. Для статистических моделей принято в качестве результата получать вероятностные характеристики.

Рассмотрим вероятностную модель движения одноосного прицепа с упругой подвеской [11, Иванюк В. Х., 2005]. На рис. 7.1.3 показана одномассовая расчетная и эквивалентная схема прицепа. Массой и податливостью колёс пренебрегаем. Для простоты колебания кузова рассматриваем только по вертикали в одномерной постановке.

Упругая подвеска колёс имеет жёсткость  $C$ , затухание  $k$ . Неровности задаются профилограммой – случайной функцией от пути  $h(x)$ . При движении колёс по неровностям подвеска деформируется. Её допустимый динамический ход обозначен  $f_d$ . Рекомендуется оставлять  $f_d = (0.5...0.6)f_c$ , где  $f_c$  – статический прогиб подвески.

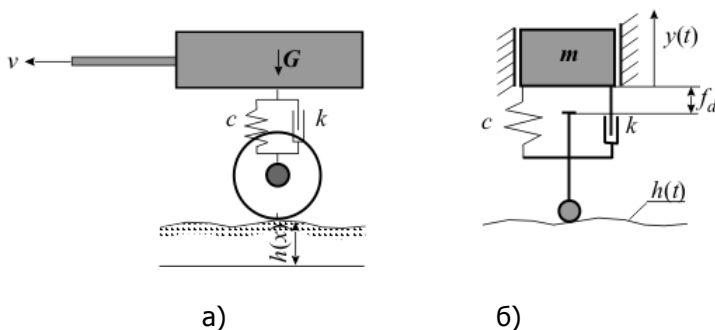


Рис. 7.1.3. Расчётная (а) и эквивалентная (б) схемы подвески

Корреляционная функция неровностей дороги описывается выражением

$$K(x) = D_d e^{-\alpha|x|} \cos \beta x. \quad (7.1.25)$$

Этой корреляционной функции соответствует спектральная функция

$$S(v, \omega) = \frac{\alpha D_d}{\pi v} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha^2 + \left(\beta - \frac{\omega}{v}\right)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \left(\beta + \frac{\omega}{v}\right)^2} \right]. \quad (7.1.26)$$

На рис. 7.1.4 приведены результаты расчета спектральной плотности при трех скоростях движения прицепа. С увеличением скорости движения график  $S(v, \omega)$  растягивается по горизонтали и сокращается по вертикали (при этом площадь под кривой  $S(v, \omega)$ , равная дисперсии  $D_d$ , остается постоянной).

Уравнение движения прицепа в канонической форме имеет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p^2 y = 2nh(t) + p^2 h(t). \quad (7.1.27)$$

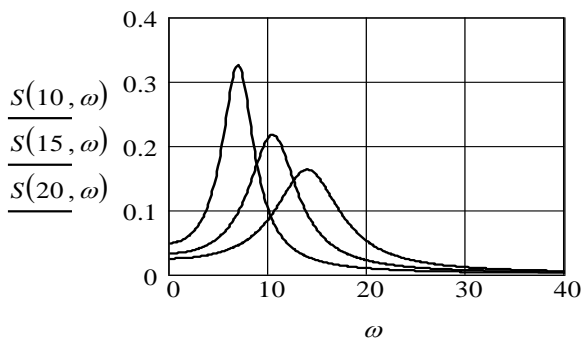


Рис. 7.1.4. Спектральные плотности колебаний



при разных скоростях

Решение уравнения (7.1.27) следует искать в виде

$$y = Ae^{i\omega t}, \quad h(t) = h_0 e^{i\omega t}. \quad (7.1.28)$$

Подстановка выражений (7.1.28) в уравнение (7.1.27) даёт частотную характеристика системы  $W(\omega)$

$$W(\omega) = \frac{p^2 + 2n(i\omega)}{p^2 - \omega^2 + 2n(i\omega)}. \quad (7.1.29)$$

Спектральная плотность перемещений кузова прицепа вычисляется по формуле

$$Sv(v, \omega) = |W(\omega)|^2 S(v, \omega). \quad (7.1.30)$$

На рис. 7.1.5 приведен график спектральной плотности, соответствующий скорости движения прицепа 36 км/час. На графике просматриваются два максимума, первый из которых соответствует максимуму спектральной плотности дороги, другой – максимуму передаточной функции. Второй максимум доминирует, т. е. система работает как механический фильтр, пропуская частоты возмущения, близкие к ее собственной частоте.

Дисперсия колебаний прицепа равна площади под кривой спектральной плотности

$$D(v) = \int_0^{\infty} Sv(v, \omega) d\omega. \quad (7.1.31)$$

На практике достаточно учесть частоты до 30...40 1/с.

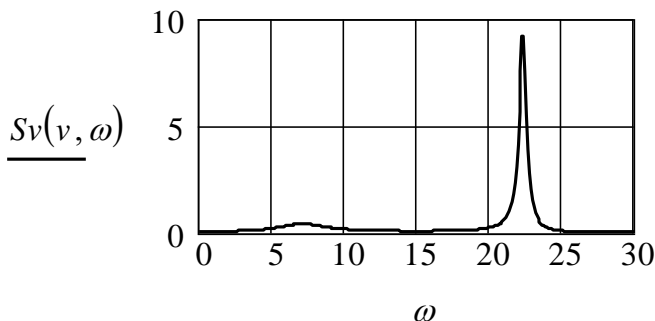


Рис. 7.1.5. График спектральной плотности колебаний прицепа

Зная дисперсии входного и выходного процессов и предполагая их нормальный закон распределения, можно построить графики плотности распределения, используя соответствующую функцию  $dnorm$  в среде Mathcad:  $p(y) = dnorm(y, 0, D_d)$  – плотность вероятности неровностей дороги (математическое ожидание рав-

ное нулю);  $p_v(y) = dnorm(y, f_d, D(v))$  – плотность вероятности перемещений кузова прицепа с математическим ожиданием, равным  $f_d$ .

На рис. 7.1.6 приведены графики плотностей распределения  $p(y)$  и  $p_v(y)$ , соответствующие динамическому ходу подвески  $f_d = 8$  см.

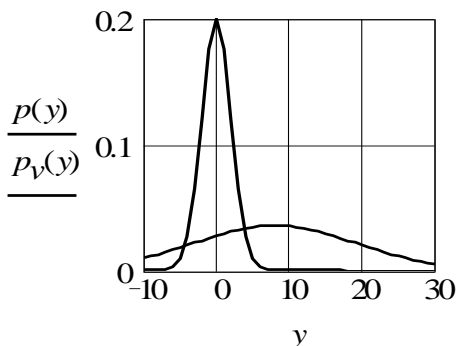


Рис. 7.1.6. Графики плотностей распределений

Вероятность «пробоя» подвески, когда отклонение от математического ожидания превысит зазор  $f_d$ , равна произведению вероятностей:

$$P = F_1 \cdot F_2, \quad (7.1.32)$$

где

$$F_1 = \int_0^R p_v(y) dy, \quad F_2 = \int_R^\infty p(y) dy, \quad (7.1.33)$$

$R$  – заданное значение прогиба подвески в пределах от нуля до  $f_d$ . Вероятность «пробоя» подвески возрастает с увеличением скорости движения прицепа и с уменьшением динамического запаса подвески. Правильный выбор конструктивных элементов прицепа должен сводить вероятность «пробоя» к очень малой величине.

#### 7.1.4. Моделирование процесса копирования рельефа

Важным агротехническим требованием к выполнению многих сельскохозяйственных операций (посев, пахота, культивация и др.) является требование копирования макрорельефа агрофона при наличии возмущений от микрорельефа и неровностей.

Моделированием копирования рельефа занимался проф. В.П. Жаров в работе [Жаров В.П., Устинов С.Ю. Моделирование и

оптимизация копирующей системы комбинированного сельскохозяйственного агрегата // Вестник ДГТУ, 2005. Т.5. №5(27)] рассмотрен агрегат, состоящий из колесного трактора, заднего механизма навески и многосекционной комбинированной машины, каждая секция которой содержит опорное колесо, культиваторную лапу, сошник для высева мелкосеменных овощных культур и прикатывающее колесо (рис. 7.1.7).

Построение математических моделей копирующих систем мобильных сельскохозяйственных агрегатов необходимо проводить с учётом дополнительно налагаемых на них условий связи и соответствующих им обобщённых реакций [9, Жаров В.П., 1980.]. Дополнительные связи копирования принуждают рабочие органы агрегата двигаться по агрофону без отрыва.

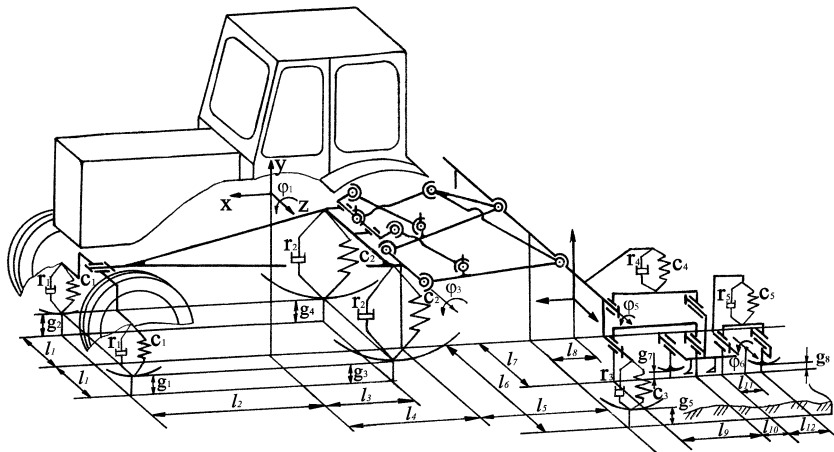


Рис. 7.1.7. Расчётная схема комбинированного сельскохозяйственного агрегата:  $g_i$  – колебания макрорельефа под каждым колесом и катком,  $c_i$  – жёсткости колёс и подвесок,  $r_i$  – демпфирование элементов,  $l_i$  – координаты расположения элементов,  $\phi_i$  – углы поворота элементов агрегата в продольно-вертикальной плоскости

Для составления уравнений движения колебательной системы используются уравнения Лагранжа с неопределёнными множителями.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} - \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu} * \frac{\partial F_{\mu}}{\partial q_j} = Q_j, \quad (7.1.34)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $\Phi$  – диссипативная функция;  $q_j$  ( $j=1\dots,n$ ) –

обобщённые координаты;  $Q_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) – обобщённые силы;  $\lambda_{\mu}$  ( $\mu=1, \dots, m$ ) – неопределённые множители Лагранжа;  $F_{\mu}$  ( $\mu=1, \dots, m$ ) – дополнительно налагаемые связи.

В качестве обобщённых координат приняты:

$q_1 = y$  – линейное перемещение трактора вдоль вертикальной оси;

$q_2 = \varphi_1$  – угловые колебания трактора относительно поперечной оси  $z$ ;

$q_3 = \varphi_3$  – угловые колебания механизма навески относительно поперечной оси ( $Oz$ );

$q_4 = \varphi_4$  – угловые колебания механизма навески относительно продольной оси ( $Ox$ );

$q_5 = \varphi_5$  – угловые колебания секции относительно поперечной оси ( $Oz$ );

$q_6 = \varphi_6$  – угловые колебания механизма прикатывающего колеса относительно поперечной оси ( $Oz$ ).

В общем виде конфигурация системы определяется совокупностью  $n$  обобщённых координат и подчиняется  $m$  дополнительным связям. Реакции дополнительно налагаемых связей представлены в виде выходов системы. Для обеспечения показателей назначения этих машин необходимо обеспечить копирование агрофона так, чтобы динамические реакции на опорах рабочих агрегатов не превышали допустимых значений.

После нахождения  $T, P, \Phi, Q_j$ , подстановки их в (7.1.34) и учёта связей копирования получена математическая модель в виде матричного уравнения, описывающая динамику рассматриваемой системы при возмущениях со стороны неровностей агрофона:

$$[M_1] \ddot{\bar{q}} + [M_2] \dot{\bar{q}} + [M_3] \bar{q} = [K_1] \ddot{\bar{g}} + [K_2] \dot{\bar{g}} + [K_3] \bar{g} + \bar{F}_s + \bar{F}_k, \quad (7.1.35)$$

где  $\bar{g} = [g_f, g_b, g_5, g_6, g_7, g_8]^T$  – вектор входных случайных переменных – возмущений от рельефа;

$\bar{q} = [y, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \lambda_1, \lambda_2]^T$  – вектор выходных переменных колебаний элементов системы, в котором присутствуют случайные процессы;

$$\bar{F}_s = [F_{sy}, l_4 F_{sy}, l_4 F_{sy}, l_4 F_{sy}, l_4 F_{sy}, 0]^T \text{ - вектор связей секции;}$$

$$\bar{F}_k = [F_{ky}, l_4 F_{ky}, l_4 F_{ky}, l_4 F_{ky}, l_4 F_{ky}, 0]^T \text{ - вектор связей культиватора;}$$

$[M_1], [M_2], [M_3]$  – матрицы собственных свойств системы: инерционных, диссипативных, жёсткостных соответственно;

$$[M_1] = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l_4 & m_2 l_5 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 l_4 & J_1 + m_2 l_4^2 & m_2 l_4 l_5 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 l_5 & m_2 l_4 l_5 & m_2 l_5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (7.1.36)$$

$$[M_2] = \begin{pmatrix} 2(r_1 + r_2) & 2(-l_2 r_1 + l_3 r_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(-l_2 r_1 + l_3 r_2) & 2(l_2^2 r_1 + l_3^2 r_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r_3 l_5^2 & r_3 l_5 (-l_6 + l_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 l_6 (-l_5 + l_5) & 2r_3 l_6^2 & 0 & 0 \\ -\frac{r_4}{l_9} & -\frac{r_4 l_4}{l_9} & -\frac{r_4 l_5}{l_9} & -\frac{r_4 l_7}{l_9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (7.1.37)$$

$$[M_3] = \begin{pmatrix} 2(C_1 + C_2) & 2(-l_2 C_1 + l_3 C_2) & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2(-l_2 C_1 + l_3 C_2) & 2(l_2^2 C_1 + l_3^2 C_2) & 0 & 0 & -l_1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 2C_3 l_5^2 & C_3 l_5 (-l_6 + l_6) & -l_5 & -l_5 \\ 0 & 0 & C_3 l_6 (-l_5 + l_5) & 2C_3 l_6^2 & -l_7 & -l_7 \\ -\frac{C_4}{l_9} & -\frac{C_4 l_4}{l_9} & -\frac{C_4 l_5}{l_9} & -\frac{C_4 l_7}{l_9} & -l_9 & -l_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{12} \end{pmatrix}, \quad (7.1.38)$$

$[K_1]$ ,  $[K_2]$ ,  $[K_3]$  – матрицы связей масс, сложно зависящих от расстояний между элементами.

Полученная математическая модель процесса копирования рельефа является многомерной, линейной, динамической, стационарной, инвариантной с сосредоточенными параметрами. Наличие случайных возмущений и отклика делает её вероятностной. Связь характеристик случайных переменных модель прямо

не отражает, но для этого может быть использована методика п. 4.4 по примеру п.7.1.3.

## 7.2. Моделирование процессов почвообработки

### 7.2.1. Модели взаимодействия клина с почвой

Для почвообработки важно определять энергетику процесса. Факторами процесса считаются режимы резания (скорость, глубина, геометрия клина) и физико-механические свойства почвы, откликом – сила сопротивления  $P$ .

Наиболее простая модель определяет силу сопротивления через удельное сопротивление почвы  $K_c$ :

$$P = K_c S; \quad S = a b, \quad (7.2.1)$$

где  $a$  – глубина вспашки, см;  $b$  – ширина захвата, см.

Однако эта зависимость не учитывает ни геометрии резания, ни скорости, ни прочностных свойств почвы. Поэтому идут поиски более совершенных силовых моделей.

**Кинестатика клина.** Широкое применение нашли кинестатические модели нагрузок клина, известные в земледельческой механике со времён акад. В.П. Горячкина [23]. Распределённые нагрузки представляются сосредоточенными силами. Почва разрушается сдвигом. При перемещении клина под действием движущей силы  $P$  со стороны почвы на него действуют реакция  $R$ , нормальная сила  $N$  и сила трения  $F$  (рис. 7.2.1) [2].

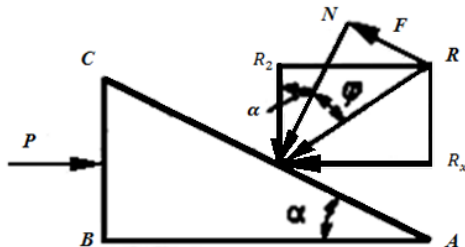


Рис. 7.2.1. Силы, действующие на клин со стороны почвы

Сила трения  $F$  действует в плоскости рабочей поверхности клина в направлении, обратном движению клина. Равнодействующая сил  $N$  и  $F$  – реакция  $R$  отклоняется от нормали к рабочей поверхности на угол трения  $\varphi$  и равна

$$R = N / \cos \varphi = N \sqrt{1 + f^2}, \quad (7.2.2)$$

где  $f = \operatorname{tg} \varphi$  – коэффициент трения.

Составляющие силы  $R$ :  $R_x$  и  $R_z$ . Сила  $R_x$  определяет сопротив-

ление клина перемещению, а  $R_z$  – заглубляющую способность клина.

Проектируя на ось  $x$  силы  $R$ ,  $fN$  и  $N$ , получим:

$$P = R_x = N \sin(\alpha + \varphi) / \cos \varphi. \quad (7.2.3)$$

Аналогично проводится силовое моделирование трёхгранного клина. Его можно рассматривать как прямой двугранный с лезвием, повернутым на угол  $\theta$  к направлению движения (рис. 7.2.2).

Траекторией относительного движения частицы пласта, находившейся в начальный момент в точке  $O$ , является прямая  $A_n$ , а абсолютного – прямая  $O_n$ .

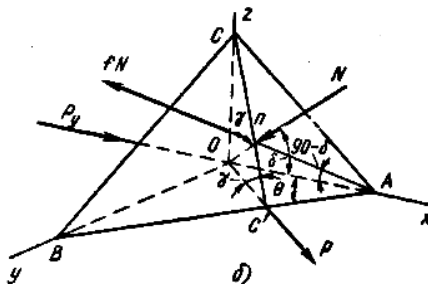


Рис. 7.2.2. Силы, действующие на трёхгранный клин

На клин действуют: сила нормального давления  $N$  и сила трения  $fN$ , направленная по линии  $An$  перемещения частицы пласта по рабочей поверхности.

Проектируя на ось  $x$  силы  $P_y$ ,  $fN$  и  $N$ , получим:

$$P_x = (N / \cos(90^\circ - \delta + \varphi)), \quad (7.2.4)$$

где  $\delta$  – угол между силой нормального давления  $N$  и осью  $x$ .

Сравнение сил, действующих на двугранный и трёхгранный клинья, вычисленные по формулам (7.2.3) и (7.2.4), показывает, что при  $\alpha + \varphi < 90^\circ$

$$P_x / P = \sin(90^\circ - \delta + \varphi) / \sin(\alpha + \varphi) < 1. \quad (7.2.5)$$

Следовательно, усилие, необходимое на перемещение трёхгранного клина, меньше усилия, необходимого на перемещение двугранного клина, т.е. перемещение клина со скользящим резанием значительно снижает тяговое усилие. Поэтому лезвия рабочих органов почвообрабатывающих машин обычно устанавливают под углом к линии движения.

Трудность использования моделей кинестатики заключается в неизвестности силы  $N$ .

