



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Проектирование и технический сервис  
транспортно-технологических систем»

## **Практикум**

к задачам № 3,4 «Разработка  
математических моделей процесса  
дождевания»  
по дисциплине

# **«Теория, конструкция и расчёт машин для возделывания сельскохозяйственных машин»**

Авторы  
Игнатенко И. В.

Ростов-на-Дону, 2019

## Аннотация

Практикум представляет учебный материал, необходимый студентам для получения компетенций «Уметь». Приведены задачи разработки математических моделей и тестовые примеры для компьютерного моделирования расчётов конструктивно-технологических параметров в среде «EXCEL» и Simulink MatLab. Дан список необходимой литературы.

Практикум рекомендуется в качестве учебного материала для магистрантов дневного и заочного отделений направления 23.04.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» по программе: «Сельскохозяйственные машины и оборудование».

## Авторы



д.т.н., доцент, профессор  
кафедры «Проектирование  
и технический сервис  
транспортно-  
технологических систем»  
Игнатенко И.В.





## Оглавление

<b>Задача №3 .....</b>	<b>4</b>
Модели процесса орошения дождеванием.....	4
<b>Задача №4 .....</b>	<b>8</b>
Построение математической модели притяжения двух шаровидных капель .....	8
<b>Литература.....</b>	<b>15</b>

## ЗАДАЧА №3

### Модели процесса орошения дождеванием

Орошение необходимо для обеспечения высоких и устойчивых урожаев сельскохозяйственных культур. Распространённым способом орошения является дождевание - распыление воды в виде дождя над орошаемой площадью при помощи особых аппаратов. Тем самым дождевание следует отнести к физическому моделированию дождя натурального.

Искусственный дождь должен иметь модельные показатели, удовлетворяющие агротехническим требованиям. К ним относятся:

- слой осадков,
- интенсивность дождя,
- равномерность распределения осадков,
- силовое воздействие капель на почву и культуры, характеризующееся диаметром и скоростью падения капель,
- отсутствие лужеобразования.

Слой осадков измеряют в мм и указывают его среднее значение  $h_e$ , усредняя по площади

$$h = W/F, \quad (1)$$

где  $W$  — объем воды, выпавшей на площадь  $F$ .

Средняя интенсивность дождя  $\rho_c$  представляет приращение слоя осадков в единицу времени:

$$\rho_c = h_c/t \quad (2)$$

где  $t$  — время, за которое выпали осадки слоем  $h_c$ .

Действительная или истинная интенсивность характеризуется приращением слоя осадков в данной точке  $f$  в данный момент времени:

$$\rho = dh_f/dt \quad (3)$$

Равномерность распределения дождя по площади полива оценивают обычно на основе экспериментальных данных по распределению усредненной интенсивности по площади. Оценивают равномерность распределения по значению средней интенсивности и коэффициенту эффективного полива. Коэффициент эффективного полива представляет собой отношение площади, эффективно политой (правильно), ко всей площади:

$$k_{\text{эф. п}} = F_{\text{эф. п}}/F. \quad (4)$$

Крупность капель рассматривается как оценка дисперсности струи. Крупность определяется объёмом капли, но на практике

средний объем капель искусственного дождя ведут по среднеобъемному диаметру капель:

$$d_c = \sqrt[3]{\frac{\sum id_{ki}^3}{\sum i}}, \quad (5)$$

где  $i$ —число капель данного диаметра  $d_i$ .

Для почвы и растений более благоприятными являются капли малого размера.

Характеристика дождя по его крупности сама по себе еще не определяет воздействие капель дождя на почву и растения. Имеет значение их динамическое воздействие, или сила удара. При моделировании динамического воздействия капель искусственного дождя надо учитывать в качестве факторов размер капли и скорость ее движения. Результат моделирования – сила удара капли о растение  $S$ . Её можно получить из уравнения количества движения

$$St = m(v - v_k), \quad (6)$$

где  $t$  — время, которое длится удар;  $m$  — масса капли;  $v$  — скорость капли в начале удара (скорость падения);  $V_k$  — скорость капли в конце удара;  $V_k = 0$ .

