ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Технологии и оборудование переработки продукции агропромышленного комплекса»

Учебно-методическое пособие

для выполнения практических работ
по дисциплине

«Основы научных исследований автомобилей и тракторов»

Авторы
Московский М.Н.,
Бойко А.А.,
Степанова Ю.В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Пособие содержит сведения для выполнения практических работ, целью которых является приобретение навыков обработки данных, полученных экспериментальным путем. Краткое изложение теоретического материала сопровождается примерами решений и вариантами индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» профиль «Автомобили и трактора» очной и заочной формы обучения.

Авторы

доц., к.т.н. Московский М.Н.,
ст. препод. Бойко А.А.,
асс. Степанова Ю.В.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Подготовка специалистов, способных решать сложные инженерные, организационные и исследовательские задачи, является актуальной задачей, стоящей перед высшими учебными заведениями, решение которой также способствует повышению эффективности и качества научных исследований.

Знание основ теории научных исследований, современных методов их проведения, использующих теорию планирования эксперимента и математическую статистику – необходимое и обязательное условие подготовки инженеров.

По окончанию изучения курса студенты должны уметь производить поиск, накопление и анализ научной информации, обрабатывать и оформлять экспериментальные исследования, а также формулировать выводы научного исследования. Учебное пособие может оказать помощь в научно-исследовательской работе студентов.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: КЛАССИФИКАЦИЯ ОШИБОК»

Краткая теория

Никакие измерения не могут выполняться абсолютно точно, полученный результат всегда содержит ошибку, так как измерительные приборы всегда обладают какой-то погрешностью. Исследователь должен знать точность измерений в каждом эксперименте, что позволяет учитывать возникающие ошибки и избегать неверных выводов.

Величину абсолютной ошибки оценивают разностью между действительным значением измеряемой величины X и её измеренным значением x

$$\Delta = |X - x|$$

Ошибку можно представить и как безразмерную относительную величину

$$\delta = \frac{\Delta}{X} \cdot 100\%$$

Ошибки целесообразно классифицировать по причине возникновения:

грубые ошибки являются результатом неизбежности или низкой квалификации лица, производящего измерения. Чтобы не допустить подобных ошибок, необходимо тщательно разрабатывать и осуществлять методику проведения эксперимента. Часто возникают ошибки из-за того, что измерительная аппаратура своевременно не проверяется;

систематические ошибки возникают по причинам, которые можно заранее изучить и определить их численное влияние на результат эксперимента. Систематические ошибки вызывают факторы, действующие одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Величина систематической ошибки зависит от несовершенства измерительных приборов (неточная градуировка шкалы, зазоры в механизме, инерционность системы и т.д.), температуры и влажности окружающей среды, электромагнитного поля и пр.;

случайные ошибки вызывают разнообразные случайные причины, которые невозможно оценить заранее. Величину случайных ошибок можно обнаружить при многократных измерениях одной и той же величины в одинаковых условиях. Правила определения случайных ошибок изучаются в математической статистике, основанной на теории вероятностей. Для снижения уровня случайных ошибок выборка должна быть репрезентативной.

Пример решения

Исходные данные: масса трактора m = 3000 кг, средняя рабочая скорость V = 4 м/с, среднее время t = 1 с. Оценить предельную относительную ошибку расчётного тягового усилия.

Решение:

Тяговое усилие F (Н) определяется по формуле:

$$\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a}$$

где m – масса трактора (или автомобиля), кг;

V и t – средняя скорость (м/с) и время (с), замеряемые в эксперименте;

a – ускорение (м/с^2), которое определяется по формуле:

$$\mathrm{a} = \frac{\Delta V}{t} = \frac{V_k - V_{\mathrm{H}}}{t}$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{t}}$$

Паспортные данные относительной ошибки приборов Δ m, Δ V, Δ t для замера определяемых величин позволяют оценить предельные относительные ошибки прямых измерений (абсолютные ошибки):

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \pm\,0{,}15\,\%\,;\ \varepsilon_V = \frac{\Delta\,\mathrm{V}}{\mathrm{V}} = \pm\,0{,}5\,\%\,;\quad \varepsilon_t = \frac{\Delta\,\mathrm{t}}{\mathrm{t}} = \pm\,0{,}35\,\%\,.$$

Тогда абсолютная ошибка расчета тягового усилия определяется:

$$\frac{\Delta\,\mathrm{F}}{\mathrm{F}} = \frac{\Delta\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}} + \frac{\Delta\,\mathrm{V}}{\mathrm{V}} + \frac{\Delta\,\mathrm{t}}{\mathrm{t}};$$

$$\frac{\Delta F}{F} = 0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = \pm 1{,}0\,\%.$$

Следовательно, расчётная сила на крюке трактора и его расчётная прогнозируемая предельная относительная ошибка:

$$F = 3000 \cdot 4 = 12 \pm 12 \cdot \frac{1}{100} = 12 \pm 0{,}12 \text{ кН}$$

Варианты исходных данных

Вариант определяется по номеру в списке группы и в соответствии с ним выбираются исходные данные.

№	Масса автомобиля по паспорту $m_п$, кг	Масса автомобиля измеренная $m_и$, кг	Скорость замеряемая в эксперименте V, м/с	Погрешность измерений спидометра ε_V, %	Время t, с	Погрешность измерений секундомера ε_t, %
1	3000	3010	3	5,0	1	1,0
2	3500	3511	4	5,5	2	1,1
3	4000	4052	5	5,6	3	1,15
4	4500	4583	6	4,0	4	1,0
5	5000	5101	7	4,2	5	1,2
6	3000	3154	8	3,0	1	1,0
7	3500	3555	9	6,1	2	1,1
8	4000	4203	10	5,0	3	1,15
9	4500	4607	11	3,6	4	1,0
10	5000	5305	12	3,4	5	1,2
11	3000	3201	4	4,9	1	1,0
12	3500	3611	3	2,9	2	1,1
13	4000	4521	6	3,1	3	1,15
14	4500	4622	5	6,2	4	1,0

15	5000	5222	8	2,7	5	1,2
16	3000	3643	7	3,4	1	1,0
17	3500	3660	10	3,0	2	1,1
18	4000	4502	9	5,2	3	1,15
19	4500	4577	12	6,0	4	1,0
20	5000	5188	11	4,1	5	1,2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: «ОЦЕНКА МАЛЫХ ВЫБОРОК»

Краткая теория

При проведении исследований часто получаемая из опытов или наблюдений информация невелика (малая выборка используемых величин), что является причиной поиска путей более эффективного использования ограниченной информации. Обычно считают выборку величиной менее 20 - 30 измеряемых или наблюдаемых показателей - малой. В качестве достаточного объективного определения малой выборки можно принять, что любая однородная выборка может считаться малой, если количество её членов меньше расчётного числа, определённого различными способами, для заданного уровня точности и надёжности.

Доверительным называется интервал значений x_n, в котором истинное значение x измеряемой величины с заданной вероятностью. Доверительной вероятностью (достоверностью) измерения называется вероятность того, что истинное значение измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал, т.е. в зону $a \le x_n \le b$. Эта величина определяется в долях единицы или в процентах. Доверительная информация P_D описывается выражением:

$$P_D = P[a < x_n < b] = (1/2)\left[\varphi(b-\bar{x})/\delta - \varphi(a-\bar{x})/\delta\right]$$

Оценка, которую дает, например, выборочное среднее $\bar{\mathbf{x}}$ или среднеквадратичное отклонение, корень из выборочной дисперсии, называется **точечной оценкой.**

Пусть выборка состоит из n чисел (x_1, …, x_n), которые являются результатами испытания одной и той же случайной величины. Случайность результата обеспечивает равенство нулю её математического ожидания. Предположим дополнительно, что случайная величина X, представленная этой выборкой, нормально распределена. Таким образом, её математическое ожидание известно и равно нулю, а дисперсия представляет собой неизвестное число D.

