ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге
Кафедра «Технический сервис и информационные технологии»

Методические указания по выполнению контрольной работы

по дисциплине

«Математический анализ»

Авторы
Павлова М.Н.

Ростов-на-Дону, 2026

Аннотация

Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Математический анализ» предназначены для студентов заочной и очно-заочной форм обучения по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Авторы

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Технический сервис и информационные технологии»
Павлова М.Н.

Оглавление

Введение

Дисциплина «Математический анализ» относится к основным разделам высшей математики и ориентирована на теоретическое и практическое обеспечение высокого уровня фундаментальной подготовки по математике как основы формирования общенаучных, профессиональных, социально-личностных и общекультурных компетенций. Освоение математических дисциплин способствует развитию у студентов личностных качеств и способностей успешно работать в новых, быстро развивающихся областях науки и техники, самостоятельно непрерывно приобретать новые знания, умения и навыки.

Основная форма самостоятельной работы студентов заочной формы обучения – выполнение контрольных работ по вопросам (заданиям, темам), указанным в рабочей программе дисциплины. Теоретические вопросы курса излагаются на установочной лекции. Закрепление практического материала выполняется на практических занятиях. Значительную часть необходимой информации студенты должны приобретать в процессе самостоятельного изучения учебной и научной литературы Контрольная работа у студентов, обучающихся на заочной форме обучения является своеобразным допуском к промежуточной аттестации по дисциплине.

1 Цель выполнения контрольной работы

Цели выполнения контрольной работы для студентов заочной формы обучения ориентированы на развитие способности к анализу и умению систематизировать и обобщать численные данные, практически оценивать результаты полученных расчетов; на активизацию критического мышления и способности анализировать информацию и развитие умения применять эти положения на практике.

Для достижения цели ставятся следующие задачи:

– воспитание культуры современного математического мышления;

– изучение математического аппарата, методов математического анализа, анализа состояния научно-технической проблемы на основе подбора и изучения литературных источников;
– моделирования объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием имеющихся средств исследования;
– формирование представления о математике как о мощном средстве решения задач в практической деятельности;
– привитие навыков использования математических методов для решения прикладных задач в профессиональной сфере;
– выработка навыков и умений самостоятельного расширения и углубления математических знаний и проведение математического анализа задач в профессиональной сфере.

2 Основные этапы работы обучающегося при выполнении контрольной работы

При выполнении контрольной работы необходимо проявить навыки самостоятельной работы, умение пользоваться информационными источниками, учебной и научной литературой. Содержание работы необходимо излагать своими словами, логически последовательно представлять все результаты промежуточных и итоговых вычислений.

Выполненную контрольную работу студенты регистрируют на кафедре «Технический сервис и информационные технологии» (ауд.230) и направляют на проверку преподавателю **не позднее, чем за 3 дня до промежуточной аттестации по данной дисциплине**.

После проверки преподаватель дает рецензию о допуске к собеседованию (защите контрольной работы) или о необходимости её доработки.

Если контрольная работа не допущена к защите, то обучающийся должен по всем замечаниям преподавателя сделать необходимые исправления и дополнения (работу над ошибками), после чего он может повторно предоставить контрольную работу преподавателю.

По правильно оформленной контрольной работе *проводится устный опрос* (зачет контрольной работы), после которого студент допускается к промежуточной аттестации (экзамен) по дисциплине.

3 Требования к содержанию и оформлению контрольной работы

Контрольная работа содержит материал, охватывающий основные вопросы дисциплины. Поскольку дисциплина изучается два семестра, то обучающийся выполняет две контрольные работы. В первом семестре контрольная работа содержит 4 задания, а во втором семестре – 5 заданий. Задания контрольных работ представлены в вариантах. Вариант выполнения каждого задания контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачетной книжки (нуль соответствует варианту №10). Каждое задание содержит образец для решения, на который необходимо ориентироваться, выполняя свое задание. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, не засчитывается.

Задание, выполненное в печатном виде, требуется помещать в рамку, задание, выполненное в тетради, не требуется помещать в рамку.

Требования по оформлению контрольной работы

Письменные работы обучающихся оформляются в соответствии с «Правилами оформления письменных работ обучающихся для технических направлений подготовки».

Основные требования по оформлению:

– текст контрольной работы должен быть представлен в печатном виде на одной стороне листа белой бумаги формата А4 или рукописном виде.

– гарнитура шрифта – Times New Roman;

– размер шрифта для основного текста – 14;

– междустрочный интервал – 1,5

– абзацный отступ –1,25 мм;

– выравнивание основного текста – по ширине страницы, соблюдая следующие размеры:

– расстояние от левого края страницы до границ текста –30 мм;

– расстояние от верхней и нижней строки текста до верхнего и нижнего краев страницы – 20 мм;

– расстояние от правого края страницы до текста – 10 мм;

– номер страницы – в нижнем колонтитуле справа.

Титульный лист включают в общую нумерацию страниц, но номер страницы на нем не проставляют. Страницы текста следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему документу, включая и приложения.

Перенос в словах допускается использовать, кроме заголовков.

Структура контрольной работы:

– титульный лист;

– содержание;

– выполнение задания, согласно варианту;

– перечень использованных информационных ресурсов.

4 Задания для контрольных работ

Контрольная работа №1 ((первый семестр)

Задание №1

Варианты к заданию № 1

1) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования., Ошибка! Объект не может быть создан**

3) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования., Ошибка! Объект не может быть создан**

из кодов полей редактирования.;
2) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;
5) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;
6) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;

из кодов полей редактирования.;
4) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;
8) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;
9) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;

7) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования., Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;

10)**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования., Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Образец выполнения задания №1

Возвести комплексное число Z в степень: $z = -2\sqrt{3} + 2i$, z^4 - ?

