ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге
Кафедра «Технический сервис и информационные технологии»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Теория игр»

Авторы
Павлова М.Н.,
Никитченко Т.А.

Ростов-на-Дону, 2026

Аннотация

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Теория игр» предназначено для студентов очной и очно-заочной форм обучения по направлениям подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии направлений», 38.03.01 «Экономика».

Авторы

канд. физ.–мат. наук, доцент кафедры «Технический сервис и информационные технологии»
Павлова М.Н.

канд. тех. наук, доцент кафедры «Технический сервис и информационные технологии»
Никитченко Т.А.

Оглавление

Введение

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория игр», обязательной для ряда экономических и технических направлений подготовки бакалавров и специалистов ДГТУ.

Цель работы ориентирована на формирование у обучающихся знаний, первоначальных умений и навыков к теоретической и практической деятельности по применению теоретико-игровых моделей при принятии управленческих решений.

Основные задачи дисциплины направлены на:

– формирование системы основных понятий, используемых для описания важнейших игровых моделей и методов, и раскрытие взаимосвязи этих понятий;

– освоение основных приемов решения задач по разделам дисциплины;

– ознакомление обучающихся с методами математического исследования прикладных вопросов;

– выработка устойчивого интереса к теоретическим и практическим вопросам применения теории игр в моделировании принятия управленческих решений;

– развитие логико-математического и теоретико-игрового мышления, навыков математического исследования явлений и процессов, связанных с профессиональной деятельностью;

– приобретение первоначальных умений и навыков по теоретико-игровому моделированию в области менеджмента;

– формирование навыков самостоятельного изучения специальной литературы;

– формирование навыков самостоятельной работы, организации исследовательской работы.

Для успешного освоения дисциплины обучающиеся должны иметь базовую подготовку по дисциплине «Математика», «Методы оптимальных решений»

1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Одна из задач теории оптимальных решений – принятие решения в условиях неопределённости. Для обоснования решений разработаны специальные математические методы, которые рассматриваются в теории игр. Теория игр принадлежит к наиболее молодым математическим дисциплинам.

В 1927 г. французский математик Э. Борель сформулировал «фундаментальную теорему теории игр» – теорему существования оптимальных стратегий, которую в 1928 г. доказал Дж. фон Нейман. А в 1944 г. появилась капитальная монография по теории игр Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономического поведения». В дальнейшем теория игр превратилась в самостоятельное математическое направление, имеющее практическое применение.

Теория игр – это теория математических моделей конфликтных ситуаций, интересы участников которых различны, причём они достигают своей цели различными путями. Теория игр изучает математические модели, так называемых, конфликтных ситуаций (т.е. ситуаций, при которых интересы участников либо противоположны и тогда эти модели называются «антагонистическими» играми, либо не совпадают, хотя и не противоположны, и тогда речь идет об «играх с непротивоположными интересами»). Основоположники теории Нейман и Моргенштерн попытались математически описать характерные для экономики явления конкуренции как некую «игру».

В наиболее простом случае речь идет о противоборстве только двух противников, например, двух конкурентов, борющихся за рынок сбыта. В более сложных случаях в игре участвуют многие, причём они могут вступать между собой в постоянные или временные коалиции, союзы. Игра двух лиц называется *парной,* когда в ней участвуют n игроков - это «игра n лиц»; в случае образования коалиций игра называется «коалиционной». Необходимость анализировать такие конфликтные ситуации, в свою очередь, привела к возникновению теорию игр, задачей которой является выработка рекомендаций по рациональному образу действия участников конфликта.

Чтобы исключить трудности, возникающие при анализе практических конфликтных ситуаций в результате наличия многих несущественных факторов, строится упрощенная модель ситуации. Такая модель и называется *игрой.* Конфликтная ситуация в игровой модели развивается по определённым правилам. Естественной базой для анализа конфликтных ситуаций служат широко распространенные игры – шахматы, шашки, карточные игры. Поэтому теории игр свойственна следующая терминология: «игроки» (стороны, участвующие в конфликте), «выигрыш» (исход конфликта) и т.д.

Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения (т.е. выбирает *стратегию* действий), которые, как он полагает, обеспечивают ему наибольший выигрыш или наименьший проигрыш, причём этому участнику игры ясно, что результат зависит не только от него, но и от действия партнера (или партнеров), иными словами, он принимает решения в условиях неопределённости.

Неопределённость результата игры вызывается различными причинами, которые можно разбить на три группы, соответственно и классифицируются игры:

1. Особенности правил игры вызывают такое разнообразие вариантов в её развитии, что предсказать результат игры заранее невозможно. Источники неопределённости

такого вида называются *комбинаторными*, а соответствующие игры – *комбинаторными*. Примером может служить шахматная игра. Однако комбинаторная сложность игр носит исторически преходящий характер благодаря использованию соответствующего математического аппарата и вычислительной техники. Например, компьютер в шахматы может уже играть в ранге гроссмейстера, а когда-то только на уровне мастера. Для целого ряда комбинаторных игр найдены выигрышные комбинации путём решения логических задач не слишком большого объёма.

2. Другим источником неопределённости является влияние случайных факторов. Игры, в которых исход оказывается неопределённым исключительно в результате случайных причин, называются *азартными* (игры в кости; игра, состоящая в отгадывании, какой стороной упадет монета; рулетка).

3. Третий источник неопределённости состоит в отсутствии информации о действиях противника, о его стратегии. Игры такого рода называются *стратегическими*.

Как было отмечено, такие игры могут быть и *парные,* и *множественные*. Поскольку наиболее значимы для практического применения парные игры, то следует более детально рассмотреть только их.

Участников игры обозначим через A и B. При этом под *игрой* условимся понимать некоторую последовательность действий (*ходов*) игроков A и B, которая осуществляется в соответствии с чётко сформулированными правилами. *Правила* определяют возможные варианты действий игроков, объём информации каждой стороны о действиях другой, результат игры, к которому приводит соответствующая последовательность ходов. В большинстве игр предполагается, что интересы участников поддаются количественному описанию, т.е. результат игры определяется некоторым числом.

Ходом в теории игр называется выбор одного из предположенных правилами игры действий и его осуществление.

Стратегией игрока называется план, по которому он совершает выбор хода в любой возможной ситуации и при любой возможной фактической информации. Естественно, что игрок принимает решение по ходу игры. Однако теоретически можно предположить, что все эти решения приняты игроком заранее. Тогда совокупность этих решений составляет его стратегию. В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на *конечные* и *бесконечные*. Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальной стратегии.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш.

Простейший вид стратегической игры – игра двух лиц с нулевой суммой (сумма выигрышей и проигрышей равна нулю), т.е. один игрок выигрывает столько, сколько проигрывает другой. Игра состоит из двух ходов:

– игрок A выбирает одну из своих возможных стратегий A_i $(i=1,\dots,m)$,

– игрок B выбирает стратегию B_j $(j=1,\dots,n)$.

При этом каждый выбор производится при полном незнании выбора другого игрока. Лучше всего игру продемонстрировать на примере.

Исходные данные (табл. 1) игры задаются в виде матрицы выигрышей (или платёжной матрицы), все элементы которой положительные. (*Любая матрица выигрышей, содержащая отрицательные элементы, может быть преобразована в матрицу с положительными элементами, если* *все её элементы увеличить на соответствующее положительное число).*

Таблица 1 – Платежная матрица

A_i	B_j				Наименьший выигрыш A $\min_j c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	35	35	3	10	3
A_2	24	1	6	90	1
A_3	40	60	10	15	10
Наибольший проигрыш B $\max_i c_{ij}$	40	60	10	90	$\max_i \min_j c_{ij} = =10$

В этой задаче сторона A имеет три возможные стратегии: A_1, A_2, A_3, сторона B - четыре возможные стратегии: B_1, B_2, B_3, B_4. Элемент c_{ij} матрицы выигрышей - выигрыш игрока A, если он выбрал стратегию A_i, а игрок B выбрал стратегию B_j. Строки матрицы соответствуют стратегиям A_i, столбцы – стратегиям B_j. Элементы матрицы выигрышей могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Эти элементы определяют суммы, которые сторона B обязана уплатить стороне A в заранее определённой ситуации (A_iB_j) (это в том случае, когда все элементы платёжной матрицы больше 0).

Если элемент матрицы отрицателен, то сторона A уплачивает стороне B сумму, равную абсолютному значению элемента. Если элемент равен нулю, то никакой выплаты не происходит. Требуется определить оптимальные стратегии, максимизирующие средний выигрыш правой стороны.

Пусть игрок A выбирает некоторую стратегию A_i; тогда в наихудшем случае (например, если выбор станет известен игроку B) он получит выигрыш, равный $\min_j c_{ij}$.

Предвидя такую возможность, игрок A должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш a. Принято говорить, что сторона A руководствуется принципом максиминного выигрыша $a = \max_i \min_j c_{ij}$.

То есть, сторона A выбирает стратегию A_3, которая гарантирует ей наибольший (10) из трёх возможных наименьших выигрышей (3, 1, 10).

Определяемая таким образом величина a называется *нижней ценой игры, максиминным выигрышем*, или сокращённо *максимином*. Стратегия A_{i_0}, обеспечивающая получение a, называется *максиминной*.

Если рассуждать аналогично, сторона B выберет стратегию B_3, которая гарантирует ей наименьший (10) из четырёх возможных наибольших проигрышей (40, 60, 10, 90).

Принято говорить, что сторона B руководствуется принципом минимаксного проигрыша: $b = \min_j \max_i c_{ij}$.

Величина b называется *верхней ценой игры*, или *минимаксом*. Соответствующая проигрышу b стратегия b_{j_0} - *минимаксной*.

Принцип, который определяет выбор сторонами стратегий, соответствующих максиминному выигрышу или минимаксному проигрышу, часто называют принципом минимакса или принципом осторожности.

Если стороны A и B будут использовать принцип минимакса, то выигрыш стороны A составит c_{33} =10. В нашем случае нижняя цена игры a равна верхней цене игры b. В этом случае игра называется вполне определённой, а выигрыш $a=b$ называется значением игры и равен элементу матрицы $c_{i_0 j_0}$.

Вполне определённые игры иногда называют *играми с седловой точкой*, т.к. элемент $c_{i_0 j_0}$ в матрице такой игры, являющийся одновременно минимальным в строке i_0 и максимальным в столбце j_0, и называется *седловой точкой* платёжной матрицы. Отклонение от неё любой из сторон приводит к уменьшению выигрыша для игрока A соответственно, увеличению проигрыша для игрока B. Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков, их совокупность - это решение игры, которая обладает следующими свойствами: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого отклонение от его оптимальной стратегии не может быть выгодно. В общем же случае фактический выигрыш игрока A при различных действиях партнеров ограничен нижней и верхней ценой игры $a \leq v \leq b$.

Итак, если платёжная матрица содержит седловую точку, то решение игры известно: каждый из игроков применяет свою оптимальную стратегию. Возникает вопрос нахождения решения для игр, матрицы которых не содержит седловой точки. В таких играх $a < b$. Применение минимаксных (максиминных) стратегий для каждого из игроков обеспечивает выигрыш, не меньший a, и проигрыш, не превышающий b. Для каждого игрока естествен вопрос увеличения выигрыша (уменьшения проигрыша). Решение состоит в том, что игроки применяют не одну, а несколько стратегий. Выбор стратегий осуществляется случайным образом.

Пример. Дана платежная матрица игры двух лиц А. А =

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 12 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальные стратегии для каждого из игроков и цену игры: $\min_j \max_i a_{ij}$.

Решение. Составим таблицу

В строке, соответствующей A_1, (т.е. из чисел 5, 3, 2, 4) находим минимальный элемент. Это число 2, записанное в последнем столбце. Аналогично находим минимальные значения для других строк.

В столбце, соответствующей B_1, (т.е. из чисел 5, 7, 5, 10) находим максимальный элемент. Это число 10, записанное в последней строке. Аналогично находим максимальные значения для других столбцов.