Рассмотрим новую случайную величину с заданными известными параметрами, вычисленным по выборке (x_1, …, x_n):

$$t = \frac{\bar{x}}{\sqrt{S_x^2}}\sqrt{n}$$

где $\bar{x}$ - это среднее арифметическое,

S_x^2 - выборочная дисперсия

Пусть вместо выборочной дисперсии в знаменателе стоит реальная дисперсия D случайной величины, единичное испытание которой мы наблюдаем:

$$t = \frac{\bar{x}}{\sqrt{D}}\sqrt{n}$$

Деление на корень из выборочной дисперсии искажает нормальное распределение, выборочная дисперсия сама по себе случайно отклоняется от реальной. Но, тем не менее, график случайной величины t напоминает график плотности нормального распределения.

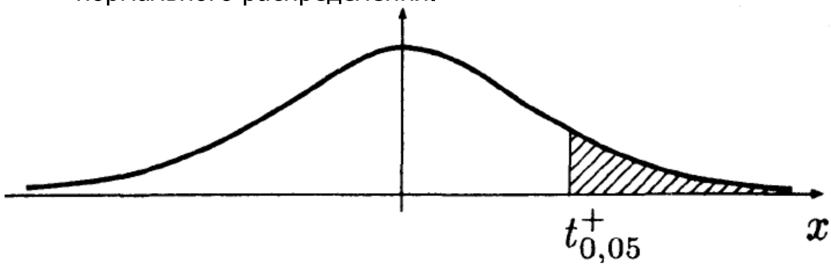


Рисунок 1 - График случайной величины t

Для разных значений n распределения будут различными. Такое распределение называется **распределением Стьюдента** с n-1 степенью свободы, или t - распределением. Оно не зависит от дисперсии слагаемых и критерий, основанный на распределении Стьюдента, является одним из самых распространенных, так как с его помощью решается задача о средних значениях эмпирических результатов. Составленная таблица распределения Стьюдента (таб. 1) облегчает применение отношения t на практике.

Таблица 1. Распределение Стьюдента.

Значения квантилей $|t(k)|_{1-\alpha}$ в зависимости от числа степеней свободы k и вероятности a

Вероятность $P\ \{|t| > |t(k)|_{1-\alpha}$								
a / k	0,80	0,40	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,325	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,271	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	6,610
5	0,276	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,265	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,262	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0.260	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,873	1356,	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,870	1,350	1,771	2,160	2650	3,012	4,221
14	0,258	0,863	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140

Пример решения

Исходные данные: определить ошибку расчётного среднего угла поворота люфта γ автомобиля, проведённого по 13 замерам (таблица 2), с доверительной вероятностью β = 0,95.

Экспериментальные замеры угла поворота люфта γ автомобиля:

№ замера	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Угол поворота люфта γ_i, град	1,05	1,1	1,0	1,2	1,3	1,0	1,1	1,2	1,15	1,2	1,0	1,1	1,0

Решение:

Приняв нормальный закон распределения случайной величины γ, выборочная средняя находится:

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i}{n}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1{,}05 + 1{,}1 + 1{,}0 + \ldots + 1{,}0}{13} = 1{,}1^{\circ}$$

Выборочное среднее квадратичное отклонение определяем по формуле:

$$S_\gamma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i - \bar{\gamma})^2}{n-1}}$$

$$S_\gamma = \sqrt{\frac{(1{,}05 - 1{,}1)^2 + (1{,}1 - 1{,}1)^2 + \ldots + (1{,}0 - 1{,}1)^2}{13-1}} = 0{,}22^{\circ}$$

Оценим с вероятностью 0,95 предел возможных расхождений выборочного среднего $\bar{\gamma}$ и генерального среднего $\tilde{\gamma}$ угла поворота люфта автомобиля.

Число степеней свободы определяется:

k = (n - 1)

k= (13 - 1) =12

А уровень значимости α = 1 – β = 1 – 0,95 = 0,05

Для этого из таблицы 1 для числа степеней свободы 12 и уровня значимости 0,05 находим величину критерия Стьюдента t, соответствующую доверительной вероятности 0,95:

t = 2,179.

Тогда с вероятностью 0,95 можно предполагать, что абсолютная ошибка выборочной средней (по сравнению с генеральной средней) будет находиться:

$$\gamma = \frac{\bar{\gamma} - \tilde{\gamma}}{S_\gamma/(n-1)} \rightarrow (\bar{\gamma} - \tilde{\gamma}) = \gamma \frac{S_\gamma}{\sqrt{n-1}}$$

А так как $\bar{\gamma} - \tilde{\gamma} = \Delta\gamma$, то

$$\Delta\gamma = \gamma \frac{S_\gamma}{\sqrt{n-1}}$$

$$\Delta\gamma = 2{,}179 \cdot \frac{0{,}22}{\sqrt{13-1}} = 0{,}013°$$

Значит величина угла γ поворота люфта автомобиля будет находиться в пределах:

$$\gamma = 1{,}1 \pm 0{,}013 (1{,}078 - 1{,}113)°$$

$$\gamma_{max} = 1{,}078°$$

$$\gamma_{min} = 1{,}113°$$

Варианты исходных данных

Вариант определяется по номеру в списке группы и в соответствии с ним выбираются исходные данные.

Угол поворота люфта γ_i, град	№ замера												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1.	1,05	1,1	1,0	1,2	1,3	1,0	1,1	1,2	1,15	1,2	1,0	1,1	1,0
2.	1,02	1,3	1,1	1,3	1,4	1,9	1,3	1,7	1,22	1,3	1,1	1,3	1,5
3.	1,01	1,2	1,2	1,4	1,5	1,7	1,7	1,5	1,13	1,4	1,2	1,5	1,7
4.	1,03	1,6	1,3	1,5	1,6	1,5	1,8	1,3	1,17	1,5	1,3	1,7	1,3
5.	1,06	1,5	1,4	1,6	1,7	1,3	1,6	1,1	1,09	1,6	1,4	1,0	1,9
6.	1,1	1,1	1,5	1,7	1,8	1,8	1,4	1,8	1,25	1,7	1,5	1,9	1,8

7.	1,04	1,2	1,6	1,8	1,9	1,6	1,2	1,6	1,12	1,8	1,6	1,2	1,4
8.	1,07	1,8	1,7	1,9	1,5	1,4	1,7	1,4	1,08	1,9	1,7	1,4	1,6
9.	1,2	1,9	1,8	1,1	1,6	1,2	1,5	1,2	1,16	1,7	1,8	1,6	1,1
10.	1,04	1,6	1,9	1,5	1,7	1,1	1,3	1,9	1,13	1,4	1,9	1,8	1,2
11.	1,06	1,5	1,2	1,0	1,9	1,2	1,5	1,7	1,12	1,1	1,3	1,1	1,4
12.	1,07	1,8	1,7	1,3	1,7	1,0	1,8	1,5	1,07	1,2	1,1	1,3	1,7
13.	1,03	1,9	1,5	1,0	1,2	1,5	1,0	1,2	1,14	1,2	1,5	1,9	1,2
14.	1,04	1,8	1,3	1,5	1,8	1,1	1,4	1,9	1,13	1,5	1,2	1,4	1,0
15.	1,01	1,6	1,9	1,6	1,5	1,3	1,3	1,5	1,19	1,4	1,9	1,8	1,3
16.	1,01	1,2	1,2	1,4	1,5	1,7	1,7	1,5	1,13	1,4	1,2	1,5	1,7
17.	1,03	1,6	1,3	1,5	1,6	1,5	1,8	1,3	1,17	1,5	1,3	1,7	1,3
18.	1,06	1,5	1,4	1,6	1,7	1,3	1,6	1,1	1,09	1,6	1,4	1,0	1,9
19.	1,1	1,1	1,5	1,7	1,8	1,8	1,4	1,8	1,25	1,7	1,5	1,9	1,8
20.	1,04	1,2	1,6	1,8	1,9	1,6	1,2	1,6	1,12	1,8	1,6	1,2	1,4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ СЛУЧАЙНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОШИБКИ»

Краткая теория

Анализ случайных погрешностей основывается на теории случайных ошибок, дающей возможность с определенной гарантией вычислить действительное значение измеренной величины и оценить возможные ошибки.