Найдем модуль и аргумент комплексного числа z = $x + iy$

Модуль: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$

Аргумент, т.е. угол: $\arg z = \varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{2}{-2\sqrt{3}}$ $= \pi - arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Для $z_1 = z^4$ модуль будет $r_1 = r^4 = 4^4 = 256$, а аргумент $\varphi_1 = 4\varphi = \frac{5\pi}{6} \cdot 4 = \frac{10\pi}{3}$.

Таким образом $z^4 = 256 \cdot \left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$

Задание №2

Варианты задания №2.

Вариант 1.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Вариант 2.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Вариант 3. **Вариант 4.**

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Вариант 5. **Вариант 6.**

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Вариант 7. **Вариант 8.**

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Вариант 9. **Вариант 10.**

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Образец выполнения задания №2
Вычислить пределы:
Пример решения первого задания.
1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**$=\frac{0}{0}$
Чтобы избавиться от корней умножим и разделим дробь на выражение, сопряженное числителю, при этом в числителе получим разность квадратов

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

сократим множители, дающие нуль

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** $= \frac{\infty}{\infty} =$

Вынесем наибольшую степень выражения из числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}\right)} = \frac{3-0+0}{2+0-0} = \frac{3}{2}.$$

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** $= (1^{\infty}) =$

Приведем выражение ко второму замечательному пределу

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3x\cdot\frac{1}{4x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 3x\cdot\frac{1}{4x}} = e^{3/4}.$$

Задание №3

Варианты задания №3.

Найти производную функции:

1. $y = arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{5x}$
2. $y = -3lntg\frac{x}{2}$
3. $y = 5^{x^3\cdot sin3x}$
4. $\ln\sqrt{1-e^{2x}}$
5. $(1+x^2)e^{arctg\, x}$
6. $y = \frac{e^{sinx}}{\sqrt{1+tgx}}$
7. $y = arccos\frac{\sqrt{1-x}}{x^3}$

8. $y = x^5 \cdot lntg\frac{x}{4}$

9. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+x}{sin^2x}}$

10. $y = \ln\frac{x^3-9}{x^3-1}$

Образец выполнения задания №3

1) Пример решения второго задания.

Найти производную функции: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Так как функция представляет собой дробь, то воспользуемся формулой производной дроби

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2},\ v(x) \neq 0.$$

$$y' = \frac{\left(e^{sin^3x}\right)'\cdot\sqrt{1+tgx}-e^{sin^3x}\cdot\left(\sqrt{1+tgx}\right)'}{\cdot\left(\sqrt{1+tgx}\right)^2}$$

Функция e^{sin^3x} является сложной функцией, (т.е. функция , аргументом которой является другая функция). В нашем случае функцией является показательная функция e, а ее аргументом sin^3x. Производная сложной функции вычисляется по формуле

$$(f(g(x)))' = f'(g)g'(x),$$

т.е. сперва берем производную от внешней функции, сохраняя аргумент, затем умножаем на производную аргумента. В нашем случае, воспользовавшись таблицей производных ($(e^x)' = e^x$), получим

$$\left(e^{sin^3x}\right)' = e^{sin^3x}\cdot((sinx)^3)'.$$

Функция $(sinx)^3$ является сложной функцией. Это кубическая функция аргументом которой является функция $sinx$. Поэтому сначала берем производную от степенной (кубической) функции (по формуле $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$). т.е

$((sinx)^3)'=3sin^{3-1}x = 3sin^2x$ и умножаем на производную аргумента $(sinx)'$. В итоге получаем

$\left(e^{sin^3x}\right)' = e^{sin^3x} \cdot ((sinx)^3)' = e^{sin^3x} \cdot 3sin^2x \cdot (sinx)' = e^{sin^3x} \cdot 3sin^2x \cdot cosx.$

Чтобы взять производную от функции $\left(\sqrt{1+tgx}\right)'$ представим корень квадратный степенью $\frac{1}{2}$.

$\left(\sqrt{1+tgx}\right)' = \left((1+tgx)^{\frac{1}{2}}\right)'.$

Функция $(1+tgx)^{\frac{1}{2}}$ является сложной функцией. Это степенная функция с показателем $\frac{1}{2}$ в основании которой лежит другая функция, которая представляет собой сумму двух функций: 1 и tgx. Тогда, используя формулу $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$), получим

$\left((1+tgx)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+tgx)^{\frac{1}{2}-1}(1+tgx)' = \frac{1}{2}(1+tgx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+tgx)' =$

Воспользуемся формулой производной суммы

$(u(x)+v(x))' = (u(x))' + (v(x))',$

Получим

$\left((1+tgx)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+tgx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+tgx)' = \frac{1}{2}(1+tgx)^{-\frac{1}{2}} \cdot ((1)' + (tgx)')$

Производная от константы (т.е.1) равна нулю, а $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$. Тогда

$$\left((1+tgx)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+tgx)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(0+\frac{1}{cos^2x}\right) = \frac{1}{2}(1+tgx)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{cos^2x}.$$

Подставляя значения производных в формулу произведения частного, получим

$$y' = \frac{e^{sin^3x} \cdot 3sin^2x \cdot cosx \cdot \sqrt{1+tgx} - e^{sin^3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+tgx}} \cdot \frac{1}{cos^2x}}{1+tgx}.$$

Задание №4

Варианты задания №4.

Вычислить интегралы.