Для определения силы  $N$  используется то обстоятельство, что она ограничена силами сопротивления почвы разрушению и при

равнивается к силе прочности пласта.

По данным И.М.Панова сила нормального давления ограничена пределом прочности на сдвиг  $T_{max}$ :

$$N = T_{max} ab \cos\varphi \cos\mu / \cos^2\varphi ((\alpha+\varphi+\mu)/2). \quad (7.2.6)$$

Уравнение (7.2.6) получено для условий разрушения почвы сдвигом. Реально на плотной сухой почве под воздействием клина может наблюдаться и отрыв. Ю.Ф. Новиковым определена сила  $N$  из условия разрушения за счет нормальных напряжений, равномерно распределенных по плоскости АВ:

$$N = ab \sigma_{пр} \cos\varphi / (1 - \sin(\alpha+\varphi)), \quad (7.2.7)$$

где  $\sigma_{пр}$  – предельное сопротивление почвы отрыву.

Анализ формул (7.2.6) и (7.2.7) показывает, что при значениях  $\alpha+\varphi=30..50^\circ$  почва разрушается за счет отрыва, при  $\alpha+\varphi>50^\circ$  – за счет сдвига.

Однако, по А.Н. Зеленину, сила  $P$  сдвига элемента стружки по уравнению (7.2.3) является только одним из компонентов общей силы резания  $P_{общ}$  и составляет всего 16,5...36%. Основная часть общей силы резания затрачивается на вдавливание режущей кромки клина:

$$P_{общ} = P_x + \sigma_{сж} b\delta, \quad (7.2.8)$$

где  $\sigma_{сж}$  – напряжение смятия почвы при вдавливании в нее режущей кромки рабочего органа;  $\delta$  – толщина режущей кромки.

По В. В. Кацыгину, напряжения  $\sigma_{сж}$  и деформации  $h$  при сжатии связаны по закону гиперболического тангенса:

$$\sigma_{сж} = p_o \operatorname{th}(q h/p_o), \quad (7.2.9)$$

где  $p_o$  – предел несущей способности почвы, Па;  $q$  – коэффициент объемного смятия почвы, Н/см<sup>5</sup>.

Это означает, что сила нормального давления будет нелинейно зависеть от деформации, и модель тягового сопротивления должна быть нелинейной.

В последнее время развился способ моделирования тягового сопротивления путём разделения её на составляющие.

Так, по И.М. Панову, сила тягового сопротивления  $P_x$  уравнивается силой инерции  $P_i$ , реакцией  $R$ , отклонённой на угол  $\varphi$  от нормали к поверхности клина, и подпором  $Q$  почвы, находящейся впереди клина (рис. 7.2.3, а):

$$P_x = P_i + R + Q. \quad (7.2.10)$$



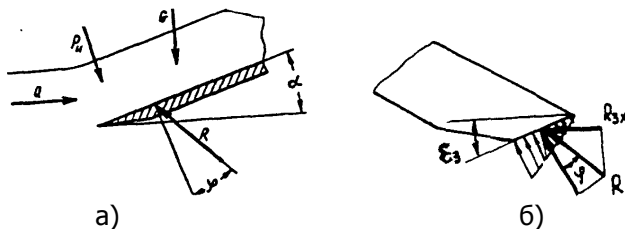


Рис. 7.2.3. Кинетостатика клина: а – силовое равновесие клина; б – нагружение затылочной части лезвия

Сила  $Q$  способствует увеличению сжатия почвы впереди клина, появлению опасности сгруживания почвы особенно при малой связности почвы и большой длине рабочей поверхности клина. Из условия  $Q_{\max} < ab\sigma_B$ , (где  $\sigma_B$  – временное сопротивление почвы сжатию) определяется максимальная длина клина, при которой еще не возникает сгруживание почвы.

При затуплении лезвия появляется затылочная фаска под углом  $\epsilon$ , вызывающая смятие слоя почвы и появление давления  $R$  (рис. 7.2.3, б).

Общее тяговое сопротивление двугранного клина  $R_x$  складывается из составляющих на разрушение почвы сдвигом  $R_{Gx}$ , на преодоление динамического подпора  $R_{Qx}$ , силы трения  $R_{Fx}$  и давлений на затылочной фаске  $R_{3x}$ :

$$R_x = R_{Gx} + R_{Qx} + R_{Fx} + R_{3x} . \quad (7.2.11)$$

Разработаны разные варианты выделения составляющих тягового сопротивления. Так, П.Н. Бурченко предложил формулу с учётом адгезии и сопротивления сдвигу:

$$P = R_1' \cos + Gf + P_a K_a + (W + J) K_d , \quad (7.2.12)$$

где  $R_1$  – сопротивление почвы внедрению лезвия;  $G$  – сила тяжести поднятого пласта на поверхности клина;  $P_a$  – сила адгезии (прилипания почвы);  $W$  – сила сопротивления сдвигу;  $J$  – силы инерции;  $K_a$ ,  $K_d$  – коэффициенты, выражающиеся через углы резания и сдвига пласта.

Подробные формулы каждой составляющей, выраженные через параметры клина и свойства почвы, приведены в книге П.Н. Бурченко [3]. Там же приводятся результаты экспериментальных исследований и обширный список работ по теории резания почв разных лет.

Подобные кинетостатические модели взаимодействия рабочего органа с почвой, заменяющие распределённую нагрузку сосредоточенными силами, относятся к моделям макроуровня. Они широко распространены в земледельческой механике. Достоинством их

является простота и возможность оценки влияния каждого параметра на процесс резания. Однако обилие коэффициентов, требующих экспериментального определения для каждого типа почвы, обесценивает их практическую значимость и оставляет их только в сфере научной. Широкого применения в инженерной практике они не находят.

Упрощённые модели силового равновесия клина на макроуровне не учитывают распределённость нагрузки по поверхности клина, не позволяют рассчитать картину обтекания клина и совершенно не описывают процессы в самой почвенной среде (рыхление, крошение пласта), ради которых клин используется.

### 7.2.2. Микроуровневые модели почвообработки

Для более полного описания процесса почвообработки необходимы микроуровневые динамические модели, способные описать изменение состояния почвенной среды в каждой ее точке.

Почвенная среда с рабочим органом в общем случае являются системой с распределёнными параметрами, и задача движения клина в почвенной среде является краевой задачей. В почвенной среде образуется сложное поле напряжений и деформаций, которое при достижении должной интенсивности разрушает структуру почвенной среды.

Все многообразие свойств и состояния почвенной среды сводят к двум основным моделям: дискретной и сплошной средам.

Модель сплошной среды строится классическими методами механики сплошных сред [22] в виде уравнений равновесия в частных производных типа:

$$\rho dV/dt = \rho F + (\partial\sigma_x/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z), \quad (7.2.13)$$

где  $x, y, z$  – координаты точки почвенной среды;  $\rho$  – плотность среды в заданной точке;  $V$  – вектор скорости точки среды;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – векторы напряжений по граням элемента почвенной среды;  $F$  – вектор массовых сил, действующих на элемент среды.

Начальные и граничные условия краевой задачи задаются указанием на границах почвенной среды напряжений и скоростей, в том числе в начальный момент времени.

Задача состоит в нахождении поля напряжений и скоростей под действием заданных сил. В уравнении (7.2.13) известными считаются компоненты нагрузки. Остальные величины: плотность, 6 компонентов напряжений и 3 компонента скоростей – подлежат определению. Всего 10 неизвестных для трёх уравнений. Поэтому уравнения (7.2.13) являются необходимыми, но недостаточными. Недостающие 7 уравнений получают с учётом физико-

механических свойств и условий прочности почвенной среды.

Свойства почвенной среды описывают реологическими зависимостями напряжения от деформации. Это даёт ещё 6 уравнений в добавление к трём основным уравнениям равновесия.

Обзор существующих расчётных моделей почв приводит проф. В.А. Жилкин [10, 2004 г.].

**Модель линейного деформирования почвы**, называемую моделью упругости почв, получают при использовании линейных реологических уравнений. Применима для почвогрунтов в строительстве при однократном нагружении. Рыхление и крошение почвенных сред линейные реологические зависимости описывают плохо.

**Модель предельного напряжённого состояния** почвы строится добавлением к уравнениям равновесия условия типа уравнения прочности почв Кулона-Мора. Модель применима для определения предельной несущей способности грунта, после которого наступает неограниченное увеличение деформаций.

Более сложные модели, позволяющие определять деформации во всём диапазоне нагрузок, требуют применения нелинейных реологических моделей. Они называются теориями пластичности почв.

**Теория малых пластических деформаций** А.А.Ильюшина использует упрощённые представления об объёмных и сдвиговых деформациях и потому даёт приближённые решения.

**Теории пластического течения** дают более точные решения. Модель С.С. Григоряна (1958 г.) использует гипотезы законов объёмного и сдвигового напряжений, в которых учитывается явление разрыхления и изменения плотности. Модель неоднократно уточнялась в плане совершенствования закона объёмного деформирования. К.С. Султанов (1993 г.) предложил нелинейный закон, хорошо согласующийся с экспериментами на мягких почвах.

Недостаток расчётных моделей – неучёт многофазности почв, т. е. наличия у них твёрдой, вязкой, жидкой и газовой фаз.

Применяются приближённые методы учёта многофазности сведением неньютоновской среды к ньютоновской в виде поправки Эйнштейна к динамическому коэффициенту вязкости несущей фазы  $\mu$  [22]. Приведённый коэффициент вязкости  $\mu^*$  выражают через коэффициенты вязкости  $\mu$  для несущей фазы.

Для твёрдых суспензий сферических частиц

$$\mu^* = \mu (1 + 2,5 \alpha), \quad (7.2.14)$$

где  $\alpha$  – объёмная доля твёрдой примеси.

Для твёрдых частиц неправильной формы

$$\mu^* = \mu (1 + 5\alpha). \quad (7.2.15)$$

При объёмной концентрации твёрдых включений  $\alpha=50\dots70\%$

$$\mu^* = (4,5\dots5,5) \mu. \quad (7.2.16)$$

Необходимое десятое уравнение должно описывать условие разрушения. В механике сплошных сред его роль играет уравнение непрерывности, что для разрушаемой почвы оно не подходит. После разрушения почва переходит в дискретное состояние, которое должно описываться другой моделью с нарушенными связями. Но переход почвы от одного состояния в другое моделировать трудно.

Легче смоделировать агротехнически важное изменение плотности почвы (объёмной массы) при её обработке. Этот процесс можно считать процессом притока (стока) массы с интенсивностью, характеризующейся секундным приростом массы  $J$  в данной точке:

$$J = dp/dt + \text{div}(\rho V). \quad (7.2.17)$$

При его увеличении происходит уплотнение, при уменьшении – рыхление. Такой подход позволяет осуществлять компьютерное моделирование процесса движения рабочего органа в почве (например, в среде Flow Vision), получать не только напряжённое состояние пласта, поле скоростей и давлений, но и определять качественные показатели рыхления почвы.

В целом классическая механика сплошных сред не приспособлена для моделирования обработки почвы, так как не учитывает дискретный характер почвенной среды, которая в отличие от грунтов обязательно имеет агрегаты (комочки).

Свойства дискретных сред, состоящих из отдельных частиц, связанных силами сцепления, должна изучать статистическая механика, опираясь на законы теории вероятностей и математической статистики. Это направление требует переосмысления некоторых исходных положений механики сплошных сред и пока не получило достаточного развития в механике почв.

### 7.2.3. Модели терраупругости

Терраупругость – это раздел динамики, изучающей движение рабочего органа в почвенной среде с учётом упругости его крепления. Теория терраупругости – аналог теорий аэроупругости и гидроупругости, но для среды с более сложными реологическими свойствами.

Применяемые в почвообработке математические модели взаимодействия рабочего органа с почвой широко используют постулат, что пассивный рабочий орган закреплён жёстко, движется

поступательно, не отклоняясь от прямолинейной траектории [2, 23]. Это расходится с реальным процессом. Исследования автора (12, 2002 г.) показывают, что движение рабочего органа в почве сопровождается значительными упругими смещениями и колебаниями интенсивностью до 8g по виброускорению, что делает их технологическим и энергетическим факторами в почвообработке. Абсолютно жесткого крепления не существует.

Модели задач терраупругости [13] включают статические модели кинематики, описывающие траектории упругих смещений рабочего органа, и динамические, описывающие движение упруго закреплённого рабочего органа (УЗРО) под действием сил сопротивления.

**Модели кинематики упругих смещений рабочего органа.** Рабочий орган почвообрабатывающей машины обычно крепится консольной стержневой системой (стойкой) к её раме, движущейся со скоростью  $V$  (рис. 7.2.4). Основная функция крепления – удержание требуемого положения рабочего органа в почве – выполняется не полностью: из-за деформаций консольной стойки рабочий орган получает упругие смещения.

Рассматривая рабочий орган как трёхгранный клин, его упругие смещения под действием нагрузки  $\bar{P}$  можно представить вектором смещения  $s$  носка лапы и поворотом  $\theta$  относительно этой точки. Для малых углов поворот можно определять вектором  $\theta = [\theta_x, \theta_z, \theta_y]$ , как это принято при ориентации кораблей, самолётов и других движущихся в пространстве тел. Здесь  $\theta_x, \theta_z, \theta_y$  – углы поворота вокруг координатных осей, имеющие традиционные названия:  $\theta_x$  – угол крена,  $\theta_y$  – угол тангажа,  $\theta_z$  – угол рыскания. Применять углы Эйлера нерационально, так как они не образуют вектора.

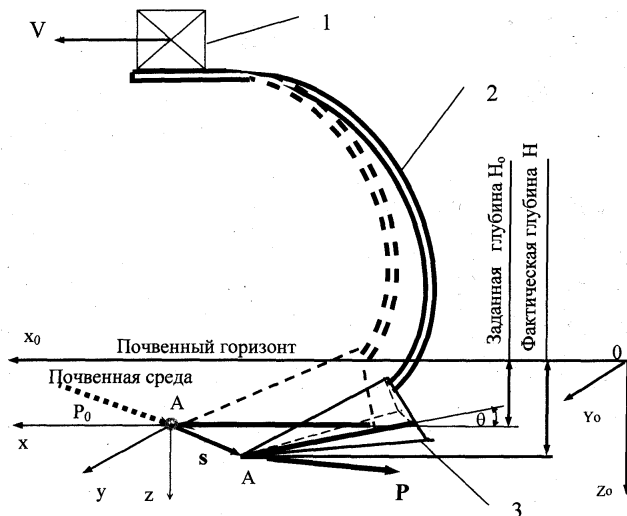


Рис. 7.2.4. Схема упругих смещений рабочего органа: 1 – рама; 2 – консольная стойка; 3 – рабочий орган

Смещения  $i$ -й точки упруго закрепленного рабочего органа (УЗРО)

$$s_i = s + [\Theta] L, \quad (7.2.18)$$

где  $L$  – радиус-вектор текущей точки рабочего органа относительно его носка;  $[\Theta]$  – матрица вращений на угол  $\theta$ .

Структура матрицы вращения

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} 0 & \theta_3 & \theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.2.19)$$

Для плоской задачи это соотношение примет вид

$$s_r = s + \theta_y L, \quad (7.2.20)$$

т.е. смещение точек рабочего органа зависит только от его тангажа.

Зависимость смещений точек от нагрузки  $s_i(P)$  и их траектории в общем случае нелинейны.

Для нелинейных систем справедливы законы деформирования в приращениях:

$$ds = [\Delta] d\bar{P}, \quad (7.2.21)$$

$$d\theta = [H] d\bar{P}, \quad (7.2.22)$$

где  $[\Delta]$  – симметричная матрица податливости размерности

3\*3; [H] – матрица угловой податливости размерности 3\*5.

Структура матрицы податливости

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}, \quad (7.2.23)$$

где  $\delta_{ik}$  – смещение по k-му направлению от единичной силы, приложенной по i -му направлению, причем согласно принципу взаимности  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ .

Структура матрицы угловых искажений H :

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & 0 & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.2.24)$$

где  $h_{ik}$  – коэффициенты угловой жесткости, характеризующие угол поворота относительно i-й оси от единичной нагрузки по координате k, причем  $h_{ii} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

На практике вместо матрицы податливости используют обратную ей матрицу жёсткости:

$$[C] = [\Delta]^{-1}. \quad (7.2.25)$$

Структура матрицы жёсткости

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (7.2.26)$$

где  $c_{ik}$  – коэффициенты жесткости, характеризующие величину упругой силы по координате i на единицу смещения по координате k; причем согласно принципу взаимности  $c_{ik} = c_{ki}$ .

Нелинейности делают все эти матрицы зависимыми от нагрузки. Для сравнимости упругих свойств их необходимо определять в рабочей точке при номинальном рабочем значении нагрузки  $P = P_n$ .

Направление упругих смещений характеризуется соотношением компонентов вектора s по разным координатам из выражения (7.2.18). На практике направление упругих смещений удобнее характеризовать параметром  $\lambda = s_x/s_z$ :

В зависимости от направления смещения носка лапы можно выделить три кинематических режима: с заглублением  $\lambda > 0$ , равновесный  $\lambda = 0$  и с выглублением  $\lambda < 0$ .

При первом режиме с повышением тягового сопротивления лапа заглубляется, что еще больше увеличивает тяговое сопротивление. Процесс может нарастать лавинообразно, возникают рывки тягового сопротивления, угрозы прочности системы и неустойчи-

вость хода лап по глубине.

Второй режим работы характеризуется состоянием, когда глубина хода лапы не зависит от колебаний тягового сопротивления. Эти условия обеспечивают устойчивость хода лапы по заданной глубине.

При третьем режиме увеличение тягового сопротивления вызывает подъем лапы, что приводит к снижению тягового сопротивления и возвращению лапы в исходное положение, т.е. система приобретает тенденцию к поддержанию постоянного тягового сопротивления (предохранительный эффект).

**Система показателей упругости крепления** с учётом симметрии матриц содержит 12 показателей:  $C_{11}, C_{22}, C_{33}$  – продольная, вертикальная и поперечная податливости, м/Н;  $C_{12}, C_{13}, C_{23}$  – податливости взаимосвязи, м/Н;  $h_{21}, h_{31}, h_{12}, h_{32}, h_{13}, h_{23}$  – угловые податливости от горизонтальной, вертикальной и поперечной нагрузки, град/мм.

Для плоской задачи остаётся 5 показателей:  $C_{11}, C_{22}, C_{12}, h_{31}, h_{32}$ .

**Агротехнические требования** к кинематике упругих смещений рабочего органа сводятся к выполнению условий:

1) глубина хода носка рабочего органа при рабочей нагрузке должна соответствовать заданной, т.е вертикальные отклонения его должны равняться нулю

$$ds_z = 0, \quad (7.2.27)$$

2) вертикальные упругие смещения всех точек подошвы УЗРО не должны выходить за пределы агродопуска  $A_d$ :

$$\{s + [\ominus] L\}_z < A_d, \quad (7.2.28)$$

Условие равномерности хода по глубине требует равновесного кинематического режима ( $\lambda=0$ ), не реагирующего на колебания нагрузки. Реализовать эти требования можно, управляя межкоординатными связями (коэффициенты  $C_{ik} \neq k$  в матрице жёсткости) и угловыми искажениями упругого крепления.

**Динамическая модель терраупругости.** В общем случае модель взаимодействия УЗРО с почвой должна описываться трудноразрешимыми уравнениями в частных производных типа (2.8). Рациональнее динамическую модель теории терраупругости строить переходом на макроуровень через вектор состояния.