Из чисел последнего столбца максимальный элемент равен 6 $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij}) = 6; \quad i = \overline{1,4}$ - стратегия первого игрока (строки).

A_i	B_j	Наименьший

					выигрыш A $\min\limits_j c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	2	4	2
A_2	7	9	12	6	6
A_3	5	4	2	1	2
A_4	10	8	11	3	3
Наибольший проиг-рыш B $\max\limits_i c_{ij}$	10	9	12	6	$\max\limits_i \min\limits_j c_{ij} = 6$

Из чисел последнего столбца максимальный элемент равен 6 $\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j a_{ij}) = 6; \quad i = \overline{1,4}$ - стратегия первого игрока (строки).

Из чисел последней строки минимальный элемент равен 6

$\beta = \min\limits_j(\max\limits_i a_{ij}) = 6; \quad j = \overline{1,4}$ - стратегия второго игрока (столбцы).

$\alpha = \beta = 6$ - цена игры.

Таким образом, игра имеет седловую точку. Стратегия j = 4 – оптимальная для второго игрока, стратегия i =2 - для первого. Имеем игру с чистыми стратегиями.

Практические задания к теме «Основные элементы теоретико-игровых моделей».

1. Подготовить ответы на следующие вопросы:

1.1 Формальное определение конфликта.

1.2. Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономическом явлении.

1.3. Этапы теоретико-игрового моделирования.

1.4. Классификация теоретико-игровых моделей.

1.5. Основные элементы теоретико-игровых моделей.

1.6. Основные теоретико-игровые модели.

1.7. Определение бескоалиционной игры.

1.8. Понятие стратегии, понятие ситуации.

1.9. Игры с постоянной суммой, игры с нулевой суммой.

2.Решить задачи.

Найдите нижнюю цену игры, верхнюю цену игры, определите седловые точки, оптимальные чистые стратегии и цену игры (если они существуют):

2.1. $$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -5 & 2 \\ -8 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2.4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ 2.5. $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Составьте матрицу

2. СМЕШАННЫЕ ИГРЫ

2.1 Общие положения

Случайный выбор игроком своих стратегий называется *смешанной стратегией*. В отличие от этого, в играх с платёжной матрицей, имеющих седловую точку, говорят, что решение находится в области *чистых* стратегий. То есть, если платёжная матрица не имеет седловой точки, то оказывается, что для определения успеха необходимо выбрать стратегии A и B с определёнными вероятностями или частотами при многократной игре, и такие стратегии называются *смешанными*. Доказано, что для всякой игры с нулевой суммой всегда существуют оптимальные смешанные стратегии. Общее значение верхней и нижней цены называется *ценой* игры. Смешанная стратегия для стороны A обозначается:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix},$$

где p_1, p_2, p_3 - вероятности использования соответствующих чистых стратегий, при этом $p_1+p_2+p_3=1$.

Смешанная стратегия, которая гарантирует данной стороне наибольший возможный выигрыш (или наименьший проигрыш) независимо от действий другой стороны, называется *оптимальной*. Для определения оптимальных стратегий поведения сторон в задачах теории игр используется:

а) с полной информацией, чаще всего – аппарат линейного программирования;

б) с неполной информацией (при наличии некоторого риска) – теория игр;

в) при неопределённости – теория стратегических решений.

Таким образом, теория игр тесно связана с такими пограничными областями экономико-математического моделирования, как линейное программирование, теория стратегических решений, и задачи одной области могут переходить в другую и наоборот. Теперь, когда основные понятия теории игр ясны, рассмотрим общую постановку задачи теории игр.

Постановка задачи и выбор критерия оптимизации. Пусть в игре принимают участие две стороны: A и B. Условия игры заданы платёжной матрицей (табл. 2).

Таблица 2 – Условия игры – платёжная матрица

A	B				
	B_1	…	B_j	…	B_n
A_1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}
…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{in}
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}

Требуется определить оптимальные вероятности использования стратегий, максимизирующие средний выигрыш первой стороны.

Выбранную стороной A стратегию будем соответственно обозначать $A_1, A_2, \ldots, A_m$, аналогично стратегии стороны B – символами $B_1, B_2, \ldots, B_n$; p_i - вероятность использования стратегии i первой стороной A, q_j - вероятность использования стратегии j второй стороной B, при этом

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Построение математической модели. Средний выигрыш первой стороны A:

$$Y = c_{11} p_1 q_1 + \ldots + c_{ij} p_i q_j + \ldots + c_{mn} p_m q_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_i q_j$$

Ограничения: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$

Исследование математической модели. Для получения оптимальных вероятностей использования стратегий $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_m$ ($B_1, \ldots, B_j, \ldots B_n$) необходимо взять соответствующие частные производные от целевой функции, приравнять их нулю и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial p_i} = 0, (j = 1, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial q_j} = 0, (i = 1, \ldots, m). \end{cases}$$

2.2 Игры размерности 2×2

Дана матрица выигрышей, или матрица размерности 2×2, которая имеет вид

A_i	B_j	
	B_1	B_2
A_1	c_{11}	c_{12}
A_2	c_{21}	c_{22}

Требуется определить оптимальные смешанные стратегии:

$$S_{A_{опт.}} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_{1_{опт.}} & p_{2_{опт.}} \end{pmatrix} \quad S_{B_{опт.}} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_{1_{опт.}} & q_{2_{опт.}} \end{pmatrix}.$$

Математическая модель этой задачи:

$$V = c_{11} p_1 q_1 + c_{12} p_1 q_2 + c_{21} p_2 q_1 + c_{22} p_2 q_2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} c_{ij} p_i q_j,$$

при этом $p_1+p_2=1$, $q_1+q_2=1$.

Обозначим $p_1=p$, а $p_2=1-p$, аналогично $q_1=q$; $q_2=1-q$. Подставляя полученные выражения в математическую модель и беря соответствующие частные производные, находим:

$$p_{опт.} = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22}} \quad (*) \quad q_{опт.} = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22}} \quad (**)$$

При этом должны выполняться необходимые условия:

$$0 \le p_{опт.} \le 1;\ 0 \le q_{опт.} \le 1.$$

Значения $p_{опт.}$, $q_{опт.}$, меньшие нуля, необходимо считать равными нулю, а большие единицы - равными единице.

Подставляя оптимальные значения $p_{опт.}$, $q_{опт.}$, $1- p_{опт.}$, $1- q_{опт.}$ в целевую функцию V

$$V = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij} p_i q_j \ ,$$

получаем максимальный средний выигрыш первой стороны:

$$V_{\max} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22}} \quad (***)$$

Анализируя эту формулу, видим, что при $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=0$, т.е. $c_{11}/c_{12}=c_{21}/c_{22}$, игра становится безобидной. Существует, так называемая, *основная теорема теории игр*, состоящая в следующем: каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Применение смешанной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры: $a \le v \le b$.

Для оптимальных стратегий игроков имеет место соотношение

$$\max_i \min_j c_{ij} = \min_j \max_i c_{ij}.$$

Применение игроком A оптимальной стратегии $P^* = (p_i^*)$ должно обеспечивать ему при любых действиях игрока B выигрыш не меньше цены игры v.

Поэтому должны выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* c_{ij} \ge v,\ j = 1,\dots, n. \qquad (1)$$

Аналогично, для игрока B оптимальная стратегия игрока $Q^* = (q_j^*)$ должна обеспечивать при любых стратегиях игрока A проигрыш, не превышающей величину v, т.е. справедливо соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j^* \le v, i = 1,\dots, m. \qquad (2)$$

В дальнейшем соотношения (9.1) и (9.2) используются для решения игры. Вообще, задача решения игры, если её матрица не содержит седловой точки, тем сложнее, чем больше значения m и n.

Стратегии игроков A и B, для которых вероятности p_i и q_j отличны от нуля, называются *активными*.

Методы решения задач теории игр во многом зависят от условий задачи и от вида матрицы выигрышей первого игрока.

Как уже упоминалось, если матрица C имеет седловую точку, то решение игры сводится к нахождению седловой точки матрицы C. Оптимальные стратегии игроков определяются при этом координатами (i_0, j_0) седловой точки матрицы C, а цена игры - элементом $c_{i_0 j_0}$.

Например,

$$H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Определить стратегии поведения игрока и цену игры. Составляем модели выигрыша (проигрыша) для каждого игрока.

Игрок A: Игрок B:

$$\begin{cases} -5p_1 + 4p_2 \le v, \\ 8p_1 - 7p_2 \le v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} -5q_1 + 8q_2 \ge v, \\ 4q_1 - 7q_2 \ge v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Запишем модели в виде уравнений:

$$\begin{cases} -5p_1 + 4p_2 = v, \\ 8p_1 - 7p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} -5q_1 + 8q_2 = v, \\ 4q_1 - 7q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Начнем решение с игрока A. Исключим цену игры *v*:

$$-5p_1 + 4p_2 = 8p_1 - 7p_2,$$

$$13p_1 - 11p_2 = 0.$$

Решим совместно уравнения

$$13p_1 - 11p_2 = 0,$$

$$p_1 + p_2 = 1,$$

$$p_2 = \frac{13}{24}; \quad p_1 = \frac{11}{24}.$$

Подставим эти значения в уравнения системы, получим:

$$v = -\frac{1}{8}.$$

Для игрока B подставим *v* в одно из уравнений системы, соответствующей игроку *B* и решим совместно с условием $q_1 + q_2 = 1$.

$$\begin{cases} -5q_1+8q_2=-\dfrac{1}{8}, \\ q_1+q_2=1. \end{cases}$$

Получим: $q_1=\dfrac{5}{8}$, $q_2=\dfrac{3}{8}$.

2.3 Игры размерности 2× *n*

Пусть матрица A матричной игры имеет размерность m×2. Тогда ее можно записать в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \dots a_j \dots a_n \\ b_1 \dots b_j \dots b_n \end{pmatrix}.$$

Каждую смешанную стратегию первого игрока P можно задать следующим образом:

$P=(p,\ 1\text{-}\ p),\ \ 0\le p\le 1.$

Оптимальная стратегия первого игрока $P^*=(p^*,\ 1\text{-}\ p^*)$ определяется из условия

$$\min_{1<j<n}\left(p^*a_j+(1-p^*)b_j\right) = \max_{0<p<1}\ \min_{1<j<n}\left(pa_j+(1-p)b_j\right).$$

Значение p^* удобно определять графически. Для этого введем обозначения

$v_j\,(p)=pa_j+(1-p)b_j$, $j=1,2,\dots,n$, $v(p)=\min\limits_{1<j<n} v_j(p)$,

где $v_j\,(p), j=1,2,\dots,n$ - линейная функция; $v(p)$ – вогнутая функция;

p^* - точка достижения максимума функции $v(p)$.

В плоскости переменных (p, v) построим $v_j(p)$ - ожидаемый средний выигрыш первого игрока, применяющего первую стратегию с вероятностью p_j при условии, что второй игрок отвечает чистой стратегией

По заданной матрице составляем модели выигрыша (проигрыша) для игрока А:

$$\begin{cases} a_1p_1 + b_1p_2 = v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_jp_1 + b_jp_2 = v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_np_1 + b_np_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Обозначим: $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$. Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} (a_1 - b_1)p + b_1 = v_1(p) \\ (a_2 - b_2)p + b_2 = v_2(p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_m - b_m)p + b_m = v_m(p) \end{cases}$$

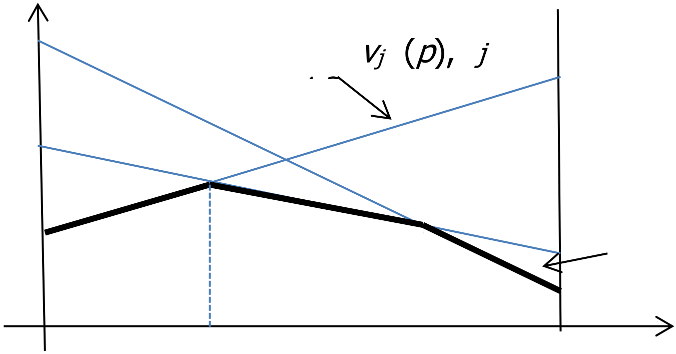
Прямую $v_1(p)$ строим следующим образом:

Задаем $p = 0$. Тогда из первого уравнения системы $v_1(0) = b_1$. Наносим точку b_1 на оси OV

Задаем $b_1 = 1$, тогда $v_1(1) = a_1$. Наносим точку a_1 на линии $p = 1$. Соединяем точки b_1 и a_1. Полученная прямая – это выигрыш игрока A , если он выбрал первую стратегию. Аналогично для $b_j = v_j(0)$ и $a_j = v_j(1)$.