Вариант 1.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
5. $\int_0^{\pi/4} tg^4xdx$

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
6. $\int_1^4 \frac{x}{1-\sqrt{x}}dx$

Вариант 2.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
5. $\int_0^{\pi/3} sin^3xdx$

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_0^2 \frac{\sqrt{2+x}}{x} dx$

Вариант 3.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_0^{\pi/3} cos^3 2xdx$
3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_1^{\infty} \frac{x-2}{1+\sqrt{x}} dx$

Вариант 4.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{cos^4 x} dx$
3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_{3/2}^{4} \frac{x}{\sqrt[3]{2x-3}} dx$

Вариант 5.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_0^{\pi/4} \frac{sin^3 x}{cos^2 x} dx$

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$

Вариант 6.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} ctg^3 4x dx$
3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

Вариант 7.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{1}{sin^4 2x} dx$
3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_1^{\infty} \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx$

Вариант 8.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)} dx$

Вариант 9.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_0^{\pi/4} tg^3 2x dx$

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

Вариант 10.

1. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 4. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 5. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

3. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** 6. $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx$

Образец выполнения задания №4

Вычислить интеграл

1.а) $\int 2^{5-x^2} x dx =$

Рассмотрим подынтегральную функцию $(2^{5-x^2} \cdot x)$. Она представляет собой произведение показательной функции

2^{5-x^2} на степенную x, причем показательная является сложной функцией аргументом которой является степенная функция $5 - x^2$. Вследствие этого воспользуемся формулой для вычисления интеграла:

$\int f\big(u(x)\big)u'(x)dx = \int f(u)du$, (т.е. заменили выражение $u'(x)dx$ его дифференциалом du так как $du = u'(x)dx$).

Сделаем замену. Обозначим через u аргумент сложной функции $\boldsymbol{u = 5 - x^2}$ тогда, дифференциал u будет:

$\underline{\boldsymbol{du}} = d(5 - x^2) = (5 - x^2)'dx = \underline{\boldsymbol{-2xdx}}.$

Найдем из последнего выражения xdx . $xdx = -\frac{1}{2}du$.

$= -\frac{1}{2}\int 2^{5-x^2} \cdot \underline{(-2)xdx} =$

Теперь произведем замену в интеграле

$= -\frac{1}{2}\int 2^u\, du =$

Из таблицы интегралов (строка № 3) находим $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2^u}{ln2} + C =$

Вернемся к первоначальной переменной

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{5-x^2}}{ln2} + C.$

Интеграл вычислен.

Этот интеграл можно вычислить, внеся функцию $5 - x^2$ под знак дифференциала:

$$\int 2^{5-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int 2^{5-x^2} \cdot \underline{(-2)xdx} =$$

$$-\frac{1}{2}\int 2^{5-x^2}d(5 - x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{5-x^2}}{ln2} + C.$$

2. а) $\int (x + 1)\sin 3x dx =$

Этот интеграл относится к интегралам I типа, которые вычисляются методом интегрирования по частям по формуле

$$\int \boldsymbol{udv = uv - \int vdu}.$$

В качестве u выбирается многочлен первого порядка, т.е.

$u = x + 1$, тогда $dv = sin3x \cdot dx$;

$du = (x + 1)' dx = dx$, а $v = \int \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3} cos3x.$

Подставим полученные значения в формулу

$= (x+1)\left(-\frac{1}{3}cos3x\right) + \frac{1}{3}\int cos3xdx = (x+1)\left(-\frac{1}{3}cos3x\right) + \frac{1}{9} sin3x + C.$

б) $\int xln2x\, dx =$

Этот интеграл относится к интегралам II типа, которые вычисляются методом интегрирования по частям

$u = ln2\, x \quad dv = xdx \Rightarrow$

$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^2}{2}$

$= ln2x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} ln2x - \frac{1}{2}\int xdx + C = x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ln2x - x^2 \cdot \frac{1}{4} + C.$

в) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} =$

Выделим полный квадрат в знаменателе

$x^2 - 6x + 13 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 13 = \underline{x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9} - 9 + 13 = (x - 3)^2 + 4;$

$= \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 4} =$

Сделаем замену переменных в полученном интеграле

Пусть $t = x - 3$, $\Rightarrow$ $dt = d(x-3) = (x-3)' dx = dx$

$=\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{x-3}{2} + C$

4. а) $\int \frac{4x^2-2x+3}{(x-2)(x^2+1)}dx =$

Подынтегральная функция есть дробно-рациональная функция, причем дробь является правильной, т. е. наивысшая степень числителя 2, а знаменателя, когда раскроем скобки, будет 3. $3 > 2$.
Так как дробь правильная, разложим ее на сумму элементарных дробей:

$$\frac{4x^2-2x+3}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

Приведем полученные дроби к общему знаменателю

$$= \frac{A(x^2+1)+(x-2)(Bx+C)}{(x-2)(x^2+1)},$$

т.е. получаем $\frac{A(x^2+1)+(x-2)(Bx+C)}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{4x^2-2x+3}{(x-2)(x^2+1)}$.

Две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если равны их числители. Т.к. в числителях стоят многочлены, то они будут равны, когда будут равны коэффициенты при одинаковых степенях многочленов. Собираем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A + B = 4 \\ x^1 & -2B + C = -2 \\ x^0 & A - 2C = 3 \end{array}$$

Решаем систему методом Гаусса относительно переменных

A, B, C.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

C_3:=C_1 - C_3

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -2\end{array}\right)\sim$$

C_3:=2C_2 + C_3

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=4\\ B+2C=1\\ 5C=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3\\ B=1.\\ C=0\end{cases}$$

Таким образом, исходный интеграл примет вид

$$\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx =$$

И первый, и второй интеграл вычисляются с помощью внесения функции под знак дифференциала

$= \int\frac{1}{x-2}d(x+2)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$ = из таблицы интегралов = $ln|\,x+2\,|$ +

+ $ln\,|x^2+1|$ + C.