Вектор состояния системы «УЗРО – почва» включает векторы положения носка рабочего органа  $\Pi$ , вектор углов поворота  $\theta$  и их производные:

$$\mathfrak{Z} = \{\Pi; \theta; d\Pi/dt; d\theta/dt\}. \quad (7.2.29)$$

Сопротивление почвы описывает вектор  $F$  размерностью  $n=6$ ,



включающий составляющие силы сопротивления  $P$  и момента  $M$ :

$$F = \{P; M\} = \{P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z\}^T. \quad (7.2.30)$$

Согласно вышеизложенной теории клина сопротивление почвы оказывается вектор-функцией вектора состояния:

$$F = F\{\mathcal{Z}\}. \quad (7.2.31)$$

В существующей теории резания крепление считается абсолютно жёстким и  $\mathcal{Z}_0 = \text{const}$ . В теории тёрраупругости вектор изменения состояния УЗРО зависит от упругих смещений:

$$U = \{s; \theta; ds/dt; d\theta/dt\}. \quad (7.2.32)$$

Резльтирующее значение вектора состояния

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 + U = \{H+s; \theta; V+ ds/dt; d\theta/dt\}, \quad (7.2.33)$$

и сопротивление почвы движению рабочего органа выразится через изменённый вектор состояния:

$$F = F\{\mathcal{Z}_0 + U\}. \quad (7.2.34)$$

Разлагая формы упругих смещений по формам собственных колебаний основных частот и приводя силы и массы к носку рабочего органа, можно свести задачу к матричному дифференциальному уравнению в форме Коши, в котором за фазовые координаты приняты изменения вектора состояния  $U$ :

$$[Y] U' = [G] U + R\{\mathcal{Z}\} + \rho(t), \quad (7.2.35)$$

где

$$R\{\mathcal{Z}\} = Q\{\mathcal{Z}_0 + U\}, \quad (7.2.36)$$

$[G]$ ,  $[Y]$  – блочные матрицы собственных свойств упругой системы размерностью  $2n$  со структурой вида:

$$G = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -C & -B \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix}; \quad (7.2.37)$$

здесь  $[A]$  – диагональная матрица коэффициентов инерции;  $[B]$  – симметричная матрица коэффициентов диссипации;  $[C]$  – симметричная матрица коэффициентов жесткости;  $[E]$ ,  $[0]$  – соответственно единичная и нулевая матрицы размерностью  $n$ ;  $Q$  – оператор свойств деформируемой почвенной среды;  $R\{\mathcal{Z}_0\} = [0; F\{\mathcal{Z}_0\}]$  – детерминированная вектор-функция реакции почвенной среды размерностью  $2n$ ;  $\rho(t) = [0; f(t)]$  – случайная составляющая реакции вследствие неоднородностей почвенной среды.

Число  $n$  обобщенных координат выбирается в зависимости от конкретной задачи. Так, при отсутствии моментов  $M$  упругие прогибы консольного крепления пропорциональны углам поворота, и число независимых координат в этом случае равно трём; векторы сопротивления и смещений трёхмерны:

$$s = \{x, y, z\}^T; \quad F = P = \{P_x, P_y, P_z\}^T. \quad (7.2.38)$$

Система уравнений (7.2.35) и (7.2.36) образует нелинейную динамическую модель терраупругости. Первое уравнение системы описывает упругие смещения рабочего органа, второе – энергетику технологического процесса по принципу "вход-выход".

Структура модели представлена на рис. 7.2.5. В её основе лежит встречно-параллельное соединение звена УЗРО, описываемого уравнением (7.2.35), и звена энергетики технологического процесса почвообработки, описываемого уравнением (7.2.36).

Как видно из схемы, упругость крепления образует обратную связь между выходом и входом модели. Наличие такой обратной связи является важной отличительной особенностью работы УЗРО, позволяющей объяснить все динамические эффекты процесса.



Рис. 7.2.5. Структура динамической модели терраупругости

Линеаризованная модель задачи терраупругости включает уравнение колебаний «относительно среднего»

$$Y u' = \{[G] + [Q]\} u + \rho(t) \quad (7.2.39)$$

и уравнение силового равновесия "в среднем"

$$[G] \underline{U} + R \{ \underline{\mathcal{I}}_0 \} + \underline{R}_u = 0, \quad (7.2.40)$$

где  $\underline{U}$  – вектор математического ожидания фазовых координат;  $u$  – центрированный вектор фазовых координат;  $[Q]$  – матрица коэффициентов статистической линеаризации размерностью  $2n$ ;  $\underline{R}_u$  – вектор средних значений нелинейной вектор-функции  $R\{U\}$ ; по физическому смыслу – реакция системы на упругость.

Достоинством модели является то, что каждое слагаемое имеет физический смысл: матрица  $[G]$  описывает свойства упругого крепления рабочего органа; матрица  $[Q]$  описывает упругие и вязкие свойства почвенной среды, по физическому смыслу является матрицей квазиупругости почвенной среды; среднее значение реакции системы на упругость  $\underline{R}_u$  характеризует энергоэффект УЗРО  $R_e$  по отношению к жёсткому;  $R\{ \underline{\mathcal{I}}_0 \}$  – статическая силовая характеристика жесткой системы, она является традици-

онной задачей земледельческой механики о зависимости силы сопротивления от режимов резания.

Анализ уравнений (7.2.35), (7.2.39), (7.2.40) выявляет ряд динамических эффектов: прецессию собственных частот под нагрузкой, появление неустойчивых режимов типа известных в механике дивергенции и флаттера, автоколебания, вибро- и энергоэффект упругого крепления, определяемый средним значением реакции на упругость  $R_e = \frac{R_U}{U}$ .

Модель позволяет проводить оптимизацию жёсткости упругого крепления. В качестве параметров оптимизации упругого крепления приняты 6 коэффициентов матрицы жесткости  $C$ , доступные для управления: три диагональных элемента ( $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$ ) и три элемента межкоординатных связей ( $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ).

Практические рекомендации по расчету и оптимизации упругого крепления приведены в отраслевых методических указаниях МУ 25.2.48-89, разработанных НПО ВИСХОМ в 1990 г.

#### 7.2.4. Модели ротационных рабочих органов

Ротационный рабочий орган (РРО) – рабочий орган с вращательным движением рабочих элементов.

РРО могут иметь разную ориентацию оси ротора [6]. Положение оси вращения РРО в пространстве (рис. 7.2.6) принято характеризовать двумя углами:  $\alpha$  – угол отклонения проекции оси на горизонтальную плоскость от поперечной оси машины, называемый углом афронтальности ротора;  $\beta$  – угол наклона оси к горизонтальной поверхности поля.

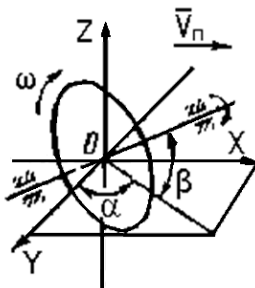


Рис. 7.2.6. Расположение оси вращения ротора

По ориентации оси вращения в пространстве различают следующие классы РРО: А ( $\alpha=0^\circ$  и  $\beta=0^\circ$ ); Б – ( $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=90^\circ$ ); В – ( $\alpha=90^\circ$ ,  $\beta=0^\circ$ ); Г – ( $\alpha \neq 0^\circ$ ,  $\beta=0^\circ$ ); Д – ( $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta \neq 0^\circ$ ); Е – ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta \neq 0^\circ$ ); Ж – ( $\alpha \neq 0^\circ$ ,  $\beta \neq 0^\circ$ ).

Наибольшее распространение в сельскохозяйственном производстве нашли применение фрезы класса А – с горизонтально-поперечной осью вращения (рис. 7.2.7, а) и фрезы класса Г с вертикальной осью вращения (рис. 7.2.7, б).

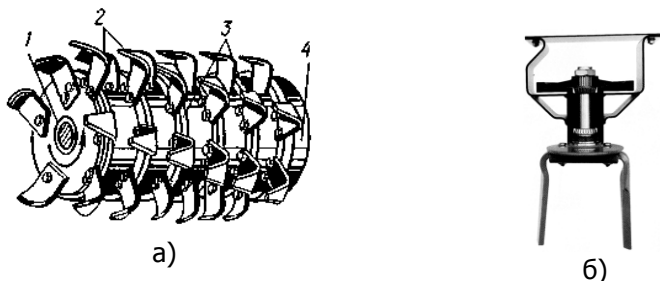


Рис. 7.2.7. Рабочие органы фрез: а – с горизонтально-поперечной осью вращения; 1 – вал; 2 – нож; 3 – фрикционные диски; 4 – диски; б – с вертикальной осью вращения

Математическое моделирование кинематики РРО сводится к описанию движения кромки рабочего элемента, расположенной на расстоянии  $R_i$  от оси вращения.

Общие уравнения, описывающие траекторию любой точки ротора в трёхмерной системе координат XYZ с началом в центре диска, применял Ф.М. Канарёв [15]:

$$\begin{aligned} x &= V_n t - R_i \sin \alpha \sin \beta \sin \omega t + R_i \cos \alpha \cos \omega t; \\ y &= R_i \cos \alpha \sin \beta \sin \omega t - R_i \sin \alpha \cos \omega t; \\ z &= -R_i \cos \beta \sin \omega t, \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

где  $t$  – время движения;  $V_n$  – скорость поступательного движения ротора;  $\alpha$  – угол афронтальности ротора.

Составляющие скорости точки ротора на радиусе  $R$  :

$$\begin{aligned} V_x &= V_n - \omega R_i [\sin \alpha \sin \beta \cos \omega t - \cos \alpha \sin \omega t]; \\ V_y &= \omega R_i [\cos \alpha \sin \beta \cos \omega t + \sin \alpha \cos \omega t]; \\ V_z &= -\omega R_i \cos \beta \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7.2.42)$$

Кинематика РРО зависит от соотношения окружной  $V_{окр}$  и поступательной  $V_n$  скоростей, называемого кинематическим (скоростным) показателем фрезы  $\lambda$  :

$$\lambda = V_{окр}/V_n. \quad (7.2.43)$$

Для пассивных роторов, перекачиваемых по поверхности поля,  $\lambda \leq 1$ , для активных, вращающихся от привода,  $\lambda > 1$ .

Абсолютная скорость точки

$$V = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2}$$

зависит от кинематического показателя:

$$V = V_n \sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda (\sin \alpha \sin \beta \cos \omega t - \cos \alpha \sin \omega t)}. \quad (7.2.44)$$

Уравнения кинематики (7.2.41) являются общими. Подстановкой значений углов  $\alpha$  и  $\beta$  из них легко получить уравнения кинематики ротора с любым расположением оси вращения.

Трёхмерные уравнения кинематики РРО с началом координат в нижней точке ротора и углом поворота, отсчитываемым от вертикали, применяли И.М.Гринчук, Ю.И.Матяшин и др. [21] в виде:

$$\begin{aligned} x &= R [\varphi/\lambda - \sin\varphi \cos\alpha + (1 - \cos\varphi) \sin\beta \sin\alpha]; \\ y &= R [(\sin\varphi \sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta (1 - \cos\varphi)); \quad (7.2.45) \\ z &= R (1 - \cos\varphi) \cos\beta . \end{aligned}$$

Уравнения (7.2.45) аналогичны уравнениям (7.2.41), но учитывает смещение начала координат и в качестве переменной использует не время  $t$ , а пропорциональную ему величину – угол поворота  $\varphi = \omega t$ . Такая форма удобнее при анализе резания и стружкообразования, но затрудняет восприятие процесса во времени.

Траектории точек РРО в пространстве, описываемые уравнениями (7.2.41), представляют в общем случае пространственные спирали (криволинейные трохойды), форма которых зависит от кинематического показателя  $\lambda$  (рис. 7.2.8).

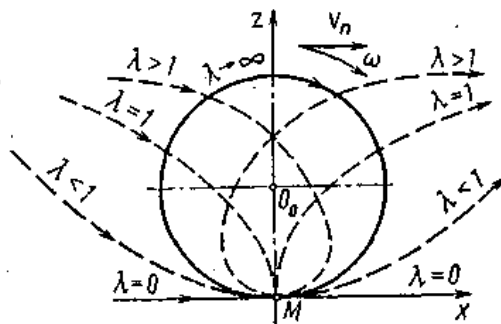


Рис. 7.2.8. Схема траекторий движения точки ротора при различных кинематических параметрах  $\lambda$ .

Так как РРО, как правило, имеет несколько рабочих элементов (ножей, лезвий), то спирали смещены друг относительно друга по оси  $X$  на величину  $S$ , называемую подачей на один рабочий элемент (подачей на нож). Каждая из спиралей оставляет свой след на дне борозды. Отсюда неустранимая особенность обработки почвы РРО – гребнистость дна борозды  $h_g$  (рис. 7.2.9).

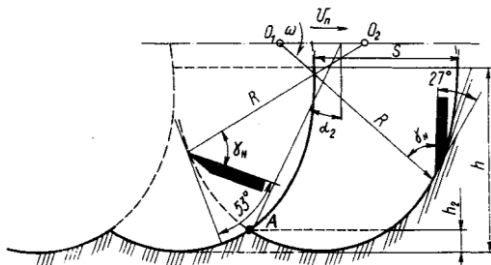


Рис. 7.2.9. Схема взаимодействия траекторий соседних зубьев фрезы

Направление вращения ротора может быть разным: прямое, совпадающее с направлением вращения колёс трактора, и обратное, – противоположное ему.

Уравнения движения точек фрезы с горизонтально-поперечной осью вращения (ГПО), получим из общих уравнений (7.2.45) при  $\alpha=0, \beta=0$ .

$$x = R [\varphi/\lambda - \sin\varphi]; y = 0; z = R (1 - \cos\varphi). \quad (7.2.46)$$

Проведя замену  $\varphi = \omega t$ , получим уравнения фрезы ГПО:

$$x = v t \pm R \sin \omega t; z = R(1 - \cos \omega t). \quad (7.2.47)$$

знак (+) соответствует обратному, а знак (–) – прямому направлению вращения.

Уравнения (7.2.47) определяют траекторию движения ножей в параметрической форме [6].

Подача на нож выразится через скорости и через кинематический параметр  $\lambda$ :

$$S = 2\pi v/m \omega; \quad S = 2\pi R/\lambda \text{ м}. \quad (7.2.48)$$

Петли циклоид соседних ножей пересекаются на высоте  $h_r$  от дна борозды (см. рис.7.2.9), определяя гребнистость дна борозды. Гребни располагаются посередине между следами соседних зубьев на расстоянии  $S/2$  от начала координат. Высота гребешков

$$h_r = R (1 - \cos\varphi_2), \quad (7.2.49)$$

где  $\varphi_2$  – угол поворота ножа, соответствующий смещению  $S/2$ , находится из уравнения

$$\pi/m = \lambda \sin\varphi_2 \pm \varphi_2. \quad (7.2.50)$$

Из уравнений следует, что гребнистость при прямом вращении (фрезерование «сверху вниз») превышает гребнистость при обратном вращении (фрезерование «снизу вверх»). Однако направление сил сопротивления фрезерованию при обратном вращении увеличивает нагрузку на колёса трактора.

Выражение для определения показателя кинематики  $\lambda$  по заданной высоте гребней полу-

(7.2.50):

$$\lambda = \frac{\pi}{m} \pm \arccos \frac{R - h_r}{R} \cdot R. \quad (7.2.51)$$

Задаваясь допустимой величиной гребней  $h_r$ , по уравнению (7.2.51) можно определять нужный кинематический режим.

### 7.3. Модели процесса разбрасывания удобрений

Внесение неаэрируемых удобрений на поверхность поля проводится путём их разбрасывания. В качестве рабочего органа часто применяется центробежное механическое устройство [2]. Расчётная схема представляет диск радиусом  $R$ , вращающийся в горизонтальной плоскости (рис. 7.3.1, а) с угловой скоростью  $\omega$ .

Удобрения из бункера поступают на диск на некотором расстоянии  $r_0$  от центра вращения диска  $O$  (точка  $M$ ). Под действием приложенных сил частицы удобрений начинают перемещаться по поверхности диска по спирали  $MM_1$  до встречи с лопастью  $SS_1$ . Затем движение частиц продолжается вдоль лопасти как по направляющей. Дойдя до края лопасти, частицы сбрасываются с диска и разлетаются по полю.

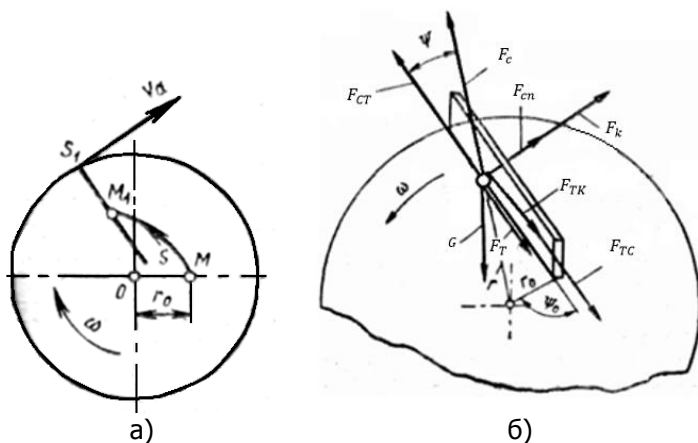


Рис. 7.3.1. Схема движения частиц по диску центробежного разбрасывателя: а – движение до встречи с лопастью; б – движение вдоль лопасти

Частица участвует в двух движениях: переносном вращательном вместе с диском и относительном поступательном по радиусу

диска. Диск может иметь лопатки.

Математическая модель движения частицы по диску без лопаток. Рассмотрим текущее положение частицы на диске (рис. 7.3.1, а) в полярных координатах:  $\varphi$  – угол поворота и  $\rho$  – текущий радиус положения частицы на диске. На частицу действуют силы:

$\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  – сила веса; где  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения;

$\mathbf{F}_c = m\mathbf{r}\omega^2$  – центробежная сила, действующая по радиусу;

$\mathbf{F}_k = 2m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'$  – сила Кориолиса, направленная перпендикулярно относительной скорости  $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/dt$  в сторону, противоположную направлению вращения диска;

$\mathbf{F}_T = f m\mathbf{g}$ ;  $\mathbf{F}_k = 2f m\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'$ ;  $\mathbf{F}_c = f m r \omega^2 \sin\psi$ ; – силы трения частицы о диск и лопасть от силы веса, силы Кориолиса и нормальной составляющей центробежной силы соответственно;

$f$  – Коэффициент трения;

Для создания математической модели используем закон Даламбера: сумма всех сил (моментов), действующих на частицу, включая силы инерции, должна равняться нулю.

$$\sum_i (\bar{F}_i + \bar{F}_{ин}) = 0, \quad \sum_i (\bar{M}_i + \bar{M}_{ин}) = 0. \quad (7.3.1)$$

В проекциях на выбранные оси координат получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} m\mathbf{r}'' &= m\mathbf{r}\omega^2 - f m\mathbf{g}, \quad \text{или} \quad \mathbf{r}'' - r\omega^2 = -f\mathbf{g}, \\ m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\varphi}'' &= -2f m r \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}', \quad \text{или} \quad \mathbf{r}\boldsymbol{\varphi}'' + 2f\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}' = 0. \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Эту систему уравнений можно считать математической моделью (ММ) процесса. Модель инвариантна, нелинейная. Для инженерной практики она неудобна, так как не даёт однозначный ответ. Удобнее будет аналитическая ММ. Её следует получать решением инвариантной ММ, в данном случае решением системы дифференциальных уравнений.