Как показали эксперименты, удар капли о почву близок к упругому. В этом случае время удара

$$t = k \frac{2d_k}{v_3} \quad (7)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий степень деформации капли;  $V_3$  — скорость распространения звука в воде.

Тогда сила удара

$$S = k' \rho_1 (\pi v_3 / 6) v d_k^2, \quad (8)$$

где  $\rho_1$  — плотность воды;  $k'$  — коэффициент, зависящий от типа почвы.

В этой ММ присутствует много факторов. Их разделяют на неизменяемые и режимные, которыми можно управлять. Вводя показатель неизменяемых факторов  $N$

$$N = \rho_1 \pi v_3 / 6 \quad (9)$$

ММ силы удара можно представить в более компактном виде:

$$S = k' N v d_k^3 \quad (10)$$

Значения силы удара  $S$  различны для различных почв. Свойства почвы ММ учитывает коэффициентом  $k'$ , который очень

разнится. Чтобы избежать связанных с этим неудобств, применяют усечённую ММ, называемую критериальной величиной силы удара  $S_k$ . Она характеризует долю силы удара независимо от почвенных условий:

$$S_k = Nvd_k^3 \quad (11)$$

Так, если для полагать благоприятным естественный дождь с параметрами  $d_k = 2,5$  мм ;  $v = 7,3$  м/с, то критериальное значение для искусственного дождя будет  $S_k = 35,6$  гс .

Режим орошения при дождевании определяется условием предотвращения образования луж и стоков на поверхности почвы. Это условие выполняется, если средняя за время полива скорость впитывания воды почвой равна или больше средней интенсивности дождя.

Связь между интенсивностью дождя и продолжительностью полива до образования луж выражается гиперболической зависимостью, называемой кривой впитывания:

$$t_6 = A_6 / \rho_c^n, \quad (12)$$

где  $t_6$  — время дождевания с данной интенсивностью  $\rho_c$  до образования луж;  $A_6$  — коэффициент, характеризующий впитывающую способность почв, называемый постоянной впитывания;  $n$  — показатель зависящий от типа почвы.

Обработкой экспериментальных данных получена зависимость для коэффициента  $A_6$  в функции критерия силы удара  $S_k$ :

$$A_6 = 2,9A_{61,5} / \sqrt{S_k}, \quad (13)$$

где  $A_{61,5}$  — постоянная впитывания различных почв, характеризующихся величиной  $n$ , при воздействии на них свободнопадающих капель диаметром  $d_k = 1,5$  мм.

Значения  $A_{61,5}$  для различных почв (от самых легких, характеризующихся  $n = 1,25$  до самых тяжелых с  $n = 3,0$ ) приведены в справочниках.

Если учесть, что произведение  $\rho J_6$  есть норма полива, т. е. количество воды, вылитой на 1 га данного участка, то допустимая норма полива при дождевании с данной интенсивностью

$$m_d = A_6 / \rho_c^{n-1}. \quad (14)$$

Используя зависимость (9.4), можно решить обратную задачу — выбрать допустимую интенсивность дождя по данной норме полива, т. е. подобрать требуемый тип машины. Модельными показателями струй при дождевании является расход воды и дальность полета струи.

Расход воды через насадку

$$Q_n = f \mu \sqrt{2gH}, \quad (15)$$

где  $f$  — площадь отверстия;  $\mu$  — коэффициент расхода, определяемый формой сопла;  $g$  — ускорение свободного падения;  $H$  — напор.

Дальность полёта струи моделируется движением частицы (капель), брошенной под углом к горизонту, изучавшейся в механике. Теоретическая дальность полета тела  $R_T$ , брошенного с начальной скоростью  $V_0$  под углом  $\theta_0$  к горизонту определяется формулой

$$R_T = v_0^2 \sin \cdot 2\theta_0 / g. \quad (16)$$

С учетом скоростного напора в сжатом сечении струи  $H = V_0^2 / 2g$  дальность связана с напором:

$$R_T = 2H \sin 2\theta_0. \quad (17)$$

Однако в действительности дальность полета крайних капель струй имеет меньшее значение из-за сопротивления воздуха.