5. а) $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{cos^4x}$

Поскольку тригонометрическая функция $cosx$ находится в знаменателе и она в четной степени, то делаем замену:

$\boldsymbol{t = tgx}$, $x = arctgt$, тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Заменим верхние и нижние пределы, для этого в формулу замены сначала подставим вместо x верхний предел, а затем нижний.

$\boldsymbol{t_{верх.}} = tg\,\frac{\pi}{4} = 1$, $\boldsymbol{t_{ниж.}} = tg\,0 = 0$

Из тригонометрических выражений $cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$ или в наших обозначениях $cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

Подставим сделанные замены в интеграл, получим

$$=\int_0^1 \frac{\frac{1}{1+t^2}dx}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int_0^1 (t^2+1)dt =$$

Используем следующее свойство интегралов: *интеграл суммы равен сумме интегралов*, получим

$$=\int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 dt = \text{из таблицы интегралов} \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 + \left. t\right|_0^1 =$$

По формуле Ньютона Лейбница имеем

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}.$$

6. а) $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}} = \int_1^4 \frac{dx}{1-\sqrt{x}} =$

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода, так как при подставке нижнего предела интегрирования в подынтегральную функцию, знаменатель обращается в нуль. Поэтому рассмотрим правосторонний предел.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^4 \frac{dx}{1-\sqrt{x}} dx =$$

Интеграл под знаком предела является определенным. Будем его вычислять при помощи замены переменной. Это интеграл от иррациональной функции вида

$$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_k}{m_k}}\right) dx$$

Тогда делаем подстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$, где p – наименьшее общее кратное (НОК) из чисел $m_1, m_2, \dots, m_k$.

В нашем случае $\frac{ax+b}{cx+d} = x$, при этом $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.

$\sqrt{x} = x^{1/2}$, т.е. $m_1 = 2$. Т.к. больше корней нет, то НОК будет $p = 2$. Тогда замена в нашем интеграле

$$x = u^2 \quad => \quad dx = 2udu, \text{ а } \quad \boldsymbol{u = \sqrt{x}}.$$

Сделаем замену пределов интегрирования:

Подставим в формулу $\boldsymbol{u = \sqrt{x}}$ сначала нижний предел интегрирования

$\boldsymbol{u}_{\text{ниж}} = \sqrt{1+\varepsilon}$, а затем верхний $\boldsymbol{u}_{\text{верх}} = \sqrt{4} = 2$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}\frac{2udu}{1-u} = \lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}\frac{u}{1-u}du =$$

$$\lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}\frac{u-1+1}{1-u}du =$$

$$-\lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}\frac{u-1}{u-1}du + \lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}\frac{1}{1-u}du = -$$

$$\lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}du - -\lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}\frac{1}{u-1}du = -$$

$$\lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}du - \lim_{\varepsilon\to0} 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}\frac{1}{u-1}d(u-1)$$

Из таблицы интегралов (строка№1 в скобах и строка № 2) находим

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0} \; 2u|_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2} - \lim_{\varepsilon\to 0} 2ln|u-1\,||_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{2}$$

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница (сначала вместо t подставим верхний предел, затем вычтем подставленный вместо t нижний предел)

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0} 2\cdot\left(2-\sqrt{1+\varepsilon}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0} 2\cdot(ln|2-1\,| - ln|\sqrt{1+\varepsilon}-1\,|) =$$

$$= 2\left(2-\sqrt{1+0}\right) - 2\cdot(ln|2-1\,| - ln|\sqrt{1+0}-1\,|)$$

$$=2(2-1)-2(ln1 - ln|1-1\,|)=2-2(0-ln0)=2+2\cdot\infty=\infty.$$

б)**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** =

Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода, так как верхний предел интегрирования равен ∞. Перейдем к пределу и воспользуемся таблицей интегралов (см. приложение)

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования..

Контрольная работа №2 (второй семестр)

Задание №1

Варианты задания №1

Найти интервал сходимости степенного ряда

1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$

2.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n+1)3^n}$

4.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n 2^n}{n(n+1)}$

5.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n 10^n}{\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{nlnn}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$

Образец выполнения задания №1. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала.

1) Пример решения а) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**;

Для нахождения интервала сходимости, воспользуемся признаком Даламбера. Определим n+1 член ряда.

$c_n = \frac{x^n n}{2^n(n+1)}$, тогда $c_{n+1} = \frac{x^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}(n+2)}$.

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}(n+2)}}{\frac{x^n n}{2^n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}(n+2)}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{2^n(n+1)}{x^n n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{2(n+2)}\cdot\frac{(n+1)}{n}\right| =$$

$$= \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+2n} = \frac{|x|}{2}\cdot 1 \text{ так как } \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+2n} = \frac{\infty}{\infty} =$$

Если возникла неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, то числитель и знаменатель делим на наивысшую степень (n^2).

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

Ряд будет сходится если **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**< 1 => **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** => -2 < *x* < 2.

В интервале (-2 < *x* < 2) ряд сходится абсолютно, вне интервала расходится. Проверим сходимость на границах.

Проверим левую границу *x* = -2. Подставим в исходный ряд вместо *x* левую границу -2.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования..

Т.к. ряд знакочередующийся, то проверим выполнение признака Лейбница.

1) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** < **Ошибка! Объект не может**

быть создан из кодов полей редактирования. <
Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования. < …

Первое условие признака выполнилось. Проверим второе.

2) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
Второе условие не выполнилось, следовательно, ряд при x = -2 расходится и следовательно -2 не входит в интервал сходимости.
Аналогично проверяем правую границу.
x = 2 **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.
Проверим выполнение необходимого признака сравнения **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**
Так как предел не равен нулю, то необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится и, следовательно, 2 не входит в интервал сходимости. Таким образом, интервал сходимости -2 < x < 2.