Основу теории случайных ошибок составляет предположение о том, что при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто; большие погрешности встречаются реже, чем малые (вероятность появления погрешности уменьшается с ростом ее величины); при бесконечно большом числе измерений истинное значение измеряемой величины равно среднеарифметическому значению всех результатов измерений, а появление того или иного результата измерения как случайного события описывается нормальным законом распределения.

Различают генеральную и выборочную совокупность измерений. Под **генеральной совокупностью** подразумевают все множество возможных значений изменений x_1 или возможных значений погрешности Δx_1. Для **выборочной совокупности** число измерений n ограничено и в каждом конкретном случае строго определяется. Обычно считают, что если $n>30$, то среднее значение данной совокупности измерений x_1 достаточно точно приближается к истинному значению.

Теория случайных ошибок позволяет оценить точность и надежность измерения при данном количестве замеров или определить минимальное количество замеров, гарантирующее требуемую (заданную) точность и надежность измерений. Также возникает необходимость исключить возможность появления грубых ошибок, и определить достоверность полученных результатов.

Пример решения

Исходные данные: по пяти замерам (повторности опыта) найдены величины искомого показателя x_i: 0,5; 0,8; 1,0; 1,0; 1,3. Определить величину случайной относительной ошибки показателя X .

Решение:

Приняв нормальный закон распределения f_X , найдем среднее значение искомого показателя:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \frac{0,5+0,8+1,0+1,0+1,3}{5} = 0,92;$$

Определить число степеней свободы *k:*

k = n-1

где n – число замеров

k = 5-1 = 4

Заданная вероятность ошибки измерения a = 0,05. По таблице распределения находим критерий Стьюдента t_T = 2,776

Тогда предельная ошибка рассматриваемой выборки случайных величин X (доверительный интервал) определяется по формуле:

$$\Delta X = t_T \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{k}}$$

Где Δx определяем как:

$$\Delta x = x_{max} - \bar{x}$$

$$\Delta x = 1,3 - 0,92 = 0,38$$

$$\Delta X = 2,776 \cdot \frac{0,38}{\sqrt{4}} = 0,53$$

$$\bar{X} = 0,92 \pm 0,53$$

случайная относительная ошибка показателя X :

$$\delta_X = \frac{\Delta X}{\bar{X}} 100\% = \frac{0,53}{0,92} 100\% = 57,6\%$$

Варианты исходных данных

Вариант определяется по последнему номеру в зачетке обучающегося и в соответствии с ним выбираются исходные данные.

№	Границы искомого показателя	Количество замеров
1	[0,01; 0,015]	5
2	[0,02; 0,05]	6
3	[0,01; 0,065]	9
4	[10,11; 11,05]	7
5	[9,21; 9,45]	7
6	[6,8; 7,2]	5
7	[2,2; 2,85]	8
8	[4,0; 6,2]	6
9	[5,1; 5,15]	5
0	[0,61; 0,71]	7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: «ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗИ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ»

Краткая теория

Для любой случайной величины х кроме определения ее функции распределения желательно указать числовые характеристики, важнейшими из которых является:

- математическое ожидание;
- дисперсия;
- среднее квадратическое отклонение.

Пусть объем генеральной совокупности равен N. Тогда математическим ожиданием случайной величины х является **генеральное среднее:**

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Дисперсией случайной величины является **генеральная дисперсия:**

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_г)^2$$

Корень квадратный из генеральной дисперсии называется **генеральным средним квадратическим отклонением:**

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}$$

Выборочное среднее –это среднее арифметическое наблюдаемых значений выборки.

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

При задании выборки в виде статистического ряда рассчитывается по следующей формуле:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i$$

Оценкой генеральной дисперсии является выборочная дисперсия:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2$$

Корень квадратный из выборочной дисперсии называется **выборочным средним квадратическим (стандартным) отклонением.**

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

По аналогической схеме определяются статистические оценки других числовых характеристик СВ.

Выборочный коэффициент вариации V определяется отношением выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней, выраженным в %:

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Коэффициент вариации – безмерная величина, удобная для сравнения величин рассеивания двух выборок, имеющих различные размерности.

Наиболее употребляемыми характеристиками связи двух случайных величин является меры их линейной связи – ковариация и коэффициент корреляции. Их оценками являются:

- выборочная ковариация S_{xy};

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

- выборочный коэффициент корреляции r_{xy}.

$$r_{xy}=\frac{S_{xy}}{\sigma_B(X)\cdot\sigma_B(Y)}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\overline{y^2}-\bar{y}^2}}$$

Пример решения

Исходные данные: оценить взаимосвязь между V двигателя и мощностью.

Номер замера	Объем двигателя V, л	Мощность N,
1	1,5	70
2	1,6	81
3	1,8	112
4	2	140
5	2,2	168
6	2,5	198
7	3	250
8	3,5	290
9	5	460
10	8	940
Сумма	31,1	2709

Решение:

Пусть x_i = V, а y_i = N. Найдем средние значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$, используя выражения (i=1,2…10)

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}N$$

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\cdot 31{,}1=3{,}1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10} \cdot 2709 = 270{,}9$$

Определить значения $x_i - \bar{x}$, $y_i - \bar{y}$, $(x_i - \bar{x})^2$, $(y_i - \bar{y})^2$ и полученные значения внести в таблицу:

№ замера	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	-1.61	-200.9	2,5921	40360,81
1	-1.51	-189.9	2,2801	36062,01
2	-1.31	-158.9	1,7161	25249,21
3	-1.11	-130.9	1,2321	17134,81
4	-0.91	-102.9	0,8281	10588,41
5	-0.61	-72.9	0,3721	5314,41
6	-0.11	-20.9	0,0121	436,81
7	0.39	19.1	0,1521	364,81
8	1.89	189.1	3,5721	35758,81
9	4.89	669.1	23,9121	447694,8

Затем необходимо определить две величины эмпирической дисперсии и средние квадратические отклонения.

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2}$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$S_y = \sqrt{S_y^2}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{10-1} (1.5 - 3.31)^2 + (1.6 - 3.31)^2 + \cdots + (8 - 3.31)^2 = \frac{36.669}{10-1} = 4.074$$

$$S_x = \sqrt{4{,}074} = 2{,}02$$

$$S_y^2 = \frac{1}{10-1}(70-270.9)^2 + (81-270.9)^2 + \cdots + (940-270.9)^2 = \frac{618964.9}{10-1} = 68773.9$$

$$S_y = \sqrt{68773.9} = 262.25$$

Эмпирический момент связи или эмпирическая ковариация:

$$m_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

$$m_{xy} = \frac{1}{10-1}[(-1.61)\cdot(-200.9) + (-1.51)\cdot(-189.9) + \cdots + (4.89)\cdot(669.1)] = 526.76$$

Величина линейного коэффициента корреляции выборки r_{xy}определяется из выражения

$$r_{xy} = \frac{m_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

$$r_{xy} = \frac{526{,}76}{2{,}02\cdot 262{,}25} = 0{,}995$$

Коэффициент детерминации $r_{xy}^2 = 0.995^2 = 0{,}99$ означает, что 99% вариации рассеивания случайной величины у объясняется случайной величиной х.

Оценим значимость линейного коэффициента корреляции с помощью нуль-гипотезы r_{xy}=0, т.е. с помощью гипотезы о том, что изучаемые факторы х и у генеральной совокупности не связаны между собой линейной зависимостью. Отбрасывание нулевой гипотезы будет свидетельствовать о том, что полученный коэффициент корреляции r_{xy} достоверен. Для малых выборок (n<30) используем t –критерий Стьюдента со степенью свободы m = n-2.

$$t_p = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}995\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0{,}99}} = 28{,}34$$

Табличное значение

$$m = n - 2 = 10 - 2 = 8$$

$\alpha = 0.05$

$t_T = 2.31$

$t_p = 28.34 > t_T = 2.31$, следовательно, с доверительной вероятностью (1-α) = 0,99 гипотеза отвергается и следует признать значимость существования положительной линейной корреляции между объемом и мощностью двигателя.

$$r_{xy} - t_T\frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{n-1}} \le r_{xy} \le r_{xy} + t_T\frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{n-1}},$$

$$0.99 - 2.31\frac{1-0.99^2}{\sqrt{10-1}} \le 0.99 \le 0.99 + 2.31\frac{1-0.99^2}{\sqrt{10-1}}$$

Варианты исходных данных

Вариант определяется по последнему номеру в зачетке обучающегося и в соответствии с ним выбираются исходные данные.