Зависимость для расчета действительной дальности полета струи получена на основе экспериментов. Эта зависимость имеет вид

$$R = 2H \sin 2\theta_0 [1 - 4\lambda (H/D) \sin \theta_0], \quad (18)$$

где  $D$  — диаметр струи в сжатом сечении;  $\lambda$  — экспериментальный коэффициент, учитывающий сопротивление воздуха. Значения коэффициента  $\lambda$  установлены на основе экспериментов и представлены в справочниках.

ММ траектории максимально удаленных капель в безразмерной форме имеет вид

$$\xi = \psi \operatorname{tg} \theta_0 - \psi^2 \operatorname{tg} \theta_0 / (k_R - r\psi), \quad (19)$$

где  $\xi = y/D$  — относительная ордината траектории струи;  $\psi = x/D$  — относительная абсцисса траектории;  $k_R = R/D$  — относительная теоретическая дальность полета струи;  $r = (R_r - R)/R$  — относительная потеря дальности полета струи.

В соответствии с уравнением траектории максимальная высота подъема струи:

$$\xi_{\max} = k_R \operatorname{tg} \theta_0 \frac{\sqrt{1+r}-1}{r \sqrt{1+r}} \left( 1 - \frac{\sqrt{1+r}-1}{r} \right) \quad (20)$$

и скорость падения максимально удаленных капель:

$$v_k = v_0 \frac{(1 - \lambda k_R) [(1 - \lambda k_R)^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_0]}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0} . \quad (21)$$

На основе приведенных данных можно построить экспериментальные модели. Средний диаметр капель, образующихся при распаде струи в ее начале, середине и в конце, можно определить по экспериментальной формуле

$$d_k = [DA/(10^{-5} \operatorname{Re})^n] + BD, \quad (22)$$

где  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса;  $\operatorname{Re} = v_0 D / \nu$  (здесь  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости воды;  $A$ ,  $B$  и  $n$  — экспериментальные коэффициенты и показатель степени.

Для начального участка струи  $A = 0,15$ ,  $B = 0$ ,  $n = 0,73$ ; для середины —  $A = 0,3$ ,  $B = 0$ ,  $n = 0,88$ ; для конечного участка  $A = 0,47$ ,  $B = 0,007$ ,  $n = 1$ .

Учитывая значения коэффициентов, получим выражение для среднего диаметра капель в конце струи в виде

$$d_{k. \phi} = (47\,000/v_0) v + 0,007D. \quad (23)$$

Приведенные ММ процесса дождевания позволяют рассчитать основные параметры дождевальных машин, исходя из условия обеспечения заданных агротехнических требований.

## ЗАДАЧА №4

### Построение математической модели притяжения двух шаровидных капель

При орошении дождеванием струи воды дробятся на капли и должны разлетаться на возможно большую площадь. Этому мешает взаимное притяжение водяных капелек. Закон всемирного тяготения (ЗВТ) определяет силу притяжения двух точечных масс формулой Ньютона

$$F = \gamma \frac{m_1 \times m_2}{L^2} \quad (1)$$

где  $\gamma$  — постоянная;  $m_1$ ,  $m_2$  — точечные массы;  $L$  — расстояние между массами.

Однако реальные тела имеют размеры и точечными не являются, что ЗВТ не учитывает. Особенно этот недостаток



проявляется при изучении разлёта струй воды, и при расчётах орбит планет, представляют не точки, а тела конечных размеров.

Построим математическую модель силы притяжения двух шаров на основе ЗВТ.

Вначале определим степень точности ЗВТ, когда точечная масса притягивается к шару.

**Модель взаимодействия частицы с шаром.** Рассмотрим схему взаимодействия точечной массы  $m_1$  расположенной в точке  $A$ , и шара радиусом  $R$  (рис. 1).

Выделим текущую точку в шаре с координатами  $L, r$  и  $\varphi$ . В окрестности текущей точки выделим элементарную массу  $dm$ , задав приращения этим координатам  $dL, dr, d\varphi$ .