Задание №2

Варианты задания №2

Вариант 1.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.
2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 2.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 3.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 4.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 5.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 6.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 7.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 8.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 9.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Вариант 10.

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Образец выполнения задания №2

1).Найти полный дифференциал функции двух переменных: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}dy$$

Рассмотрим частную производную по xот заданной функции: $\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}$.

В этом случае величина y рассматривается как постоянная величина, т. е. const.

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} =$$

Это степенная функция, аргументом которой является другая функция (x^2+y^2) . Функция является сложной. Поэтому ее производная равна произведению производной самой функции ($(x^a)' = ax^{a-1}$) с сохранением аргумента на производную аргумента, который представляет сумму двух функций ($u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x))$.

$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+y^2)'_x=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot$
$((x^2)'_x+\cdot\,(y^2)'_x)$=$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot(2x+0)$ = $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Рассмотрим частную производную по xот заданной функции: $\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}$.

В этом случае величина x рассматривается как постоянная величина, т. е. const.

$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y}$ = $=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+$
$y^2)'_y=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot((x^2)'_y+\cdot\,(y^2)'_y)$ = $\frac{1}{2}(x^2+$
$y^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot(0+2y)$ = $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тогда

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

2).Исследовать на экстремум функцию: **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Найдем точки подозрительные на экстремум. Для этого найдем частные производные функции и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x-\frac{2}{x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y-\frac{18}{y}=0\end{cases}\quad=>\quad\begin{cases}2x=\frac{2}{x}\\ 2y=\frac{18}{y}\end{cases}\quad=>\quad\begin{cases}x^2=1\\ y^2=9\end{cases}$$

$$=>\quad=>\quad\begin{cases}x=\pm1\\ y=\pm3\end{cases}$$

Таким образом, имеем четыре стационарные точки: M_1 (-1; -3) M_2 (-1; 3) M_3 (1; -3) M_4 (1; 3).

Найдем экстремум функции. Для этого построим дискриминант Δ и найдем его значение в каждой точке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial xy} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial xy} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2x - \frac{2}{x})}{\partial x}\right) = 2 + \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(2y - \frac{18}{y})}{\partial y}\right) = 2 + \frac{18}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(2x - \frac{2}{x})}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial xy}\right)^2 = \left(2 + \frac{2}{x^2}\right)\left(2 + \frac{18}{y^2}\right) - 0.$$

$$\Delta \big|_{M\,(\pm1;\pm3)} = \left(2 + \frac{2}{(\pm1)^2}\right)\left(2 + \frac{18}{(\pm3)^2}\right) = 4 \cdot 4 = 16 > 0.$$

Т.к. во всех четырех точках $\Delta > 0$, то в этих точках существует экстремум. Т.к. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то в этих точках минимум.

Задание №3

Варианты задания №3.

Вычислить двойной интеграл по области (D), ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

1.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

2.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

3.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

4.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

5.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

6.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

7.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

8.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

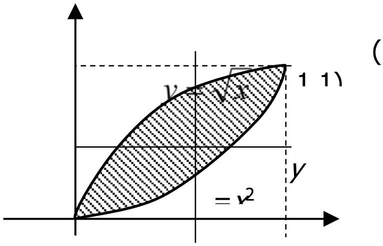
9.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

10.**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Образец выполнения задания №3

Вычислить двойной интеграл по области (D), ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования. и **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**



1) Найдем проекцию фигуры на ось OX.

Для того чтобы найти проекцию точки A на ось OX опустим из нее перпендикуляр на ось. Точка пересечения перпендикуляра с осью – это абсцисса точки A. Найдем координаты точки A. Точка A является точкой пересечения двух кривых $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$. Чтобы найти координаты точки A решим систему этих уравнений.

$$A:\quad \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{x} = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(\sqrt{x^3} - 1\right) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ y_1 = 0, y_2 = 1 \end{cases}.$$

Точки имеют координаты O (0;0), A(1;1).

Следовательно, фигура проектируется на ось OX в отрезок [0;1].

Т.е. $\mathbf{0 \le x \le 1}$. Это границы интегрирования внешнего интеграла.

Чтобы выяснить как изменяется y, через любую точку отрезка [0;1] проведем перпендикуляр в направлении оси OY. Он пересечет сперва кривую

$y = x^2$, а затем кривую $y = \sqrt{x}$. Следовательно, $x^2 \le \boldsymbol{y} \le \sqrt{x}$. Это границы интегрирования внутреннего интеграла. Вычислять интеграл начинаем с внутреннего, при этом

x является константой и выносится за знак внутреннего интеграла.

$$\iint_D yxdxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} yxdy = \int_0^1 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}y^2 \left|\begin{matrix}\sqrt{x}\\ x^2\end{matrix}\right.\right) dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x(x-x^4)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

2) Найдем проекцию фигуры на ось OY.

Для того чтобы найти проекцию точки A на ось OY опустим из нее перпендикуляр на эту ось. Точка пересечения перпендикуляра с осью – это ордината точки A. Она равна 1. Следовательно, фигура проектируется на ось $OУ$ в отрезок [0;1]. Т.е. $\mathbf{0 \le y \le 1}$. Это границы интегрирования внешнего интеграла.

Чтобы выяснить как изменяется x, через любую точку отрезка [0;1] оси $OУ$ проведем перпендикуляр в направлении оси OX. Он пересечет сперва кривую

$x = y^2$ (т.к. $y = \sqrt{x} => x = y^2$), а затем кривую $y = \sqrt{x}$. Следовательно, $y^2 \le \boldsymbol{x} \le \sqrt{y}$. Это границы интегрирования внутреннего интеграла. Вычислять интеграл начинаем с внутреннего, при этом y является константой и выносится за знак внутреннего интеграла.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.2) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования. .