В точке A пересечения прямых $v_1(p)$, $v_2(p)$, … , $v_n(p)$ гарантированный выигрыш первого игрока, изображённой жирной линией, достигает наибольшего значения.

В силу того что в точке A выигрыш первого игрока достигает наибольшего значения, то оптимальными являются стратегии, выраженные теми прямыми $v_j(p)$, $j = 1,2,\dots,n$ точкой пересечения которых является точка A. Поэтому при нахождении оптимальных стратегий для второго игрока, все остальные стратегии можно отбросить



Пример.

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

В плоскости переменных (p, v) построим $v_j(p)$ - ожидаемый средний выигрыш первого игрока, применяющего первую стратегию с вероятностью p при условии, что второй игрок отвечает чистой стратегией j (j=1, 2, 3):

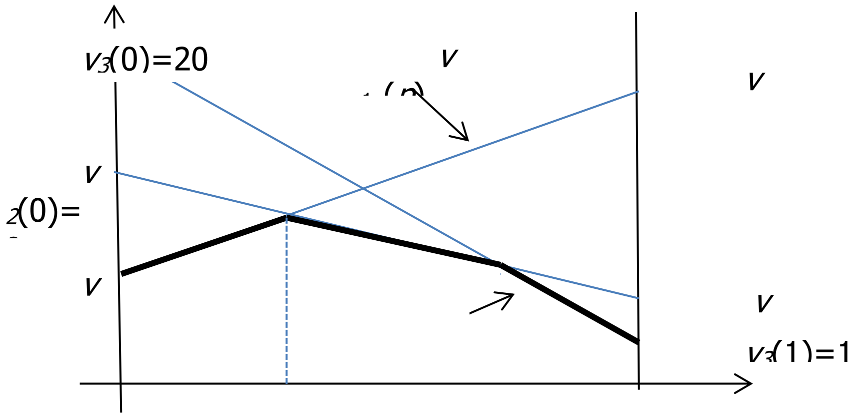
$$\begin{cases} 3p_1 + p_2 = v \\ 2p_1 + 9p_2 = v \\ p_1 + 20p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

Обозначим: $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$, получим

$v_1(p)=3p+1(1-p)=2p+1$,

$v_2(p)=2p+9(1-p)= -7p+9$, $\quad 0 < p < 1$

$v_3(p)=p+20(1-p)=-19p+20$



В точке A пересечения прямых $v_1(p)$ и $v_2(p)$ гарантированный выигрыш первого игрока, изображённой жирной линией, достигает наибольшего значения.

$$2p+1=7p+9,$$

$$9p=8,\ p=8/9.$$

$$p^*=(1/9,\ 1/9).$$

Так как точка A является точкой пересечения прямых $v_1(p)$ и $v_2(p)$, то оптимальными являются первая и вторая стратегии. Следовательно, для нахождения оптимальной стратегии второго игрока, третью стратегию отбросим.

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_2 = v, \\ q_1 + 9q_2 = v \end{cases}.$$

Обозначим: $q_1 = q$, $q_2 = 1 - q$, получим

$$v = 3q+2(1-q)=q+2,$$

$$v = q+9(1-q)= -8q+9,$$

$q+2 = -8q+9 \Rightarrow 9q = 7 \Rightarrow q = 7/9.$

Тогда $q^*=(7/9,\ 2/9,\ 0)$

$$v^*=25/9.$$

Следовательно, игрок A применяет стратегию A_1 с вероятностью 8/9, а стратегию A_2 - с вероятностью 1/9. Игрок B применяет стратегию B_1 с вероятностью 7/9 или B_2 с вероятностью 2/9. При этом его выигрыш (игрока A) в среднем составляет 25/9 единиц. Столько же составляет средний проигрыш игрока B.

2.4 Игры размерности m×2

Пусть матрица A матричной игры имеет размерность $2\times n$. Тогда ее можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \cdots & \cdots \\ a_i & b_i \\ \cdots & \cdots \\ a_m & b_m \end{pmatrix}.$$

Каждую смешанную стратегию первого игрока Q можно задать следующим образом:

$Q = (q, 1- q),\ 0 \leq q \leq 1.$

Оптимальная стратегия второго игрока: $Q^* = (q^*, 1- q^*)$

В плоскости переменных (q, v) построим $v_i(q)$ - ожидаемый средний выигрыш второго игрока, применяющего первую стратегию с вероятностью q_i (i=1, 2, …, m).

По заданной матрице составляем модели выигрыша (проигрыша) для игрока А:

$$\begin{cases} a_1 q_1 + b_1 q_2 = v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i q_1 + b_i q_2 = v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m q_1 + b_m q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Обозначим: $q_1 = q$, $q_2 = 1 - q$. Тогда система запишется в виде

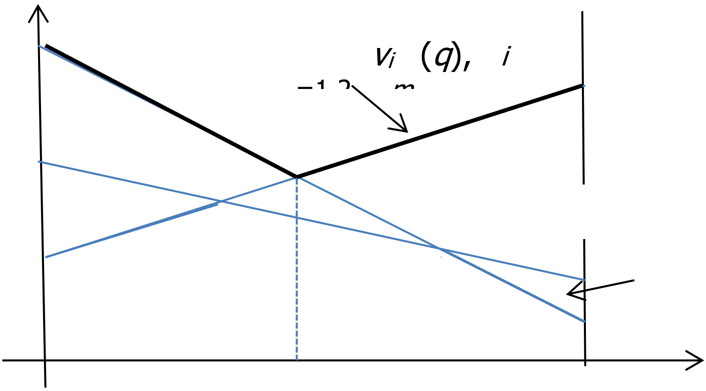
$$\begin{cases} (a_1 - b_1)q + b_1 = v_1(q) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ (a_i - b_i)q + b_i = v_i(q) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_m - b_m)q + b_m = v_m(q) \end{cases}$$

Прямую $v_1(q)$ строим следующим образом:

Задаем $q = 0$. Тогда из первого уравнения системы $v_1(0) = b_1$. Наносим точку b_1 на оси OV.

Задаем $b_1 = 1$, тогда $v_1(1) = a_1$. Наносим точку a_1 на линии $p = 1$. Соединяем точки b_1 и a_1. Полученная прямая – это выигрыш игрока A , если он выбрал первую стратегию. Аналогично для $b_i = v_i(0)$ и $a_i = v_i(1)$.

В точке A пересечения прямых $v_1(p)$, $v_2(p)$, … , $v_m(p)$ проигрыш второго игрока, изображённой жирной линией, достигает наименьшего значения.


v_i (q), i

2.5 Игры со смешанными стратегиями размерности больше двух

Можно решить задачу теории игр, сведя математическую игру к задаче линейного программирования.
В самом деле, рассмотрим игру, матрица C которой имеет размерность *mxn*:

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица не содержит седловой точки, поэтому решение игры представлено в смешанных стратегиях: $P=(p_1, p_2,\dots, p_m)$; $Q=(q_1, q_2,\dots, q_n)$. При оптимальной стратегии игрока A выполняется условие, как мы уже выяснили (9.1, 9.2):

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* c_{ij} \ge v,\ j=1,\dots,n,$$

а оптимальной стратегии игрока B удовлетворяет условие:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j^* \le v, i=1,\dots,m.$$

Таким образом, можно рассмотреть задачу отыскания оптимальной стратегии игрока A, для которой имеют место следующие ограничения:

$$\begin{cases} c_{11}p_1 + c_{21}p_2 + \dots + c_{m1}p_m \ge v, \\ c_{12}p_1 + c_{22}p_2 + \dots + c_{m2}p_m \ge v, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_{1n}p_1 + c_{2n}p_2 + \dots + c_{mn}p_m \ge v. \end{cases} \quad (3)$$

Величина v (цена игры) неизвестна, однако можно предположить, что $v>0$, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а этого всегда можно достигнуть, как упоминалось, прибавляя ко всем элементам матрицы некоторое положительное число.

Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенств на v. В результате получим:

$$\begin{cases} c_{11}t_1 + c_{21}t_2 + \ldots + c_{m1}t_m \geq 1, \\ c_{12}t_1 + c_{22}t_2 + \ldots + c_{m2}t_m \geq 1, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_{1n}t_1 + c_{2n}t_2 + \ldots + c_{mn}t_m \geq 1, \end{cases} \qquad (4)$$

где $t_i = p_i /v$, i=1, 2, …, m.

Из условия $p_1+p_2+ \ldots +p_m=1$ следует, что $t_1+t_2+ \ldots +t_m=1/v$.

Решение игры должно максимизировать значение v, значит, функция $Z = \sum_{i=1}^{m} t_i$ должна принимать минимальное значение.

Таким образом, получена задача линейного программирования: $min\, Z = \sum_{i=1}^{m} t_i$ при ограничениях (9.4) и дополнительных условиях неотрицательности переменных $t_i (i=\overline{1,m})$. Решая её, находим значение t_i и величину $1/v$, затем отыскиваем значение $p_i=vt_i$.

Для определения стратегии игрока B запишем следующие условия:

$$\begin{cases} c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \ldots + c_{1n}q_n \le v, \\ c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \ldots + c_{2n}q_n \le v, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_{m1}q_1 + c_{m2}q_2 + \ldots + c_{mn}q_n \le v. \end{cases} \qquad (5)$$

Разделив все члены неравенств на v, получим:

$$\begin{cases} c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n \le 1, \\ c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \ldots + c_{2n}u_n \le 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_{m1}u_1 + c_{m2}u_2 + \ldots + c_{mn}u_n \le 1. \end{cases} \qquad (6)$$

где $u_j=q_j/v$, $j=1, \ldots , n$. Переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$ должны быть выбраны так, чтобы выполнялись условия (9.6) и достигался максимум функции

$$W=u_1+u_2+\ldots+u_n=1/v,\ u_j\ge 0. \qquad (7)$$

Таким образом, для решения игры имеем пару двойственных симметричных задач линейного программирования. Используя свойство симметричности, можно решить одну из них, требующую меньших вычислений, а решение второй задачи найти на основании оптимального плана двойственной.

Пример. Найти решение игры, определяемой платежной матрицей A.

$$A = \left(\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \right) \middle| \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} \right)$$

Решение:

Составим двойственную пару задач линейного программирования.

Для первого игрока

$$\begin{cases} q_1 + 2q_2 \geq V \\ q_1 + 2q_3 \geq V \\ 3q_1 + 2q_2 + q_3 \geq V \end{cases} \qquad (8)$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1 \qquad (9)$$

Освобождаясь от переменной V (цена игры), разделим левую и правую часть выражений (8), (9) на V. Приняв y_j /V за новую переменную z_i, получим новую систему ограничений (10) и целевую функцию (11)

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 \geq 1 \\ z_1 + 2z_3 \geq 1 \\ 3z_1 + 2z_2 + z_3 \geq 1 \end{cases} \qquad (10)$$

$$F = \frac{1}{V} = Z_1 + Z_2 + Z_3 \to \min . \qquad (11)$$

Аналогично получим модель игры для второго игрока:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 3p_3 \leq V \\ 2p_1 + 2p_3 \leq V \\ 2p_1 + p_3 \leq V \end{cases} \qquad (12)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 . \qquad (13)$$

Приведя модель (12), (13) к форме без переменной V, получим

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + 3d_3 \leq 1 \\ 2d_1 + 2d_3 \leq 1 \\ 2d_2 + d_3 \leq 1 \end{cases} \qquad (14)$$

$$\psi = \frac{1}{V} = d_1 + d_2 + d_3 \to \max , \qquad (15)$$

где $d_i = \frac{p_i}{V}$.