Первое уравнение линейное неоднородное, описывает радиальные смещения независимо от угловых. Оно допускает типовое решение, представляя его суммой решений однородного и неоднородного дифуравнения второго порядка

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{од} + \mathbf{r}_{нод}. \quad (7.3.3)$$

Однородное уравнение

$$\mathbf{r}'' - r\omega^2 = \mathbf{0} \quad (7.3.4)$$

имеет по правилам математики решение

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^2 C_i e^{\lambda_i t}, \quad (7.3.5)$$

где  $\lambda$  – корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ , откуда  $\lambda_1 = \omega$ ;  $\lambda_2 = -\omega$ ;  $C_i$  – неизвестные постоянные интегрирования.



Тогда решение однородного уравнения

$$r_{\text{од}} = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \quad (7.3.6)$$

Решение неоднородного принимаем в виде

$$r_{\text{нод}} = -fg/\omega^2. \quad (7.3.7)$$

Полное решение

$$r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} - fg/\omega^2. \quad (7.3.8)$$

Постоянные интегрирования находим по начальным условиям: при  $t=0$   $r=r_0$ ;  $dr/dt=0$ . Получим

$$C_1 = C_2 = (r_0 - fg/\omega^2)/2. \quad (7.3.9)$$

Полное решение первого дифуравнения будет:

$$r = \frac{1}{2} \left( r_0 - \frac{fg}{\omega^2} \right) (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) - \frac{fg}{\omega^2}. \quad (7.3.10)$$

Выражение описывает движение частицы по радиусу. Угловые смещения описывает второе уравнение системы (7.3.2).

Его интегрирование проводим, разделяя переменные:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -2f\omega \frac{\dot{r}}{r}. \quad (7.3.11)$$

Интегрирование даёт выражение для угловой скорости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2f\omega \ln r + C_1 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2f\omega \ln \frac{r}{r_0}. \quad (7.3.12)$$

Аналитическая ММ угловых смещений

$$\varphi = -2f\omega r \left( \ln \frac{r}{r_0} - 1 \right). \quad (7.3.13)$$

Полученная модель описывает траекторию движения частиц по диску. Она будет представлять спираль (см. рис 7.3.1, а). Видно, что по мере роста радиальных смещений резко растут угловые. В момент схода частицы с диска направление скорости сброса близко к касательной, радиальная скорость невелика, что снижает эффективность процесса разброса.

**Движение частиц по диску с лопатками.** Для повышения эффективности процесса разбрасывания необходимо, чтобы направление скорости частицы при сходе с диска было бы близко к радиальному. Для этого диски снабжают прямолинейными лопатками, которые устанавливают под углом  $\psi$  к радиусу диска (рис. 7.3.1, б).

При движении частицы вдоль лопасти на нее действуют следующие силы:

$G=mg$  – вес, где  $g$  – ускорение свободного падения,  $m/c^2$ ;

$F_{ц}=mr\omega^2$  – центробежная сила, действующая в направлении радиуса, которую можно разложить на две составляющие:  $mg\omega^2$

$\cos\psi$ , действующую в направлении лопасти, и нормальную к плоскости лопасти  $mr\omega^2 \sin\psi$ ;

$F = fmg$  – сила трения частицы о плоскость диска, действующая по направлению лопасти;

$F_k = 2m\omega\xi'$  – сила Кариолиса, направленная перпендикулярно лопасти и действующая в направлении, противоположном направлению вращения диска ( $\xi'$  – скорость относительного движения частицы);

$F_{TK} = 2fm\omega\xi'$  – сила трения частицы о поверхность лопасти от действия силы Кариолиса;

$fmr\omega^2 \sin\psi$  – сила трения, возникающая от действия нормальной составляющей центробежной силы.

Применяя закон Даламбера, по аналогии с предыдущим (7.3.1), получим сумму всех сил в направлении лопасти в виде

$$m\xi'' = mr\omega^2 \cos\psi - fmg + fmr\omega^2 \sin\psi - 2fm\omega\xi', \quad (7.3.14)$$

где  $\xi$  – путь, пройденный частицей по лопасти.

Выражая  $r$  через  $r_0$  и  $\xi$  по геометрическим соотношениям для прямолинейной лопасти

$$r \sin\psi = r_0 \sin\psi_0 = \text{const}; \quad (7.3.15)$$

$$r \cos\psi = \xi + r_0 \cos\psi_0. \quad (7.3.16)$$

после преобразований получим инвариантную ММ

$$\ddot{\xi} + 2f\omega\dot{\xi} - \omega^2\xi = [r_0\omega^2 \frac{\cos(\psi_0 \pm \varphi)}{\cos\varphi}] - fg, \quad (7.3.17)$$

где  $r_0$  – начальный радиус;  $\psi_0$  – начальный угол между плоскостью лопасти и радиусом  $r_0$ .

Знак плюс перед  $\varphi$  в скобках ставится, если лопасти наклонены назад по направлению вращения, и минус, – если вперед.

Выражение (7.3.17) представляет собой неоднородное линейное уравнение второго порядка с характеристическим уравнением

$$\lambda^2 + 2f\omega\lambda - \omega^2 = 0. \quad (7.3.18)$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = \omega(\sqrt{1+f^2}) - f; \quad \lambda_2 = -\omega(\sqrt{1+f^2}) + f. \quad (7.3.19)$$

Решение дифференциального уравнения в общем виде – две постоянные интегрирования:

$$\xi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + [r_0 \cos(\psi_0 \pm \varphi) / \cos\varphi - fg / \omega^2]. \quad (7.3.20)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются по начальным условиям движения: при  $t = 0$   $\xi = \xi' = 0$ . Определив  $C_1$  и  $C_2$ , получим аналитическую ММ движения частицы по лопасти диска в виде

$$\xi = [r_0 \frac{\cos(\psi_0 \pm \varphi)}{\cos\varphi} - \frac{fg}{\omega^2}] \left[ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) - 1 \right]. \quad (7.3.21)$$

Принимая во внимание, что

$$(\xi + r_0 \cos \psi_0)^2 = r^2 - r_0^2 \sin^2 \psi_0, \quad (7.3.22)$$

текущее значение радиуса  $r$  получим в виде соотношения

$$r = \sqrt{(\xi + r_0 \cos \psi_0)^2 + r_0^2 \sin^2 \psi_0}. \quad (7.3.23)$$

Скорость относительного движения частицы вдоль направления лопасти

$$v_r = \dot{\xi} = \left[ r_0 \frac{\cos(\psi_0 \pm \varphi)}{\cos \varphi} - \frac{fg}{\omega^2} \right] \left[ \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \right]. \quad (7.3.24)$$

Чтобы определить скорость схода  $\xi'_R$ , надо в уравнении (7.3.21) принять  $r=R$  и найти время пребывания частицы на диске  $t_{np}$ , за которое она достигает края диска, а затем, подставив  $t_{np}$  в уравнение (7.3.24), найти скорость сброса. Учитывая трансцендентность уравнений, аналитическое выражение получить невозможно, и следует обойтись приближённым решением или численным моделированием на компьютере.

Радиальная составляющая скорости частицы в момент схода её с диска целиком определяется углом установки лопатки  $\psi_0$ :

$$v_r = v_R \cos \psi_0. \quad (7.3.25)$$

Скорость частицы по касательной к окружности диска:

$$v_k = R\omega \pm v_R \sin \psi_0. \quad (7.3.26)$$

Абсолютная скорость схода частицы с диска  $v_a$  равна геометрической сумме радиальной  $v_r$  и окружной скорости  $v_k$ :

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_k^2} = \sqrt{\xi_R^2 \cos^2 \psi_0 + (R\omega \pm \xi_R \sin \psi_0)^2}. \quad (7.3.27)$$

Составляющие скоростей можно регулировать, изменяя угол установки лопатки  $\psi_0$ .

Если лопасти закреплены радиально, то  $\psi_0=0$ , и уравнение (7.3.20) примет вид

$$\xi = \left[ r_0 - \frac{fg}{\omega^2} \right] \left[ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) - 1 \right]. \quad (7.3.28)$$

Угловое перемещение частицы в абсолютном движении будет:

$$\theta_{cx} = \omega t_{np} \pm (\psi_0 - \psi_1), \quad (7.3.29)$$

здесь знак «минус» – если лопасть наклонена назад, и знак «плюс» – если вперед.

На основе полученных уравнений можно построить траектории полёта, выбрать рациональные конструктивные параметры дискового аппарата и режим его работы.

## 7.4. Моделирование процесса высева

Для высева зерновых культур широко применяются катушечные высевающие аппараты (рис. 7.4.1) [2].

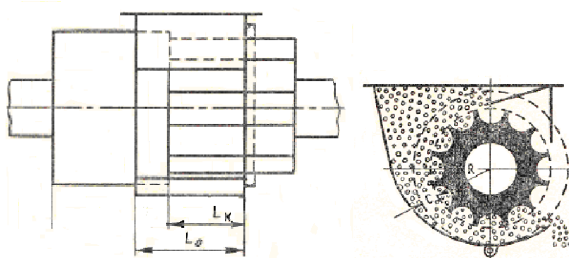


Рис. 7.4.1. Схема работы катушечного высевающего аппарата со сдвигаемой катушкой

Принцип работы основан на порционном выбросе зерна из бункера вращающейся желобчатой катушкой, устанавливаемой в улиткообразном корпусе. Катушка своими желобками захватывает зёрна и сбрасывает их в сошник. Катушка может сдвигаться на своём валу и изменять длину желобков в улитке, называемую рабочей длиной катушки  $L_k$ . Приводится катушка во вращение от ходовых колёс сеялки. Результатом работы катушечного аппарата является норма высева  $Q$ , кг/га. Управляемыми факторами, влияющими на норму высева, являются длина рабочей части катушки  $L_k$  и передаточное число от высевного вала к колесу  $i$ .

Для определения размеров находим требуемый рабочий объём  $V_a$ . – объём семян, который высеивает катушка за один оборот.

Фактический рабочий объём складывается из объёма  $V_{ж}$  семян, запавших в желобки, и объёма  $V_a$  семян, выбрасываемых из активного слоя за один оборот катушки:

$$V_o = V_{ж} + V_a. \quad (7.4.1)$$

Выражая их через параметры катушки, получим:

$$V_{ж} = f_{ж} z L_k; \quad (7.4.2)$$

$$V_a = \pi(d + c_{пр})c_{пр} L_k; \quad (7.4.3)$$

$$V_o = [f_{ж} z + \pi(d + c_{пр})c_{пр}] L_k, \quad (7.4.4)$$

где  $f_{ж}$  – площадь поперечного сечения желобка катушки;  $z$  – число желобков на катушке;  $L_k$  – рабочая длина катушки;

$c_{пр}$  – приведенная толщина слоя, в котором семена движутся с постоянной скоростью, она связана с толщиной слоя  $c$ :

$$c_{пр} = c / (m + 1). \quad (7.4.5)$$

По опытным данным, значение  $m$  для пшеницы и ячменя равно

2,6, для овса – 2,5, для льна – 1,7 и для проса – 1,5.

Из-за трудности определения  $c_{пр}$  пользуются понятием приведённой площади сечения активного слоя  $F_a$ ; по опытным данным,  $F_a \approx 0,7F_{ж}$ , где  $F_{ж} = f_{ж} z$  – суммарная площадь поперечного сечения всех желобков катушки.

Суммарная площадь зерновой струи  $F_o = F_a + F_{ж} = 1,7 F_{ж}$ .

Длина катушки тогда определится соотношением

$$L = V_o / F_o \approx V_o / 1,7 F_{ж}. \quad (7.4.6)$$

Скорость вращения катушки определяется передаточным числом от висевного вала к колесу:

$$i = D\omega_k / (d_k\omega_c), \quad (7.4.7)$$

здесь  $d_k$  – диаметр катушки (нормированный  $d_k = 50,5-51 \pm 0,3$  мм);  $D$  – диаметр приводного колеса;  $\omega_k$  – скорость катушки;  $\omega_c$  – скорость сеялки.

Требуемый рабочий объем для нормы высева  $Q_H$  (кг/га), ширины междурядья  $a$  (см) зависит от скорости вращения катушки:

$$V_o = Q_H a \pi D / 1000 i \rho, \quad (7.4.8)$$

где  $\rho$  – объемная масса (г/см<sup>3</sup>) семян.

Приравнивая фактический объём требуемому, получаем математическую модель катушечного аппарата:

$$Q_H a \pi D / 1000 i \rho = f_{ж} z L_k + \pi(d + c_{пр})c_{пр} L_k, \quad (7.4.9)$$

это же соотношение через суммарную площадь струи:

$$Q_H a \pi D / 1000 i \rho = 1,7 f_{ж} z L_k. \quad (7.4.10)$$

Модель относится к статическим аналитическим моделям. Она позволяет подбирать рабочую длину катушки  $L_k$  и передаточное число  $i$  механизма передачи.

$$L_k = Q_H a \pi D / 1000 i \rho 1,7 f_{ж} z. \quad (7.4.11)$$

Так, при диаметре колеса прицепной сеялки  $D=1,22$  м, передаточном отношении  $i=0,4$ , диаметре катушки 51 мм, площади желобка  $f_{ж}=0,475$  см<sup>2</sup>, числе желобков  $z=12$ , норме высева пшеницы  $Q_H=180$  кг/га и объёмном весе  $\rho=0,8$  получаем:

$$\begin{aligned} L_k &= Q_H a \pi D / 1000 i \rho 1,7 f_{ж} z = \\ &= 180 \cdot 1583,14 \cdot 1,22 / (1000 \cdot 0,4 \cdot 0,8 \cdot 1,7 \cdot 0,475 \cdot 12) = 3,3 \text{ см.} \end{aligned}$$

Рабочая длина катушки составит 33 мм.

## 7.5. Моделирование процесса резания

### 7.5.1. Моделирование процесса опорного резания

Резание является распространённым технологическим приёмом при обработке сельскохозяйственных материалов и при скашивании трав и хлебостоя. В последнем случае осуществляется резание стеблей растений.

Классический вид резания в сельскохозяйственном производстве – это опорное резание материала ножами, когда материал толщиной  $h$  опирается на неподвижную опору [2]. Нож представляет плоский клин (рис. 7.5.1) с лезвием.

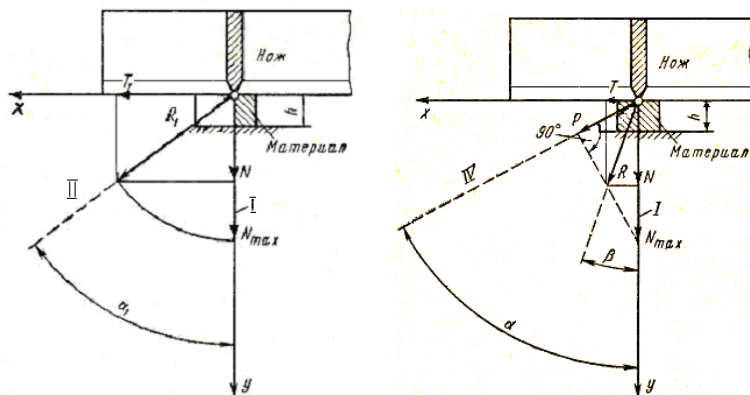


Рис. 7.5.1. Расчётные схемы резания по Е.С. Босому:  
I – прямое резание, II – косое, IV – скользящее

В общем случае к ножу приложена внешняя сила  $R$  под углом  $\alpha$  к нормали лезвия, она разлагается на две составляющие: нормальную силу  $N$ , перпендикулярную лезвию, и тангенциальную  $T$  вдоль лезвия. Эти силы вызывают врезание лезвия в материал. Материал оказывает сопротивление резанию с силой  $P$ , направление которой в общем случае не совпадает с направлением внешней силы  $R$ .

Математическая модель движения ножа массой под действием сил по закону Даламбера будет:

$$m\ddot{s} = \bar{R} - \bar{P}$$

или в проекциях по осям координат

$$m\ddot{x}'' = T - P_x; \quad m\ddot{y}'' = N - P_y. \quad (7.5.1)$$

Характер движения зависит от соотношения сил  $R$  и  $P$ : при

$R > P$  – с ускорением, при  $R < P$  – с замедлением; при  $R = P$  – с постоянной скоростью. Обычно процесс резания моделируют, принимая  $R = P$ . Тогда  $T - P_x = 0$ ;  $N - P_y = 0$ . В зависимости от  $T$  различают резания: прямое при  $T = 0$ , косое и скользящее при  $T \neq 0$ .

**Прямое резание** не имеет тангенциальной силы  $T$  (вариант I на рис. 7.5.1). Расчётная схема приведена на рис. 7.5.2 для случаев одностороннего и двустороннего лезвия с углом заострения  $\gamma$ .

Внешняя сила  $P$  действует по нормали к разрезаемой поверхности, на лезвии сила сопротивления  $P_0$  и на гранях – силы нормальных давлений от сминаемого материала  $N$  и  $N_1$ . В теории резания принято рассматривать фиктивный клин, у которого угол заострения  $\gamma$  увеличивается с каждой стороны на угол трения  $\varphi$ . Силы нормального давления на грани фиктивного клина становятся  $N/\cos\varphi$  и  $N_1/\cos\varphi$ .

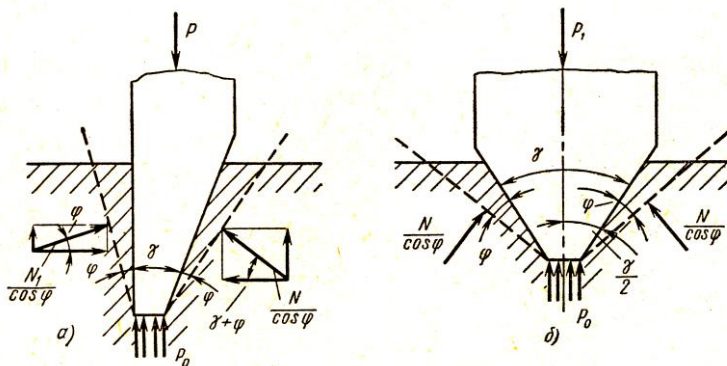


Рис. 7.5.2. Расчётные схемы поперечного резания:  
а – односторонним лезвием; б – двусторонним

Факторами процесса поперечного резания является скорость резания, нормальные давления на поверхности клина, силы трения. Параметрами является угол заострения  $\gamma$ , коэффициент трения  $\varphi$ .

Построим статическую модель, когда скорость резания мала и  $P = R$ . Проекция сил на вертикальную ось:

$$P = P_0 + (N_1/\cos\varphi) \sin\varphi + (N/\cos\varphi) \sin(\gamma + \varphi) . \quad (7.5.2)$$

Проекция сил на горизонтальную ось:

$$(N_1/\cos\varphi) \cos\varphi - (N/\cos\varphi) \cos(\gamma + \varphi) = 0 , \quad (7.5.3)$$

откуда

$$N_1 = N \cos(\gamma + \varphi). \quad (7.5.4)$$

Подставив выражение  $N_1$  в выражение (7.5.3), получим:

$$P = P_0 + (N / \cos \varphi) [\sin \varphi \cos(\gamma + \varphi) + \sin(\gamma + \varphi) \cos \varphi]. \quad (7.5.5)$$

После преобразований получаем ММ прямого резания:

$$P = P_0 + (N / \cos \varphi) \sin(\gamma + 2\varphi). \quad (7.5.6)$$

Аналогично получим ММ резания двусторонним симметричным клином в виде:

$$P_1 = P_0 + (2N / \cos \varphi) \sin(\gamma / 2 + \varphi). \quad (7.5.7)$$

Полученная модель прямого резания – аналитическая, статическая, нелинейная от параметров  $\gamma$  и  $\varphi$ .