*Решение***.**

1. Строим область.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.

Обозначим контур области **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** точками *Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.* Найдем координаты точек: *A,B,O*

а) **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

б) Координаты точки **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** находим из пересечения прямой *Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.* и параболы **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**:

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования..

в) Координаты точки **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**находим из пересечения прямых: *Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.* и **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, тогда **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

Сведем интеграл к повторному первым способом, т.е. спроектируем область **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** на ось *Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.* , тогда двойной интеграл сведется к повторному следующим образом:

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования..

Найдем пределы интегрирования. Область **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**проецируется в отрезок **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** ,т.е. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, - это пределы интегрирования во внешнем интеграле. Через любую точку **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** проведем луч перпендикулярный оси *Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.* и одинаково направленный с осью *Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.*. При этом точками "входа" будут точки, образующие линию **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** на нижней части контура**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, а точками "выхода" точки образующие линию **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** на верхней части контура. (Уравнения линий, которые ограничивают область **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, должны быть разрешимы относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл). Значения y будет меняться от **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** до **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, т.е. **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**-это пределы интегрирования во внутреннем интеграле. Таким образом,

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования. = =**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**

Задание №4

Варианты задания №4

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

1. $y' - yctgx = sin^2x$
2. $(y' - 3y = -x^2)$
3. $y' - \frac{1}{x}y = x$
4. $xy' - 2y = x^4$
5. $y' - \frac{3y}{x} = 3x$
6. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$
7. $x^2y' + xy + 1 = 0$
8. $y' - \frac{2}{x}y = \frac{lnx}{x}$
9. $y' - ytgx = sinx$
10. $y' - \frac{1}{x}y = x$ cos x

Образец выполнения задания №4.

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.

Раскроем скобки и перепишем уравнение в виде: y'-3*xy* = -*x*.

Это - линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Решим его с помощью подстановки Бернулли: *y* = *uv*; $y' = u'v + v'u$

Подставим в исходное уравнение: $u'v + v'u$ - $3xuv = -x$

Составим систему следующим образом:

$$\begin{cases} v' - 3xv = 0 \\ u'v = -x \end{cases}$$

Первое уравнение системы - это уравнение с разделяющими переменными.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = 3xv \\ u'v = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{v} = 3xdx \\ u'v = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} lnv = \frac{3}{2}x^2 \\ u'v = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = e^{3x^2/2} \\ u' = -xe^{-3x^2/2} \end{cases} \Rightarrow$$

Подставим значение $v = e^{3x^2/2}$ во второе уравнение системы

$$\begin{cases} v = e^{3x^2/2} \\ u = -\int xe^{-3x^2/2}dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v = e^{3x^2/2} \\ u = -\frac{1}{3}\int d(e^{-3x^2/2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = e^{3x^2/2} \\ u = -\frac{1}{3}e^{-3x^2/2} + C \end{cases}$$

Полученные u и v в формулу: $y = uv$. Получим общее решение

$y = -\frac{1}{3} + Ce^{3x^2/2}$.

2) $x^2y' + 2x^3y + x^3 = 0$

Разделим уравнение на x^2.

$y' + 2xy = -x$

$u'v + v'u + x\,uv = -x$

Задание №5

Варианты задания №5

Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка

1) $y'' - \frac{y'}{x} = x^2$;

2) $y'' - y'ctgx = 2x\sin x$;

3) $2yy'' = y'^2 + 1$;

6) $y'' - 3\frac{y'}{x} = x$;

7) $y''y^3 - 1 = 0$;

8) $y'' = 2x + \sin 4x - 3$;

4) $y''tgy = 2(y')^2$;

5) $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$;

9) $y'' = y' - x^2$;

10) $y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x$.

Образец выполнения задания №5

Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

1). $y''y^3 - 1 = 0$;.

Это уравнение второго порядка явно не содержит *x*. Поэтому делаем замену:

$$y' = z(y) = z \;; \quad y'' = z'z$$

$$z'zy^3 = 1 \;\; \Rightarrow zz' = \frac{1}{y^3}$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющими переменными. Поэтому представим $z' = \frac{dz}{dy}$. Тогда

$$\frac{zdz}{dy} = \frac{1}{y^3} \quad \Rightarrow \; zdz = \frac{dy}{y^3}$$

$$\int zdz = \int \frac{1}{y^3} dy \,.$$

Вычислим интегралы с права и с лева от знака равенства.

$$\frac{z^2}{2} = \int y^{-3}dy \quad \Rightarrow \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1 \,.$$

Так как $z = y'$, то

$$\frac{y'^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1 \Rightarrow \qquad y' = \sqrt{C_1 - \frac{1}{y^2}}$$

Приведем к общему знаменателю выражение, стоящее под корнем, получим

$$y' = \frac{y}{\sqrt{C_1 \cdot y^2 - 1}}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем правую и левую части.

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{C_1 \cdot y^2 - 1}} = \int dx$$

Внесем функцию $C_1 \cdot y^2 - 1$ под знак дифференциала:

$$\int (C_1 \cdot y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} d(C_1 \cdot y^2 - 1) = \frac{2}{2C_1}\sqrt{C_1 \cdot y^2 - 1} + C_2 = \frac{1}{C_1}\sqrt{C_1 \cdot y^2 - 1} + C_2$$

2). $y'' - y'ctgx = 2x\sin x$;

Это уравнение второго порядка явно не содержит y. Поэтому делаем замену:

$$y' = z(x) = z \ ; \quad y'' = z'$$

$$z' - zctgx = 2xsinx$$

Решим его с помощью подстановки Бернулли.