Если нам необходимо определить стратегию поведения первого игрока, т.е. относительную частоту использования его стратегий ($x_1 \ldots x_i \ldots x_m$), мы будем использовать модель второго игрока, т.к. эти переменные находятся в его модели выигрыша (12), (13).

Приведем (14), (15) к канонической форме (т.е. заменим неравенства в системе ограничений на равенства, добавив слагаемое).

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + 3d_3 + d_4 = 1 \\ 2d_1 + 2d_3 + d_5 = 1 \\ 2d_2 + d_3 + d_6 = 1 \end{cases} \qquad (16)$$

$$\psi = d_1 + d_2 + d_3 \to \max . \qquad (17)$$

Дальше задача (16), (17) решается симплекс – методом (табл.1)

1.Базисное решение: Найдем ФСР системы (16), полагая свободные переменные равными нулю

$d_1 = 1/2$; $d_2 = 1/2$; $d_3 = 0$; $d_4 = 0$; $d_5 = 0$; $d_6 = 0$.

2.Если все компоненты базисного решения удовлетворяют условию неотрицательности, то такое решение называют допустимым базисным решением или угловой точкой. При этом, если в выражении целевой функции все коэффициенты неотрицательны, то целевая функции ψ достигает минимума на этом допустимом решении.

Цена игры:

$$V = \frac{1}{\psi}; \quad V = 1.$$

Исходные параметры, относительные частоты применения стратегий

$$x_1 = d_1 \cdot V = 1/2 \cdot 1 = 1/2;$$

$$x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0;$$

$$x_2 = d_2 \cdot V = 1/2 \cdot 1 = 1/2.$$

Для проведения стратегий второго игрока используется модель игры первого (8-11).

2.6 Правила нахождения оптимального решения симплекс – методом

Если в каком – либо уравнении правая часть отрицательна. То это уравнение умножается на -1.

1.Найдем базисное решение методом Гаусса. Составим таблицу так, чтобы в 1-ом столбце стояли базовые переменные: (в нашем случае - d_4, d_5, d_6 –это 2,3,4 строки таблицы) в 1-ой строке второго столбца указываются все переменные (d_1, d_2, d_3 d_4, d_5, d_6). В последней строке в первом столбце указывается целевая функция, а последняя строка заполняется коэффициентами при неизвестных c_j целевой функции. В предпоследнем столбце указываются свободные члены b_j системы, записанной в каноническом виде (17). Внутри таблица заполняется коэффициентами a_{ij} при неизвестных в уравнениях системы (17).

2.Разрешающие (главные) элементы для всех преобразований будем выбирать в тех столбцах, где коэффициенты целевой функции отрицательны (нашем случае это 1,2, и 3-ий столбцы) и так, чтобы правые части уравнений системы оставались неотрицательными (тогда найденное базисное решение будет допустимым) по формуле:

$$b_l' = \frac{b_l}{a_{lk}} \geq 0.$$

Так как $b_l \geq 0$, то первое условие для разрешающего элемента a_{lk} состоит в том, что он должен быть положительным. Т.е. $a_{lk} > 0$. Неотрицательными должны быть также правые части остальных уравнений, т.е

$$b_l' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \geq 0, \quad i \neq l,$$

где i –число строк (в нашем случае i = 1,2,3). Разделим последнее неравенство на $a_{ik} > 0$, получим $\frac{b_i}{a_{ik}} \geq \frac{b_l}{a_{lk}}$.

Следовательно $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min_i \left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}$.

Рассмотрим второй столбец. Воспользуемся формулой

$\frac{b_l}{a_{lk}} = \min_i \left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}$. т.е.

разделим свободный член 1-ой строки на элемент стоящий во втором столбце первой строки (т.е. 1/1), свободный член 2-ой строки на элемент стоящий во втором столбце второй строки (т.к. это элемент *0*, то строку оставим без изменения), свободный член 3-ей строки на элемент стоящий во втором столбце третьей строки (1/2). Выбираем из полученных результатов минимальный: $min\{1/1,\ 1/2\}$= ½. Этот результат получился при делении на элемент третьего столбца, запишем результат в последнем столбце. Тогда разрешающим элементом a_{lk}(где k – номер выбираемого столбца матрицы системы ограничений, а l- номер строки матрицы, в которой следует выбрать разрешающий элемент) будет элемент a_{32} =

2, стоящий в третьей строке втором столбце (обведем его в кружок).

Б	d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6	b_j св. чл	b_j / a_{ij}
d_4 1 d_5 d_6	1 1 3 1 0 0 2 0 2 0 1 0 0 2 1 0 0 1	1 1 1	 1/2
ψ	-1 -1 -1 0 0 0	0	

3.Разделим разрешающую строку (строку в которой стоит разрешающий элемент) на этот разрешающий элемент $b_l' = \dfrac{b_l}{a_{lk}} \geq 0.$

Б	d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6	св. чл	b_j/ a_{ij}
d_4 d_5 d_6	1 1 3 1 0 0 2 0 2 0 1 0 0 1 1/2 0 0 1/2	1 1 1/2	
ψ	-1 -1 -1 0 0 0	0	

4.Поменяем базовую переменную d_l на d_k (в нашем случае d_6 на d_2) и преобразуем таблицу по формуле

$$b_l' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \geq 0, \quad i \neq l, \text{т.е}$$

получим нули в столбце (кроме разрешающего элемента) по правилу: $C_1 := - C_3 + C_1$; $C_4 :=\ C_3 + C_4$, где C_i – номер строки, т.е. найдем свободный член по формуле:

Б	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	св. чл	b_j / a_{ij}
d_4	1	0	5/2	1	0	-1/2	1/2	1/2
d_5	2	0	2	0	1	0	1	
d_2	0	1	1/2	0	0	1/2	1/2	
ψ	-1	0	-1/2	0	0	1/2	1/2	

5.Разрешающий элемент будем выбирать в тех столбцах, где коэффициенты целевой функции отрицательны (нашем случае это 1и 3-ий столбцы). Выберем в первом столбце. Найдем минимум в столбце свободных членов по формуле $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min_i \left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \min_i \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$.Можно брать как в первой так и во второй строке. Выберем в первой для удобства счета и проделаем преобразования аналогично пункту 4). А именно: поменяем базовую переменную d_l на d_k (в нашем случае d_4 на d_1) и получим нули в столбце (кроме разрешающего элемента) по правилу: $C_2 := - 2C_1 + C_2$; $C_4 :=\ C_3 + C_4$

Б	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	св. чл	b_j / a_{ij}

d_1 5 d_2	1 0 5/2 1 0 -1/2 0 0 -3 -2 1 1 0 1 1/2 0 0 1/2	1/2 0 1/2	
ψ	0 0 2 1 0 0	1	

6.Проанализируем полученный результат. Для этого рассмотрим столбец свободных членов. Здесь $d_1 = ½$, $d_2 = ½$, $d_3 = 0$. Цена игры $\psi = 1$. Следовательно, $p_i = Vd_i$ находим $p_1 = Vd_1 = 1 \cdot ½ = 1/2$, $p_2 = Vd_2 = 1 \cdot ½ = 1/2$, $p_1 = Vd_1 = 1 \cdot 0 = 0$.

2.7 Итерационный метод

Итерационный метод применяется, когда неприменим графический метод и когда практически неприменимы алгебраический и матричный методы. Этот метод дает приближенное значение цены игры, причем истинное значение можно получить с любой нужной степенью точности. Этот метод недостаточен для нахождения оптимальных стратегий, но он позволяет отслеживать динамику пошаговой игры и определить цену игры для каждого из игроков на каждом шаге.

Рассмотрим метод Брауна приближённого решения задач теории игр, он подходит и для матриц, размерностью больших 2.

Метод Брауна представляет собой модель практического взаимного обучения игроков, при котором каждый игрок, анализируя способ поведения противника, старается ответить наилучшим способом. Этот метод относится к итерационным, т.е. получающим решение за какое-то количество шагов, причём точность вычисления зависит от числа ходов и от выбора начальной строки.

Первый игрок выбирает одну из своих стратегий. Второй игрок отвечает стратегией, которая минимизирует выигрыш первого игрока. Каждый игрок отвечает на очередной ход противника той своей стратегией, которая является оптимальной относительно всех предыдущих ходов противника.

Рассмотрим решение задачи с матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Первый игрок пусть выбирает третью стратегию $i_0=3$ (т.е. третью строку) как более предпочтительную с большим выигрышем чем 1-ая и 2-ая. Второй игрок, просматривая 3-ю строку, выбирает $c_{33}=1$ – наименьший элемент строки и отмечает его “*”. Справа от матрицы выписываем элементы 3-го столбца. Первый игрок, зная выбор второго и просматривая выделенный столбец, выбирает в нем максимальный элемент (отмеченной звездочкой) и назначает $i_1=1$ (т.е выбирает первую стратегию (элементы первой строки) и суммирует с уже выбранной стратегией (т.е. элементами третьей строки)). Второй строкой под матрицей выписываем суммарный выигрыш первого игрока за 2 хода.

Минимизируя выигрыш первого игрока за два хода, второй игрок выбирает $j_2=2$ и т.д. Частота выбора строк и столбцов определяет компоненты приближенного решения, элементы со звездочкой определяют суммарный выигрыш за n ходов.

Вычисления в итерационном методе Брауна удобно располагать, как в приведенной таблице:

$2\ \ 0\ \ 9\ \ 6$ | $9^*\ 9\ 9\ 9\ 15\ \ 21^*\ \ 23^*\ \ 23^*\ 23^*\ 23\ \ 23\ \ 23\ \ 25\ 28$

1 3 6 0 *6* 9^* 12^* 15^* 15^* *15 16 19 22* 25^* 28^* 31^* 32^* *31*

4 2 1 3 *1 3 5 7 10 13 17 19 21 23 25 27 31* 35^*

---

4 2 1^* *3* №/№ столбца *11 12 13 14*

6 2^* *10 9* строки

7 5^* *16 9*

8 8^* *22 9*

9 11 28 9^*

10 14 34 9^*

12^* *14 43 15*

14 14^* *52 21*

16 14^* *62 27*

18 14^* *70 33*

19 17^* *76 33* *11*

20 20^* *82 33* *12*

21^* *23 88 33* *13*

22^* *26 94 33* *14*

В левом верхнем углу записана матрица игры – в данном случае матрица размера *3x4*. Строки ниже матрицы содержат сложенный за n партий возможный выигрыш первого игрока, где n – количество партий и номер строки. Столбцы правее матрицы представляют собой сложенный за n партий возможный проигрыш второго игрока, причём n – количество партий и номер столбца. Пусть после n партий первый игрок обнаружил, что его противник выбрал j-ю чистую стратегию (по количеству “звёздочек” в j-м столбце под матрицей) S_j раз ($j=\overline{1,n}$). На этом основании первый игрок допускает, что его противник придерживается смешанной стратегии

$$q_n = \left(\frac{S_1}{n}, \frac{S_2}{n}, \ldots, \frac{S_n}{n} \right)$$

и выбирает в последующей партии чистую стратегию, дающую максимальный средний выигрыш q_n. Номер чистой стратегии – это номер максимальной компоненты n-го столбца.

Аналогично, второй игрок после n партий предполагает, что смешанная стратегия соперника $p_m = \left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2}{n}, \ldots, \frac{t_m}{n} \right)$,

где t_i – частота появления i-й стратегии в предыдущих партиях. В $(n+1)$-й партии второй игрок выбирает чистую стратегию, обеспечивающую ему минимальный средний проигрыш. Номер этой чистой стратегии – это номер столбца минимального элемента n-й строки.