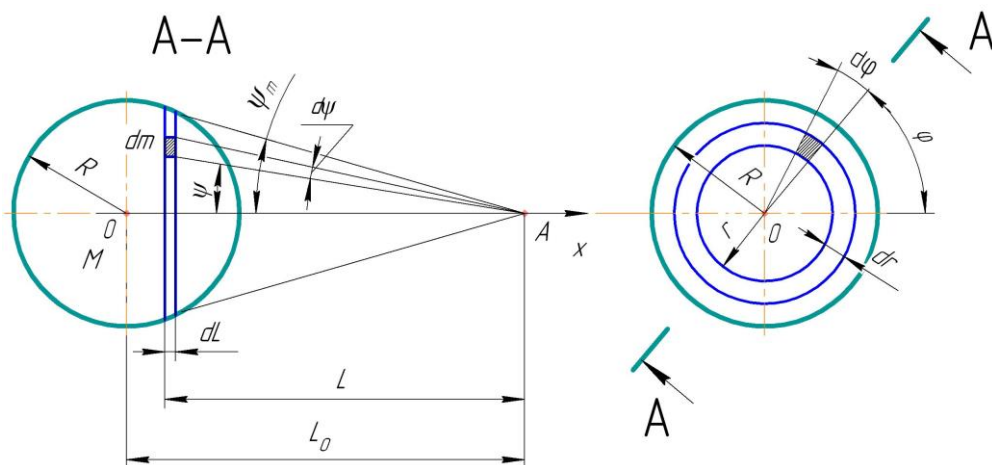


Рис. 1. Расчётная схема взаимодействия точечной массы  $m_1$  и шара радиусом  $R$

Получаем элемент с размерами  $dL, dr, dl$ , где  $l$  - длина дуги, связанная соотношением с координатами  $\varphi$  и  $r$

$$l = r\varphi \quad (2)$$

Объём элемента  $dV$  выражается через его размеры  $dL, dr, dl$ :

$$dV = dL * dr * dl \quad (3)$$

Элементарная масса будет с учётом соотношения (1) выражаться через приращения координат

$$dm = \rho dV = \rho r dL dr d\varphi \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность материала шара.

Элементарная сила тяготения между элементарной и точечной массой согласно закону всемирного тяготения (ЗВТ) Ньютона будет:

$$dF = \gamma \frac{dm \times m_1}{L_1^2} = \gamma \rho \frac{dLdrdl}{L_1^2} m_1 \quad (5)$$

где  $L_1$  - расстояние между точечной и элементарной массой

$$L_1 = \sqrt{L^2 + r^2} \quad (6)$$

Сила составляет угол  $\psi$  с осью  $X$ , проходящей через центры масс. Горизонтальная составляющая элементарной силы тяготения по оси  $X$  будет:

$$dF_x = dF \cos \psi = \gamma \rho \frac{dLdrdl}{L^2 + r^2} \cos \psi \quad (7)$$

где

$$\cos \psi = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \quad (8)$$

Полная сила притяжения точечной массы  $m$  ко всему шару выразится кратным интегралом по объёму шара, означающем интегрирование по трём переменным  $L, r, \varphi$  в нужных диапазонах их изменений

$$F_x = \iiint_V dF_x = \iiint \gamma \rho \frac{Lr}{(\sqrt{L^2 + r^2})^3} dLdrd\varphi \quad (9)$$

С учётом пределов модель задачи сводится к трём определённым интегралам вида:

$$F_x = \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} dL \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \gamma \rho \frac{Lr}{(\sqrt{L^2 + r^2})^3} d\varphi \quad (10)$$

Интегрирование проводится поочерёдно, начиная с третьего. Проводя преобразования с применением табличных интегралов получим выражение

$$F_{\text{шк}} = 2\pi \gamma m_1 \rho \left[ \frac{R^3 + R^3}{3 * L_0^2} \right] = \pi \gamma m_1 \rho \frac{4R^3}{3 * L_0^2} \quad (11)$$

Здесь оказывается  $\frac{4}{3} \pi R^3$  - объём шара, а  $\rho \frac{4}{3} \pi R^3 = M$  - масса шара. Тогда сила притяжения точечной массы и шара оказывается точно соответствует ЗВТ Ньютона!

$$F_{\text{шх}} = \gamma \frac{m_1 M}{L_0^2} \quad (12)$$

Как будто масса шара тоже точечная!