$z = uv$; $z' = u'v + v'u$

Подставим в исходное уравнение.

$u'v + v'u - ctgx \cdot uv = 2xsinx$

Составим систему следующим образом:

$$\begin{cases} v' - ctgx \cdot v = 0 \\ u'v = 2xsinx \end{cases}$$

Первое уравнение системы- это уравнение с разделяющими переменными.

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = ctgx \cdot v \\ u'v = 2xsinx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{v} = ctgx \cdot dx \\ u'v = 2xsinx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} lnv = lnsinx \\ u'v = 2xsinx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = sinx \\ u' = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = sinx \\ u = x^2 + C \end{cases}$$

$z = (x^2 + C) \cdot sinx$

3). **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**.

(методом вариаций произвольных постоянных $y'' + 3y' + 2y = 0$

$k^2 + 3k + 2 = 0$

$k_1 = -2 \quad k_2 = -1$

$y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-x}$

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-x} = 0 \\ -2C_1'e^{-2x} - C_2'(e^{-x}) = \frac{1}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2'e^{x} \\ C_2'e^{-x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{e^{2x}}{e^x+1} \\ C_2' = \frac{e^x}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2'e^{x} \\ 2C_2'e^{-x} - C_2'e^{-x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx \\ C_2 = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} \end{cases} =$$

$$> \begin{cases} C_1 = -e^x + \ln(e^x+1) + C_1^* \\ C_2 = \ln(e^x+1) + C_2^* \end{cases}$$

$y = -e^{-x} + e^{-2x}(\ln(e^x+1) + C_1^*) + e^{-x}(\ln(e^x+1) + C_2^*)$

5.Перечень вопросов для подготовки к аттестации (экзамен/зачет)

Первый семестр

1.Множества. Операции над множествами.

2.Декартово произведение множеств. Покрытие множества.

3.Грани числовых множеств. Существование точной верхней и точной нижней грани.

4.Числовая прямая и множества на ней.

5.Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве.

6.Отображение множеств. Функция. Биекция.

7.Сложная функция. График функции.

8.Обратная функция. Критерий обратимости для функции.

9.Способы задания функции.

10.Чётность и нечётность функции. Периодичность функции.

11.Монотонность функции. Ограниченность функции.

12.Преобразование графика функции.

13.Основные элементарные функции и их графики.

14.Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

15.Единственность предела числовой последовательности.

16.Свойства пределов числовой последовательности выраженных равенством.

17.Свойства пределов числовой последовательности выраженных неравенством.

18.Необходимое условие существования предела числовой последовательности.

19.Число e. Натуральный логарифм.

20.Критерий сходности числовой последовательности.

21.Предел функции. Односторонние пределы. Теорема о существовании предела функции в точке.

22.Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Свойства бесконечно малых функций.
23.Связь между пределом функции в точке и бесконечно малой величиной.
24.Первый замечательный предел
25.Второй замечательный предел.
26.Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.
27.Таблица важнейших эквивалентностей.
28.Непрерывность функции в точке и на отрезке.
29.Основные теоремы о непрерывных функциях.
30.Непрерывность сложной функции. Точки разрыва функции.
31.Ограниченность непрерывной функции на отрезке. Первая теорема Вейерштрасса.
32.Достижение непрерывной функцией своих точных границ на отрезке. Вторая теорема Вейерштрасса. Понятие равномерной непрерывности функции.
33.Производная и ее геометрический смысл. Дифференцируемость функции.
34.Дифференциал, и его геометрический смысл.
35.Инвариантность формы первого дифференциала.
36.Дифференцирование параметрически заданной функции.
37.Правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций.
38.Таблица производных элементарных функций.
39.Дифференцирование неявных функций.
40.Логарифмическое дифференцирование.
41.Производные и дифференциалы высших порядков.
42.Теорема Ферма о дифференцируемых функциях.
43.Теорема Роля о дифференцируемых функциях.
44.Теорема Лагранжа о дифференцируемых функциях.
45.Теорема Коши и правило Лопиталя о вычислении пределов.
46.Формула Тейлора с остаточным членом в

форме Пеано и Лагранжа.
47.Представление основных элементарных функций по формуле Тейлора и Маклорена.
48.Промежутки возрастания и убывания функции. Необходимое условие экстремум функции.
49.Достаточное условие существования экстремума функции. Правило исследования функции на экстремум.
50.Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке и их нахождение.
51.Выпуклость вверх и вниз графика функции. Точки перегиба. Достаточное условие точки перегиба.
52.Асимптоты графика функции.
53.Общая схема исследования и построения графика функции.
54.Разложение многочлена на линейные и квадратичные многочлены.
55.Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей. Метод неопределённых коэффициентов.
56.Первообразная функция и неопределённый интеграл.
57.Свойства неопределённого интеграла.
58.Таблица основных неопределённых интегралов.
59.Непосредственное интегрирование и метод замены переменных при вычислении неопределённого интеграла.
60.Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
61.Интегрирование рациональных функций.
62.Интегрирование тригонометрических функций.
63.Интегрирование иррациональных функций.
64.Определённый интеграл как предел интегральных сумм. Его геометрический и механический смысл.
65.Основные свойства определённого интеграла.
66.Теорема о среднем значении для определённого интеграла.
67.Определённый интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
68.Формула Ньютона-Лейбница.

