ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге
Кафедра «Технический сервис и информационные технологии»

Методические указания по выполнению контрольной работы

по дисциплине

«Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

Авторы
Павлова М.Н.

Ростов-на-Дону, 2026

Аннотация

Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» предназначены для студентов заочной и очно-заочной форм обучения по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии направлений».

Автор

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Технический сервис и информационные технологии»
Павлова М.Н.

Оглавление

Введение

Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» относится к основным разделам высшей математики и ориентирована на теоретическое и практическое обеспечение высокого уровня фундаментальной подготовки по математике как основы формирования общенаучных, профессиональных, социально-личностных и общекультурных компетенций. Освоение математических дисциплин способствует развитию у студентов личностных качеств и способностей успешно работать в новых, быстро развивающихся областях науки и техники, самостоятельно непрерывно приобретать новые знания, умения и навыки.

Основная форма самостоятельной работы студентов заочной формы обучения – выполнение контрольных работ по вопросам (заданиям, темам), указанным в рабочей программе дисциплины. Теоретические вопросы курса излагаются на установочной лекции. Закрепление практического материала выполняется на практических занятиях. Значительную часть необходимой информации студенты должны приобретать в процессе самостоятельного изучения учебной и научной литературы Контрольная работа у студентов, обучающихся на заочной форме обучения является своеобразным допуском к промежуточной аттестации по дисциплине.

1 Цель выполнения контрольной работы

Цели выполнения контрольной работы для студентов заочной формы обучения ориентированы на развитие способности к анализу и умению систематизировать и обобщать численные данные, практически оценивать результаты полученных расчетов; на активизацию критического мышления и способности анализировать информацию и развитие умения применять эти положения на практике.

Для достижения цели ставятся следующие задачи:
– воспитание культуры современного математического мышления;

– изучение математического аппарата, методов математического анализа, анализа состояния научно-технической проблемы на основе подбора и изучения литературных источников;
– моделирования объектов и процессов с целью анализа и оптимизации их параметров с использованием имеющихся средств исследования;
– формирование представления о математике как о мощном средстве решения задач в практической деятельности;
– привитие навыков использования математических методов для решения прикладных задач в профессиональной сфере;
– выработка навыков и умений самостоятельного расширения и углубления математических знаний и проведение математического анализа задач в профессиональной сфере.

2 Основные этапы работы обучающегося при выполнении контрольной работы

При выполнении контрольной работы необходимо проявить навыки самостоятельной работы, умение пользоваться информационными источниками, учебной и научной литературой. Содержание работы необходимо излагать своими словами, логически последовательно представлять все результаты промежуточных и итоговых вычислений.

Выполненную контрольную работу студенты регистрируют на кафедре «Технический сервис и информационные технологии» (ауд.230) и направляют на проверку преподавателю **не позднее, чем за 3 дня до промежуточной аттестации по данной дисциплине**.

После проверки преподаватель дает рецензию о допуске к собеседованию (защите контрольной работы) или о необходимости её доработки.

Если контрольная работа не допущена к защите, то обучающийся должен по всем замечаниям преподавателя сделать необходимые исправления и дополнения (работу над ошибками), после чего он может повторно предоставить контрольную работу преподавателю.

По правильно оформленной контрольной работе *проводится устный опрос* (зачет контрольной работы), после которого студент допускается к промежуточной аттестации (экзамен) по дисциплине.

3 Требования к содержанию и оформлению контрольной работы

Контрольная работа содержит материал, охватывающий основные вопросы дисциплины. Контрольная работа представляет собой письменную работу, включающую в себя ответы на 8 практических заданий. Задания контрольных работ представлены в вариантах. Вариант выполнения каждого задания контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачетной книжки (нуль соответствует варианту №10). Каждое задание содержит образец для решения, на который необходимо ориентироваться, выполняя свое задание. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, не засчитывается.

Задание, выполненное в печатном виде, требуется помещать в рамку, задание, выполненное в тетради, не требуется помещать в рамку.

Требования по оформлению контрольной работы

Письменные работы обучающихся оформляются в соответствии с «Правилами оформления письменных работ обучающихся для технических направлений подготовки».

Основные требования по оформлению:

– текст контрольной работы должен быть представлен в печатном виде на одной стороне листа белой бумаги формата А4 или рукописном виде.

– гарнитура шрифта – Times New Roman;

– размер шрифта для основного текста – 14;

– междустрочный интервал – 1,5

– абзацный отступ –1,25 мм;

– выравнивание основного текста – по ширине страницы, соблюдая следующие размеры:

– расстояние от левого края страницы до границ текста –30 мм;

– расстояние от верхней и нижней строки текста до верхнего и нижнего краев страницы – 20 мм;

– расстояние от правого края страницы до текста – 10 мм;

– номер страницы – в нижнем колонтитуле справа.

Титульный лист включают в общую нумерацию страниц, но номер страницы на нем не проставляют. Страницы текста следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему документу, включая и приложения.

Перенос в словах допускается использовать, кроме заголовков.

Структура контрольной работы:

– титульный лист;

– содержание;

– выполнение задания, согласно варианту;

–перечень использованных информационных ресурсов.

4 Задания для контрольной работы

4.1ЗАДАНИЕ №1

Варианты задания № 1

1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $BA+2B$.

2.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить *AB*-*3B*.

3.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить *AB*-3*A*.

4.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $3B + BA$.

5.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $2A + BA$.