1. Mercedes-Benz C-klasse

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	1,6	129
2.	1,6	156
3.	2,0	184
4.	2,0	211
5.	2,0	245
6.	2,1	163
7.	2,1	170
8.	2,1	204
9.	3,0	333

2. Opel Astra

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
10.	1,2	95
11.	1,4	140
12.	1,6	115
13.	1,6	136
14.	1,6	170

15.	1,6	170
16.	1,6	180

3. Volkswagen Passat

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	1,4	125
2.	1,4	150
3.	1,4	156
4.	1,6	120
5.	1,8	180
6.	2,0	150
7.	2,0	190
8.	2,0	220
9.	2,0	240
10.	2,0	280

4. Audi A6

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	1,8	190
2.	2,0	150
3.	2,0	190
4.	2,0	252
5.	2,8	220
6.	3,0	218
7.	3,0	245
8.	3,0	272
9.	3,0	333
10.	3,0	326

4. Mazda 6

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	2,0	150
2.	2,0	165
3.	2,2	150
4.	2,2	175
5.	2,5	192

5. Toyota Land Cruiser

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	4,0	243
2.	4,5	235
3.	4,5	272

4.	4,5	286
5.	4,6	309
6.	4,6	318
7.	5,7	381

6. Ford Focus

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	1,0	100
2.	1,0	125
3.	1,6	95
4.	1,6	115
5.	1,6	125
6.	1,6	150
7.	2,0	140
8.	2,0	150
9.	2,0	160
10.	2,0	163

7. Mitsubishi Lancer

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	1,5	109
2.	1,6	117
3.	1,8	140
4.	1,8	143
5.	2,0	140
6.	2,0	150
7.	2,4	168

8. BMW 5

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	2,0	143
2.	2,0	150
3.	2,0	184
4.	2,0	190
5.	2,0	218
6.	2,0	245
7.	3,0	258
8.	3,0	306
9.	3,0	381
10.	4,4	449

9. Renault Duster

№	Объем двигателя V, л	Мощность N, л.с.
1.	1,5	109
2.	1,6	112
3.	1,6	114
4.	1,8	140
5.	2,0	143

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: «ОЦЕНКА КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ»

Краткая теория

Критерием согласия называется критерий гипотезы о том, что генеральная совокупность имеет распределение предполагаемого типа (например, нормальное распределение). Критерии согласия дают возможность установить, когда расхождения между теоретическими и эмпирическими частотами следует признать несущественными, т.е. случайными, а когда – существенными (неслучайными). Таким образом, они позволяют отвергнуть или подтвердить правильность выдвинутой при выравнивании ряда гипотезы о характере распределения в эмпирическом ряду.

Существует ряд критериев согласия, но чаще всего применяют критерии Пирсона, Романовского и Колмогорова.

Критерий согласия Пирсона (χ2) применяют для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения предполагаемому теоретическому распределению F(x) при большом объеме выборки ($n \geq 100$).

Проверку гипотезы о виде функции распределения с помощью χ^2 критерия производят следующим образом:

а) По выборке строят гистограмму. Если в каком-либо j – ом интервале гистограммы число наблюдений n_j окажется меньше пяти, то его объединяют с соседним интервалом (или интервалами) так, чтобы число наблюдений в таком объединенном интервале оказалось большим или равным пяти. Пусть K_r – окончательное число интервалов группирования, тогда очевидно, что

$$\sum_{m=1}^{K_r} n_m = N$$

где N - общее число наблюдений в изучаемой выборке;

n_m – число наблюдений (случайных величин в m – м интервале гистограммы),

$m = 1, 2, \dots K_r$

б) Визуально, по форме гистограммы, задаются видом гипотетической функции распределения, описывающей гистограмму (например, нормальный закон), и для каждого m-го интервала гистограммы по выбранной гипотетической функции распределения находятся её оценки.

в) Определяют теоретическую вероятность p_m попадания в каждый из K_r интервалов случайной величины с заданным распределением, параметры которого или известны, или оценены.

г) Вычисляют число g:

$$g = N\sum_{m=1}^{K_r}\frac{(\frac{n_m}{N}-p_m)^2}{p_m} = \sum_{m=1}^{K_r}\frac{(n_m-Np_m)^2}{Np_m}$$

Известно, что для данного критерия согласия случайная величина g при больших ***N*** имеет χ^2 – распределение со степенями свободы

$k = K_r - r - 1$

где r – число определяемых неизвестных заранее параметров гипотетического распределения.

Уменьшение числа степеней свободы еще на единицу объясняется наличием линейного соотношения между эмпирическими величинами n_m и ***N***, входящими в расчетную формулу. Задавшись уравнением значимости a, по таблице χ^2 - распределения находят критическое значение $g_{кр}$, причем критическая область определяется неравенством

$g > g_{кр} = \chi^2_v = K_r - r - 1$

Сравнивают значения g и $g_{кр}$ и выносят решение о принятии (если $g \le g_{кр}$) рассматриваемой гипотезы о виде функции распределения.

Пример решения

Исходные данные:

В таблице приведены сгруппированные данные о значениях x, указаны интервалы (x_m, $x_m + \Delta x$) и число наблюдений (измерений) n_m в каждом интервале. Проверить гипотезы о согласии выборочного распределения (гистограммы) с нормальным законом на уровне значимости $a = 0{,}05$.

произведено 400 измерений случайной величины *X.*

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-40, -30)	14
2	(-30 -20)	22
3	(-20, -10)	30
4	(-10, 0)	48
5	(0, 10)	98
6	(10, 20)	82
7	(20, 30)	52
8	(30, 40)	34
9	(40, 50)	17
10	(50, 60)	3

Решение:

1. Определить общее число измерений случайной величины в изучаемой выборке:

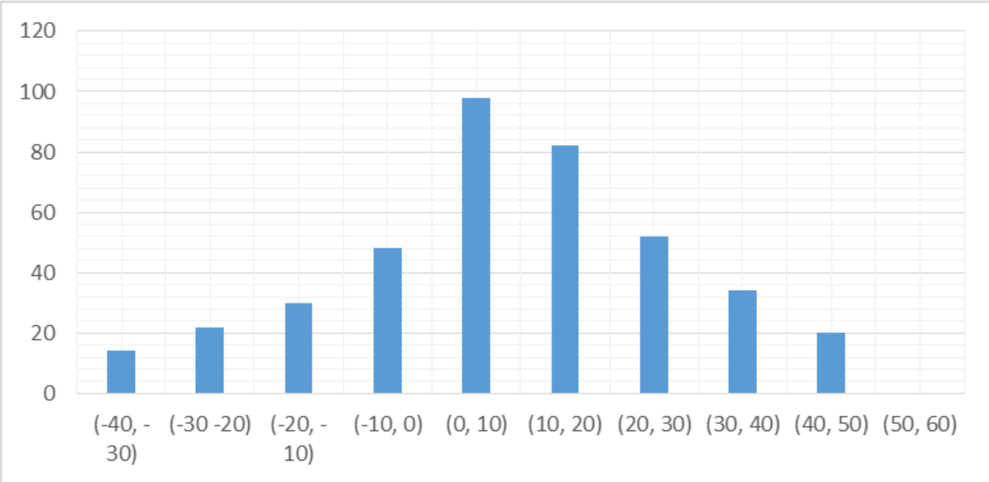
$$N = \sum_{m=1}^{m} n_m$$

Где m – количество интервалов;

n_m - число наблюдений (измерений) в каждом интервале.

$$N = \sum_{m=1}^{10} 14 + 22 + 30 + 48 + 98 + 82 + 52 + 34 + 17 + 3 = 400$$

2. По исходным данным построить гистограмму



3. Визуально, по форме гистограммы, отвергаем гипотезу о нормальном распределении.