**Косое резание:** направления силы  $R$  и силы  $P$  совпадают (вариант II на рис. 7.5.1). Резание наступает, если  $R$  больше максимальной силы  $N_{\max}$ , которую выдерживает материал :

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{T} \geq \bar{N}_{\max}. \quad (7.5.8)$$

**ММ скользящего резания.** По Е.С. Босому, скользящее резание – это сложное резание, когда линия разреза не совпадает с направлением силы,  $\beta \neq \alpha$ . В этом случае нож перемещается в направлении минимального сопротивления под углом  $\alpha$  к нормали лезвия (вариант IV рис. 5.1). В литературе это направление называют траекторией ножа. При допущении, что силы трения на грани ножа малы, факторами ММ процесса скользящего резания будут только внешние силы  $N$  и  $T$ . Откликом являются составляющие  $P_x$  и  $P_y$ .

При скользящем резании условие (7.5.8) не соблюдается. Проф. Е.С. Босой предложил строить модель, приравнивая работу сил резания и сил сопротивления на пути резания материала толщиной  $h$ . Работа сил сопротивления

$$A = Ph \cos \alpha. \quad (7.5.9)$$

Требуемая работа резания (по варианту прямого резания):

$$A = N_{\max} h. \quad (7.5.10)$$

Приравнивая работы, находим:

$$Ph \cos \alpha = N_{\max} h, \quad (7.5.11)$$

откуда находим:

$$P \cos \alpha = N_{\max} / \cos \alpha. \quad (7.5.12)$$

Полученное соотношение можно выразить графически, опустив перпендикуляр из конца вектора на направление силы сопротивления.

Для равновесного режима резания сила сопротивления должна равняться проекции движущей силы на направление. Из геометрических соотношений (см. рис. 7.5.1) находим:



$$P = R \cos(\alpha - \beta). \quad (7.5.13)$$

С учётом соотношения (7.5.12) получаем:

$$P = -N \cos(\alpha - \beta) / \cos \alpha. \quad (7.5.14)$$

После преобразования косинуса разности углов получаем силу MM скользящего резания:

$$P = N (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta). \quad (7.5.15)$$

Определив составляющие  $P$ , можно определить траекторию движения ножа.

Скольжение нужно не всегда. При скашивании стеблей сегментным режущим аппаратом стебель должен защемляться между сегментом и противорезом (рис. 7.5.3, а) так, чтобы скольжение отсутствовало.

На стебель в растворе двух лезвий действуют силы:  $N_1$  и  $N_2$  – силы нормальных давлений со стороны лезвий;  $F_1$  и  $F_2$  – силы трения. Силы трения о лезвия АВ и АС выражаются через углы трения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$

$$F_1 = N_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \quad \text{и} \quad F_2 = N_2 \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (7.5.16)$$

Условие защемления стебля Е.С. Босой сформулировал как статическое равновесие [2, Ч. 5, гл.2, п.7]: суммы проекций сил на оси  $X$  и  $Y$  и моментов сил относительно точки  $O$  должны равняться нулю:

$$\sum R_x = 0; \quad \sum R_y = 0; \quad \sum M_0(R) = 0. \quad (7.5.17)$$

Определение проекций и момента по расчётной схеме приводит соотношение (7.5.17) в систему уравнений:

$$N_2 \sin \gamma - F_1 - F_2 \cos \gamma = 0; \quad (7.5.18)$$

$$N_1 - N_2 \cos \gamma - F_2 \sin \gamma = 0; \quad (7.5.19)$$

$$N_2 r \sin \gamma - F_2 r (1 + \cos \gamma) = 0. \quad (7.5.20)$$

Отсутствие качения стебля по лезвию автор получил преобразованием последнего уравнения в простой вид:

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 < 2\varphi_2. \quad (7.5.21)$$

Условие отсутствия скольжения стебля получено совместным решением первых двух уравнений. Проведя преобразования, автор получил условие отсутствия скольжения по лезвиям в виде:

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \varphi_1 + \varphi_2, \quad (7.5.22)$$

то есть условия защемления полностью определяются геометрией лезвия и трения.

Понятие скользящего резания варьируется. Проф. Трубилин с соавторами [24] скользящим резанием называют такое резание, при котором стебли скользят по косому лезвию, преодолевая силу трения. Расчётная схема приведена на рис. 7.5.3, б.

Частица  $m$  находится на косо поставленном лезвии, движущемся со скоростью  $V_m$  с углом афронтальности  $\alpha$ . Лезвие воздей-

ствует на частицу силой  $N$  по нормали к лезвию. Составляющие силы  $N$ :  $N_v$  – по направлению скорости и  $N_t$  – вдоль лезвия.

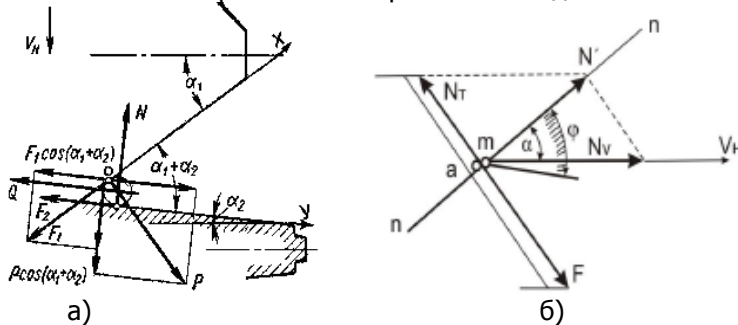


Рис. 7.5.3. Схема взаимодействия стебля с ножом; а – с зацементированием; б – со скольжением

Автор сформулировал условие скольжения: сила скольжения  $N_t$  должна превышать силу трения:  $N_t > F$ . Выразив силы через  $N$ :

$$F = N \operatorname{tg} \varphi; \quad N_t = N \operatorname{tg} \alpha, \quad (7.5.23)$$

получил простое условие скольжения:

$$\alpha > \varphi. \quad (7.5.24)$$

Направление скорости лезвия должно составлять с нормалью к нему угол больший, чем угол трения материала по лезвию. Условие проще, чем у Е.С. Босого, но сделано для других условий резания.

Полученные ММ резания являются аналитическими, статическими, нелинейными по параметрам. Достоинство их – простота. Недостаток – они не отражают динамику процесса среза стебля; для такого кратковременного процесса модель должна быть динамической.

### 7.5.2. Моделирование процесса безопрного резания

Для кошения трав применяются косилки с безопрным резанием, в них применяют аппараты с вращательным движением ножа в горизонтальной или вертикальной плоскости.

Косилки, у которых нож вращается в горизонтальной плоскости, срезают стебли растений вращающимися навстречу один другому роторами (дисками) с ножами [2]. Они вращаются с большой скоростью, достаточной для срезания свободно стоящих стеблей без опоры (рис. 7.5.4).

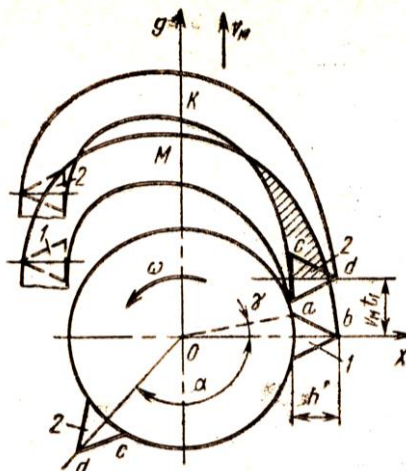


Рис. 7.5.4. Схема работы сегментно-ротационного аппарата с ножами в горизонтальной плоскости:  $Oa = r$  – радиус по внутренней точке сегмента,  $Ob = R$  – радиус по наружной точке сегмента

Объектами моделирования сегментно-дискового режущего аппарата являются траектория движения лезвия сегмента, скорость резания и количество сегментов (теория излагается по В. И. Фомину).

Уравнения движения крайних точек сегмента 1 в параметрическом виде имеют вид:

$$x_a = r \cos(\omega t + \gamma); \quad x_b = R \cos \omega t; \quad (7.5.25)$$

$$y_a = v_M t + r \sin(\omega t + \gamma); \quad y_b = v_M t + R \sin \omega t. \quad (7.5.26)$$

Уравнения движения крайних точек сегмента 2 имеют вид:

$$x_c = r \cos(\omega t + \gamma - a); \quad x_d = R(\cos \omega t - a); \quad (7.5.27)$$

$$y_c = v_M t + r \sin(\omega t + \gamma); \quad y_d = v_M t + R \sin \omega t. \quad (7.5.28)$$

Уравнения (7. 5.27) и (7. 5.28) представляют аналитическую математическую модель кинематики процесса кошения.

Найдём ММ скорости резания. Учтём, что ось сегмента 2 станет параллельно оси OX по истечении времени  $t_1 = \alpha / \omega$ . Машина за это время пройдет путь  $v_M t_1$ . Абсолютная наименьшая скорость точки a в любой момент времени

$$v_a = \sqrt{\left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_a}{dt}\right)^2}. \quad (7.5.29)$$

Так как

$$dx_a/dt = -r\omega \sin(\omega t + \gamma); \quad dy_a/dt = v_M + r\omega \cos(\omega t + \gamma), \quad (7.5.30)$$

то окончательно найдем

$$V_a = \sqrt{r^2 \omega^2 + 2r\omega v_M \cos(\omega t + \gamma) + v_M^2}. \quad (7.5.31)$$

Из полученной формулы следует, что

$$V_{a \max} = r\omega + v_M; \quad V_{a \min} = r\omega - v_M. \quad (7.5.32)$$

Проведём математическое описание ротационного аппарата с вертикальным диском. Такой аппарат совмещает резание и измельчение и применяется в косилках измельчителях.

Для определения скорости резания рассмотрим движение стебля и ножа на шарнире (рис. 7.5.5).

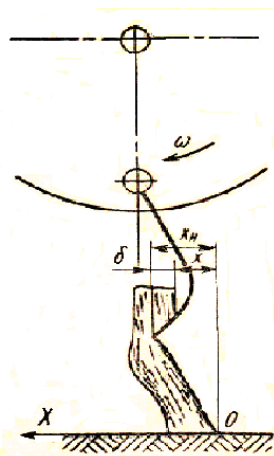


Рис. 7.5.5. Схема взаимодействия ножа и стебля

Уравнение движения стебля будет иметь вид

$$m_c \ddot{x} = P(\delta) - cx, \quad (7.5.33)$$

где  $m_c$  – масса, стебля, приведенная к точке удара;  $x$  – перемещение приведенной массы;  $P(\delta)$  – сила, действующая на стебель со стороны ножа и зависящая от величины  $\delta$  проникновения ножа в стебель;  $cx$  – сила упругого сопротивления стебля изгибу.

Для решения уравнения (5.5.33) необходимо знать зависимость  $P(\delta)$ . Она определяется экспериментально и обычно носит характер ударного импульса  $P(t)$ . В этом случае задача удара ножа по стеблю представляет задачу удара груза по упругой системе с малой собственной массой.

Амплитуда импульса

$$P_{\max} = cX_{\max}, \quad (7.5.34)$$

где  $c$  – жёсткость стебля;  $X_{\max}$  – максимальный динамический

прогиб,

$$x_{\max} = \sqrt{\delta \frac{v^2}{g}} = \sqrt{\frac{Gv^2}{\tilde{n}g}}; \quad (7.5.35)$$

$\delta = G/c$  – статический прогиб под действием веса ножа.

Заменять импульсную нагрузку средним значением [3, с. 271] для динамических моделей некорректно.

Движение ножа моделируется дифференциальным уравнением

$$M_H \ddot{x}_H - \mu(v_H t - x_H) = -P(t), \quad (7.5.36)$$

где  $M_H$  – масса ножа, приведенная в точку удара;  $x_H$  – перемещение приведенной массы ножа;  $\mu(v_H t - x_H)$  – усилие, возникающее при отклонении ножа от радиального положения благодаря наличию центробежной силы;  $(v_H t - x_H)$  – отклонение ножа от равновесного положения;  $\mu$  – коэффициент, характеризующий жёсткость радиального положения ножа в центробежном поле ротора.

Уравнение (7.5.31) описывает движение ножа как ударный процесс и к нему справедливы соотношения:

$$x_{f \max} = \sqrt{\frac{Gv^2}{\mu g}}. \quad (7.5.37)$$

Тогда величина проникновения ножа в стебель

$$\delta = x_{\max} - x_{H \max}. \quad (7.5.38)$$

Подставляя значения перемещений стебля и ножа в точке удара, получаем проникновение ножа в стебель:

$$\delta = x_{\max} - x_{f \max} = \sqrt{\frac{Gv^2}{\tilde{n}g}} - \sqrt{\frac{Gv^2}{\mu g}}. \quad (7.5.39)$$

Величина проникновения будет зависеть главным образом от значений  $\mu$ , которые зависят от конструкции ротора и скорости его вращения. Определять  $\mu$  следует моделированием колебаний ножа в центробежном поле. Для срезания стебля необходимо, чтобы нож проникал в стебель на величину его диаметра  $d$  прежде, чем отгиб стебля  $x$  превысит некоторое заданное значение  $x_{кр}$ . Для того чтобы перерезание произошло в процессе первого соударения, значение  $x_{кр}$  должно быть сравнимо с диаметром стебля.

## 7.6. Модели процесса обмолота зерновых культур

Обмолотом принято называть выделение зерна из колоса зерновых культур. В настоящее время обмолот осуществляется

механическими молотильными аппаратами (МА). Типовой МА включает молотильный барабан (МБ) и деку (рис. 7.6.1).

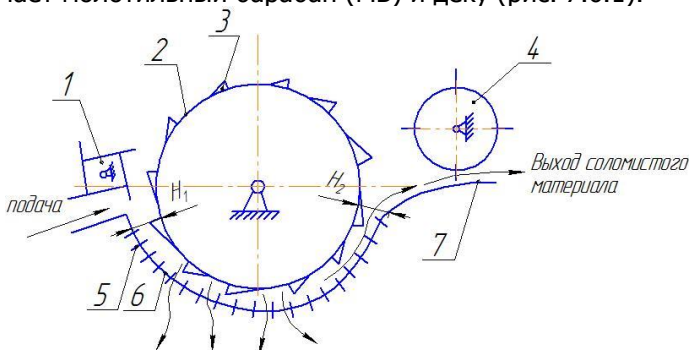


Рис. 7.6.1. Молотильный аппарат: 1 – приёмный битер; 2 – молотильный барабан; 3 – бичи с рифами; 4 – отбойный битер; 5 – планка деки; 6 – решётка; 7 – козырек

Хлебная масса, состоящая из соломы и колосьев, направляется приёмным битером 1 в щель между декой и молотильным барабаном, где под действием бичей разрушается; часть зерна через решётку деки сепарируется и падает на стрясную доску очистки; большая часть превращается в хлебный ворох, который выбрасывается из МА и отбойным битером направляется на соломотряс, где сепарация продолжается.

Работа классического молотильного сепарирующего устройства изучалась десятилетиями и к настоящему времени выглядит законченной теорией. Основы теории молотильного барабана разработаны В.П. Горячкиным. Он создал математические модели энергетики и динамики главных процессов молотильного барабана, ставшие классическими. К ним относятся ММ пропускной способности, основное уравнение МА, ММ сепарации зерна в МА [2].

Модель пропускной способности МА. Пропускной способностью молотильного аппарата считается максимальная производительность при соблюдении агротехнических требований. Поступающая в молотильный зазор хлебная масса с нарастающей скоростью уносится бичами и не должна препятствовать подаче следующей порции. Поэтому пропускную способность будем определять из условия отсутствия забивания МА. При определении пропускной способности молотильного аппарата используются разработки академика Э.И. Липковича.

Расчётная схема приведена на рис. 7.6.2.

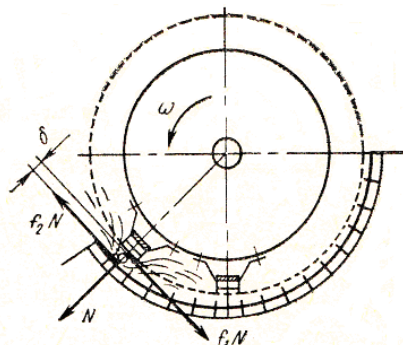


Рис. 7.6.2. Расчётная схема процесса обмолота

Попавшая в молотильный зазор порция хлебной массы подвергается действию сил сжатия  $N$ , сил трения порции массы о бич барабана  $f_1 N$ , и о планку деки  $f_2 N$ . Первая направлена в сторону движения бича и затягивает массу в щель, вторая – тормозит её.

Найдём пропускную способность молотильного барабана – максимальную подачу  $q_{\max}$ , при которой МА ещё не забивается.

Построим факторную ММ процесса обмолота. Фактором здесь будут являться  $u_1$  – скорость хлебной массы на входе в молотильный аппарат; остальные величины – параметры свойств и геометрии;  $\rho$  – плотность хлебной массы;  $\Delta$  – толщина потока хлебной массы на входе в молотильный аппарат;  $b$  – рабочая ширина бича;  $v$  – окружная скорость барабана;  $f_1, f_2$  – коэффициенты трения между хлебной массой, бичом барабана и декой;  $l$  – длина барабана;  $\eta$  – коэффициент использования длины барабана. Отклик модели  $q$  – количество хлебной массы в секунду, которую пропускает МА. Факторная модель имеет в качестве управляющего фактора ограничения на величину подачи для исключения забивания:

$$q \leq q_{\text{доп}}. \quad (7.6.1)$$

Методом анализа размерностей получаем ММ

$$q = \Delta \eta \rho u_1 \ell. \quad (7.6.2)$$

Выразим ММ и ограничения через параметры модели.

Забивание молотильного аппарата не произойдет, если бич сообщит порции хлебной массы  $m'$  импульс  $P\Delta t$ , равный или больший количеству движения  $m'u_1$ , которое имела эта порция до входа в молотильный аппарат, т.е.

$$P\Delta t \geq m'u_1. \quad (7.6.3)$$

Выразим величины, входящие в это условие, через параметры. Сила ударного воздействия бича на массу

$$P = f_1 N - f_2 N, \quad (7.6.4)$$

время удрного воздействия бича барабана на хлебную массу.

$$\Delta t = b/v, \quad (7.6.5)$$

где  $v$  – окружная скорость бича.

Масса порции

$$m' = qt/g, \quad (7.6.6)$$

где  $t = nD / z v$  – время между прохождением двух соседних бичей;  $g$  – ускорение свободного падения;  $D$  – наружный диаметр барабана;  $z$  – число бичей барабана.

Тогда с учётом соотношений (7.6.4), (7.6.5), (7.6.6) условие (7.6.3) выразится через параметры:

$$N(f_1 - f_2) \frac{b}{v} \geq \frac{q\pi D u}{gzv}. \quad (7.6.7)$$

Определим значение  $u$  из формулы (7.6.2)

$$u = \frac{q}{\Delta\eta\rho l}$$

и подставим его в выражение (7.6.7), получим

$$N(f_1 - f_2)b \geq \frac{q^2 \pi D}{\Delta\eta\rho l g z}, \quad (7.6.8)$$

откуда условие отсутствия забивания  $q < q_{\max}$  связывается с режимными и геометрическими параметрами аппарата:

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{N(f_1 - f_2)b\Delta\eta\rho l g z}{\pi D}}. \quad (7.6.9)$$

Максимально допустимое значение подачи определит пропускную способность МА.

Энергетические модели молотильного аппарата. По В.П. Горячкину, потребляемая мощность молотильным барабаном расходуется на сообщение скорости хлебной массы и преодоление сопротивления при движении ее в подбарабанье.

Энергетическими факторами поэтому будут подача  $q$ , скорость хлебной массы  $V$  и сопротивление её движению. Откликом будет требуемая мощность на технологический процесс. Она определяется окружной силой сопротивления  $P$  и скоростью  $V$ :

$$N = P V. \quad (7.6.10)$$

Выразим силу сопротивления через факторы. Сила сопротивления складывается из усилия захвата  $P_3$  и усилия протаскивания  $P_2$ .