6.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $3B + BA$.

7.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислить $2B + 3BA$.

8.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $3B + 2AB$.

9.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $3B + BA$.

10.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Вычислить $4A + BA$.

Образец решения задания №1

Вычислить A^2 - $3AB$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Находим матрицу

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для получения элемента, стоящего в первой строке и в первом столбце, перемножим соответствующие элементы первой строки матрицы A и элементы первого столбца матрицы B (т.е. первый элемент первой строки матрицы A умножим на первый элемент первого столбца матрицы B; второй элемент первой строки матрицы A на второй элемент первого столбца матрицы B; третий элемент первой строки матрицы A умножим на третий элемент первого столбца матрицы B) и их произведения сложим. Для получения элемента, стоящего в первой строке и во втором столбце, перемножим соответствующие элементы первой строки матрицы A и элементы второго столбца матрицы B и их произведения сложим и т. д. То есть для получения элемента, стоящего в i-ой строке и в j-ом столбце, перемножим соответствующие элементы j-го строки матрицы A и элементы j-го столбца матрицы B (т.е. первый элемент i-ой строки матрицы A умножим на первый элемент j-го столбца матрицы B; второй элемент i-ой строки матрицы A на второй элемент j-го столбца матрицы B; третий элемент i-ой строки матрицы A умножим на третий элемент j-го столбца матрицы B) и их произведения сложим. и т.д. В итоге получим матрицу размером 3×3:

$$A^2 =$$

$$\left(\begin{matrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ -3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) & -3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{matrix} \right.$$

$$=\begin{pmatrix} 1-2-6 & -1-3+4 & 2+8 \\ 2+6 & -2+9 & 4 \\ -3+4-12 & 3+6+8 & -6+16 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 10 \\ 8 & 7 & 4 \\ -11 & 17 & 10 \end{pmatrix}$$

Аналогично находим матрицу $A\cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 0 & 1\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot(-3) & 1\cdot 1 \\ 2\cdot 3+3\cdot(-1)+0\cdot 0 & 2\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot(-3) & 2 \\ -3\cdot 3+2\cdot(-1)+4\cdot 0 & -3\cdot 2+2\cdot 1+4\cdot(-3) & -3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$=\begin{pmatrix} 3+1+0 & 2-1-6 & 1-2+6 \\ 6-3 & 4+3 & 2+6 \\ -9-2 & -6+2-12 & -3+4+12 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ -11 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

Вычисляем затем матрицу

$$3\cdot A\cdot B=3\cdot\begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ -11 & -16 & 13 \end{pmatrix}=$$

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент этой матрицы умножить на это число)

$$=\begin{pmatrix} 12 & -15 & 15 \\ 9 & 21 & 24 \\ -33 & -48 & 39 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим, что матрица

$$A^2 - 3AB = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 10 \\ 8 & 7 & 4 \\ -11 & 17 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -15 & 15 \\ 9 & 21 & 24 \\ -33 & -48 & 39 \end{pmatrix} =$$

(***Чтобы сложить две матрицы, надо сложить их соответствующие элементы***)

$$=\begin{pmatrix} 5 & 15 & -15 \\ -1 & -14 & -20 \\ 22 & 65 & -29 \end{pmatrix}.$$

4.2ЗАДАНИЕ №2

Варианты задания №2

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса и матричным способом.

1. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 6 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -y - z = 0 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x - y - 2z = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x + 2y + 3z = 5 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 2x + 2y = 4 \\ 3x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ -x + 2y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ x + y - 2z = -2 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + z = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$

Образец решения задания №2

Решить системы линейных алгебраических уравнений матричным способом.

Запишем систему (1)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

через произведение матриц по формуле (2.3). Для этого составим матрицу, соответствующую данной системе:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ и столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Тогда система уравнений запишется в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $A \cdot X = B$. Откуда находим, что $X = A^{-1} \cdot B$. Найдем обратную матрицу A^{-1}. Для этого

1) вычислим главный определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$(C_2 := C_1 + C_2,\quad C_3 := -2 \cdot C_1 + C_3,\ \ C_4 := -2 \cdot C_1 + C_4) =$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= -\Big(3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0 +$$
$$2\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}\Big) =$$

$- (3 \cdot (3 \cdot 4 - 1 \cdot 5) + 0 + 2 \cdot (-1 \cdot 5 - 3 \cdot (-5)) = - (3 \cdot 7 + 2 \cdot 10) = -41.$

2) построим матрицу A^* элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A, вычисляемых по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

где M_{ij} – это определитель n-1– го порядка (в нашем случае 3-го), получаемый из главного определителя вычеркиванием i- ой строки и j-го столбца и называемый ***минором***; $(-1)^{i+j}$- знак перед минором: если сумма индексов $i + j$- четная, то «+», если нечетная, то «-».