4. Так как в десятом интервале число наблюдений 3, т.е. $n_{10} < 5$, то два последних интервала объединяем в один для того, чтобы число наблюдений в таком интервале оказалось ≥ 5. Поэтому число интервалов гистограммы K = 9.

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-40, -30)	14
2	(-30 -20)	22
3	(-20, -10)	30
4	(-10, 0)	48
5	(0, 10)	98
6	(10, 20)	82
7	(20, 30)	52
8	(30, 40)	34
9	(40, 60)	20

5. Изменение величины x_m определяем для каждого интервала:

$$\Delta x_m = (x_m + \Delta x_m) - x_m$$

$$\Delta x_1 = -30 - (-40) = 10$$

6. Определяем оценки неизвестных параметров нормального распределения m_x и S^2_x по сгруппированным данным [9]:

среднее значение случайной величины в выборке

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{K}(x_m + \frac{\Delta x_m}{2})\, n_m$$

$$\bar{x} = \frac{1}{400}\cdot\left(\left(-40+\frac{10}{2}\right)\cdot 14+\left(-30+\frac{10}{2}\right)\cdot 22+\cdots+\left(40+\frac{10}{2}\right)\cdot 20\right) = 8{,}7$$

дисперсия выборки

$$S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{K}\left(x_m + \frac{\Delta x_m}{2}\right)^2 n_m - \bar{x}^2$$

$$S_x^2 = \frac{1}{400}\cdot\left(\left(-40+\frac{10}{2}\right)^2\cdot 14+\left(-30+\frac{10}{2}\right)^2\cdot 22+\cdots+\left(40+\frac{20}{2}\right)^2\cdot 20\right) - 8{,}7^2 = 384{,}06$$

Для данного примера $\bar{x}$=8,7; S_x^2=384,06 и S_x = 19,6 (среднее квадратичное отклонение).

7. Рассчитаем теоретическую вероятность p_m попадания случайной величины в интервал. Значения определяются с помощью таблиц интегрального нормального закона распределения Ф(***x***) (приложение А) по формулам:

Для m = 2,3…8:

$$p_m = \Phi\left(\frac{x_{m+1}-\bar{x}}{S_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_m-\bar{x}}{S_x}\right)$$

Для m = 1: $$p_1 = \Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{S_x}\right)$$

Для m = 9: $$p_9 = 1 - \Phi\left(\frac{x_9-\bar{x}}{S_x}\right)$$

Тогда

$$p_1 = \Phi\left(\frac{-30-8{,}7}{19{,}6}\right) = \Phi(-1{,}97) = 1-\Phi(1{,}97) = 1-0{,}9756 = 0{,}0244$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{-20-8{,}7}{19{,}6}\right) - \Phi\left(\frac{-30-8{,}7}{19{,}6}\right) = \Phi(-1{,}46) - \Phi(-1{,}97) = \Phi(1{,}97) - \Phi(1{,}46) = 0{,}9756 - 0{,}9279 = 0{,}0477$$

$$p_9 = 1-\Phi\left(\frac{40-8{,}7}{19{,}6}\right) = 1-\Phi(1{,}6) = 1-0{,}9452 = 0{,}0548$$

8. Вычисляем случайную величину g:

$$g = \frac{(14-400\cdot 0{,}0244)^2}{400\cdot 0{,}0244} + \frac{(22-400\cdot 0{,}0477)^2}{400\cdot 0{,}0477} + \cdots + \frac{(20-400\cdot 0{,}0548)^2}{400\cdot 0{,}0548} = 36{,}3$$

9. Данные вычислений занести в таблицу.

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	Δx_m	n_m	p_m	g
1	(-40, -30)	10	14	0,0244	1,84
2	(-30 -20)	10	22	0,0477	0,45
3	(-20, -10)	10	30	0,099	2,33
4	(-10, 0)	10	48	0,1589	3,81
5	(0, 10)	10	98	0,1461	26,78
6	(10, 20)	10	82	0,1918	0,36
7	(20, 30)	10	52	0,1442	0,56
8	(30, 40)	10	34	0,0842	0,00
9	(40, 60)	20	20	0,0548	0,17

10. Для степеней свободы k =9 – 2 – 1 = 6 и α = 0,05 по таблице χ^2 – распределения (приложение Б) определяем критическое значение $g_{кр}$ = 12,6.

11. Так как $g = 36{,}3 > g_{кр} = 12{,}6$, то гипотеза о нормальном законе распределения случайной величины x противоречит наблюдениям и должна быть отвергнута.

Варианты исходных данных

Вариант определяется по последнему номеру в зачетке обучающегося и в соответствии с ним выбираются исходные данные.

Вариант 1

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m

1	(-40, -30)	14
2	(-30 -20)	22
3	(-20, -10)	30
4	(-10, 0)	48
5	(0, 10)	98
6	(10, 20)	82
7	(20, 30)	52
8	(30, 40)	34
9	(40, 50)	17
10	(50, 60)	3

Вариант 2

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-50, -40)	14
2	(-40, -30)	26
3	(-30, -20)	30
4	(-20, -10)	48
5	(-10, 0)	95
6	(0, 10)	82
7	(10, 20)	52
8	(20, 30)	26
9	(30, 40)	17
10	(40, 50)	3

Вариант 3

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m

1	(-50, -40)	14
2	(-40, -30)	26
3	(-30, -20)	99
4	(-20, -10)	48
5	(-10, 0)	95
6	(0, 10)	82
7	(10, 20)	52
8	(20, 30)	26
9	(30, 40)	48
10	(40, 50)	9

Вариант 4

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-20, -10)	29
2	(-10, 0)	26
3	(0, 10)	99
4	(10, 20)	48
5	(20, 30)	95
6	(30, 40)	82
7	(40, 50)	66
8	(50, 60)	26
9	(60,70)	31
10	(70, 80)	9

Вариант 5

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-20, -10)	10
2	(-10, 0)	26
3	(0, 10)	99
4	(10, 20)	48
5	(20, 30)	95
6	(30, 40)	82
7	(40, 50)	13
8	(50, 60)	26
9	(60,70)	31
10	(70, 80)	2

Вариант 6

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-50, -40)	7
2	(-40, -30)	26
3	(-30, -20)	30
4	(-20, -10)	24
5	(-10, 0)	95
6	(0, 10)	82
7	(10, 20)	52
8	(20, 30)	26
9	(30, 40)	17
10	(40, 50)	3

Вариант 7

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-10, 0)	14
2	(0, 10)	26
3	(10, 20)	12
4	(20, 30)	48
5	(30, 40)	95
6	(40, 50)	82
7	(50, 60)	33
8	(60,70)	26
9	(70, 80)	17
10	(80, 90)	3

Вариант 8

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m

1	(-20, -10)	14
2	(-10, 0)	26
3	(0, 10)	78
4	(10, 20)	48
5	(20, 30)	95
6	(30, 40)	22
7	(40, 50)	33
8	(50, 60)	26
9	(60,70)	17
10	(70, 80)	8

Вариант 9

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m
1	(-50, -40)	14
2	(-40, -30)	26
3	(-30, -20)	78
4	(-20, -10)	48
5	(-10, 0)	95
6	(0, 10)	22
7	(10, 20)	33
8	(20, 30)	26
9	(30, 40)	17
10	(40, 50)	8

Вариант 10

m	$(x_m, x_m + \Delta x_m)$	n_m

1	(-50, -40)	9
2	(-40, -30)	26
3	(-30, -20)	66
4	(-20, -10)	48
5	(-10, 0)	95
6	(0, 10)	12
7	(10, 20)	33
8	(20, 30)	26
9	(30, 40)	17
10	(40, 50)	6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: «СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ И МЕТОДЫ ИХ ПРОВЕРКИ»

Краткая теория

Под *статистической гипотезой* понимают всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке. Процедуру сопоставления высказанной гипотезы с выборочными данными называют проверкой статистической гипотезы.