Усилие захвата образуется за счёт разгона массы до скорости

$$P_3 = m'V = qV/g, \quad (7.6.11)$$



где  $m'$  – элемент захваченной массы;  $m'=q/g$ ;  $q$  – секундная подача массы.

Усилие на протаскивание

$$P_2 = P f, \quad (7.6.12)$$

где  $f$  – коэффициент трения.

Общее усилие на захват и протаскивание

$$P = P_3 + P_2 = qV/g + P f, \quad (7.6.13)$$

откуда

$$P = \frac{q \cdot V}{g(1-f)}. \quad (7.6.14)$$

Подставив это выражение в формулу мощности, находим ММ:

$$\frac{m' \cdot V^2}{1-f} = 75 N_2; \quad \text{или} \quad \frac{q \cdot \omega^2 R^2}{g(1-f)} = 75 N_2, \quad (7.6.15)$$

где  $R$  – радиус барабана.

Модель разгона барабана. Считается, что двигатель должен расходовать работу на разгон барабана. Крутящий момент  $M_{кр}$  для разгона тяжёлого барабана с угловым ускорением  $\varepsilon$

$$M_{кр} = J \varepsilon = J d\omega/dt, \quad (7.6.16)$$

где  $J$  – момент инерции барабана.

Мощность  $N_I$  на разгон

$$75 N_I = M_{кр} \omega; \quad \text{или} \quad 75 N_I = J \frac{d\omega}{dt} \omega. \quad (7.6.17)$$

Модель энергетики и модель разгона объединяют, получая т.н. основное уравнение МА по В.П. Горячкину

$$75 N_I = J \frac{d\omega}{dt} \omega = \frac{m' \cdot V}{1-f}. \quad (7.6.18)$$

Из основного уравнения получают угловое ускорение

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{q \cdot \omega R^2}{Jg(1-f)}. \quad (7.6.19)$$

Отрицательное ускорение, связанное с затратой энергии на обмолот, В.П. Горячкин назвал расходом ускорения. Потери ускорения регламентируются, т. е. молотильный барабан не должен сильно снижать скорость при нагрузке. Опытным путём установлено эмпирическое соотношение требуемой мощности привода и момента инерции барабана:  $N_2 = 10 * J$ .

Динамическая модель МА. Однозвенную динамическую модель строил на макроуровне С.А. Алфёров для вращательного движения барабана. В качестве входных факторов приняты моменты сил, действующих на барабан:  $M_c(t)$  – крутящий момент сопротив-

ления от обмолачиваемой массы, зависящий от времени  $t$ ;  $M_B$  – момент от сопротивления воздуха вращающимся органам;  $M_{тр}$  – постоянный момент от сил трения; ;  $M_{пр}(\omega)$  – приводной крутящий момент от клиноременной передачи и зависящий нелинейно от скорости вращения  $\omega$ .

Откликом является скорость вращения барабана  $\omega$ .

Для построения факторной ММ достаточно воспользоваться компонентными уравнениями звеньев (см. табл. 3.5.). С.А. Алфёров применил принцип Даламбера. Факторная ММ:

$$I \frac{d\omega}{dt} + M_{\hat{A}} + M_{\text{об}} + \dot{I}_{\bar{n}}(t) = M_{i\delta}(\omega), \quad (7.6.20)$$

где  $J$  – момент инерции молотильного барабана;  $d\omega/dt$  – угловое ускорение барабана.

Для преобразования факторной ММ в чисто математическую необходимо выразить факторы через параметры.

Момент сопротивления  $M_B$  пропорционален квадрату угловой скорости:

$M_B = B\omega^2$ , где  $B$  – коэффициент сопротивления воздуха вращению барабана.

Для получения линеаризованного уравнения, разрешаемого аналитически, заменяем нелинейные функции  $M(\omega)$  и  $B\omega^2$  приближёнными линейными выражениями.

Приводной крутящий момент от клиноременной передачи  $M_{пр}(\omega)$  С.А. Алфёров линеаризует приближённым выражением

$$M_{пр}(\omega) \approx A_1 - B_1\omega, \quad (7.6.21)$$

а момент сопротивления  $M_B$  – другим приближённым выражением

$$M_B \approx l\omega - C. \quad (7.6.22)$$

Тогда уравнение (7.6.20) превратится в линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$Jd\omega/dt + l\omega - C + M_{тр} + M_c(t) = A_1 - B_1\omega. \quad (7.6.23)$$

После выделения старшей производной оно принимает вид

$$d\omega/dt + (l + B_1)\omega/J + (M_{тр} - A_1 - C)/J + M_c(t)/J = 0. \quad (7.6.24)$$

Обозначив

$$(l + B_1)/J = m; (M_{тр} - A_1 - C)/J = n; 1/J = i, \quad (7.6.25)$$

получим линейное неоднородное дифуравнение в компактной форме:

$$d\omega/dt + m\omega + n + i M_c(t) = 0. \quad (7.6.26)$$

Полученное дифференциальное уравнение (7.6.26) является полноценной динамической ММ молотильного аппарата. Оно относится к классу инвариантных, линейных, непрерывных. Такая ММ пригодна для решения компьютерными технологиями в циф-

ровом виде, но не позволяет проследить зависимости решения от параметров. Чтобы выявить такие зависимости, необходимо получить аналитическое решение дифференциального уравнения (7.6.16).

Решение неоднородного линейного дифуравнения первого порядка достаточно проработано и приведено в справочниках. По С.А. Алферову оно имеет вид:

$$\omega = \omega_0 + \frac{n}{m} e^{-mt} - \frac{n}{m} - e^{-mt} \int iM_{\bar{N}}(t) e^{mt} dt, \quad (7.6.27)$$

где  $\omega_0$  – начальное значение частоты вращения барабана.

Внешнее воздействие  $M_c(t)$  в общем случае представляет случайный процесс, и модель будет статистической. Её решение можно представлять через спектральные функции и амплитудно-частотные характеристики по методике п. 4.4.

С.А. Алфёров упростил задачу и принял нагрузку  $M_c(t)$  периодической:

$$M_c(t) = B + A \sin \lambda t, \quad (7.6.28)$$

где  $B$  – постоянная средняя нагрузка;  $A$  – амплитуда периодических колебаний нагрузки с частотой  $\lambda$ .

Выражение для угловой скорости установившегося процесса:

$$\omega = -\frac{\sum M}{\ell + B_1} - \frac{A}{\sqrt{(\ell + B_1)^2 + \lambda^2 J^2}} \sin(\lambda t - \varphi), \quad (7.6.29)$$

где  $M = M_{тр} - A_1 - C + B$  – постоянный момент сопротивлений.

Первый член выражения (7.6.29) всегда больше нуля – это среднее значение частоты вращения барабана, установившееся при работе. Второй член выражения представляет собой синусоидальную величину той же частоты  $\lambda$ , что и внешняя нагрузка  $M_c(t)$ , но со своей амплитудой и фазой. Амплитуда колебаний скорости вращения барабана  $\omega(t)$  уменьшается с увеличением частоты  $\lambda$  и момента инерции  $J$  молотильного барабана.

## 7.7. Модели сепарации вороха на соломотрясе

В зерноуборочном комбайне после молотильного аппарата образуется солоmistый ворох, в котором остаётся много зерна, его надо выделить. Выделение зерна из вороха принято называть сепарацией. Она проводится на специальном устройстве, называемом соломотрясом. Он встряхивает и перемещает ворох по качающимся решёткам, вследствие чего зерно проходит через пространственную решетку, образуемую соломой, и просеивается через решетку соломотряса, а солома идёт сходом и удаляется

из комбайна. Математическое моделирование процесса сепарации зерна из вороха на соломотрясе комбайна проводил ак. И. Ф. Василенко. Полученная модель носит название – основное уравнение сепарации, пригодное для любого типа соломотрясов – клавишных или платформенных [2].

Процесс сепарации зерна соломотрясами определяется вероятностью просеивания зерна через пространственную решетку, образуемую соломой, и просеивания зерна через решетку соломотряса.

Вероятность просеивания зерна через решетку соломотряса

$$a = s_1/s, \quad (7.7.1)$$

где  $s_1$  – площадь отверстий решетки соломотряса;  $s$  – общая площадь соломотряса.

Пусть  $k$  – вероятность прохождения зерна через разреженный слой соломы. Тогда вероятность  $p_1$  просеивания зерна на соломотрясе за одно встряхивание равна произведению вероятностей

$$p_1 = ak. \quad (7.7.2)$$

Но это произойдет на расстоянии  $L_1 = v_c t_1$ , здесь  $v_c$  – скорость движения соломы по соломотрясу;  $t_1$  – время между двумя последовательными встряхиваниями. По опытным данным И. Ф. Василенко время между двумя встряхиваниями  $t_1 = 0,28$  с.

Относительная вероятность (1/см), отнесенная к единице пути (перемещению) слоя по соломотрясу,

$$\mu = ak/v_c t_1. \quad (7.7.3)$$

Величина  $\mu$  называется коэффициентом сепарации. По данным И. Ф. Василенко  $\mu = 0,018$  1/см.

К концу соломотряса количество зерна будет уменьшаться. Графически этот процесс можно изобразить в виде падающей кривой (рис. 7.7.1): по горизонтальной оси  $x$  отложена длина соломотряса, а по вертикальной  $y$  – количество зерна в соломе.

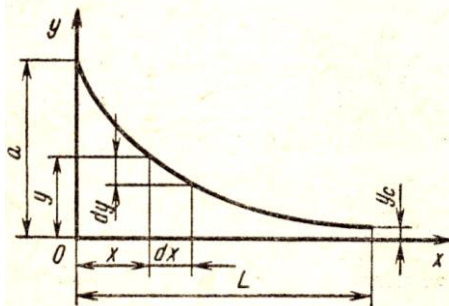


Рис. 7.7.1. График процесса сепарации зерна на соломотрясе

Найдём зависимость остающегося зерна в соломе от пути.

За время  $dt$  продукт переместится по соломотрясу на величину  $dx$ . За время относительная вероятность просеивания составит  $\mu dx$ . За время  $dt$  произойдет уменьшение зерна в соломе на величину  $dy$ . Относительную величину просеивания  $p$  получим, отнеся величину  $dy$  к находящемуся в это время на соломотрясе всему количеству зерна, т. е.

$$p = -dy/y. \quad (7.7.4)$$

Знак минус здесь учитывает, что тангенс угла наклона касательной к точкам любой понижающей кривой будет отрицательным. Далее оба выражения можно приравнять:

$$-dy/y = \mu dx. \quad (7.7.5)$$

Интегрируем обе части уравнения (7.7.5):

$$-\ln y = \mu x + C. \quad (7.7.6)$$

Определяем  $C$  из начальных условий. При  $x=0$ ,  $y=a$  ( $a$  – количество зерна, поступившее на соломотряс).

Из уравнения (7.7.6) получаем:

$$C = -\ln a. \quad (7.7.7)$$

Подставив значение  $C$  в уравнение (7.7.6), получим:

$$-\ln y = \mu x - \ln a, \quad (7.7.8)$$

или

$$\ln(a/y) = \mu x. \quad (7.7.9)$$

Потенцируем это уравнение, получаем:

$$a/y = e^{\mu x}, \quad (7.7.10)$$

откуда получаем основное уравнение сепарации:

$$y = ae^{-\mu x}. \quad (7.7.11)$$

Уравнение сепарации представляет математическую модель сепарации аналитического вида. Её можно использовать для нахождения необходимой длины соломотряса  $L$ .

Задаваясь из агротехнических требований допустимыми потерями зерна в солому на выходе соломотряса  $y_c$ , из уравнения (7.7.11) получим:

$$y_c = ae^{-\mu L} \quad (7.7.12)$$

Откуда определим длину соломотряса  $L$ :

$$L = \frac{1}{\mu} \ln \frac{a}{y_c}. \quad (7.7.13)$$

## 7.8. Модели очистки зерна на решётах

Технологический процесс очистки и сепарации зерна в сельскохозяйственном производстве проводится с использованием

решёт: плоских и цилиндрических.

Решёта представляют плоское полотно (металлическое, проволочное), в котором выполнены отверстия (круглые, продолговатые, квадратные). Распространены плоские пробивные решёта из стального листа, в котором пробиты круглые или продолговатые отверстия. Стальной лист может иметь желобчатую поверхность.

Рабочий процесс плоского решета [2] заключается в перемещении зернового материала равномерным слоем по поверхности решета, западении зерен в отверстия и прохождение сквозь них тех зерен, размеры которых меньше размеров отверстий. Обычно отверстия делят зерновой материал по ширине. Решето задерживает зерна, толщина которых больше ширины отверстия и пропускает зёрна, толщина которых меньше ширины отверстия. Считается, что решёта делят продукт на сход и проход.

В зерноочистительных машинах решёта крепят на решетный стан, который подвешен на пружинных подвесках 1 (рис. 7.8.1).

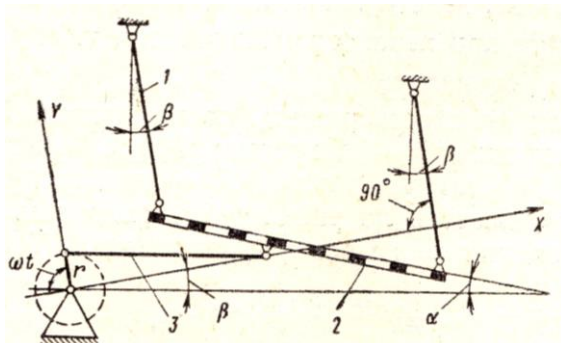


Рис. 7.8.1. Расчётная схема подвески плоского решета

Решета 2 устанавливаются с наклоном  $8 - 12^\circ$  в сторону схода материала (или горизонтально). Наклон решета определяют из условия, что при неподвижном решете зерновая масса не должна скатываться, т. е. угол  $\alpha$  наклона решета должен быть меньше угла трения  $\varphi$  зерна о решето. При помощи кривошипно-шатунного 3 или эксцентрикового механизма решетам сообщают колебательное движение с круговой частотой  $\omega$ .

Зерна по решету перемещаются слоем и непрерывно взаимодействуют между собой, т.е. представляют микроуровневую дискретную среду. Однако решение задачи о движении слоя зерен с учетом всех взаимодействий между частицами пока не представ-

ляется возможным. Поэтому при моделировании принимают допущения:

1. Движение элемента слоя зерен рассматривают как движение материальной частицы массой  $m$ . Это означает структуризацию среды и переход с микроуровня на макроуровень.
2. Сопротивлением воздуха движению пренебрегают.
3. Полагают, что решето совершает гармонические колебания в плоскости только по оси  $x$  под углом  $\beta$  к горизонту.

Смещение любой точки решета  $x = -r \cos\omega t$ ; скорость  $v = dx/dt = r\omega \sin\omega t$ ; ускорение  $j = d^2x/dt^2 = -r\omega^2 \cos\omega t$ .

За время одного оборота ускорение изменяет знак, а, следовательно, изменяет направление и сила инерции элемента зернового слоя. Соответственно различают правый и левый интервалы движения зерна, отличающиеся направлением сил инерции. Для каждого интервала существует своя расчётная схема (рис. 7.8.2).

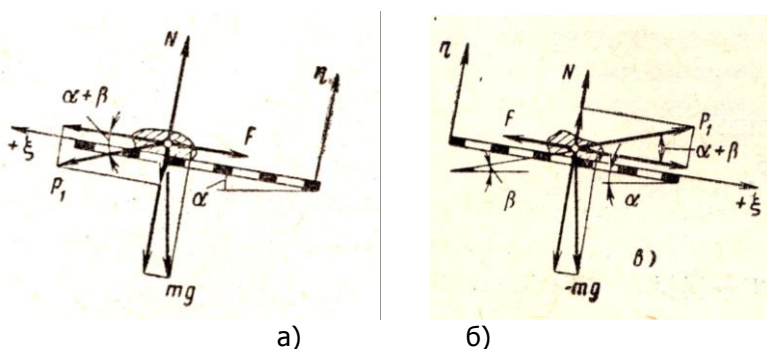


Рис. 7.8.2. Расчётные схемы интервалов движения:  
 а – левого при движении вверх по решету;  
 б – правого при движении вниз по решету

Построим ММ движения зерна по решету вверх (рис. 7.8.2, а).

Спроектируем все силы на ось  $\xi$  вдоль поверхности решета:

$$m d^2\xi/dt^2 = P_1 \cos(\alpha+\beta) - mg \sin\alpha - F, \quad (7.8.1)$$

где сила трения

$$F = fN = f [mg \cos\alpha + m r \omega^2 \cos\omega t \sin(\alpha+\beta)]. \quad (7.8.2)$$

Подставляя значения  $P_1$  и  $F$ , получим после группировки

$$d^2\xi/dt^2 = r\omega^2 \cos\omega t [\cos(\alpha+\beta) - f \sin(\alpha+\beta)] - g(\sin\alpha + f \cos\alpha). \quad (7.8.3)$$

Введя обозначения:

$$A = \cos(\alpha+\beta) - f \sin(\alpha+\beta); \quad B = \sin\alpha + f \cos\alpha, \quad (7.8.4)$$

приводим уравнение движения к виду

$$d^2\xi/dt^2 = A r \omega^2 \cos\omega t - g B. \quad (7.8.5)$$

Это уравнение можно считать инвариантной ММ движения ча-

стиц вверх по решетке. Она допускает решение и переход к аналитической ММ.

Интегрируя уравнение (7.8.5), получаем:

$$d\xi/dt = Ar\omega \sin\omega t - gBt + C_1; \quad (7.8.6)$$

$$\xi = -Ar \cos\omega t - gBt^2/2 + C_1t + C_2, \quad (7.8.7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные интегрирования, подлежащие определению по начальным условиям задачи.

Зерно начинает движение в момент  $t=t_1$ , когда кривошип повернут на угол  $\omega t_1$ . При  $t=t_1$   $\xi=0$ ,  $d\xi/dt=0$ ,  $d^2\xi/dt^2=0$ .

Подставив в начальные условия в уравнения (7.8.6) и (7.8.7), находим:

$$C_1 = gBt_1 - Ar\omega \sin\omega t_1; \quad (7.8.8)$$

$$C_2 = Ar \cos\omega t_1 + Ar\omega \sin\omega t_1 - gBt_1^2/2. \quad (7.8.9)$$

Подставив произвольные постоянные в уравнения (7.8.7), получим аналитическую ММ движения зерновки вверх по решетке:

$$\xi = Ar (\cos\omega t_1 - \cos\omega t) - Ar\omega(t-t_1)\sin\omega t_1 - (gB/2)(t-t_1)^2. \quad (7.8.10)$$

Скорость движения

$$v = d\xi/dt = Ar\omega (\sin\omega t - \sin\omega t_1) - gB(t-t_1). \quad (7.8.11)$$

Аналитическую ММ движения зерновки вниз по решетке получаем по другой расчётной схеме (рис. 7.8.2, б), рассматривая правый интервал движения и проделав аналогичные процедуры.