Найдем эти алгебраические дополнения (определители вычисляем по правилу треугольника):

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 6 + 6 - 1 - 8 = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 + 2 + 9 - 3 + 1 - 12) = 5,$$

$$A_{13} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 + 18 + 6 + 2 + 6 = 35,$$

$$A_{14} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 1 + 12 + 4 + 2 + 3) = -22,$$

$$A_{21} = (-1)^{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 + 4 - 2 - 2 + 1 + 8) = -7,$$

$$A_{22} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 3 + 1 + 2 + 12 = 6,$$

$$A_{23} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -(8 - 6 + 1 - 2 + 4 - 6) = 1,$$

$$A_{24} = (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 – 12 – 4 + 4- 3 = -10,$$

$$A_{31} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 +1+4-4-3 = -10,$$

$$A_{32} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8 - 1 +6 - 2- 6+ 4) = -9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3-2+ 1- 12- 2 = -22,$$

$$A_{34} = (-1)^{7} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-2 - 2 - 4+ 2-8- 1) = 15,$$

$$A_{41} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 -1 – 12 +4 +3 + 2) =$$
6,

$$A_{42} = (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 – 18 + 1+6 + 6- 2 = -11,$$

$$A_{43} = (-1)^{7} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(2 - 2 + 9 - 3-12 +1) = 5 ,$$

$$_{44} = (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2- 4 +6 - 6- 8+ 1 = -9.$$

Построим матрицу из полученных алгебраических дополнений.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 35 & -22 \\ -7 & 6 & 1 & -10 \\ -10 & -9 & -22 & 15 \\ 6 & -11 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

1) Находим транспонированную матрицу $A^{*\mathrm{T}}$ к матрице A^* (т.е. меняем местами строки и столбцы: первая строка становится первым столбцом, вторая – вторым и т.д.):

$$A^{*\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 & 6 \\ 5 & 6 & -9 & -11 \\ 35 & 1 & -22 & 5 \\ -22 & -10 & 15 & -9 \end{pmatrix}.$$

2) Получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\Delta} = -\frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 & 6 \\ 5 & 6 & -9 & -11 \\ 35 & 1 & -22 & 5 \\ -22 & -10 & 15 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/41 & 7/41 & 10/41 & -6/41 \\ -5/41 & -6/41 & 9/41 & 11/41 \\ -35/41 & -1/41 & 22/41 & -5/41 \\ 22/41 & 10/41 & -15/41 & 9/41 \end{pmatrix}$$

Тогда $X=-\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}1&-7&-10&6\\5&6&-9&-11\\35&1&-22&5\\-22&-10&15&-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\4\\1\end{pmatrix}$ =

$$=-\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}0\cdot1-7\cdot1-10\cdot4+6\cdot1\\5\cdot0+6\cdot1-9\cdot4-11\cdot1\\35\cdot0+1\cdot1-22\cdot4+5\cdot1\\-22\cdot0-10\cdot1+15\cdot4-9\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}-7-40+6\\6-36-11\\1-88+5\\-10+60-9\end{pmatrix}==-\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}-41\\-41\\-82\\41\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\{1;1;2;\ -1\}$.

Рассмотрим *второй способ получения обратной матрицы* A^{-1}.

Используется формула вида (9.9): $(A|E)\sim(E|A^{-1})$,

где E – единичная матрица; A – заданная матрица; A^{-1}- обратная матрица. где E – единичная матрица; A – заданная матрица; A^{-1}- обратная матрица.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&1&-2&-1&1&0&0&0\\1&-1&2&3&0&1&0&0\\3&2&-1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$C_1 \leftrightarrows C_2$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$C_2 := -2 \cdot C_1 + C_2$,

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$C_3 := -3 \cdot C_1 + C_3$, $\quad C_4 := C_1 + C_4$,

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -10 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$C_4 \leftrightarrows C_2$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & -10 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -7 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$C_1 := C_2 + C_1$, $\quad C_3 := -5 \cdot C_2 + C_3$, $\qquad C_4 := -3C_2 + C_4$,

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 5 & 8 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-22} & -35 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -15 & -22 & 1 & -5 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$C_1 := 5C_3 + 22C_1$, $C_2 := 3 \cdot C_3 + 22C_2$, $C_4 :=- 15 \cdot C_3 +22 \cdot C_4$,

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 22 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 22 & 0 & 5 & 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -22 & -35 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{41} & 22 & 10 & -15 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$C_1 :=- C_4 +41C_1$, $C_2 := -5 \cdot C_4 + 41C_2$, $C_3 := 35 \cdot C_4 +41 \cdot C_3$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 902 & 0 & 0 & 0 & -22 & 154 & 220 & -132 \\ 0 & 902 & 0 & 0 & -110 & -132 & 198 & 242 \\ 0 & 0 & -902 & 0 & 770 & 22 & -484 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 22 & 10 & -15 & 9 \end{array}\right.$$

$\sim$

Разделив первую и вторую строки матрицы на 902, третью на -902.а четвертую на 41, получим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/41 & 7/41 & 10/41 & -6/41 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5/41 & -6/41 & 9/41 & 11/41 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -35/41 & -1/41 & 22/41 & -5/41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22/41 & 10/41 & -15/41 & 9/41 \end{array}\right)$$
$$= (E|A^{-1}),$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/41 & 7/41 & 10/41 & -6/41 \\ -5/41 & -6/41 & 9/41 & 11/41 \\ -35/41 & -1/41 & 22/41 & -5/41 \\ 22/41 & 10/41 & -15/41 & 9/41 \end{pmatrix}.$$

4.3.ЗАДАНИЕ №3

Варианты задания №3

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса;