По своему прикладному содержанию статистические гипотезы можно подразделить на несколько основных типов:

- о типе закона распределения исследуемой случайной величины;
- об однородности двух или нескольких выборок (т.е. принадлежности их одной и той же генеральной совокупности);
- о числовых значениях параметров исследуемой генеральной совокупности;
- о равенстве числовых характеристик генеральной совокупности.

Различают *нулевую гипотезу* H_0 - гипотезу, подлежащую проверке, и а*льтернативную гипотезу* H_1 - каждую допустимую, отличную от нулевой.

При проверке статистической гипотезы возможны ошибки:

- Ошибка *первого рода* заключается в том, что отвергают нулевую гипотезу, в то время как в действительности эта гипотеза верна. Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости и обозначается α.
- Ошибка второго рода состоит в том, что принимают нулевую гипотезу, в то время как в действительности эта гипотеза неверна.

Процедура проверки гипотез обычно проводится по следующей схеме:

1. Формулируются гипотезы H_0 и H_1.
2. Выбирается уровень значимости критерия.
3. По выборочным данным вычисляется значение некоторой случайной величины, называемой статистикой критерия, или просто статистическим критерием, который имеет известное стандартное распределение (нормальное, t-распределение Стьюдента и т.п.)

4. Вычисляется критическая область и область принятия гипотезы. То есть находят критическое (граничное) значение критерия при выбранном уровне значимости.

5. Найденное значение критерия сравнивается с критическим и по результатам сравнения делается вывод: отвергнуть гипотезу или не отвергнуть. Если вычисленное по выборке значение критерия меньше чем критическое, то нулевую гипотезу H_0 не отвергают на заданном уровне значимости.

Пример решения

Исходные данные:

Результаты экспериментальных замеров, показывающих процент отклонения от паспортных данных расхода топлива $\delta_{конв}$ и $\delta_{экспер}$.

Варианты технических решений.	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Audi конвейерное	1,4	1,3	0,9	1,2	1,5	1,6	0,8	0,9	1,3	1,6
Audi экспериментальное	1,2	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,1	1	0,9

Оценить значимость новых технических решений в автомобиле Audi, влияющих на снижение расхода топлива (критерий), по результатам сравнительных экспериментальных замеров расходов у конвейерной версии автомобиля Audi и у экспериментального автомобиля с комплексным расходом топлива.

Решение:

1.Принимаем (расчеты по критерию Пирсона), что плотности вероятности случайных величин δ распределены по нормальному закону.

2.Оценим однородность дисперсий двух выборок по F – критерия Фишера.

2.1.Числовые характеристики случайных величин δ по выборкам:

Конвейерная версия

$$\delta_к = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n}$$

$$\delta_к = \frac{1,4+1,3+0,9+1,2+1,5+1,6+0,8+0,9+1,3+1,6}{10} = 1,25$$

$$\sigma^2_{\delta_э} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\delta_i - \delta_э)^2}{n-1}$$

$$\sigma^2_{\delta_к} = \frac{(1,4-1,25)^2+(1,3-1,25)^2+\cdots+(1,6-1,25)^2}{10-1} = 0,087;$$

Экспериментальная версия

$$\delta_э = \frac{1,2+0,7+0,8+0,9+1+1,1+1,2+1,1+1+0,9}{10} = 0,99$$

$$\sigma^2_{\delta э} = \frac{(1,2-0,99)^2+(0,7-0,84)^2+\cdots+(0,9-0,99)^2}{10-1} = 0,028$$

2.2. Оценка расчетной величины F – критерия (Фишера-Снедекора распределение:

$$F_p = \frac{\sigma^2_{\delta к}}{\sigma^2_{\delta э}} = \frac{0,087}{0,028} = 3,15 > 1;$$

2.3.Оценка однородности дисперсий.

Табличное значение F – критерия (приложение В):

для числа степеней свободы: $K_1 = 10-1 = 9;\ K_2 = 10-1 = 9.$

и уровня значимости: $\alpha = 0,05 \rightarrow F_{кр} = 3,18.$

При условии $F_{кр} = 3,18 > F_p$=3,15 – дисперсии $\sigma^2_{\delta_э}$ и σ^2_{δ} с вероятностной ошибкой $\alpha = 0,05$ однородны, следовательно, с учетом нормального закона распределения случайных величин δ можно проводить оценку статистической значимости различий средних двух выборок: $\delta_э\ и\ \delta.$

3. Оценим статистическую значимость различий средних значений $\delta_э\ и\ \delta$ двух сравниваемых выборок с использованием t – критерия Стьюдента.

3.1.Расчетное значение t – критерия:

$$t_p = \frac{\delta_к - \delta_э}{\sqrt{(n_к - 1)\sigma^2_{\delta к} + (n_э - 1)\sigma^2_{\delta э}}} * \sqrt{\frac{n_э n_к (n_э + n_к - 2)}{n_э + n_к}}$$

$$t_p = \frac{1{,}25 - 0{,}99}{\sqrt{(10-1)\cdot 0{,}87 + (10-1)\cdot 0{,}028}} * \sqrt{\frac{10\cdot 10\cdot(10+10-2)}{10+10}} = 2{,}42$$

3.2.Табличное значение t – критерия:

Для числа степеней свободы:

$$K = n_э + n - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$$

И уровня значимости: $\alpha = 0{,}05 \rightarrow t_{cm} = 2{,}101$.

В результате проведенных расчетов определили $t_{cm} = 2{,}101 < t_p = 2{,}42$ - нуль-гипотеза отвергается и с вероятностной ошибкой $\alpha = 0{,}05$ средняя величина $\delta_э$ статистически значимо больше средней величины δ, т.е. новое техническое решение; использованное в экспериментальной машине, обеспечило снижение расходов топлива.

$$\Delta\delta = \frac{\delta_к - \delta_э}{\delta_к} * 100\% = 20{,}8\%$$

$$\Delta\delta = \frac{1{,}25 - 0{,}99}{1{,}25} * 100\% = 20{,}8\%.$$

Варианты исходных данных

Вариант определяется по последнему номеру в зачетке обучающегося и в соответствии с ним выбираются исходные данные.

Вариант 1:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %							
	№ повторности опыта, n							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Hyundai конвейерное	15,15	15,3	15,25	15,3	15,4	15,25	15,2	14,9
Hyundai экспериментальное	15,11	15,28	15,21	14,32	15,2	14,37	15,18	14,4

Вариант 2:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Opel конвейерное	2,0	1,9	1,9	1,8	1,6	1,8	1,8	1,9	1,7	2,0
Opel экспериментальное	1,9	1,7	1,8	1,7	1,5	1,7	1,7	1,8	1,5	1,9

Вариант 3:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volkswagen конвейерное	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,9	1,9	2,1	1,7	2,0
Volkswagen экспериментальное	1,9	1,7	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7	1,8	1,5	1,9

Вариант 3:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Toyota конвейерное	1,5	1,6	1,7	1,5	1,7	1,4	1,6	1,8	1,7	1,4
Toyota экспериментальное	1,4	1,4	1,5	1,4	1,6	1,4	1,5	1,6	1,5	1,4

Вариант 4:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Audi конвейерное	1,15	1,3	1,2	1,3	1,25	1,35	1,2	1,3	1,3	1,4
Audi экспериментальное	1,1	1,28	1,21	1,32	1,2	1,3	1,1	1,4	1,3	1,3

Вариант 5:

Варианты техниче-	Экспериментальные величины δ, %
	№ повторности опыта, n

ских решений	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mazda конвейерное	1,4	1,41	1,39	1,42	1,44	1,41	1,43	1,4	1,39	1,4
Mazda экспериментальное	1,4	1,42	1,42	1,43	1,45	1,42	1,39	1,5	1,44	1,5

Вариант 6:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ford конвейерное	3,15	3,3	3,2	3,3	3,25	3,35	3,2	3,3	3,3	3,4
Ford экспериментальное	3,1	3,28	3,21	3,32	3,2	3,3	3,1	3,4	3,3	3,3

Вариант 7:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %							
	№ повторности опыта, n							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Mitsubishi конвейерное	21,0	21,9	21,9	21,8	21,6	21,8	21,8	21,9
Mitsubishi экспериментальное	21,9	21,7	21,8	21,7	21,5	21,7	21,7	21,8

Вариант 8:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
BMW конвейерное	11,5	11,6	11,7	11,5	11,7	11,4	11,6	11,8	11,7	11,4
BMW экспериментальное	11,4	11,4	11,5	11,4	11,6	11,4	11,5	11,6	11,5	11,4

Вариант 9:

Варианты технических решений	Экспериментальные величины δ, %									
	№ повторности опыта, n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lada конвейерное	3,15	3,5	3,4	3,3	3,2	4,35	4,2	3,33	3,5	3,4
Lada экспериментальное	4,1	4,0	3,5	4,32	4,2	4,13	4,31	4,4	3,9	4,3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: «ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ, ЛАПЛАСА И ПУАССОНА»

Краткая теория

В научной и практической деятельности постоянно приходится проводить многократно повторяющиеся опыты в сходных условиях. При этом, как правило, результаты предшествующих опытов никак не сказываются на результатах последующих опытов. Очень важен простейший тип таких опытов, когда в каждом из испытаний некоторое событие А может появляться с одной и той же вероятностью p и эта вероятность остается одной и той же, независимо от результатов предшествующих или последующих испытаний.