Проекция сил на ось  $\xi$  отличаются только одним знаком:

$$m d^2\xi/dt^2 = P_1 \cos(\alpha+\beta) + mg \sin\alpha - F, \quad (7.8.12)$$

где сила трения

$$F = fN = f [mg \cos\alpha - m\omega^2 \cos\omega t \sin(\alpha+\beta)]. \quad (7.8.13)$$

Подставляя значения  $P_1$ ,  $F$  и обозначения:

$$A_1 = \cos(\alpha+\beta) + f \sin(\alpha+\beta); \quad B_1 = \sin\alpha - f \cos\alpha,$$

приводим уравнение движения (7.8.12) к виду

$$d^2\xi/dt^2 = A_1\omega^2 \cos\omega t - gB_1. \quad (7.8.14)$$

Это уравнение можно считать инвариантной ММ движения частиц вниз по решетке. Она также допускает решение и переход к аналогичной аналитической ММ, но с другими начальными условиями и другим временем начала движения вниз  $t'_1$ . Получим:

$$\xi = Ar(\cos\omega t'_1 - \cos\omega t) - Ar\omega(t-t'_1)\sin\omega t'_1 - (gB/2)(t-t'_1)^2. \quad (7.8.15)$$

Скорость движения

$$v = d\xi/dt = Ar\omega (\sin\omega t - \sin\omega t'_1) - gB(t-t'_1). \quad (7.8.16)$$

Уравнения (7.8.15) и (7.8.16) можно считать аналитической ММ движения зерновки вниз по решетке.

По разработанным ММ исследуются различные режимы работы решёт: движение вверх, движение вниз, с отрывом и без.

Условие отрыва можно получить, создав ММ движения зерновки перпендикулярно плоскости решета.



Суммируя силы по координате  $\eta$ , перпендикулярной поверхности решета, получаем уравнение

$$md^2\eta/d^2 = N - mg \cos\alpha - P_1 \sin(\alpha+\beta), \quad (7.8.17)$$

где сила инерции в переносном движении

$$P_1 = m\Gamma\omega^2 \cos\omega t. \quad (7.8.18)$$

Условие подбрасывания с отрывом  $N=0$ ,  $md^2\eta/d^2 = 0$ , тогда

$$mg \cos\alpha + P_1 \sin(\alpha+\beta) = 0. \quad (7.8.19)$$

Приведённые классические модели работы решёт позволяют рассчитывать нужные кинематические режимы работы решёт, которые характеризуются показателем кинематического режима  $k$ , как отношением амплитуды ускорения решета к ускорению свободного падения  $g$ :

$$k = r\omega^2/g. \quad (7.8.20)$$

Он подлежит определению для разных случаев относительного движения зерна по решету.

Приведённые классические модели работы решёт имеют недостаток – отсутствует единая модель, для каждого режима надо применять свою модель и условия, что усложняет пользование ими.

## 7.9. Модели движения частиц в воздушном потоке

Задача о движении зерна в воздушном потоке возникает при разработке воздушно-решетных очисток (ВРО) зерноуборочных комбайнов, аэротехнологий пневмосепарации и пневмотранспортивки зерна, пневмосистем сеялок и т. п.

На рис. 7.9.1 приведена расчётная схема движения частицы в воздушном потоке очистки комбайна [Муратов Д.К., 2012].

Частицы зернового материала сходят со стрясной доски с начальной скоростью  $W_0$  и движутся в воздушном потоке, имеющем скорость  $u$ . Под действием аэродинамических сил  $R$  частица описывает траекторию. Так как частицы имеют разные размеры, массу и парусность, то траектории их движения в воздушном потоке будут разные. На этом основана аэродинамическая сепарация воздушным потоком.

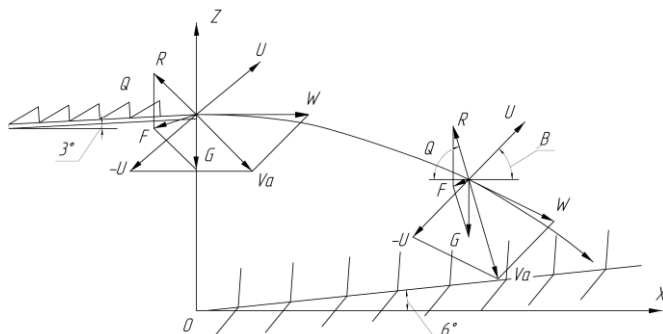


Рис. 7.9.1. Взаимодействие частицы с воздушным потоком:  $W$  – скорость движения частицы;  $u$  – скорость воздушного потока;  $V_a$  – скорость движения частицы относительно потока;  $R$  – сила сопротивления;  $G$  – сила тяжести;  $F$  – результирующая сила;  $\Theta$  – угол отклонения силы  $F$  от горизонтали.

Факторами процесса полёта частицы являются скорости частицы  $W$  и воздушного потока  $u$ . Параметрами модели являются масса частицы и парусность. Откликом модели являются траектория полёта частицы  $z(x)$ . После схода со стрясной доски частица зернового вороха движется в воздушном потоке под действием силы тяжести  $mg$  и силы сопротивления  $R$ , направление которой противоположно направлению скорости  $V_a$ .

Уравнения движения компонента:

$$m\ddot{x} = -R \cos \Theta; \quad (7.9.1)$$

$$m\ddot{z} = R \sin \Theta + mg. \quad (7.9.2)$$

Сила сопротивления  $R$  противоположна направлению абсолютной скорости. Её величина пропорциональна квадрату абсолютной скорости  $k_R \cdot V_a^2$ . Вместе с силой тяжести сила сопротивления образует равнодействующую силу  $F$ , вызывающую торможение частицы. На рис 7.9.1 показано равновесие сил в момент схода компонента с конца стрясной доски и в текущем положении. Сравнение показывает, что по мере движения в воздушном потоке сила уменьшается, но эффект её остаётся тормозящим.

Проекции вектора относительной скорости на оси координат:

$$\dot{V}_x = \dot{x} + u \cos \beta; \quad (7.9.3)$$

$$\dot{V}_z = \dot{z} + u \sin \beta.$$

Выражение для модуля вектора скорости  $V_a$ :

$$V_a = \sqrt{V_x^2 + V_z^2} = \sqrt{u^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + 2u \cdot (\dot{x} \cdot \cos \beta + \dot{z} \cdot \sin \beta)}. \quad (7.9.4)$$

Коэффициент сопротивления  $k_R$  будем считать пропорциональным площади лобового сечения  $S$  частицы,  $k_R = k S$ .

Полное выражение для силы сопротивления

$$R = k S V_a^2, \quad (7.9.5)$$

где  $V_a$  находится по выражению (7.9.4).

Выражения для  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  получим через проекции  $V$ :

$$\sin \theta = V_x / V_a; \quad \cos \theta = V_z / V_a. \quad (7.9.6)$$

С учётом соотношений (7.9.3) получим:

$$\sin \Theta = (\dot{z} + u \sin \beta) / V_a; \quad \cos \Theta = (\dot{x} + u \cos \beta) / V_a. \quad (7.9.7)$$

Полученные соотношения (7.9.7) приводят дифференциальные уравнения задачи (7.9.1) и (7.9.2) к виду:

$$m\ddot{x} = -k \cdot S \cdot V \cdot (\dot{x} + u \cos \beta); \quad (7.9.8)$$

$$m\ddot{z} = mg - k \cdot S \cdot V \cdot (\dot{z} + u \sin \beta). \quad (7.9.9)$$

С учётом соотношения (7.9.4) и (7.9.7) и уравнений (7.9.8) и (7.9.9) получим математическую модель процесса движения частицы в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x} = -k(\dot{x} + u \cos \beta) \sqrt{u^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + 2u \cdot (\dot{x} \cdot \cos \beta + \dot{z} \cdot \sin \beta)}; \quad (7.9.10)$$

$$\ddot{z} = g - k(\dot{z} + u \sin \beta) \sqrt{u^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + 2u \cdot (\dot{x} \cdot \cos \beta + \dot{z} \cdot \sin \beta)}. \quad (7.9.11)$$

Модель инвариантная, нелинейная, трансцендентная. Трансцендентность ММ делает невозможным аналитическое решение дифференциального уравнения. Можно получать цифровые решения и соответствующую графику переходом к структурным моделям в среде Simulink Matlab (см. п. 8.4).

## 7.10. Модели процесса дождевания

Для обеспечения высоких и устойчивых урожаев сельскохозяйственных культур применяют орошение полей дождеванием – распылением воды в виде дождя над орошаемой площадью при помощи особых аппаратов. Тем самым дождевание следует отнести к физическому моделированию дождя натурального.

Искусственный дождь должен иметь модельные показатели, удовлетворяющие агротехническим требованиям. К ним относятся:

- слой осадков;
- интенсивность дождя;
- равномерность распределения осадков;

- крупность капель;
- силовое воздействие капель на почву и культуры;
- отсутствие лужеобразования.

Для каждого показателя разработана своя ММ [2].

Слой осадков  $h$  измеряют в мм и указывают его среднее значение, усредняя по площади

$$h = W/F, \quad (7.10.1)$$

где  $W$  – объем воды, выпавшей на площадь  $F$ .

**Интенсивность дождя** оценивают по среднему и действительному значениям. Средняя интенсивность дождя  $\rho_c$  представляет приращение слоя осадков в единицу времени:

$$\rho_c = h_c/t, \quad (7.10.2)$$

где  $t$  – время, за которое выпали осадки слоем  $h_c$ .

Действительная или истинная интенсивность есть приращение слоя осадков в данной точке  $f$  в данный момент времени:

$$\rho = dh_f/dt. \quad (7.10.3)$$

**Равномерность распределения дождя** по площади полива оценивают обычно по экспериментальным данным коэффициентом эффективного полива, представляющего собой отношение площади, эффективно политой (правильно), ко всей площади:

$$K_{\text{эф.п}} = F_{\text{эф.п}}/F. \quad (7.10.4)$$

Крупность капель рассматривается как оценка дисперсности струи. Крупность определяется объёмом капли, но на практике средний объем капель искусственного дождя ведут по среднеобъемному диаметру капель:

$$d_c = \sqrt[3]{\frac{\sum id_{Ki}^3}{\sum i}}, \quad (7.10.5)$$

где  $i$  – число капель данного диаметра  $d_i$ .

Для почвы и растений более благоприятными являются капли малого размера.

**Силовое воздействие капли** зависит не только от её размера, но и от скорости движения. Силу удара  $S$  капли о растение можно получить из уравнения количества движения:

$$St = m(u - u_k), \quad (7.10.6)$$

где  $t$  – время, за которое длится удар;  $m$  – масса капли;  $u$  – скорость капли в начале удара (скорость падения);  $u_k$  – скорость капли в конце удара; обычно принимается  $u_k = 0$ .

Как показали эксперименты, удар капли о растение близок к упругому. В этом случае время удара

$$t = k \frac{2d_k}{v_3}, \quad (7.10.7)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, характеризующий степень деформации капли;  $v_3$  – скорость распространения звука в воде.

Тогда сила удара

$$S = k' \rho_1 \frac{\pi V_3}{6} v d_k^2, \quad (7.10.8)$$

где  $\rho_1$  – плотность воды;  $k'$  – коэффициент, зависящий от типа почвы.

В этой ММ присутствует слишком много факторов. Их разделяют на неизменяемые и режимные, которыми можно управлять. Вводя показатель неизменяемых факторов

$$N = \rho_1 \pi v^3 / 6, \quad (7.10.9)$$

ММ силы удара представляют в компактном виде

$$S = k' N v d_k^3. \quad (7.10.10)$$

Коэффициент  $k'$  учитывает в ММ различия свойств почв.

**Отсутствие лужеобразования** и стоков при дождевании требует выполнения условия, чтобы средняя скорость впитывания воды почвой была не меньше средней интенсивности дождя.

Связь между интенсивностью дождя и продолжительностью полива до образования луж выражается гиперболической зависимостью, называемой кривой впитывания:

$$t_6 = A_6 / \rho c^n, \quad (7.10.11)$$

где  $t_6$  – время дождевания с данной интенсивностью  $\rho c$  до образования луж;  $A_6$  – коэффициент, характеризующий впитывающую способность почв, называемый постоянной впитывания;  $n$  – показатель, зависящий от типа почвы.

Обработкой экспериментальных данных получена зависимость для коэффициента  $A_6$  в функции критерия силы удара  $S_k$ :

$$A_6 = 2,9 A_{1,5} \frac{A_{1,5}}{\sqrt{S_k}}, \quad (7.10.12)$$

где  $A_{1,5}$  – постоянная впитывания различных почв при воздействии на них свободнопадающих капель диаметром  $d_k = 1,5$  мм. Значения  $A_{6,1,5}$  для различных почв (от самых легких с  $n = 1,25$  до самых тяжелых с  $n = 3,0$ ) приводятся в справочниках.

Если учесть, что произведение  $\rho J_6$  есть норма полива (количество воды, вылитой на 1 га данного участка), то допустимая норма полива при дождевании с данной интенсивностью

$$m_{\dot{A}} = \frac{A_{\dot{a}}}{\rho_c^{n-1}}. \quad (7.10.13)$$

Используя зависимость (7.10.13), можно решать обратную задачу – выбрать допустимую интенсивность дождя по данной норме полива, т. е. подобрать требуемый тип машины.

**Модели струй.** Капли искусственного дождя получаютя распадом струй воды, которые подлежат моделированию. **Модельными показателями струй** при дождевании являются расход воды, дальность и высота полета струи.

**Дальность полёта струи** определяется по траектории движения капли. Её определение – это задача механики о движении частицы, брошенной под углом  $0^0$  к горизонту с начальной скоростью  $V_0$ . Теоретическую дальность полета  $R_T$  определяет академическая ММ:

$$R_T = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (7.10.14)$$

Скорость связана со скоростным напором  $H$  в начале струи  $V_0^2 = 2gH$ . (7.10.15)

Тогда дальность связывается с напором:

$$R_T = 2H \sin 2\theta_0. \quad (7.10.16)$$

Напор связан с расходом воды через насадку площадью  $F$ :

$$H = Q_H^2 / 2gF^2\mu^2 \quad Q_H = \mu F \sqrt{2gH}, \quad (7.10.17)$$

где  $\mu$  – коэффициент расхода, определяемый формой сопла;  $g$  – ускорение свободного падения;  $H$  – напор.

Академическая ММ даёт выход на расчёты параметров дождевателя, но не учитывает сопротивления воздуха и является приближённой.

На практике используют априорные ММ дальности полета струи. Они используют те же факторы, что и академическая ММ, но имеют экспериментальные коэффициенты. Для круглого сопла

$$R = 2H \sin 2\theta_0 \left[ 1 - 4\lambda \frac{H}{D} \sin \theta_0 \right], \quad (7.10.18)$$

где  $D$  – диаметр струи в сжатом сечении;  $\lambda$  – экспериментальный коэффициент, учитывающий сопротивление воздуха. Значения коэффициента  $\lambda$  установлены и представлены в справочниках.

На практике более удобна безразмерная ММ траектории капель:

$$\xi = \psi \operatorname{tg} \theta_o - \psi^2 \operatorname{tg} \theta_o \frac{\psi^2 \operatorname{tg} \theta_o}{k_R - r\psi}, \quad (7.10.19)$$

где  $\xi=y/D$ ,  $\psi=x/D$  – относительные ордината и абсцисса графика траектории струи;  $k_R=R/D$  – относительная теоретическая дальность струи;  $r=(R_r - R)/R$  – относительная потеря дальности струи из-за сопротивления воздуха.

Максимальная высота подъема струи определяется по максимуму зависимости (7.10.19):

$$\xi_{\max} = k_R \operatorname{tg} \theta_o \frac{\sqrt{1+r}-1}{r\sqrt{1+r}} \left(1 - \frac{\sqrt{1+r}-1}{r}\right). \quad (7.10.20)$$

Высота подъема оказывается сложно связанной с дальностью и потерей дальности от сопротивления воздуха.

Те же безразмерные факторы определяют скорость падения капель:

$$v_K = v_o \frac{(1 - \lambda k_R)[(1 - \lambda k_R)^2 + \operatorname{tg} \theta_o]}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_o}. \quad (7.10.21)$$

Приведённые ММ не учитывают вязкости воды. Её учитывают только в экспериментальных ММ. Средний диаметр капель, образующихся при распаде струи, определяется по априорной ММ:

$$d_K = \frac{DA}{(10^{-5} \operatorname{Re})^n} + BD, \quad (7.10.22)$$

где  $\operatorname{Re}$  – число Рейнольдса;  $\operatorname{Re} = v_o D / \nu$  (здесь  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости воды);  $A$ ,  $B$  и  $n$  – экспериментальные коэффициенты и показатель степени, зависящие от участка струи.

Для начального участка струи  $A=0,15$ ,  $B=0$ ,  $n=0,73$ ; для середины  $A=0,3$ ,  $B=0$ ,  $n=0,88$ ; для конечного участка  $A=0,47$ ,  $B=0,007$ ,  $n = 1$ . С учётом значений коэффициентов можно получать ещё более простые выражения. Например, для среднего диаметра капель в конце струи ММ (7.10.21) упрощается до простого вида:

$$d_{\text{КК}} = \frac{47000}{v_o} v + 0,007D. \quad (7.10.23)$$

Приведенные ММ процесса дождевания позволяют рассчитывать основные параметры дождевальных машин исходя из условия обеспечения заданных агротехнических требований.

## ЧАСТЬ 8. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ

Компьютерное моделирование (КМ) – моделирование, когда модель представляется в виде компьютерной программы.

### 8.1. Виды компьютерного моделирования

КМ классифицируется по виду получаемых результатов работы модели. Различают численное, имитационное, статистическое и структурное КМ [26].

**Численное КМ** – для построения модели используются готовые аналитические зависимости и процедуры математики, физики, механики и других теоретических наук. Исходные и выходные данные представлены числами.

Результат работы в виде чисел имеет недостаток: отсутствие наглядности и аналитичности. Для отслеживания тенденций надо запускать программу многократно. Изменяя исходные данные, можно проследить влияние каких-либо факторов на показатели работы. Такой процесс называется вычислительным экспериментом.

**Имитационное моделирование (ИМ)** – воспроизведение (имитация) работы сложной системы или процесса.

Сложной называется система, состоящая из большого количества действующих по своим законам элементов. Например, телефонная сеть и т.п. Отличительной особенностью таких систем является то, что целевая функция системы не совпадает с целевой функцией элемента, у системы есть управление (вмешательство человека в ситуацию) и развитые межэлементные связи.

Различают предметное ИМ и числовое ИМ.

**Предметное ИМ** имитирует элементы изображениями, картинками в динамике, образуя видеоряд изменений ситуации. Пример - компьютерные игры – имитация окружающего мира, построение виртуальной действительности.

Для технических объектов имитируется состояние технического устройства при изменении нагрузок, внешних воздействий, поступления команд. Выдаются картины перемещений, распределения напряжений, деформаций, температур и других интересующих исследователя величин.

Предметное имитационное моделирование весьма наглядно и информативно для пользователя, но требует развитого графиче-



ского отображения - сложного и трудоёмкого компьютерного продукта.

Важной разновидностью предметного ИМ является имитация трудно воспроизводимых процессов. Например, имитация аварийных ситуаций, ударов, взрывов и т.п.

При невозможности создать предметную имитацию переходят к простому вычислительному эксперименту, который большой наглядностью не обладает, но значительно проще воспроизводим.

**Числовое ИМ** выдаёт не картинки видеоряда, а показатели функционирования сложной системы (например, работы участков обработки деталей, сборки, техобслуживания, а также разных систем массового обслуживания: платёжных, телефонных, логистических, маркетинговых и т.п.).

**Статистическое КМ** – моделирование, позволяющее получить статистические данные о процессах в сложной системе, состоящей из случайных элементов. Программа собирает данные о состоянии каждого элемента, рассчитывает статистики, диагностирует, вырабатывает рекомендации по управлению. В СХП – это управление крупным парком машин, агрооценки состояния возделываемых полей и пр. Развитого математического описания система обычно не требует.