1. $\begin{cases} 3x + 2y - z + t = 1 \\ x - 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y - z + 3t = 6 \\ x - 2y + z + t = 3 \\ y - 2z + t = -2 \\ 4x + 2y - 2z + 6t = 12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x + 2y + z + 2t = 7 \\ x - 2y + z + t = 0 \\ 2x - y - 2z - t = -8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x + 2y - z + t = 4 \\ x - 2y + z + 2t = 2 \\ 3x - 2y + t = 3 \\ 6x - 4y + 2t = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x + 2y + 3z + t = 3 \\ x + 3y + z - t = 7 \\ -x - 2y + t = 2 \\ 2x + 6y + 2z - 2t = 14 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - y + 2z + t = 3 \\ 2x - 2y + z + 2t = 1 \\ x - y - 2z - t = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3t = 4 \\ 2x - y + z + 2t = 0 \\ 3x + y - 2z - t = 9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 2y - 2z - 2t = 6 \\ -x - y + z + t = -2 \\ 3x - z + 2t = 2 \\ x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -4x - 2y + 4z + 6t = 10 \\ 3x - 2y + z + t = 2 \\ 3y - z - 2t = 1 \\ 2x + y - 2z - 3t = -5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 2y - z + t = 4 \\ x - 2y + 2z + t = -3 \\ -x + y - 2z - 3t = -5 \end{cases}$

Образец решения задания №2, №3

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса;

$$\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}.$$

Решение. Составим расширенную матрицу и приведем ее с помощью элементарных преобразований к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim C_2 \leftrightarrow C_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$C_2 := -2 \cdot C_1 + C_2$, $\quad C_3 := C_1 + C_3$, $\quad C_4 := -C_1 + C_4$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$C_3 := -5C_2 + C_3,$ $C_4 := -C_1 + C_4$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right)\sim$$

Разделим третью строку на 14, а четвертую на 4

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim \quad C_4 := -C_3 + C_4$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Составим по полученной матрице систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y + z - 3t = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y + t - 3t = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ либо}$$

$$\begin{cases} x - 2\cdot 2t + 2t = 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}.$$

Таким образом, имеем $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}.$

Обозначим $t = C$. Тогда система имеет множество решений:

$\{1+2C; 2C; C; C\}$. При $C = 1$ получим ФСР, т.е.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \text{ или } \overline{x} = (3,2,1,1).$$

4.4 ЗАДАНИЕ №4

Варианты задания №4

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Образец решения задания №4

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

Определение 2.11. Вектор $X \neq 0$ n-го линейного пространства (т.е. имеет n координат) удовлетворяющий равенству $AX = \lambda X$, называется ***собственным вектором***, а соответствующее ему число λ ***-собственным значением (характеристическим числом***) матрицы А.

где A – матрица размером $n \times n$, а X -вектор-столбец, имеющий n координат. Используя единичную матрицу E, соотношение $AX = \lambda X$ можно записать в виде

(*A*-*λE*)·*X* = 0 если перенести λX в левую сторону.

(*A*-*λE*)·*X* = 0 - это однородная линейная система уравнений (ОСЛУ). Она будет иметь не нулевое решение если определитель | **(*A*-*λE*)** | =0. Построим такой определитель для нашего примера

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель по правилу: ***произведение элементов, стоящих на главной диагонали минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали*** получим:

$(2-\lambda)(3-\lambda)-2=0$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$.

Находим его корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$. Найдем собственные векторы X_{λ_i} и X_{λ_2}, отвечающие соответственным этим собственным числам. Для этого рассмотрим ОСЛАУ:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2 \quad x_2 = 0 \\ \qquad x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Вычислим ОСЛАУ при $\lambda = \lambda_1 = 4$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Выразим одну из переменных через другую: $x_1 = x_2$. Полагая $x_2 = c$, получим $x_1 = c$, и потому $X_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Придавая различные значения параметру *c*, получим собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = -6$

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или, вычисляя определитель, получим: $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$, т.е. $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$.

Находим его корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$. Найдем собственные векторы X_{λ_i} и X_{λ_2}, отвечающие соответственным этим собственным числам. Для этого рассмотрим ОСЛАУ:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2\quad x_2 = 0 \\ \qquad x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Вычислим ОСЛАУ при $\lambda = \lambda_1 = 4$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Выразим одну из переменных через другую: $x_1 = x_2$.Полагая $x_2 = c$, получим $x_1 = c$, и потому

$$X_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Придавая различные значения параметру c получим собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = -6$

4.5 ЗАДАНИЯ № 5, №6 и №7

Варианты для заданий № 5, №6, №7

Даны точки A, B, C, D.

№ варианта	A	B	C	D
1	(2;-1;3)	(-1;3;2)	(0;1;-1)	(-1;-3;1)
2	(-2;-1;3)	(1;3;-2)	(3;1;-1)	(2;-3;-2)
3	(0;-1;3)	(-2;3;-1)	(0;1;-1)	(-1;-3;1)
4	(3;-2;3)	(-1;0;2)	(-3;1;-1)	(-3;-3;1)
5	(1;-1-2)	(-1;2;-2)	(2;1;-2)	(-1;-2;3)
6	(1;-1;3)	(-1;-2;2)	(1;1;-1)	(0;-3;1)
7	(2;-2;3)	(-2;3;2)	(1;1;-1)	(-1;-3;0)
8	(-2;1;-3)	(2;3;2)	(3;-1;-1)	(-1;-3;1)
9	(-1;-1;3)	(-1;3;-2)	(-3;1;-1)	(-1;-3;2)
10	(2;-1;2)	(-1;-3;2)	(2;1;-1)	(-1;-3;0)

Задание 5

Найти:

1)направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

2)проекцию вектора $\overline{AB} + 3\overline{CA}$ на вектор $\overline{CD}$, т.е. пр$_{\overline{CD}}$ $\overline{AB} + 3\overline{CA}$;

3)высоту h пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость основания ABC.