Степень приближения к решению зависит от выбора начальной строки и от числа ходов, поэтому:

при $n=10$

$$\frac{14}{10} \le v^* \le \frac{25}{10};$$

$$P^* = (5/10; 5/10; 0);$$

$$Q^* = (1/10; 6/10; 1/10; 2/10);$$

при $n=14$

$$\frac{22}{14} \le v^* \le \frac{35}{14};$$

$$P^* = (5/14; 8/14; 1/14);$$

$$Q^* = (3/14; 8/14; 1/14; 2/14).$$

Рассмотрим пример. Пусть платежной матрицей будет:

$$H = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Предположим начинает игрок А. Из двух стратегий A_1 и A_2 он выбирает A_1 как более предпочтительную с большим, чем A_2 выигрышем (0>-3)

2	**0**	**3**	0	3*	3*	3	6*	6*	6	9*	9*	9	12*	12*	12	15*
1	**3**	**-3**	3*	0	3	6*	3	6	9*	6	9	12*	9	12	15*	12
2	0*	3														
3	3	0*														
5	3*	3														
7	3*	6														
8	6	3*														
10	6*	6														
12	6*	9														
13	9	6*														
15	9*	9														
17	9*	12														
18	12	9*														
20	12*	12														
22	12*	15														
23	15	12*														

при *n=10*

$$\frac{9}{10} \le v^* \le \frac{12}{10};$$

$$P^* = \left(\frac{6}{10}; \frac{4}{10}\right)$$

$$Q^* = \left(0; \frac{7}{10}; \frac{3}{10}\right)$$

при *n=14*

$$\frac{12}{14} \le v^* \le \frac{15}{14};$$

$$P^* = \left(\frac{9}{14}; \frac{5}{14}\right)$$

$$Q^* = \left(0; \frac{9}{14}; \frac{5}{14}\right)$$

2.8 Упрощение платёжной матрицы

Как уже упоминалось, задача решения игры, если её матрица не содержит седловой точки, тем сложней, чем больше значения m и n. Поэтому в теории матричных игр рассматриваются способы, с помощью которых решение одних игр сводится к решению других, более простых (в частности, с помощью сокращения размерности матрицы). Сократить размерность матрицы можно, исключая дублирующие и заведомо невыгодные доминирующие стратегии.

Дублирующими называются стратегии, которым соответствуют одинаковые значения элементов в матрице, т.е. матрица содержит одинаковые строки (столбцы). Если все элементы i-й строки матрицы меньше соответствующих элементов k-й строки, то i-я стратегия для игрока A называется *доминирующей*. Если же элемент r-го столбца матрицы больше соответствующих элементов j-го столбца, то для игрока B стратегия B_r – доминирующая.

Например, в матрице платежей $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ для игрока B заведомо невыгодна четвёртая стратегия, так как все значения элементов 4-го столбца c_{i4} превышают соответствующие значения первого и второго столбца. Четвёртый столбец матрицы можно исключить (игрок B никогда не воспользуется этой стратегией).

Можно сократить размер матрицы, разбив её на подматрицы, в которых суммы элементов по столбцам и строкам равны. Тогда вместо чистых стратегий в матрицу включаются смешанные. Элемент матрицы, соответствующий смешанным стратегиям, получается делением соответствующих сумм элементов на число чистых стратегий, объединяемых в смешанную. Если смешанные стратегии входят в число оптимальных, то вероятности использования входящих в них чистых стратегий равны между собой.

Рассмотрим матрицу C, разбитую на четыре подматрицы, для которых выполняется условие равенства сумм элементов по строкам и столбцам:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Объединяя стратегии A_1, A_2, и A_3, A_4 и A_5, B_1 и B_2, B_3 и B_4, приводим матрицу к виду:

$$C=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix} & \begin{array}{c}1\\0\end{array}\\ \begin{array}{cc}1&\quad 4\end{array} & \end{array}$$

Полученная матрица содержит седловую точку. Поэтому решение первоначальной игры, заданной матрицей C, таково: $P^*=(1/3;\ 1/3;\ 1/3;\ 0;\ 0)$, $Q^*=(1/2;\ 1/2;\ 0;\ 0)$. Цена игры равна единице. В результате упрощения игры решение её стало очевидным: оптимальной для игрока A является комбинация стратегий A_1, A_2 и A_3, а для игрока B комбинация стратегий B_1 и B_2. Вероятности применения стратегий A_1, A_2 и A_3 равны между собой, сумма их равна 1, поэтому $P^*=(1/3;\ 1/3;\ 1/3;\ 0;\ 0)$. Аналогично, оптимальная стратегия игрока B имеет вид $Q^*=(1/2;\ 1/2;\ 0;\ 0)$.

Таким образом, при решении игры mxn следует:

а) проверить, содержит ли матрица седловую точку;

б) если седловой точки нет, то сравнить между собой элементы строк и столбцов для исключения дублирующих и доминирующих стратегий;

в) рассмотреть возможность разбиения матрицы на подматрицы для замены некоторых групп чистых стратегий смешанными.

Практические задания к теме «Смешанные игры».

1. Подготовьте ответы на следующие вопросы:

1.1 Какие игры называются смешанными?

1.2 Дать определение оптимальной стратегии.

1.3 Какие методы позволяют определить оптимальное решение игры?

1.4 Указать условия использования смешанных стратегий

2.Задания для решения практических задач

2.1Решить графически игровые задачи:

1. $\begin{pmatrix}-5 & 8\\ 4 & 7\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}7 & 9\\ 12 & 4\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

2.2Найдите решение матричной игры итерационным методом, применив 10 итераций.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.3 Составить платежные матрицы и решить игры в задачах:

2.3.1 Каждый из двух участников игры, независимо один от другого, показывает на руке «камень», «бумагу» или «ножницы», при этом «бумага» выигрывает у «камня» одно очко, «камень выигрывает» у «ножниц» два очка, «ножницы» выигрывают у «бумаги» три очка. С какими вероятностями следует показывать каждому игроку указанные предметы, чтобы получить максимальный гарантированный выигрыш?

2.3.2 Игра заключается в том, что игрок A записывает числа 1 или 2, или 3, а игрок B, независимо от A записывает числа 1 или 2, или 3, или 4. если сумма двух чисел окажется четной, то A выигрывает эту сумму, если – нечетной, то B выигрывает сумму этих чисел. Составить платежную матрицу. Определить нижнюю и верхнюю цену игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

2.3.3 Игрок A загадывает монету достоинством либо в 10 руб., либо в 20 руб. Если B отгадывает, то и получает ее. В противном случае B платит A 15 руб. Определить оптимальный способ ведения игры каждым игроком.

2.3.4 У стороны A имеется два объекта, но надежно оборонять от атак противника она может лишь один объект (для обороны двух объектов у нее не хватает сил). Сторона *В* может в данных условиях атаковать только один из двух объектов (для атаки двух объектов не хватает сил). Если *А* будет оборонять атакуемый объект, то атака будет отбита. Ценность одного объекта в 4 раза больше другого. Найти оптимальное поведение стороны *А* в обороне и стороны *В* в нападении.

2.3.5Предприятие может выпускать три вида продукции A_1, A_2, A_3. Прибыль, получаемая предприятием, зависит от спроса на эту продукцию, который может принять одно из четырех состояний B_1, B_2, B_3, B_4. Элементы следующей матрицы характеризуют прибыль при выпуске продукции A_i и состоянии спроса B_k (табл.):

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	2	5	1
A_2	3	4	5	4
A_3	1	6	3	4

3. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

3.1Общие положения

Как мы уже говорили, в условиях полной неопределённости действует уже так называемая теория стратегических решений. В рассмотренных выше задачах теории игр предполагалось, что в них принимают участие два участника, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако во многих задачах, приводящихся к игровым, неопределённость вызвана отсутствием информации об условиях, в которых осуществляются действия.

Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности, которую принято называть природой. Такие игры называются *играми с природой*. Решения в этих играх получают с помощью теории стратегических решений. Игрок A - человек - в играх с природой старается действовать осмотрительно, используя например, минимаксную стратегию, позволяющую получить наименьший проигрыш. Второй игрок B (природа) действует совершенно случайно, возможные стратегии определяются как её состояния (например, условия погоды в данном районе, спрос на определённую продукцию, объём перевозок, некоторое сочетание производственных факторов и т.д.). В некоторых задачах для состояний природы может быть задано распределение вероятностей, в других – и оно неизвестно.

Условия игры, как и в рассмотренных выше задачах теории игр, задаются в виде матрицы:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент c_{ij} равен выигрышу игрока A, если он использует стратегию A_i, а состояние природы – B_j.

В ряде случаев при решении игр рассматривают *матрицу рисков* R. Элемент матрицы r_{ij} представляет собой разность между выигрышем, который получил бы игрок A, если бы он знал состояние природы B_j, и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i, т.е. $r_{ij}=\beta_j - c_{ij}$, где $\beta_j = \max_i c_{ij}$.

*Пример***.** Директор кафе запланировал на 8 марта расширение ассортиментного перечня напитков в меню в зависимости от погодных условий. Изучив статистику температурного режима за последние 50 лет на 8 марта, пришел к выводу, что имеются четыре состояния природы:

1) теплый женский день (температура от 5 до 15 градусов), с частотой (статистическая вероятность) 15 /50;
2) жаркий женский день (более 15 градусов), с частотой 5/50;
3) холодный женский день (от -5 до +5 градусов), с частотой 15/50;
4) морозный женский день (температура погоды ниже -5 градусов), с частотой 15/50.
Исходя из своего анализа, выбрал для себя следующие стратегии:
1) расширить ассортимент фруктовых коктейлей;
2) расширить ассортимент мороженого;
3) расширить ассортимент разных сортов чая;
4) расширить ассортимент согревающих коктейлей;
Посчитав предполагаемый дополнительный доход от продажи, директор кафе составил следующую платёжную матрицу:

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	15	20	13	11
A_2	20	50	15	5
A_3	16	9	27	45
A_4	18	8	33	66

где строки соответствуют стратегиям директора кафе (первого игрока А), а столбцы – состояниям природы (второго игрока В).

Найти решение игры, заданной матрицей, т.е. найти оптимальную стратегию из 4-х заданных стратегий первого игрока, при выборе которой кафе получит максимальный доход.

Для решения подобных задач нам помогут нижеприведенные критерии. Рассмотрим ряд критериев, используемых при решении игр с природой. Все они основаны на принципе, на основании которого неопределенные ситуации преобразуются в детерминированные и которые решаются ранее рассмотренными методами (одним из них является принцип минимакса). Однако здесь принцип минимакса (осторожности) будет чрезмерно пессимистическим – это стратегия перестраховщиков. При использовании принципа минимакса не учитывается априорная информация о состоянии природы и тем самым ограничивается тот выигрыш, который эта информация может дать.

В самом деле, два следующих критерия используются, когда вопрос распределения вероятностей состояний природы не решён:

Максиминный критерий Вальда, который совпадает с критерием выбора стратегии, позволяющим получить цену игры для двух лиц с нулевой суммой. Согласно этому критерию выбирается стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыш, не меньший, чем $\max_i \min_j c_{ij}$.

A_i	B_j				*min* выигрыш A
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	20	13	11	11
A_2	20	50	15	5	5
A_3	16	9	27	45	9
A_4	18	8	33	66	8
max					11

В отличие от них, *критерий Гурвица* учитывает, как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации. Такого рода компромиссное правило, определяющее выбор решения в условиях полной неопределённости, когда распределение вероятностей состояний природы неизвестно, заключается в том, что неразумно, приняв во внимание самый маленький выигрыш, не учитывать самый большой, для чего субъективным образом вводится некоторый коэффициент оптимизма (он выполняет роль вероятности). Этот принцип часто называется *обобщённым максимином.* Принимается решение о выборе стратегии, при которой имеет место

$$\max_i \left\{ \lambda \max_j c_{ij} + (1-\lambda) \min_j c_{ij} \right\}, \text{ где } 0 \le \lambda \le 1.$$

Значение λ выбирают на основании субъективных соображений. Чем больше желание подстраховаться в данной ситуации, тем ближе к нулю значение λ.