69.Замена переменной и интегрирование по частям при вычислении определённого интеграла.
70.Нахождение определённых интегралов от чётных и нечётных функций, заданных на симметричных отрезках
71.Несобственные интегралы 1-ого рода и их вычисление.
72.Несобственные интегралы 2-ого рода и их вычисление
73.Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённых интегралов.
74.Нахождение объёмов тел при помощи определённых интегралов. Вычисление длины дуги плоской кривой.
75.Дифференциал дуги плоской кривой и кривизна этой кривой в точке.
76.Вычисление площади поверхности вращения с помощью определённого интеграла.
77.Числовые ряды. Необходимый признак сходимости числовых рядов.
78.Ряд геометрической прогрессии.
79.Гармонический ряд.
80.Свойства сходящихся числовых рядов.
81.Сравнение числовых рядов.
82.Предельный признак сходимости числовых рядов.
83.Достаточный признак сходимости Даламбера положительных числовых рядов.
84.Достаточный признак Коши сходимости неотрицательных числовых рядов.
85.Интегральный признак сходимости числовых рядов.
86.Знакочередующиеся числовые ряды. Теорема Лейбница.
87.Абсолютная и условная сходимость. Теорема Вейерштрасса.
88.Теорема Римана для условно сходящихся рядов.
89.Свойства сходящихся числовых рядов.
90.Умножение абсолютно сходящихся числовых рядов.
91.Функциональные ряды и область сходимости функционального ряда.
92.Степенной ряд и область его сходимости.
93.Теорема Абеля для степенных рядов.
94.Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

95.Свойства степенных рядов.
96.Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.
97.Достаточное условие разложимости функции в стенной ряд Тейлора.
98.Правило разложения функций в степенной ряд Маклорена.
99.Ряды Тейлора и Маклорена для основных элементарных функций.
100.Приложения степенных рядов для основных элементарных функций.
101.Периодические функции и их свойства.
102.Тригонометрические ряды. Ряд Фурье для функции.
103.Теорема Дирихле о разложимости функции в ряд Фурье.
104.Разложение функций в ряд Фурье с основным периодом 2π.
105.Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом $l\neq\pi$.
106.Разложение функций в неполные тригонометрические ряды.
107.Разложение в ряды Фурье непериодических функций.

Второй семестр

1.Функции многих переменных. Предел и непрерывность для функций многих переменных.
2.Частные производные для функций многих переменных и их геометрический смысл.
3.Дифференциал функции многих переменных.
4.Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции двух переменных.
5.Дифференцирование сложной функции многих переменных.
6.Инвариантность формы 1-ого дифференциала функции многих переменных.

7.Дифференцирование неявных функций многих переменных.
8.Дифференциалы высших порядков для функций многих переменных.
9.Формула Тейлора для функции многих переменных.
10.Поле скалярной величины. Линии уровня и поверхности уровня.
11.Градиент к поверхности уровня. Его геометрический смысл.
12.Касательная плоскость и нормаль к поверхности уровня.
13.Производная по направлению вектора от скалярной величины.
14.Экстремумы функции многих переменных. Необходимые условия существования экстремумов для функций многих переменных.
15.Наибольшее и наименьшее значения для функции многих переменных в замкнутой области её задания.
16.Условный экстремум для функции многих переменных.
17.Достаточные условия существования экстремума для функции двух переменных.
18.Определение двойного интеграла для функции двух переменных и его геометрический смысл.
19.Свойства двойного интеграла.
20.Вычисление двойного интеграла по прямоугольной области.
21.Вычисление двойного интеграла по криволинейной области.
22.Замена переменных при вычислении двойного интеграла.
23.Переход к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.
24.Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел с помощью двойного интеграла.
25.Определение тройного интеграла для функции трех переменных и его геометрический смысл.
26.Свойства тройного интеграла.
27.Вычисление тройного интеграла.

28.Переход к цилиндрической системе координат при вычислении тройного интеграла.
29.Переход к сферической системе координат при вычислении тройного интеграла.
30.Криволинейный интеграл первого рода.
31.Криволинейный интеграл второго рода
32.Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-ого порядка. Общее и частное решение.
33.Задача Коши и теорема Коши для дифференциального уравнения 1-ого порядка.
34.Интегральные кривые. Изоклины.
35.Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
36.Однородные дифференциальные уравнения.
37.Дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным.
38.Линейные дифференциальные уравнения 1-ого порядка. Метод Бернулли их решения.
39.Линейные дифференциальные уравнения 1-ого порядка. Метод Лагранжа их решения.
40.Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
41.Интегрирующий множитель.
42.Дифференциальные уравнения Лагранжа.
43.Дифференциальные уравнения Клеро.
44.Дифференциальные уравнения 2-ого порядка. Задача Коши и теорема Коши.
45.Дифференциальные уравнения 2-ого порядка. Общее и частное решение.
46.Определитель Вронского. Фундаментальная система решений.
47.Общее решение линейного дифференциального уравнения 2-ого порядка.
48.Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-ого порядка.
49.Метод Лагранжа нахождения общего решения дифференциального уравнения 2-ого порядка.

50.Линейные однородные дифференциального уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.
51.Линейные неоднородные дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
52.Первая краевая задача.
53.Дифференциальные уравнения высшего порядка. Общее и частное решение.
54.Метод понижения порядка для дифференциального уравнения высшего порядка.
55.Система дифференциальных уравнений и сведение её к одному дифференциального уравнению.

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1.Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. – М.: МЦНМО, 2019. – 564 с.

2. Щипачев В.С. Математический анализ. Теория и практика. М.: МЦНМО ИНФРА-2016
. http://znanium.com/bookread2.php?book=469727

3.Барбаумов В.Е., Попова Н.В Математический анализ: N-мерное пространство. Функции. Экстремумы. М.: МЦНМО ИНФРА 2017.
http://znanium.com/bookread2.php?book=544101

4.Математический анализ: [учеб. пособие] / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов; Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 330 с