Образец выполнения задания №5

Найти:

1). направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

Найдем координаты вектора $\overline{AB}$. Для этого ***из координат конца вектора*** (т.е. координат точки B (1;3; -2)) ***вычитаем координаты начала*** (т.е. координат точки A (-2; -1;3)).

$\overline{AB}$ = (1-(- 2); 3-(-1); 2-3) = (3; 4; -1)

Обозначим первую координату вектора $\overline{AB}$ через $x_{\overline{AB}}$, вторую- через $y_{\overline{AB}=}$, третью – через $z_{\overline{AB}}$, т.е.

$\overline{\boldsymbol{AB}}=(x_{\overline{AB}}; y_{\overline{AB}}; z_{\overline{AB}})$ =**(3; 4; -1).**

Тогда направляющие косинусы вычисляются по формулам (***координата вектора делится на его длину***):

$$\cos\alpha=\frac{x_{\overline{AB}}}{\sqrt{x_{\overline{AB}}^2+y_{\overline{AB}}^2+z_{\overline{AB}}^2}};\quad \cos\beta=\frac{y_{\overline{AB}}}{\sqrt{x_{\overline{AB}}^2+y_{\overline{AB}}^2+z_{\overline{AB}}^2}};\quad \cos\gamma=\frac{z_{\overline{AB}}}{\sqrt{x_{\overline{AB}}^2+y_{\overline{AB}}^2+z_{\overline{AB}}^2}}.$$

То есть

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{26}};\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{26}};$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(-1)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{26}}.$$

2). проекцию вектора $\overline{AB}+3\overline{CA}$ на вектор $\overline{CD}$, т.е. пр$_{\overline{CD}}$ $\overline{AB}+3\overline{CA}$.

Чтобы найти проекцию вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на вектор $\overline{\mathbf{b}}$, надо скалярное произведение этих векторов разделить на длину вектора $\overline{\mathbf{b}}$.

$$\text{пр}_{\overline{CD}}\ \overline{AB}+3\overline{CA} = \frac{(\overline{AB}+3\overline{CA},\overline{CD})}{|\overline{CD}|}.$$

Найдем координаты векторов, используемых в задании.

$\overline{AB}$ = (3; 4; -1) $\overline{CA}$ = (-5; -2;4), $3\overline{CA}$ = (-15; -6; 12)

$\overline{AB}+3\overline{CA}$ =(3-15; 4- 6; -1+12) = (-7; -2; 11),

$\overline{CD}$ = (5; -4; 1).

Тогда

$$\text{пр}_{\overline{CD}}\ \overline{AB}+3\overline{CA} = \frac{(3\cdot(-1)-2\cdot(-4)+11\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+2^2}} = \frac{-3+8+22}{\sqrt{1+16+4}} = \frac{27}{\sqrt{21}}$$

2) высоту h пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D на плоскость основания ABC.

Высота h треугольной пирамиды $ABCD$ равна $V_{\Delta ABCD}$ - объем пирамиды разделить на площадь основания $S_{\Delta ABC}$ – площадь основания.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$.

Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} +$$
$$\bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14\bar{i} - 7\bar{j} - 14\bar{k}.$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, тогда площадь треугольника, лежащего в основании пирамиды, вычисляется следующим образом:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2 + (-7)^2 + (-14)^2} =$
$\frac{1}{2}\sqrt{196 + 100 + 196} = \frac{1}{2}\sqrt{492}$ ед^2.

Найдем объем пирамиды.

Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ ***объему параллелепипеда, численно совпадающим со смешанным произведением трех векторов, являющихся сторонами параллелепипеда.***

$\overline{AB} = (3;4;-1)$ $\overline{AC} = (5; 2; -4)$ $\overline{AD} = (4; -2; -5)$

$$V_{\Delta ABCD} = \frac{1}{3}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot |-30 + 10 - 64 + 8 - 24 + 100| = \frac{1}{3}\cdot 10 \text{ ед}^3$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{300} \text{ ед}^2$$

$$h = \frac{V_{\Delta ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 10}{\frac{1}{2}\sqrt{300}} = \frac{20}{3\sqrt{300}}.$$

Задание 6

Доказать, что вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ образуют базис. Найти разложение вектора $\overline{CD}$ в этом базисе.

Образец выполнения задания №6

Найдем координаты векторов.

$\overline{AB} = (3;4;-1)$ $\overline{AC} = (5; 2; -4)$ $\overline{AD} = (4; -2; -5)$

$\overline{CD} = (5; -4; 1)$.

Убедимся, что вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ образуют базис. ***Вектора образуют базис, если они линейно независимы, то есть определитель, элементами которого являются координаты векторов, не равен нулю.***

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -30 + 10 - 64 + 8 - 24 + 100 = 10 \neq 0.$$

Т.е. вектора линейно независимы, следовательно, вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ образуют базис и следовательно, вектор $\overline{CD}$ будет иметь следующее разложение:

$\overline{CD} = \alpha \cdot \overline{AB} + \beta \cdot \overline{AC} + \gamma \cdot \overline{AD}$.