Применим принцип Гурвица к решению примера:

A_i	B_j				*min* выигрыш *A*	*max* выигрыш *A*	Расчётный выигрыш при	
	B_1	B_2	B_3	B_4			$\lambda=0,4$	$\lambda=0,2$
A_1	15	20	13	11	11	20	14,6	12,8
A_2	20	50	15	5	5	50	23	14
A_3	16	9	27	45	9	45	23,4	16,2
A_4	18	8	33	66	8	66	26,9	13,8
max							26,9	16,2

A_i	B_j				*min* выигрыш *A*	*max* выигрыш *A*	Расчётный выигрыш при	
	B_1	B_2	B_3	B_4			$\lambda=0,4$	$\lambda=0,2$
A_1	35	35	3	10	3	35	15,8	9,4
A_2	24	1	6	90	10	90	36,6	18,2
A_3	40	60	10	15	1	60	42	20

По принципу обобщённого максимина необходимо стороне A использовать стратегию A_3 если оптимизм мал и A_4, если рассматривать ситуацию более оптимистично.

Кроме перечисленных принципов (минимакса, обобщённого максимина и минимальных потерь), используют принцип *Байеса-Лапласа,* который отступает от условий полной неопределённости. При этом предполагается, что возможным состояниям природы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ можно приписать определённую вероятность, соответственно равную $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Этот принцип используется, если есть возможность определить вероятность возникновения отдельных состояний природы (например, статистическая обработка метеосводок). При этом в смешанных стратегиях выигрыш первого игрока равен:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}q_j,$$

где $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

По нашему примеру известны вероятности температурного режима:

$$q_1 = 15/50,\ q_2 = 5/50,\ q_3 = 15/50,\ q_4 = 15/50.$$

A_i	B_j				средний выигрыш A (математическое ожидание) $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}q_j$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	20	13	11	15·15/50+20·5/50+13·15/50+11·15/50=13,7
A_2	20	50	15	5	20·15/50+50·5/50+15·15/50+5·15/50=17
A_3	16	9	27	45	16·15/50+9·5/50+27·15/50+45·15/50=27,3
A_4	18	8	33	66	18·15/50+8·5/50+33·15/50+66·15/50=35,9
q_j	15/50	5/50	15/50	15/50	

Здесь оптимальной является четвертая стратегия, если нет – применяют *принцип равновероятности* (принцип недостаточного основания Лапласа). Он заключается в том, что всем возможным состояниям природы приписывается одинаковая вероятность, и решение игры ищется при таких условиях.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$$

A_i	B_j				критерий Вальда	принцип Байеса-Лапласа	Расчётный выигрыш принцип Гурвица	
	B_1	B_2	B_3	B_4			$\lambda=0,4$	$\lambda=0,2$
A_1	15	20	13	11	11	13,7	14,6	12,8
A_2	20	50	15	5	5	17	23	14
A_3	16	9	27	45	9	27,3	23,4	16,2
A_4	18	8	33	66	8	35,9	26,9	13,8
Оптимальный выигрыш (Соответствующая стратегия)					11 (A_1)	35,9 (A_4)	26,9 (A_4)	16,2 (A_3)

Однако во всех случаях нельзя утверждать, что принятое решение оптимальное, оптимальным оно является только относительно принятого распределения вероятностей состояний природы.

Оптимальной стратегией будет считаться та, на которую укажет большинство критериев.

Как видно из ответа, из четырех критериев 2 указывает на 4-ю стратегию. То есть, директор кафе для получения сверхдохода должен выбрать 4-ю стратегию - расширить ассортимент согревающих коктейлей.

3.2 Принятие решения в условиях неопределенного риска

В ряде случаев при решении игр рассматривают *матрицу рисков R*. Элемент матрицы r_{ij} представляет собой разность между выигрышем, который получил бы игрок A, если бы он знал состояние природы B_j, и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i, т.е. $r_{ij}=\beta_j - c_{ij}$, где $\beta_j = \max_i c_{ij}$.

Критерий минимального риска Сэвиджа, рекомендующий выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е. $\min_j \max_i r_{ij}$. Принцип Сэвиджа состоит в том, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым могут привести ошибочные решения. Его применяют особенно часто при принятии управленческих решений в каких-то ответственных случаях менеджерами.

Представляется логичным при выборе стратегии вместо двух крайних взглядов выбрать промежуточный.
Критерий Сэвиджа основаны на самой пессимистической оценке обстановки.

Если мы имеем дело с многократно повторяющимися состояниями и многократно повторяющимися решениями, то наиболее целесообразно применять принцип Байеса-Лапласа или Гурвица. В случае разового решения применяют обычный принцип минимакса или минимальных потерь (Сэвиджа).

Примеры.

1.Бурение нефтяной скважины.

Руководитель поисковой группы должен принять решение: бурить нефтяную скважину или нет. Скважина может оказаться «сухой» (С), т.е. без нефти, «маломощной» (М), т.е.

малым содержанием нефти и «богатой» (Б), т.е. с большим содержанием нефти. Стратегиями руководителя является:

x_1 – бурить, x_2 – не бурить. Таблица прибылей (в тысячи долларов) задается следующей матрицей:

$x \setminus y$	С	М	Б
x_1	-70	50	200
x_2	0	0	0

Кроме того, руководителю группы известно распределение вероятностей на множестве состояний природы, т.е. вектор y_0 = (0.5,0.3, 0.2).

Применяя критерий математического ожидания, получим:

$$M_{y_0}(x_1) = -70\cdot 0.5+ 50\cdot 0.3 + 200\cdot 0.2=20,$$

$$M_{y_0}(x_2) = 0\cdot 0.5+ 0\cdot 0.3 + 0\cdot 0.2=0,$$

Таким образом, оптимальной стратегией является x_1 – бурить. Так как решение здесь принимается только один раз и его последствия связаны с большими материальными затратами, руководитель считает целесообразным до принятия решения о бурении скважины провести эксперимент (сейсморазведку) с целью определить тип структуры грунта в данной местности. Структура грунта может быть открытой или замкнутой. Кроме того, руководитель имеет таблицу результатов подобных экспериментов, проведенных в данной местности.

Состояние скважины	Тип грунта		Всего
	Открытый	закрытый	
С	45	5	50
М	11	19	30
Б	4	16	20
Всего	60	40	100

Теперь руководитель должен принять решение:

Проводить ли эксперимент (его стоимость 10 тысяч долларов) Если проводить, то как поступать в зависимости от результатов эксперимента.

Рассмотрим схему нахождения сложного решения.

-70 50 200 0 0 0 -70 50 200 0 0 0 -70 50 200 0 0 0

Ветви дерева соответствуют логическим возможностям:

α – отказ от эксперимента,

β – проведение эксперимента;

x_1 –бурить,

x_2 –не бурить;

С, М, Б –возможные состояния природы;

откр. и закр. – возможные результаты эксперимента.

Вершины дерева можно рассматривать как позиции игры с природой. Позиции, которые делает игрок, помечены прямоугольниками, а в которых ход делает природа – кружками.

2.Для каждой ветви, являющейся ходом природы (т.е. из позиции, помеченной кружком), проставляется вероятность этого хода. При этом при отказе от эксперимента используется данное распределение вероятностей на множестве состояний природы, а при проведении эксперимента для подсчета условных вероятностей используется таблица результатов эксперимента. Следовательно, имеем:

$$P\,(\text{С}) = 0.5, \quad P\,(\text{М}) = 0.3, \quad P\,(Б) = 0.2,$$

$$P_{\text{откр.}}(\text{С}) = \frac{45}{60}, \quad P_{\text{откр.}}(\text{М}) = \frac{11}{60}, \quad P_{\text{откр.}}(\text{Б}) = \frac{4}{60},$$

$$P_{\text{закр.}}(\text{С}) = \frac{5}{40}, \quad P_{\text{закр.}}(\text{М}) = \frac{19}{40}, \quad P_{\text{закр.}}(\text{Б}) = \frac{16}{40},$$

$$P(\text{откр.}) = \frac{60}{100} = 0.6, \quad P(\text{замкн.}) = \frac{40}{100} = 0.4.$$

3.Производим оценку всех позиций дерева, спускаясь от конечных позиций к началу. Конечные позиции оцениваются согласно таблице прибылей. При переходе к позиции следующего уровня применяем «операцию усреднения» (т.е. подсчет соответствующего математического ожидания) для позиции природы и «операцию максимизации» для позиций игрока. При этом помечаем знаком ∞ тот ход, который приносит в данной позиции максимальную прибыль. Для позиции, соответствующей проведению эксперимента, вычитаем его стоимость. Имеем:

$(-70) \cdot 0.5 + 50 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0.2 = 204;$

$0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0 = 204;$

$max\ (20,0) = 20.$

$(-70) \cdot \frac{45}{60} + 50 \cdot \frac{11}{60} + 200 \cdot \frac{4}{60} = -30;$

$0 \cdot \frac{45}{60} + 0 \cdot \frac{11}{60} + \frac{4}{60} \cdot 0 = 0;$

$max\ (-30,0) = 0$

$(-70) \cdot \frac{5}{40} + 50 \cdot \frac{19}{40} + 200 \cdot \frac{16}{40} = 95;$

$0 \cdot \frac{5}{40} + 0 \cdot \frac{19}{40} + \frac{16}{40} \cdot 0 = 0;$

$max\ (95,0) = 95;$

$0 \cdot 0.6 + 95 \cdot 0.4 = 38$

$38 – 10 = 28$

$max\ (20,28) = 28.$

Результат исследования: целесообразным является решение эксперимент (сейсморазведку) проводить. Если она покажет, что структура грунта открытая, то бурить не нужно. При закрытой – нужно. Ожидаемая прибыль при этом составляет 28 тысяч долларов.

2. Для задачи о бурении нефтяной скважины подсчитать ожидаемую прибыль, если таблица прибылей

$x \backslash y$	С	М	Б
x_1	$-10(t+5)$	$10(u+s+2)$	$100(v+1)$

x_2	0	0	0

Таблица результатов эксперимента матрицей

Состояние скважины	Тип грунта		Всего
	Открытый	закрытый	
С	$38+t$	$7-t$	45
М	$10+s$	$20-s$	30
Б	$7-u$	$18+u$	25
Всего	$50+s+t-u$	$45+u-s-t$	100

s,t,u,v -любые числа, а стоимость эксперимента равна 5 v тысяч долларов

3.Используя теорию игр проанализировать ситуацию и принять решение. Рассмотреть ситуацию, как антогонистическую игру и игру с природой.