Этот тип испытаний называется схемой повторных независимых испытаний, или ***схемой Бернулли***. Найдем вероятность $P_n(m)$ того, что событие А появится ровно m раз в n испытаниях Бернулли. Здесь не требуется появления события А ровно m раз в строго определенной последовательности. Вероятность элементарного исхода, в котором событие А наступит ровно m раз, равна $p^m q^{n-m}$. Однако число таких элементарных исходов совпадает с числом способов, которыми можно выбрать m мест из имеющихся n, не учитывая порядка, т.е. равно числу сочетаний C_n^m. В результате получаем, что вероятность наступления m успехов в n независимых испытаниях равно:

$$P_n(m) = C_n^m p^n q^{n-m}$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n по k;

p - вероятность события А,

q – вероятность противоположного события $\bar{A}$.

В случае, когда число испытаний велико, формулу Бернулли применять неудобно, поэтому для них существуют приближенные формулы.

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если число испытаний n велико, а вероятность p не очень мала, то вероятность того, что событие А наступит ровно k раз находят по *локальной формуле Лапласа (Муавра-Лапласа).*

<u>Теорема:</u> *Пусть* $p = P(A)$ *– вероятность события* A, *причем* $0 < p < 1$. *Тогда вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие* A *при* n *испытаниях появится точно* m *раз, выражается приближенной формулой Лапласа:*

$$P_n(\text{к}) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

Если $n \cdot p \cdot q \geq 10$, то где вероятность *p* отлична от 0 и 1 ($p \rightarrow 0{,}5$), $x = \frac{\text{к} - np}{\sqrt{npq}}$.

Для облегчения вычислений применяется функция (Приложение А)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

При больших значениях n, для вычисления вероятности того, что произойдёт от k_1 до k_2 событий по схеме Бернулли, используется интегральная формула Муавра – Лапласса:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

где Ф(x) - функция Лапласса.

<u>Теорема:</u> Если вероятность Р события А в каждом испытании постоянна и отлична как от нуля, так и от единицы, то вероятность P_n (m_1, m_2) того, что событие А появится в n испытаниях от m_1 до m_2 раз, приближенно равна определенному интегралу:

В приложении приведены значения интегральной функции Лапласа Ф(x) (приложение А).

Формула Пуассона

Если число испытаний n велико, а вероятность p появления события А в каждом испытании очень мала, то вероятность того, что это событие наступит ровно k раз находят по приближенной формуле Пуассона.

Теорема: Если вероятность P наступления события A в каждом испытании постоянна и мала, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит m раз, приближенно равна:

$$P_n(к) \approx \frac{\lambda^к}{к!} \cdot e^{-\lambda},$$

где λ=np.

Пример решения

Исходные данные: завод изготовил серию машин, 500 отправлено потребителю. Вероятность того, что в пути повредится, хоть одна машина составляет 0,0002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено:

а) 3 машины;

б) 1 машина;

в) не более трёх машин;

Решение:

Принимаем количество машин n = 500, а вероятность повреждения p = 0,002, тогда вероятность противоположного события q = 1 - p = 0,998

Так как число отправленных машин велико (число испытаний), а вероятность повреждения машины очень мала, то вероятность того, что это событие наступит ровно k раз будем определять по приближенной формуле Пуассона:

$$P_n(к) \approx \frac{\lambda^к}{к!} \cdot e^{-\lambda}$$

$\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}002 = 1$

а) Найдем вероятность того, что в пути будет повреждено 3 машины, т.е. k=3: $P_{500}(3) \approx \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}062$

б) Найдем вероятность того, что в пути будет повреждена 1 машина, т.е. k=1:

$$P_{500}(1) \approx \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$

в) $P_{500}\ (0 \leq к \leq 3) = P_{500}\ (0) + P_{500}\ (1) + P_{500}\ (2) + P_{500}\ (3)$

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{6e} = \frac{16}{6e} = \frac{8}{3e} \approx 0{,}98$$

Варианты исходных данных

Номер задачи определяется по последнему номеру в зачетке обучающегося и в соответствии с ним записываются исходные данные.

0. Станок штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь бракованная, равна 0,02. Какова вероятность того, что среди 200 деталей окажется 5 бракованных?
1. Вероятность того, что при сборке 7 машин LADA VESTA выставлены несимметрично зазоры между бампером и крыльями у каждой 0,8. Какова вероятность того, что будет 4 машины с браком.
2. Вероятность того, что при сборке 7 машин LADA VESTA выставлены несимметрично зазоры между бампером и крыльями у каждой 0,8. Какова вероятность того, что будет не менее 5 машин с браком.
3. Вероятность того, что при сборке 7 машин LADA VESTA выставлены несимметрично зазоры между бампером и крыльями у каждой 0,8. Какова вероятность того, что будет не более 2 машин с браком.
4. Необходимо установить 100 радиаторов охлаждения двигателя на Toyota Camry, на первое число месяца в наличии имеется 30 оригинальных запчастей. Каждый радиатор с равной вероятностью может быть установлен на любой автомобиль. Найти вероятность того, что он будет установлен на выбранный автомобиль.
5. Вероятность получения с конвейера ступицы первого сорта равна 0,8. Определить вероятность того, что из взятых на проверку 400 изделий 315 будут первого сорта.
6. Вероятность получения с конвейера ступицы первого сорта равна 0,8. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 400 изделий первого сорта будут от 300 до 340 изделий.
7. Среди противотуманных фар в среднем при упаковке, отгрузке и доставке в магазин повреждаются 0,02%. Найти вероятность того, что среди 5000 фар окажутся поврежденными не более 3.
8. Два процента галогенных ламп, изготовленных на заводе, в среднем имеют брак. На контроль отобрано 1000 ламп.

Оцените вероятность того, что относительная частота бракованных ламп отличается от средней вероятности не более чем на один процент.

9. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Крампит А.Г. Методология научных исследований: учебное пособие / А.Г. Крампит, Н.Ю. Крампит. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 164 с.
2. Ганжа О. А. Основы научных исследований: учебное пособие / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. О. А. Ганжа, Т. В. Соловьева. - Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. – 97 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Значения локального и интегрального закона распределения (функции Лапласа)

X	$\varphi(x)$	*Φ(x)*	*X*	$\varphi(x)$	*Φ(x)*	*X*	$\varphi(x)$	*Φ(x)*

0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
01	3989	0080	42	3652	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0369	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0.90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

χ^2 – распределение (распределение Пирсона)

a / *k*	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,054	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Критические точки распределения F Фишера - Снедекора

(v_1 – число степеней свободы большей дисперсии, v_2 - меньшей дисперсии), уровень значимости a=0,05

v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
1	**161**	**200**	**216**	**225**	**230**	**234**	**237**	**239**	**241**	**242**	**244**	**246**	**248**	**249**	**250**	**252**	**253**	**254**
2	**18,51**	**19,00**	**19,16**	**19,25**	**19,30**	**19,33**	**19.36**	**19,37**	**19,38**	**19,39**	**19,41**	**19,43**	**19,44**	**19,45**	**19,46**	**19,47**	**19,49**	**19,50**
3	**10,13**	**9,55**	**9,28**	**9,12**	**9,01**	**8,94**	**8,88**	**8,84**	**8,81**	**8,78**	**8,74**	**8,69**	**8,66**	**8,64**	**8,62**	**8,58**	**8,56**	**8,53**
4	**7,71**	**6,94**	**6,59**	**6,39**	**6,26**	**6,16**	**6,09**	**6,04**	**6,00**	**5,96**	**5,91**	**5,84**	**5,80**	**5,77**	**5,74**	**5,70**	**5,66**	**5,63**
5	**6,61**	**5,79**	**5,41**	**5,19**	**5,05**	**4,95**	**4,88**	**4,82**	**4,78**	**4,74**	**4,68**	**4,60**	**4,56**	**4.53**	**4,50**	**4,44**	**4.40**	**4.36**
6	**5,99**	**5,14**	**4,76**	**4,53**	**4,39**	**4,28**	**4,21**	**4,15**	**4,10**	**4,06**	**4,00**	**3,92**	**3,87**	**3,84**	**3,81**	**3,75**	**3,71**	**3,67**
7	**5,59**	**4,74**	**4,35**	**4,12**	**3,97**	**3,87**	**3,79**	**3,73**	**3,68**	**3,63**	**3,57**	**3,49**	**3,44**	**3,41**	**3,38**	**3,32**	**3,28**	**3,23**
8	**5,32**	**4,46**	**4,07**	**3,84**	**3,69**	**3,58**	**3,50**	**3,44**	**3,39**	**3,34**	**3,28**	**3,20**	**3,15**	**3,12**	**3,08**	**3,03**	**2,98**	**2,93**
9	**5,12**	**4,26**	**3,86**	**3,63**	**3,48**	**3,37**	**3,29**	**3,23**	**3,18**	**3,13**	**3,07**	**2,98**	**2,93**	**2,90**	**2,86**	**2,80**	**2,76**	**2,71**

10	**4,96**	**4,10**	**3,71**	**3,48**	**3,33**	**3,22**	**3,14**	**3,07**	**3.02**	**2,97**	**2,91**	**2,82**	**2,77**	**2,74**	**2,70**	**2,64**	**2,59**	**2,54**
11	**4,84**	**3,98**	**3,59**	**3,36**	**3,20**	**3,09**	**3,01**	**2,95**	**2,90**	**2,86**	**2,79**	**2,70**	**2,65**	**2,61**	**2,57**	**2,50**	**2,45**	**2,40**
12	**4,75**	**3,88**	**3,49**	**3,26**	**3,11**	**3,00**	**2,92**	**2,85**	**2,80**	**2,76**	**2,69**	**2,60**	**2,54**	**2,50**	**2,46**	**2,40**	**2,35**	**2,30**
13	**4,67**	**3,80**	**3,41**	**3,18**	**3,02**	**2,92**	**2,84**	**2,77**	**2,72**	**2,67**	**2,60**	**2,51**	**2,46**	**2,42**	**2,38**	**2,32**	**2,26**	**2,21**
14	**4,60**	**3,74**	**3,34**	**3,11**	**2,96**	**2,85**	**2,77**	**2,40**	**2,65**	**2,60**	**2,53**	**2,44**	**2,39**	**2,35**	**2,31**	**2,24**	**2,19**	**2,13**
15	**4,54**	**3,68**	**3,29**	**3,06**	**2,90**	**2,79**	**2,70**	**2,64**	**2,59**	**2,55**	**2,48**	**2,39**	**2,33**	**2,29**	**2,25**	**2.18**	**2,12**	**2,67**
16	**4,49**	**3,63**	**3,24**	**3,01**	**2,85**	**2.74**	**2,66**	**2,59**	**2,54**	**2,49**	**2,42**	**2,33**	**2,28**	**2,24**	**2,20**	**2,13**	**2,07**	**2,01**
17	**4,45**	**3,59**	**3,20**	**2,96**	**2,81**	**2,70**	**2,62**	**2,55**	**2,50**	**2,45**	**2,38**	**2,29**	**2,23**	**2,19**	**2,15**	**2,08**	**2,02**	**1.96**
18	**4,41**	**3,55**	**3,16**	**2,93**	**2,77**	**2,66**	**2,58**	**2,51**	**2,46**	**2,41**	**2,34**	**2,25**	**2,19**	**2,15**	**2,11**	**2,04**	**1,98**	**1,92**
19	**4,38**	**3,52**	**3,13**	**2,90**	**2,74**	**2,63**	**2,55**	**2,48**	**2,43**	**2,38**	**2,31**	**2,21**	**2,15**	**2,11**	**2,07**	**2,00**	**1,94**	**1,88**
20	**4,35**	**3,49**	**3,10**	**2,87**	**2,71**	**2.60**	**2.52**	**2,45**	**2,40**	**2,35**	**2,28**	**2,18**	**2,12**	**2,08**	**2,04**	**1,96**	**1.90**	**1,84**
22	**4,30**	**3,44**	**3,05**	**2,82**	**2,66**	**2,55**	**2,47**	**2.40**	**2.35**	**2,30**	**2,23**	**2,13**	**2,07**	**2,03**	**1.98**	**1,91**	**1,84**	**1.78**

24	**4,26**	**3,40**	**3,01**	**2,78**	**2,62**	**2,51**	**2,43**	**2,36**	**2,30**	**2,26**	**2,18**	**2,09**	**2,02**	**1,98**	**1,94**	**1,86**	**1.80**	**1,73**
26	**4,22**	**3,37**	**2,98**	**2,74**	**2,59**	**2,47**	**2,39**	**2,32**	**2,27**	**2,22**	**2,15**	**2,05**	**1,99**	**1,95**	**1,90**	**1,82**	**1,76**	**1,69**
28	**4,20**	**3,34**	**2,95**	**2,71**	**2,56**	**2,44**	**2,36**	**2,29**	**2,24**	**2,19**	**2,12**	**2,02**	**1,96**	**1,91**	**1.87**	**1.78**	**1,72**	**1,65**
32	**4,15**	**3,30**	**2,90**	**2,67**	**2,51**	**2,40**	**2,32**	**2,25**	**2,19**	**2,14**	**2,07**	**1,97**	**1,91**	**1.86**	**1,82**	**1,74**	**1,67**	**1,59**
36	**4,11**	**3,26**	**2,86**	**2,63**	**2,48**	**2,36**	**2,28**	**2,21**	**2,15**	**2,10**	**2,03**	**1,93**	**1,87**	**1,82**	**1,78**	**1,69**	**1,62**	**1,55**
40	**4,08**	**3,23**	**2,84**	**2,61**	**2,45**	**2,34**	**2,25**	**2,18**	**2,12**	**2,07**	**2,00**	**1,90**	**1,84**	**1,79**	**1,74**	**1,66**	**1,59**	**1,51**
60	**4,00**	**3,15**	**2,76**	**2,52**	**2,37**	**2,25**	**2,17**	**2,10**	**2,04**	**1,99**	**1,92**	**1,81**	**1,75**	**1,70**	**1,65**	**1,56**	**1,48**	**1,39**
100	**3,94**	**3,09**	**2,70**	**2,46**	**2,30**	**2,19**	**2,10**	**2,03**	**1,97**	**1,92**	**1,85**	**1,75**	**1,68**	**1,63**	**1,57**	**1,48**	**1,39**	**1,28**
200	**3,89**	**3,04**	**2,65**	**2,41**	**2,26**	**2,14**	**2,05**	**1,98**	**1.92**	**1,87**	**1,80**	**1,69**	**1,62**	**1,57**	**1,52**	**1,42**	**1,32**	**1,19**
∞	**3,84**	**2,99**	**2,60**	**2,37**	**2,21**	**2,09**	**2.01**	**1,94**	**1,88**	**1,83**	**1,75**	**1,64**	**1,57**	**1,52**	**1,46**	**1,35**	**1.24**	**1,00**