Таким образом, сила притяжения точечной массы к шару подчиняется классической формуле Ньютона. Учтём это обстоятельство при решении задачи притяжения двух шаров.

**Задача притяжения двух шаров.** Расчётную схему получаем из рис. 1, размещая на месте точечной массы второй шар массой  $M_2$ . (рис. 2). Чтобы упростить выкладки, элементарные массы второго шара размещаем на сферических дисках (рис. 3), рассекающих шар. Элементарные сферические диски пересекаются не будут.

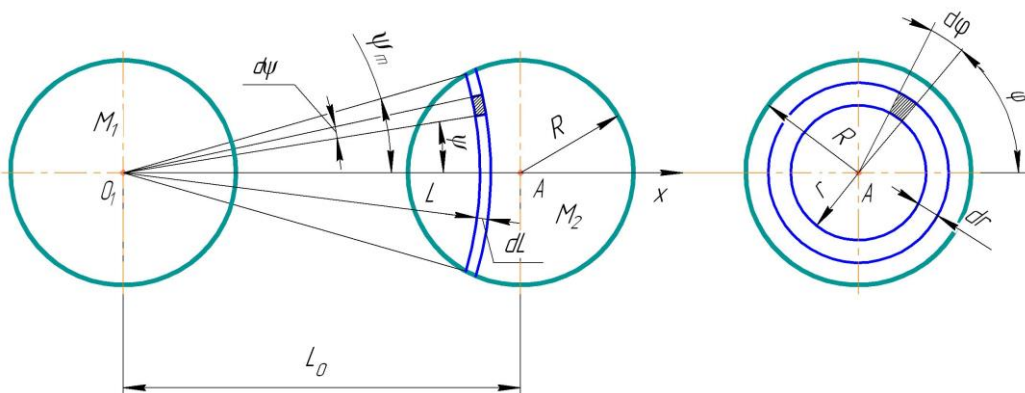


Рис 2. Расчётная схема притяжения шаров

Объём элемента  $dV$  снова выражается через его размеры  $dL, dr, d\ell$  :

$$dV = dL * dr * d\ell \quad (13)$$

Но для сферических координат

$$dr = L d\psi \text{ и } \ell = r\varphi. \quad (14)$$

Тогда объём элемента может выражаться через координаты  $dL, d\psi, d\varphi$

$$dV = dL L d\psi r d\varphi \quad (15)$$

Элементарная масса будет

$$dm = \rho dV = \rho L dL d\psi r d\varphi \quad (16)$$

где  $\rho$  – плотность материала шара.

Силу притяжения этой элементарной массы Элементарная сила тяготения между элементарной и точечной массой согласно закону всемирного тяготения (ЗВТ) Ньютона будет:

$$dF = \gamma \frac{dm \times m_1}{L^2} = \gamma \rho L \frac{dL d\psi dl}{L^2} m_1$$

(17)

Сила составляет угол  $\psi$  с осью  $X$ , проходящей через центры масс. Горизонтальная составляющая элементарной силы тяготения по оси  $X$  будет:

$$dF_x = dF \cos \psi = \gamma \rho \frac{dL d\psi dl}{L} \cos \psi$$

(18)

Полная сила притяжения точечной массы  $m$  ко всему шару выразится кратным интегралом по объёму, что означает интегрирование по трём переменным  $L, \psi, \varphi$

$$F_x = \iiint_V dF_x = \iiint_{L, \psi, \varphi} \gamma \rho \frac{\cos \psi}{L} r dL d\psi d\varphi$$

(19)

С учётом пределов модель задачи сводится к трём определённым интегралам вида:

$$F_x = \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} dL \int_{-\psi_m}^{\psi_m} d\psi \int_0^{2\pi} \gamma \rho \frac{r}{L} \cos \psi d\varphi$$

(20)

Пределы интегрирования по  $L$  :  $L_{\max} = L_0 + R$  ,  $L_{\min} = L_0 - R$  .