Обувная фабрика планирует выпуск трех моделей обуви А, В, С. Общий объем производства обуви ограничен имеющимися мощностями. Спрос на эти модели зависит от ситуации на рынке, которую можно приближенно характеризовать так же тремя состояниями I, II, III. Известны оценки величины спроса на указанные модели обуви в зависимости от состояния рынка. Они задаются матрицей:

	I	II	III
А	$32-0{,}5n_1$	$23+0{,}5\,n_2$	$22+0{,}6\,n_2$
Б	$21-0{,}8n_1+0{,}5\,n_2$	$31-1{,}2n_1$	$23+1{,}5n_2$
В	$20+0{,}7n_2$	$21+n_1-1{,}4\,n_2$	$24+1{,}5\,n_2$

Состояние рынка случайным образом меняется в зависимости от неуправляемых факторов. Найти оптимальные пропорции выпуска различных моделей (какую часть от общего объема следует отдать на выпуск той или иной модели) в ситуациях:

1. Поведение рынка неизвестно;
2. Известно, что вектор описывающий частоту пребывания рынка в том или ином состоянии имеет вид

$(20-n_1+0{,}5\,n_2)/(40-2\,n_1+3\,n_2)$, $(10-n_1+1{,}5\,n_2)/(40-2\,n_1+3\,n_2)$, $(10+n_2)/(40-2\,n_1+3\,n_2)$

$n_1=3$, $n_2=1$

Решение**.**

Сначала для значений $n_1=3$, $n_2=1$ выпишем платежную матрицу игры и вектор вероятностей. Получим:

Сначала для значений $n_1=3$, $n_2=1$ выпишем платежную матрицу игры и вектор вероятностей. Получим:

	I	II	III
A	30,5	23,5	22,6
B	19,1	27,4	24,5
C	20,7	22,6	25,5
P	35/74	17/74	11/37

Часть 1. Рассмотрим данную ситуацию как антагонистическую игру с заданной платежной матрицей A:

$$\begin{pmatrix} 30{,}5 & 23{,}5 & 22{,}6 \\ 19{,}1 & 27{,}4 & 24{,}5 \\ 20{,}7 & 22{,}6 & 25{,}5 \end{pmatrix}$$

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число в каждой строке обозначим a_i . Получаем:

$a_1= 22{,}6$, $a_2 =19{,}1$, $a_3 = 20{,}7$

Выберем максимальное из этих значений $a = 22{,}6$ - нижняя цена игры.

Аналогично для второго игрока. Найдем максимальные значения выигрыша по столбцам: $b_1 = 30{,}5$, $b_2 = 27{,}4$, $b_3 = 25{,}5$

Минимальное из этих чисел $b = 25{,}5$ - верхняя цена игры.

Стратегии	b_1	b_2	b_3	a_j
a_1	30,5	23,5	22,6	**22,6**
a_2	19,1	27,4	24,5	19,1
a_3	20,7	22,6	25,5	20,7
b_i	30,5	27,4	**25,5**	

Так как верхняя и нижняя цены игры различны, игра не имеет решения в чистых стратегиях, цена игры находится в промежутке от 22,6 до 25,5 (между нижней и верхней ценой игры).

Теперь найдем решение игры, заданной данной платежной матрицей в смешанных стратегиях. Перейдем к задаче линейного программирования. Пусть $P = (p_1, p_2, p_3)$ –оптимальная смешанная стратегия первого игрока,

$Q = (q_1, q_2, q_3)$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока.

Составим пару симметричных двойственных задач, так чтобы исходная задача была стандартной задачей максимизации, матрица коэффициентов совпадала с платежной матрицей A, а коэффициенты при неизвестных в целевой функции и свободные члены неравенств были бы равны единице.

Для первого игрока получаем задачу:

$$G(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to min,$$

$$\begin{cases} 30{,}5x_1 + 19{,}1x_2 + 20{,}7x_3 \geq 1, \\ 23{,}5x_1 + 27{,}4x_2 + 22{,}6x_3 \geq 1. \\ 22{,}6x_1 + 24{,}5x_2 + 25{,}5 \geq 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Для второго игрока получаем задачу:

$$F(Y) = y_1 + y_2 + y_3 \to max,$$

$$\begin{cases} 30{,}5y_1 + 23{,}5y_2 + 22{,}6y_3 \le 1. \\ 19{,}1y_1 + 27{,}4y_2 + 24{,}5y_3 \le 1. \\ 20{,}7y_1 + 22{,}6y_2 + 25{,}5y_3 \le 1. \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

Здесь $F_{max} = \frac{1}{v}$, $y_i = \frac{q_i}{v}$, $x_i = \frac{p_i}{v}$, v – цена игры.

Решаем данные задачи и находим:

$y_1 \approx 0{,}007$, $y_2 \approx 0{,}008$, $y_3 \approx 0{,}026$, $F_{max} \approx 0{,}041$,

$x_1 \approx 0{,}016$, $x_2 \approx 0{,}010$, $x_3 \approx 0{,}015$, $G_{min} \approx 0{,}041$.

Поэтому цена игры $v = \frac{1}{F_{max}} \approx 24{,}13$.

Смешанные стратегии второго игрока:

$Q = vY = 24{,}13(0{,}007;\ 0{,}008;\ 0{,}026) = (0{,}171;\ 0{,}190;\ 0{,}638)$.

Смешанные стратегии первого игрока:

$P = vX = 24{,}13(0{,}016;\ 0{,}010;\ 0{,}015) = (0{,}390;\ 0{,}245;\ 0{,}366)$.

Таким образом, если рассматривать предприятие как игрока с тремя стратегиями производства (выпуск моделей обуви А, В, С), то следует наладить производство этих моделей в соотношении

$P = (0{,}390;\ 0{,}245;\ 0{,}366)$ – 39 % моделей типа А, 24,5 % моделей типа В и 36,5 % моделей типа С.

Средний выигрыш составит 24,13.

Часть 2. Рассмотрим ситуацию как игру с природой. Так как известно, что вектор описывающий частоту пребывания рынка в том или ином состоянии, имеет вид:

P = (35/74, 17/74, 11/37)

можно использовать критерий максимального среднего выигрыша. Формулы для расчета имеют вид:

$K(A_i) = M(A_i) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} p_j$, $i=1,\dots m$. $K_{опт} = max\{K(A_i), i=1,\dots m\}$.

Получаем:

	I	II	III	Средний выигрыш $K(A_i)$
A_1	30,5	23,5	22,6	**26,543**
A_2	19,1	27,4	24,5	22,612
A_3	20,7	22,6	25,5	22,564
P	35/74	17/74	11/37	

Тогда $K_{опт} = max\{K(A_i), i=1,\ldots m\} = 26{,}543$.
Лучшая стратегия по этому критерию 1 A (производить только модели типа А), средний выигрыш составит 26,543.

Для наиболее полного исследования ситуации рассмотрим еще несколько распространенных критериев.

Критерий Вальда.

Это максиминный критерий, он гарантирует определенный выигрыш при наихудших условиях. Критерий основывается на том, что, если состояние обстановки неизвестно, нужно поступать самым осторожным образом, ориентируясь на минимальное значение эффективности каждой системы. В каждой строке матрицы эффективности находится минимальная из оценок систем по различным состояниям обстановки

$$K(A_i) = \min_j k_{ij},\ i=1,\ldots m.$$

Оптимальной считается система из строки с максимальным значением эффективности $K_{опт} = max\{K(A_i), i=1,\ldots m\}$.

Вычисляем:

	I	II	III	Средний выигрыш $K(A_i)$
A_1	30,5	23,5	22,6	**22,6**

A_2	19,1	27,4	24,5	**19,1**
A_3	20,7	22,6	25,5	**20,7**

Критерий Севиджа. Минимизирует потери эффективности при наихудших условиях. Для оценки систем на основе данного критерия матрица эффективности должна быть преобразована в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы потерь определяется как разность между максимальным и текущим значениями оценок эффективности в столбце:

$$\Delta k_{ij} = \max_i k_{ij} - k_{ij}$$

После преобразования матрицы используется критерий минимакса:

$$K(A_i) = max \Delta k_{ij},\ i=1,\dots m.$$

$$K_{опт} = min\{K(A_i),\ i=1,\dots m\}.$$

Матрице эффективности A

30,5	23,5	22,6
19,1	27,4	24,5
20,7	22,6	25,5

будет соответствовать матрица потерь:

	I	II	III	$K(A_i)$
A_1	0	3,9	2,9	**3,9**
A_2	11,4	0	1	**11,4**
A_3	9,8	4,8	0	**9,8**

Лучшая стратегия по этому критерию A_1 с минимальным риском.

Таким образом, если рассматривать ситуацию как игру с природой, рекомендуется выбирать стратегию A_1, что подтверждается несколькими критериями игры с природой.

Практические задания к теме «Игры с природой».

1.Подготовьте ответы на теоретические вопросы

1. Что представляют собой игры с природой?
2. Определите матрицу рисков.
3. Суть критерия Вальда.
4. Содержание критерия Сэвиджа
5. Критерий Гурвица

2.Решите следующие задачи

2.1 Для заданной платежной матрицы найти оптимальный выигрыш, используя все стратегии

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	35	35	3	10
A_2	24	1	6	90
A_3	40	60	10	15

2.2 Найдите решение игры с природой, применив критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 2 & 6 \\ 9 & 5 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 6 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2.3 Используя теорию игр проанализировать ситуацию и принять решение.

Рассмотреть ситуацию, как антогонистическую игру и игру с природой.

Швейная фабрика планирует выпуск трех моделей костюмов А, В, С. Общий объем производства обуви ограничен имеющимися мощностями. Спрос на эти модели зависит от ситуации на рынке, которую можно приближенно характеризовать так же тремя состояниями I, II, III. Известны оценки величины спроса на указанные модели обуви в зависимости от состояния рынка. Они задаются матрицей:

	I	II	III
А	$32-0{,}5n_1$	$23+0{,}5\,n_2$	$22+0{,}6\,n_2$
Б	$21-0{,}8n_1+0{,}5n_2$	$31-1{,}2n_1$	$23+1{,}5n_2$
В	$20+0{,}7n_2$	$21+n_1-1{,}4\,n_2$	$24+1{,}5\,n_2$

Состояние рынка случайным образом меняется в зависимости от неуправляемых факторов.

Найти оптимальные пропорции выпуска различных моделей (какую часть от общего объема следует отдать на выпуск той или иной модели) в ситуациях:

1. Поведение рынка неизвестно.
2. Известно, что вектор описывающий частоту пребывания рынка в том или ином состоянии имеет вид

$(20-n_1+0{,}5\,n_2)/(40-2\,n_1+3\,n_2)$, $(10-n_1+1{,}5\,n_2)/(40-2\,n_1+3\,n_2)$,
$(10+n_2)/(40-2\,n_1+3\,n_2)$

4. БИМАТРИЧНАЯ ИГРА

4.1Общие положения

Биматричная игра - это бескоалиционная игра двух игроков, каждый из которых имеет конечное множество стратегий.

Биматричная игра рассматривается как конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2).

Решением биматричной игры есть такое решение, которое в том или ином смысле устраивает обоих игроков. Данная формулировка очень расплывчата, что обуславливается тем, что в биматричных играх довольно трудно чётко сформулировать цели для игроков. Как один из возможных вариантов – желание игрока навредить своему сопернику в ущерб собственному выигрышу, или цель будет противоположна.

Обычно рассматриваются два подхода к решению биматричной игры. Первый – поиск равновесных ситуаций: ищутся условия, когда игра находится в некотором равновесии, которое невыгодно нарушать ни одному из игроков в отдельности. Второй – поиск ситуаций, оптимальных по Парето: нахождение условий, при которых игроки совместными усилиями не могут увеличить выигрыш одного игрока, не уменьшив при этом выигрыш другого.

Остановим своё внимание на первом подходе. В данном подходе используются смешанные стратегии, т.е. случай, когда игроки чередуют свои чистые стратегии с определёнными вероятностями.

Биматричная игра в чистых стратегиях.

Пусть $P = \{1,\ldots, n\}$ – множество стратегий первого игрока,
$Q = \{1,\ldots, m\}$ – множество стратегий первого игрока,
F – функция выигрыша первого игра, G - функция выигрыша второго игрока.

Функции F и G можно задать с помощью матриц
$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1,\ldots, n$, $j = 1,\ldots, m$, следующим образом:

$F(i, j) = a_{ij}$, $G(i, j) = b_{ij}$.

Пара стратегий (i_0, j_0), удовлетворяющая условиям

$a_{i,j_0} \leq a_{i_0,j_0}$ для любых $i = 1,\ldots, n$ и

$b_{i_0,j} \leq b_{i_0,j_0}$ для любых $j = 1,\dots, m$, называется ситуацией равновесия биматричной игры. Эти условия можно записать в виде

$F(i, j_0) \leq F(i_0, j_0)$ для любых $i = 1,\dots, n$ и

$G(i_0, j) \leq G(i_0, j_0)$ для любых $j = 1,\dots, m$.