Подставим вместо векторов их координаты:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Используя операции умножения вектора на число и сложение векторов, получим систему

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta + 4\gamma = 5 \\ 4\alpha + 2\beta - 2\gamma = -4 \\ -\alpha - 4\beta - 5\gamma = 2 \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -11 & 11 \\ 0 & -14 & -22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & -44 & 26 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 5\gamma = -2 \\ 7\beta + 11\gamma = -11 \\ \gamma = -26/44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 443/154 \\ \gamma = -13/22 \\ \beta = -9/14 \end{cases}$$

$\overline{CD} = 443/154 \cdot \overline{AB} - 13/33\ \overline{AC} - 9/14\ \overline{AD}$.

Задание 7

1). Составить уравнение прямой *L*, проходящих через две точки *A* и *B*

2). Написать параметрическое уравнение прямой L_1, проходящей через точку *C*, параллельно прямой *AB*;

3). Написать уравнение высоты *DH* треугольной пирамиды *ABCD*;

4). Написать уравнение медианы *AD* треугольника *ABC*;

5). Определить угол между плоскостями *ABC* и *ACD*.

Образец выполнения задания №7

– Составить уравнение прямой *L*, проходящих через две точки *A* и *B*

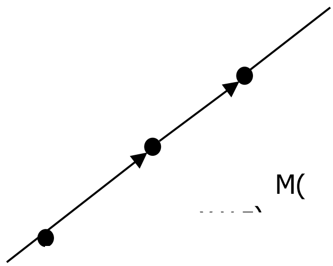
$A = (-2; -1;3)$; $B= (1;3;2)$; $C = (3;1; -1)$; $D = (2; -3; -2)$

Дано: $A(-2;-1;3)$; $B(1;3;2)$, $A \in L$, $B \in L$

Найти: L.

Решение.

1.Нарисуем чертеж к задаче.



2.На объекте исследования, т.е. прямой *AB*, выберем произвольную точку *M* с текущими координатами, т.е. $M(x; y; z)$.

3.Построим вектора: один вектор с началом в заданной точке и концом в точке *M*, т.е. $\overline{AM}$ и вектор, соединяющий две заданных точки т.е. $\overline{AB}$.

4.Найдем координаты этих векторов.

$$\overline{AM} = (x+2; y+1; z-3), \qquad \overline{AB} = (3;4;-1).$$

5.Выясним, как расположены вектора относительно друг друга. Они параллельны $\overline{AM} \parallel \overline{AB}$, следовательно, их координаты пропорциональны.

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

Таким образом, получили каноническое уравнение прямой.

<u>– Написать параметрическое уравнение</u> прямой L_1, проходящей через точку C, параллельно прямой AB;

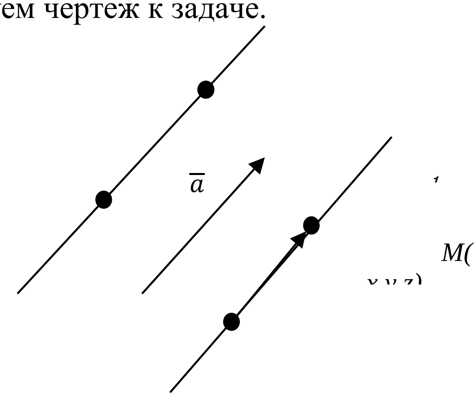
Дано: $A = (-2; -1;3)$; $B= (1;3;2)$; $C = (3;1; -1)$

L: $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$ (см. предыдущую задачу) $C \in L_1$

Найти: L_1.

Решение

1.Нарисуем чертеж к задаче.



2. На объекте исследования, т.е. прямой L_1, выберем произвольную точку M с текущими координатами $M(x; y; z)$.

3. Построим вектора: один вектор с началом в заданной точке C и концом в точке M, т.е $\overline{CM}$, лежащий на прямой L_1 и направляющий вектор (вектор параллельный прямой)

$\overline{a}$ = (3, 4, -1), найденный из канонического уравнения прямой *AB*: $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

4. Найдем координаты этих векторов.

$\overline{CM} = (x-3; y-1; z+1)$; $\overline{a}$ = (3, 4, -1).

5. Выясним, как расположены вектора относительно друг друга. Они параллельны $\overline{a} \parallel \overline{CM}$, следовательно, их координаты пропорциональны.

Таким образом, получили $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1}$ -это каноническое уравнение прямой L_1.

<u>– Написать уравнение высоты *DH*</u> треугольной пирамиды *ABCD*;

Дано: *A* (2; -2;3); *B* (-2;3;2); *C* (1;1;-1); *D* (-1;-3;0)

DH ⊥ *AB C*

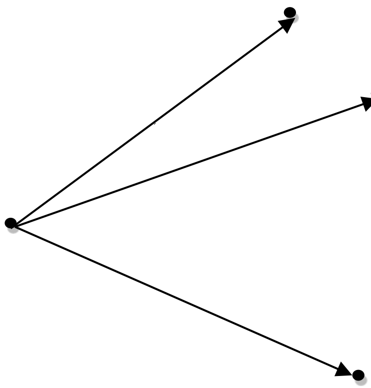
Найти ***DH***

Решение

Будем решать задачу в два этапа.

1) *Найдем уравнение плоскости, проходящей чрез точки A, B и C.*

1.Нарисуем чертеж.



2. На объекте исследования, т.е плоскости P, выберем произвольную точку M с текущими координатами $M(x; y; z)$.