Предел интегрирования  $\psi_m$  получаем из треугольника  $OOA$  по теореме косинусов

$$R^2 = L^2 + L_0^2 - 2LL_0 \cos \psi_m \quad (21)$$

Откуда

$$\cos \psi_m = (L^2 + L_0^2 - R^2) / 2LL_0 . \quad (22)$$

Выражение для угла  $\psi_m$  текущего сферического диска в шаре:

$$\psi_m = \arccos \xi(L) . \quad (23)$$

$$\text{где } \xi(L) = \frac{L_0^2 + L^2 - R^2}{2LL_0} . \quad (24)$$

Интегрирование проводим поочерёдно, начиная с третьего.

По таблицам интегралов получим выражение для силы

притяжения через определённый интеграл по  $dL$  функций от  $\psi$  в виде:

$$F_{\text{Шх}} = \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} 2\pi m_1 \rho [\cos \psi_m - 1 + \psi_m \sin \psi_m] dL \quad (25)$$

Здесь  $\psi_m$  – угловая величина, трудная для точных замеров. Заменяя  $\psi_m$  его выражением через  $\xi(L)$ , получим выражение для силы притяжения через определённый интеграл по  $dL$  от функции  $\xi(L)$ , не требующей измерения малых углов :

$$F_{\text{Шх}} = 2\pi m_1 \rho \int_{L_0 - R}^{L_0 + R} [\xi(L) - 1 + \arccos \xi(L) \sin \arccos \xi(L)] dL \quad (26)$$

Формула сильно отличается от ЗВТ наличием тригонометрических функций и инвариантностью. Полученный интеграл

$$2 \int_{L_0 R}^{L_0 fR} \arccos \xi(L) \sin \arccos \xi(L) dL \quad \text{не табличный и относится к}$$

классу не берущихся в известных человечеству элементарных функциях. Интеграл можно вычислять только численным интегрированием.

Применим метод численного интегрирования для определения силы притяжения по формуле (22).

**ЗАДАЧА.** Оценить относительную погрешность ЗВТ, образовав соотношение

$$\Delta = \frac{\text{[сила притяжения по выражению (22)]}}{\text{ЗВТ (1)}} \quad (27)$$

Для случая притяжения двух шаровидных капель равной массы и радиусов, расположенных на расстоянии десяти радиусов. Результаты сводим в таблицу:

№ точки	Относительное расстояние L/R	Сила притяжения точек по ЗВТ	Сила притяжения шаров по ЗВТ	Погрешность $\Delta$
1	100			

2	20			
3	10			
4	9			
5	8			
6	7			
7	6			
8	5			
9	4			
10	3			
11	2,5			
12	2			бесконечна

Выбрать метод численного интегрирования (см. интернет) и построить график зависимости добавки к ЗВТ от соотношения радиуса и расстояния между шарами.

Построить график зависимости  $\Delta = f(L/R)$ ,

где L – расстояние между центрами шаров (расстояние измеряем в долях R).

Сделать вывод, при каких расстояниях поправкой к ЗЛТ можно пренебрегать, и интенсивность роста затем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко И.В. Математическое моделирование сельскохозяйственных процессов / И.В.Игнатенко. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2016. – 213 с.
2. Ермольев Ю.И. Теория, конструкция и расчет машин для возделывания сельскохозяйственных культур: Метод, указания. - Ростов н/Д; Издательский центр ДГГУ, 2002. 22с
3. Долгов И.А. Расчёт рабочих органов уборочных машин: Учеб. пособие. - Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2003. – 123 с.
4. Дьяконов В. Simulink4: Специальный справочник.-СПб: Питер, 2002.-528 с.
5. Игнатенко И.В., Ермольев Ю.И. Машины для возделывания сельскохозяйственных культур. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2008.-374 с.