**Структурное КМ** выдаёт модель в виде структурной схемы из типовых элементов – блоков с встроенными в них алгоритмами. Задача пользователя - собрать модель под свой алгоритм вычислений, выбирая готовые блоки из библиотек в соответствии с имеющимся математическим описанием.

Компьютерное моделирование позволяет легко проводить **компьютерный эксперимент**, когда объект исследуют не в натуре, а по его компьютерной имитации. К нему прибегают, если натурный эксперимент трудоёмок и плохо воспроизводим: высокие температуры, давления, запылённость, опасная среда. Исследуют поведение объекта при изменении режимов работы, его реакцию на пробные воздействия или на целый испытательный тест.

## 8.2. Принципы компьютерного моделирования

В основе проведения КМ лежит так называемая триада КМ: математическое описание – алгоритм – программа.

Эти этапы отличаются методически, организационно и информационно.

**Математическое описание** процесса или работы объекта

требует специальных математических знаний и квалификации. К его выполнению привлекают математиков-теоретиков, однако необходимо их сотрудничество с предметчиками – специалистами, знающими устройство и работу объекта и хорошо представляющими проблему и постановку задачи.

**Алгоритм** – указание последовательности вычислений или процедур преобразования исходных данных в результат. Разрабатывается специалистами прикладной математики с привлечением предметчиков.

**Программа** – система предписаний и команд для ЭВМ на специальном языке программирования, необходимых для выполнения алгоритма вычислений. Выполняется программистами.

Реализация этой триады разными специалистами сложно организуема, дорогостоящий и длительный процесс. Один из путей снижения затрат – реализация всей триады КМ силами инженера-пользователя. Для этого прорабатываются пути упрощения создания триады до уровня инженерного образования. Его достаточно только для численного КМ при возможности магнетического описания процесса.

Первичное математическое описание может проводить сам конструктор, хорошо представляющий предметную часть задачи и конечную цель проектирования. Математики могут привлекаться, когда задача уже достаточно формализована. Общими усилиями разрабатываются математические модели процессов. Затем на базе математического описания разрабатываются алгоритмы решения. На базе алгоритмов инженер составляет задание программистам на создание нужного программного продукта.

Проблема недоступности для инженера профессиональных языков программирования решается частично созданием языков программирования высокого уровня и особенно программных продуктов, вообще не требующих от пользователя знаний языков программирования и решения уравнений. Такими продуктами можно считать Excel, Simulink, Matlab, систему ИМ-GPSS и др.

Появляется возможность провести все этапы своими силами в расчётном отделе проектной организации.

### 8.3. Численное моделирование в среде Excel

EXCEL позволяет программно реализовывать простые неветвящиеся программы вычислений и пригоден для простых аналитических математических моделей (алгебраические, тригонометрические, без дифференциальных и интегральных уравнений).

Программирование в среде EXCEL сводится к размещению исходных данных и формул в ячейках электронной таблицы по адресам AI, BJ, CK, DL .... (где A, B, C, D – столбцы, а I, J, K, L – номера строк таблицы) и к преобразованию формул через адреса таких ячеек. Способ преобразования прост: символы в формулах заменяются адресами ячеек, где размещаются соответствующие значения заменяемых символов.

Последовательность преобразований данных в среде EXEL должна соответствовать разработанному алгоритму программы вычислений.

**Пример.** Пусть требуется создать программу вычислений напряжений и прогибов консольной балки длиной  $L = 500$  мм, сечением  $b \cdot h = 50 \cdot 30$  мм под действием нагрузки  $P = 100$  кгс при модуле упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5$  кг / см<sup>2</sup>.

Как известно из сопромата, алгоритм расчёта следующий:

1. Вычисляется изгибающий момент  $M_{из} = P \cdot L$ .

2. Момент сопротивления сечения  $W = b \cdot h^2 / 6$ .

3. Напряжение в опасном сечении  $\sigma = M_{из} / W$ .

4. Момент инерции сечения  $J = b \cdot h^3 / 12$ .

5. Прогиб консоли балки  $\delta = P \cdot L^3 / (3 \cdot E \cdot J)$ .

Программа для среды EXEL выглядит следующим образом.

Исходными данными считаем значения в ячейках:

нагрузка  $P$  – ячейка A2 = 100;

консоль  $L$  – ячейка A3 = 50;

ширина  $b$  – ячейка A4 = 5;

высота сечения  $h$  – ячейка A5 = 3;

модуль упругости – ячейка C1 =  $2 \cdot 10^5$ .

Операторы программы:

изгибающий момент  $M_{из}$  – ячейка D7 = A2 \* A3;

момент сопротивления сечения  $W$  – ячейка D8 = A4 \* A5 \* A5 / 6;

момент инерции сечения – ячейка D9 = A4 \* A5 \* A5 \* A5 / 12

напряжения в опасном сечении  $\sigma$  – ячейка E11 = D7 / D8

стрела прогиба  $\delta$  – ячейка E12 = A2 \* A3 \* A3 \* A3 / (3 \* C1 \* D9).

**Применимость программирования в среде EXCEL.** Недостатками программирования в среде EXCEL является отсутствие условных переходов, невозможность ветвления программ вычислений и отсутствие средств организации управляемых циклических вычислений. Поэтому он применяется для простых аналитических моделей и вычислений типа быстрой обработки табличных данных (суммирование, умножение). Он не может заменить специальные языки программирования типа BASIC, PASCAL, FORTRAN, СИ и пр.

Достоинством программирования расчётов в среде EXCEL является его доступность и отсутствие необходимости знаний пользователем специальных языков программирования.

### 8.4. Моделирование в среде Simulink Matlab

Математические описания расчётов конструктивно-технологических параметров сельхозмашин имеют отчётливо выраженную структуру. Все они представляют упорядоченную совокупность формул-соотношений вида

$$Y = f(x_1, x_2 \dots x_n, \text{const}), \quad (8.1)$$

где  $x_1, x_2, x_n$  – варьируемые (переменные) параметры и исходные данные; const – константы: числа и физические величины, недоступные для варьирования;  $f$  – совокупность математических операций над переменными и константами;  $Y$  – результат вычислений.

Такие формулы по принципу «вход – выход» можно представить графически в виде некоего звена (блока), на вход которого поступают переменные и константы, а на выходе формируется результат вычислений (рис. 8.1).

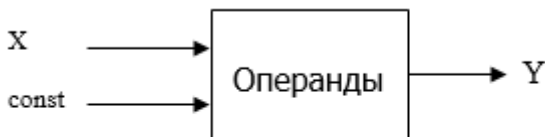


Рис. 8.1. Представление формулы в виде звена (блока)

В математическом описании объекта формулы используются в определённой последовательности и связаны друг с другом через общие переменные и когда результат одной формулы используется как переменные для другой. В таком случае всё математическое описание можно рассматривать как систему, а отдельные формулы – как её элементы (блоки), связанные друг с другом линиями связи.

Совокупность графических изображений блоков и линий связи образует структурную схему математического описания. В отличие от стандартного алгоритма блок-схема показывает не только последовательность математических операций, но и все связи между блоками и пути движения всех переменных и констант, т. е. более информативна и наглядна. Для построения блок-схем предназначен пакет Simulink Matlab (Simulation-моделирование)

[7].

Пакет SimuLink позволяет осуществлять компьютерное моделирование разных динамических нелинейных систем по первичной математической модели без её решения [14].

Построение модели КМ производится путем графической сборки схемы из элементарных стандартных звеньев-блоков (технология Drag-and-Drop (бери и тащи)). В качестве элементов – "кирпичиков" для построения модели применяются модули (блоки), хранящиеся в библиотеке SimuLink. Она может пополняться пользователем. Собранная в результате такой сборки модель называется структурной или S-моделью.

Сигналы в S-модели передаются по линиям связи, соединяющим выходной порт одного блока с входным портом другого блока. Линии могут разветвляться. Они снабжаются метками (обозначениями) проходящих по ним сигналов.

В ходе моделирования имеется возможность наблюдать за процессами, происходящими в системе с помощью специальных смотровых окон в графической или цифровой форме, распечатывать результаты.

Запуск пакета Simulink производится из командного окна MatLAB нажатием соответствующей пиктограммы в панели инструментов. При запуске SimuLink открывается окно браузера библиотек. Оно имеет меню, панель инструментов, поле сообщений, левое окно с деревом всех библиотек Simulink и правое окно с набором пиктограмм компонентов выделенного раздела библиотеки. Дерево библиотек имеет раздел SimuLink, с подразделами: *Continuons*, *Discontinues*, *Discrete*, *MathOperations*, *Sourses*, *Sinks*, *Ports&Sistems*, *Functions&Tables* и др.

Библиотека блоков пакета Simulink. Основная библиотека пакета SimuLink разбита на подразделы. Каждый подраздел имеет свои пиктограммы. Наиболее употребимые из них:

*Continuons* – линейные компоненты;

*Nonlinear (Discontinues)* – нелинейные компоненты

*Discrete* – дискретные компоненты;

*Math Operations* – математические компоненты;

*Functions&Tables* – функции и таблицы;

*Connections* (Связи) – соединительные компоненты;

*Ports&Sistems* – порты и подсистемы;

*Sources* – источники сигналов и воздействий, подаваемых на входы модели. Все блоки-источники имеют по одному выходу и не имеют входов.

*Sinks* – приемники и регистрирующие устройства, сохраняющие

щие результаты моделирования. Все они имеют только входы и не имеют выходов.

*Blocksets&Toolboxes* – дополнительные блоки и инструменты, созданные пользователем.

Содержание раздела библиотеки раскрывается двойным щелчком мыши по его пиктограмме. Раздел разворачивается в окно, содержащее пиктограммы блоков, входящих в этот раздел.

Каждый блок имеет несколько параметров настройки (уровень и диапазон изменения сигнала, коэффициент усиления, амплитуда, частота и т. п.). Их желаемые значения устанавливаются в окне параметров *Properties*, которое вызывается двойным щелчком мыши по пиктограмме блока.

Построение S-модели проводится в отдельном окне, вызываемой командой *File – New model* окна Simulink.

Процесс создания модели управляется командами на панели инструментов окна модели.

Построение блок-схем в среде Simulink называется сборкой S-модели. Работа по сборке S-модели проводится в следующей последовательности:

- открытие пустого окна *untitled* командой *File – New model*);

- перетаскивание пиктограмм-изображения выбранных блоков мышью из окна раздела библиотеки в окно сборки модели;

- соединение линиями связи выходов одних блоков с входами других блоков;

- проставка новых имён блоков;

- проставка меток сигналов на линиях связи;

- нанесение комментариев – текстовой информации о модели в любом свободном месте блок-схемы.

Процедуры выполнения этих операций осуществляются командами редактирования. Они включают операции с блоками (копирование, удаление блоков, отсоединение блока от линий, изменение ориентации блока, изменение размеров блока), операции с именами блоков, операции с соединительными линиями, создание меток сигналов, операции с комментариями.

**Установка параметров блоков из окна установки параметров *Properties*.**

Запуск модели на выполнение осуществляется командой меню *Simulation* или нажатием на пиктограмму *Start simulation* на панели инструментов окна.

Примеры создания S-моделей в среде Simulink MatLAB приведены в учебном пособии [14].

**Пример.** Рассмотрим центробежный рабочий орган с горизон-

тальным диском. Для него дифференциальное уравнение движения частиц по диску получим из общего (7.3.17), полагая  $\psi_0 = 0$ :

$$d^2s/dt^2 + 2*f*\omega*ds/dt - \omega^2s = \omega^2r_0 - f*g, \quad (8.2)$$

где  $s$ ,  $ds/dt$ ,  $d^2s/dt^2$  – радиальное смещение семечка по диску, его скорость и ускорение соответственно;  $\omega$  – угловая скорость вращения диска;  $r_0$  – начальный радиус поступления семечка на диск;  $f$  – коэффициент трения семечка о диск.

Для моделирования уравнение разрешаем относительно старшей производной:

$$d^2s/dt^2 = -\omega^2s + \omega^2r_0 - f*g - 2*f*\omega*ds/dt. \quad (8.3)$$

В основу воплощения этого уравнения в блок-схему положен следующий приём. Если сформировать правую часть уравнения, то согласно ему, результат будет не чем иным, как ускорением. Интегрируя его, получим скорость, интегрируя скорость – смещение, которое заводим на входы блоков правой части уравнения. Построив блок-схему правой части, используем то обстоятельство, что согласно уравнению (8.3) её выходное значение равно левой части уравнения, т.е. ускорению. Тем самым как бы образуется обратная связь, вызванная приравниванием значений ускорения, вычисляемых через правую часть и левую часть непосредственно.

Согласно структуре уравнения (8.3) для построения блок-схемы следует использовать два блока интегрирования (*Integrator*), звено-сумматор (*Sum*), блоки констант (*Constant*) и перемножения (*Product*). В качестве смотрового окна применим блок *Scope* с одним входом, который выводит график зависимости величины, подаваемой на его вход, от модельного времени.

Вариант построенной блок-схемы показан на рис. 8.2.

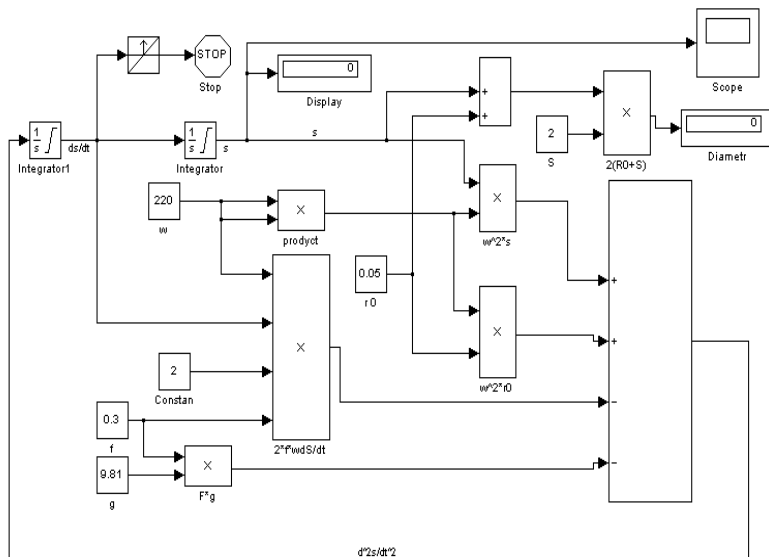


Рис. 8.2. Блок-схема модели центробежного рабочего органа

Полученная структурная модель позволяет получить траекторию движения семечка до момента его схода с диска и определить диаметр диска, при котором семечко в момент схода достигает требуемой скорости  $V_r$ . Для этого используется блок *Hit Crossing* (обнаружить пересечение), который фиксирует состояние, когда входной сигнал пересекает заданное значение. При этом на выходе блока формируется сигнал, который с помощью блока *Stop Simulation* останавливает моделирование в момент достижения семечком требуемой скорости  $V_r$ .

Среда Matlab также имеет специальный пакет оптимизации Optimization Toolbox, в котором имеются программы безусловной оптимизации нелинейных функций (*fminsearch*, *fminunc*), линейного программирования (*linprog*), квадратичного программирования (*quadprog*), условной минимизации нелинейных функций (*fminbnd*, *fmincon*), метода минимакса (*fminimax*) и многокритериальной оптимизации (*fgoalattain*). Программы используют поисковые алгоритмы Ньютона, Марквардта, симплексный Нелдера-Мида и другие из указанных выше (см. п. 5.5).



## ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В.П. Тарасик. – Минск: ДизайнПРО, 2004. – 640 с.
2. Босой Е.С. Теория, конструкция и расчёт сельскохозяйственных машин: учебник для вузов/ Е.С. Босой, И.И. Смирнов, О.В. Верняев и др.; под ред Е.С. Босого. – М.: Машиностроение, 1977. – 568 с.
3. Бурченко П.Н. Механико-технологические основы почвообрабатывающих машин нового поколения / П.Н. Бурченко. – М.: ВИМ, 2002. – 211 с.
4. Валяев Н.Н. Математическое моделирование сельскохозяйственных процессов. / Н.Н. Валяев, Н.А. Кириченко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 1998. – 76 с.
5. Гячев Л.В. Динамика машинно-тракторных и автомобильных агрегатов / Л.В. Гячев. – Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1976.-192с.
6. Дьяченко Г.Н. Ротационные рабочие органы почвообразующих орудий: учеб. пособие / Г.Н. Дьяченко, И.В. Игнатенко, Д.Г. Литенко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2004. – 103 с.
7. Дьяконов В. Simulink 5: спец. справочник / В. Дьяконов. – СПб: Питер, 2002. – 528 с.
8. Ермольев Ю.И. Основы научных исследований: учеб. пособие / Ю.И. Ермольев. – Ростов н/д, Издательский центр ДГТУ, 2013. – 276 с.
9. Жаров В.П. Научные основы оптимизации колебательных систем мобильных сельскохозяйственных машин по их показателям качества. – Дис. ... д-ра техн. наук. – Ростов-н/Д, 1980. – 391 с.
10. Жилкин В.А. Расчёты на прочность и жёсткость элементов сельскохозяйственных машин / В.А. Жилкин; под ред. В.В.Бледных / ЧГАУ. – Челябинск, 2004. – 427 с.
11. Иванюк В.Х. Моделирование сельскохозяйственных процессов: конспект лекций / В.Х. Иванюк. – Челябинск. – 2005. -240 с.
12. Игнатенко И.В. Энергетические аспекты взаимодействия упруго закреплённого рабочего органа с почвой в земледельческой механике: монография / И.В. Игнатенко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2002. – 160 с.
13. Игнатенко И.В. Задача терраупругости в почвообработке / И.В. Игнатенко // Вестник Донск. гос. техн. ун-та. – 2008.– Т.8,

№3(38). – С. 268-277.

14.Игнатенко В.И. Моделирование сельскохозяйственных процессов в среде Matlab: учеб. пособие / В.И. Игнатенко, И.В. Игнатенко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2012. – 143 с.

15.Канарёв Ф.М. Ротационные почвообрабатывающие машины и орудия / Ф.М. Канарёв. – М.: Машиностроение, 1983.

16.Корн Ю. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Ю. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

17.Красовский Г.И. Планирование эксперимента / Г.И. Красовский, Г.Ф. Филаретов. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 372 с.

18.Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

19.Лурье А.Б. Статистическая динамика сельскохозяйственных агрегатов / А.Б. Лурье. – Л.: Колос, 1970.

20.Марка Д.А. Методология структурного анализа и проектирования SADT / Д.А. Марка, К. МакГоуэн. – М.: МетаТехнология, 1995. – 243 с.

21.Матяшин Ю.И. Расчёт и проектирование ротационных почвообрабатывающих машин / Ю.И. Матяшин, И.М. Гринчук, Г.М. Егоров. – М.: Агропромиздат, 1988 – 172 с.

22.Мударисов С.Г. Моделирование процесса взаимодействия рабочих органов с почвой / С.Г. Мударисов //Тракторы и СХМ. – 2005, №7. – С.13-17.

23.Синеоков Г.Н. Теория и расчёт почвообрабатывающих машин / Г.Н. Синеоков, И.М. Панов.– М.: Машиностроение, 1977. – 328 с.

24.Трубилин Е.И. Машины для уборки сельскохозяйственных культур (конструкции, теория и расчет): учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / Е.И. Трубилин, В.А. Абликов, Л.П. Соломатина, А.Н. Лютый / КГАУ. – Краснодар, 2009 – 216 с.

25.Орлов А.И. Прикладная статистика: учебник / А.И. Орлов. – СПб.: Экзамен, 2006. – 671 с.

26.Гордеев А.С. Моделирование агроинженерии: учебник. – 2-е изд., испр. и доп. / А.С. Гордеев. – М.: «Лань», 2014. – 384 с.