3. Построим вектора: один вектор с началом в заданной точке A и концом в точке M, т.е $\overline{AM}$, второй вектор, соединяющий две заданных точки $\overline{AB}$ и третий вектор, соединяющий две заданных точки $\overline{AC}$.

4. Найдем координаты этих векторов.

$\overline{AB}$ = (-4;5;-1) $\overline{AC}$ = (-1; 3;-4) $\overline{AM} = (x-2; y+2; z-3)$

5. Выясним, как расположены вектора относительно друг друга. Эти вектора лежат в одной плоскости, следовательно, их смешанное произведение равно нулю т.е.

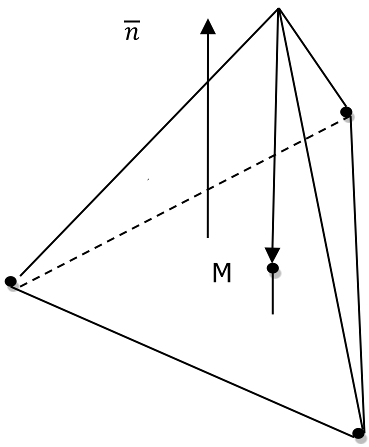
$$\overline{AM}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -17(x-2) - 15(y+2) - 7(z-3) = 0$$

Раскроем скобки.

$-17x - 15y - 7z + 25 = 0$ –это уравнение плоскости ABC.

2) *Найдем уравнение высоты* ***DH***.

1.Нарисуем чертеж.



2. На объекте исследования, т.е. прямой ***DH***, выберем произвольную точку *M* с текущими координатами *M* $(x; y; z)$.
3. Построим вектора: один вектор с началом в заданной точке ***D*** и концом в точке *M* , т.е. $\overline{AM}$ и другой вектор-вектор нормали (вектор перпендикулярный плоскости) $\overline{n}$.
4. Найдем координаты этих векторов.

Из уравнения плоскости -17*x* - 15*y* - 7*z* + 25= 0 найдем координаты вектора нормали к плоскости (это коэффициенты при неизвестных) $\overline{n}$ =(-17; -15; -7); $\overline{CM} = (x - 1; y - 1; z + 1)$
5. Выясним, как расположены вектора относительно друг друга. Вектора $\overline{n}$ и $\overline{CM} = (x - 1; y - 1; z + 1)$ параллельны, следовательно, их координаты пропорциональны:

$\frac{x-1}{-17}=\frac{y-1}{-15}=\frac{z+1}{-7}$ -это и есть искомое уравнение высоты ***DH***.

4) написать уравнение медианы *AD* треугольника *ABC*;

Дано:

A (2; -2;3); *B* (-2;3;2); *C* (1;1;-1); *D* (-1;-3;0)

$D_1 \in BC$; $|BD_1| = |D_1C|$

Найти AD_1.

Решение

Координаты точки D_1 находим как половина суммы координат точек *C* и *B*.

$$D_1 = \left(\frac{1+(-2)}{2};\ \frac{3+1}{2};\frac{2+(-1)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2};2;\ \frac{1}{2}\right)$$

Строим каноническое уравнение прямой аналогично задания 1)

$$AD_1: \frac{x+0{,}5}{2-0{,}5}=\frac{y-2}{-2-2}=\frac{z-0{,}5}{3-0{,}5} \Rightarrow \frac{x+0{,}5}{1{,}5}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-0{,}5}{2{,}5}$$

3). определить угол между плоскостями *ABC* и *ACD*;

4). Дано:

A (2; -2; 3); *B* (-2; 3; 2); *C* (1;1; -1); *D* (-1; -3; 0)

$-17x - 15y - 7z + 25 = 0$ –уравнение плоскости *ABC*.

Найти φ.

Решение

Найдем плоскость *ACD* (аналогично нахождению плоскости *ABC*)

Три вектора $\overline{AD}$ = (-3;-1;-3) $\overline{AC}$ = (-1; 3; -4) $\overline{AM} = (x-2; y+2; z-3)$

Лежат в одной плоскости, следовательно, их смешанное произведение равно нулю т.е.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (x-2)\cdot 13 - 9(y+2) + (z-3)(-10) = 0 \Rightarrow$$

$13x - 9y - 10z - 14 = 0$ –это уравнение плоскости *ACD*.

Угол между двумя плоскостями то же самое, что угол между их векторами нормали.
Вектор нормали плоскости *ABC* $\overline{n}_1 = (-17; -15; -7)$, а вектор нормали плоскости *ACD* $\overline{n}_2 = (13; -9; -10)$

$$\cos\widehat{\varphi} = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{-17\cdot 13 - 15\cdot(-9) - 10\cdot(-7)}{\sqrt{(-17)^2+(-15)^2+(-7)^2}\sqrt{13^2+(-9)^2+(-10)^2}} = \frac{-221+135+70}{\sqrt{563\cdot 350}} = \frac{-16}{\sqrt{563\cdot 350}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-16}{\sqrt{563\cdot 350}}\right)$$

4.6 ЗАДАНИЕ № 8

Варианты задания №8

1. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

2. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$

3. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$

4. $x^2 - 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

5. $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

6. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

7. $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 29 = 0$

8. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

9. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

10. $x^2 - 3y^2 - 8x + 16y - 11 = 0$

Образец решения задания 8.

Определить тип кривой второго порядка; найти координаты центра; полуоси.

$x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 29 = 0$/

Сгруппируем слагаемые, содержащие x и слагаемые, содержащие y.

$(x^2 - 6x) -4(y^2 + 4y) -29 = 0$

Выделим полный квадрат относительно x и y.

$(x^2 - 6x +9 - 9) -4(y^2 + 4y +4- 4) -29 = 0.$

Свернем квадрат разности относительно x и квадрат суммы относительно y.

$(x - 3)^2 -4(y+2)^2 +16 -9 -29 =0$

$(x - 3)^2 -4(y+2)^2 = 22.$

Разделим правую и левую части уравнения на 22.

$$\frac{(x-3)^2}{22} - \frac{4(y+2)^2}{22} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{22} + \frac{(y+2)^2}{5{,}5} = 1.$$

Это уравнение эллипса, центр которого имеет координаты (3;-2), большая полуось равна $\sqrt{22}$, малая $\sqrt{5{,}5}$.

5.ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1.Множества. Операции над множествами.
2.Декартово произведение множеств. Покрытие множества.
3.Символы математической логики.
4.Множество Р вещественных чисел. Свойство плотности множества Р
5.Теорема Архимеда и следствие из неё.
6.Теорема о приближении иррациональных чисел рациональными числами.
7.Свойства действительных чисел.
8.Грани числовых множеств. Существование точной верхней и точной нижней грани.
9.Числовая прямая и множества на ней.
10.Абсолютная величина действительного числа и его свойств.
11.Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве.
12.Полярная система координат на плоскости и её связь с декартовой системой.
13.Сферические и цилиндрические координаты точки в пространстве E^3.
14.Преобразование координат на плоскости.
15.Понятие матрицы и виды матриц.
16.Линейные операции над матрицами и их свойства.
17.Транспонирование матриц.
18.Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к каноническому виду.
19.Произведение матриц. Обратная матрица.
20.Определители и их свойства. Вычисление определителей второго и третьего порядка.
21.Разложение определителя по элементам строки или столбца. Правило Лапласа.
22.Присоединённая матрица и условие существования обратной матрицы А-1. Свойства матрицы.
23.Ранг матрицы и его свойства.
24.Общий вид системы линейных алгебраических

уравнений(СЛАУ). Решение СЛАУ.
25.Теоремы о существовании и единственности решения СЛАУ. Правила решения СЛАУ.
26.Метод обратной матрицы решения СЛАУ. Правило Крамера.
27.Метод Гаусса решения СЛАУ.
28.Однородные СЛАУ и их решения.
29.Собственные числа и собственные векторы матрицы. Характеристическая матрица и характеристический многочлен.
30.Векторы, модуль вектора. Свободные векторы.
31.Линейные операции над векторами и их свойства.
32.Линейно зависимые и независимые векторы.
33.Базис векторов. Координаты вектора в базисе.
34.Условие коллениарности двух векторов.
35.Скалярное произведение двух векторов и его свойства. Ортогональность векторов.
36.Прямоугольная декартова система координат $\left\{O\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3\right\}$ в E^3 .
37.Угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского.
38.Векторное произведение двух векторов и его свойства.
39.Смешанное произведение трёх векторов и его свойства. Объём пирамиды.
40.Радиус-вектор точки. Координаты вектора.
41.Расстояние между двумя точками.
42.Понятие n-мерного вектора и векторного пространства.
43.Линейное пространство
44.Норма вектора
45.Нормированное пространство
46.Комплексные числа и действия с ними. Модуль и аргумент комплексного числа.
47.Тригонометрическая форма комплексного числа.
48. Формула Эйлера.
49.Показательная форма комплексного числа.
50.Формула Муавра.
51.Корни из комплексных чисел.

52.Теорема Безу.
53.Основная теорема алгебры.
54.Деление отрезка в данном отношении.
55.Уравнение линии на плоскости E^2. Линии первого порядка. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
56.Общее уравнение прямой на плоскости.
57.Уравнение прямой в E^2, проходящей через точку перпендикулярно вектору.
58.Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в E^2 в отрезках на осях координат.
59.Нормальное уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.
60.Параметрические уравнения прямой. Угол между прямыми в E^2.
61.Окружность и эллипс. Уравнение эллипса. Эксцентриситет эллипса.
62.Гипербола и её уравнение.
63.Парабола и её уравнение.
64.Общее уравнение кривой второго порядка и его приведение к каноническому виду.
65.Уравнение поверхностей и линий в пространстве E^3. Уравнение плоскости в E^3.
66.Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
67.Уравнение плоскости в отрезках на осях координат.
68.Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
69.Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
70.Параметрические уравнения прямой в E^3 .
71.Каноническое уравнение прямой в E^3 .
72.Уравнение прямой E^3, проходящей через две данные точки.
73.Общее уравнение прямой в E^3. Угол между двумя прямыми в E^3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

74. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Точка пересечения прямой и плоскости.
75. Поверхности второго порядка в E^3. Цилиндрические поверхности.
76. Конические поверхности и поверхности вращения.
77. Сфера и эллипсоид.
78. Однополостный гиперболоид.
79. Двуполостный гиперболоид.
80. Эллиптический и гиперболический параболоиды.

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Умнов А.Е., Умнов Е.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие – М.: МФТИ 2025. – 460 с.

2.Бортаковский А.С., Пантелеев А.В, Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум М.: НИЦ ИНФРА-М. 2015 Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=544101

3. Шершнев В.Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии М.: НИЦ ИНФРА-М. 2017 Режим доступа http://znanium.com/bookread2.php?book=558491