Биматричная игра в смешанных стратегиях.

Пусть P– множество векторов $\boldsymbol{p} = (p_1,\dots,p_i,\dots, p_n)$, удовлетворяющих условиям $p_i \geq 0$, $i = 1,\dots, n$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Q - множество векторов $\boldsymbol{q} = (q_1,\dots,q_j,\dots, q_m)$, удовлетворяющих условиям

$q_j \geq 0$, $j = 1,\dots, m$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Функции $F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ и $G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ определяются формулами

$F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j$,

$G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij} p_i q_j$,

где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ данные матрицы размером $m\times n$

Пара стратегий (p_0, q_0), удовлетворяющая условиям

$F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q_0}) \leq F(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ для любых p,

$G(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q}) \leq G(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ для любых q

называется ситуацией равновесия биматричной игры со смешанными стратегиями.

Если матрицы выигрышей имеют размерность 2×2, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

и ситуаций в игре с частными стратегиями не существует, то ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ где

$\boldsymbol{p} = (p_0, 1 - p_0)$, $\boldsymbol{q} = (q_0, 1 - q_0)$, $0 < p_0 < 1$, $0 < q_0 < 1$,

можно находить с применением формул

$$p_{0.} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{21} - b_{12} + b_{22}} \qquad q_0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}} \quad ,$$

а выигрыши игроков в данной ситуации равновесия равны $F(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ и $G(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$.

Пример. Найти ситуацию равновесия в чистых стратегиях (если они есть) в биматричной игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 10 & 10 \\ 6 & -6 & -3 \\ 18 & 14 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 14 \\ 2 & -3 & 10 \\ 14 & 22 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Если (i_0, j_0) –ситуация равновесия, то из определения вытекает, что элемент

a_{i_0,j_0} является максимальным в своем столбце в матрице A, а элемент b_{i_0,j_0}- максимальным в своей строке матрицы B.

Рассмотрим матрицу A

22	10	10
6	-6	-3
18	14	6
22	**14**	**10**

Максимальный в первом столбце является элемент a_{11} = 22, во втором – a_{32} = 14, в третьем - a_{13} =10. Рассмотрим матрицу B

10	2	14	**14**
2	-3	10	**10**
14	22	6	**22**

Максимальный в первом столбце является элемент b_{13} = 14, во втором – b_{23} = 10, в третьем - b_{32} =22.

Получаем, что элементы a_{13} и a_{32} являются максимальными элементами столбцов матрицы A, а элементы b_{13} и b_{32} - максимальными элементами строк матрицы B. Следовательно, пара стратегий (1,3) и (3,2) являются ситуациями равновесия данной биматричной игры.

Пример. Найти ситуацию равновесия в смешанных стратегиях и вычислить выигрыши игроков в ней, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Сначала нужно, находя максимальные элементы в столбцах матрицы A и в строках матрицы B, убедиться в отсутствии ситуации равновесия в чистых стратегиях. После этого имеем:

$$p_0 = \frac{-2-3}{-3+(-2)-7-3} = \frac{1}{3}; \quad \boldsymbol{p_0} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$q_0 = \frac{4-(-2)}{5+4-(-2)-(-1)} = \frac{1}{2}; \quad \boldsymbol{q_0} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$F(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = 5\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 4\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1{,}5;$$

$$G(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = (-3)\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 7\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 3\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + (-2)\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1.$$

4.2 Непротивоположные игры

Наиболее известная интерпретация непротивоположной игры - это игра «Семейный спор». Пусть семейная пара – муж и жена – могут выбрать одно из двух вечерних развлечений – пойти на футбол или в театр. Согласно распространенному представлению мужчина бесспорно предпочитает футбол, а женщина – театр. Будем считать для определенности, что муж – это игрок 1, а жена – игрок 2. У каждого игрока имеется две стратегии: первая стратегия – пойти на футбол (у мужа p_1, у жены q_1), а вторая стратегия – пойти в театр (у мужа p_2, у жены q_2). Если оба игрока выберут свои первые стратегии p_1 и q_1, т.е. пойдут вместе на футбол, то выигрыш первого игрока (мужа) составит две единицы $c_{11} = 2$, а выигрыш второго игрока (жены) составит одну единицу $h_{11} = 1$. Если же оба игрока выберут свои вторые стратегии p_2 и q_2, т.е. вместе пойдут в театр, то выигрыш первого игрока составит одну единицу $c_{22} = 1$, а выигрыш второго игрока составит две единицы $h_{22} = 2$. Если же муж выберет футбол (его первая стратегия p_1), а жена выберет театр (ее вторая стратегия q_2), то для обоих вечер будет испорчен: $c_{12} = -1$, $h_{12} = -1$. То же самое произойдет, если муж выберет посещение театра (вторая его стратегия p_2), а жена выберет футбол (ее первая стратегия q_1), т.к. $c_{21} = -1$, $h_{21} = -1$. Следовательно, платежные матрицы будут иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, в данном случае им обоим важнее быть вместе. Рассмотрим некоторые особенности этой игры.

Очевидно, что муж предпочел бы, чтобы они вместе пошли на футбол, т.е. исход (p_1, q_1), а жена предпочла бы, чтобы они вместе пошли в театр, т.е. исход (p_2, q_2). Если муж объявит, что он намерен выбрать свою первую стратегию p_1 (пойти на футбол), и никакие доводы не заставят его изменить свой выбор, и жена убеждена в его упорстве, то ей ничего не остается, согласно гипотезе разумного поведения, как выбрать свою первую стратегию q_1 – пойти с мужем на футбол, поскольку если она выберет свою вторую стратегию q_2 (пойдет в театр), то ее «выигрыш» составит минус единицу. Аналогично, если жена первой объявит о своем намерении пойти в театр (выбор q_2) и будет твердо стоять на своем, то в интересах мужа пойти с женой в театр, т.е. выбрать стратегию p_2, т.к. это даст ему больший выигрыш, чем если бы он пошел на футбол. Итак, мы видим, что справедливо следующее утверждение. *В игре с непротивоположными интересами может оказаться выгодным для игрока раскрыть свои намерения (свой выбор) первым и твердо стоять на своем.* Напомним, что в антагонистической игре игроку нет никакого смысла раскрывать свои намерения, т.к. это может только ухудшить его положение.

В реальности при таком поведении игрока, т.е. когда он стремится опередить другого игрока, чтобы получить преимущество, есть риск, что в итоге он проиграет, тем более, если игра разыгрывается неоднократно. Потому что другой игрок, исходя из долгосрочных соображений и стремясь максимизировать свой выигрыш в долгосрочной перспективе, может привести игру к невыгодному для обоих игроков результату, просто выбрав предпочтительную для него стратегию, недвусмысленно намекая тем самым на то, что чтобы получить выигрыш необходимо найти какие-то пути к согласованию интересов.

Рассмотрим подробнее сначала некооперативный вариант игры, т.е. когда между игроками отсутствует сообщение, и они не могут договариваться до игры и должны производить свои выборы одновременно, не зная о выборе другого игрока.

Игрок 1 может рассуждать так: «Я предпочитаю исход (p_1, q_1), т.е. когда мы оба идем на футбол. Жена, очевидно, предпочитает исход (p_2, q_2), когда мы оба идем в театр. Но если я выберу p_1 (футбол), а она выберет q_2 (театр), то мы оба проиграем. Теперь, допустим, я уступаю и выбираю p_2 – я тогда оказываюсь еще в хорошем положении, т.к. выигрываю одну единицу полезности. Поэтому мне нужно выбрать p_2 (театр).

Но жена может рассуждать точно так же и уступить мне, выбрать стратегию q_1 (футбол), и тогда опять мы оба проиграем. Значит мне нужно выбрать p_1. Однако, по существу, какие бы доводы я ни привел в пользу выбора p_1 или p_2, из-за симметрии ситуации такие же доводы имеются у жены, и, по-видимому, мы оба неизбежно должны проиграть».

Итак, найти решение, выгодное для обоих игроков, или хотя бы для одного из них, в некооперативном варианте игры пока не удалось. Попробуем теперь использовать стандартный подход, применяемый при анализе антагонистических игр. Найдем гарантирующие чистые стратегии игроков, проверим – нет ли в игре ситуации равновесия в чистых стратегиях, и, если необходимо, определим гарантирующие смешанные стратегии игроков, которые в случае антагонистических игр являются оптимальными стратегиями игроков.

В рассматриваемой игре, как нетрудно увидеть, гарантирующими чистыми стратегиями являются обе стратегии игроков. Однако, в данном случае они гарантируют только то, что результаты их применения будут не хуже, чем самый худший результат для игрока в этой игре.

Рассматривая матрицы выигрышей игроков, можно увидеть, что исход (p_1, q_1), когда оба идут на футбол, является ситуацией равновесия в чистых стратегиях, т.е. ни одному из игроков невыгодно отступить от своей стратегии, если другой игрок придерживается своей стратегии. Но то же относится и к исходу (p_2, q_2) (оба идут в театр), он тоже является равновесным. Однако выигрыши игроков в различных ситуациях равновесия различны. В этом еще одно отличие (особенность) игр с непротивоположными интересами от антагонистических. *В играх с непротивоположными интересами различные равновесные исходы (ситуации равновесия) могут быть неравноценными для игроков, и у каждого из игроков может быть более предпочтительный для него свой равновесный исход.* В антагонистических играх двух игроков, если ситуация равновесия не единственна, то все ситуации равновесия в игре равноценны, т.е. выигрыши игроков во всех ситуациях равновесия одинаковы и равны значению игры.

Найдем теперь гарантирующие смешанные стратегии игроков.

$$p_{\text{опт}} = \frac{1+1}{2+1+1+1} = \frac{2}{5}; \qquad p^* = \left(\frac{2}{5}, 1 - \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right);$$

$$q_{\text{опт}} = \frac{2-(-1)}{2+1+1+1} = \frac{3}{5}; \qquad q^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right);$$

$$v^* = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} - c_{21} - c_{12} + c_{22}} = \frac{2\cdot 1 - (-1)(-1)}{2+1+1+1} = \frac{1}{5}$$

Для первого игрока гарантирующей смешанной стратегией является $p^* = (0.4; 0.6)$, т.е. с вероятностью

$p_1 = 0.4$ применяется первая чистая стратегия x_1 (футбол), и с вероятностью $p_2 = 0.6$ применяется вторая чистая стратегия x_2 (театр). Гарантирующая смешанная стратегия второго игрока $q^* = (0.6;0.4)$. Применение гарантирующих смешанных стратегий дает игрокам гарантированный ожидаемый выигрыш $v^* = 0.2$. Это уже что-то. Однако заметим, что если второй игрок применяет свою гарантирующую смешанную стратегию $q^* = (0.6;0.4)$, то первому игроку выгоднее вместо применения своей гарантирующей смешанной стратегии $p^* = (0.4;0.6)$, дающей ожидаемый выигрыш $v^* = 0.2$, применить чистую стратегию $p = (1,0)$ с ожидаемым выигрышем $F(p,q^*) = 0.8$, т.е. отказаться от применения гарантирующей смешанной стратегии в пользу стратегии $p = (1,0)$. Аналогично, легко убедиться, что если первый игрок применяет свою гарантирующую смешанную стратегию, то второму игроку также выгоднее отказаться от применения своей гарантирующей смешанной стратегии. Это означает, что исход (p^*, q^*) не является равновесным.

Таким образом, *в неантагонистических играх гарантирующие смешанные стратегии игроков могут не быть их равновесными стратегиями, т.е. могут не составлять ситуацию равновесия*. Напротив, в антагонистической матричной игре, как известно, гарантирующие смешанные стратегии игроков всегда составляют ситуацию равновесия, т.е. являются оптимальными стратегиями игроков.

Нельзя ли гарантированно получить выигрыш больше, чем при применении гарантирующих смешанных стратегий, если возможна кооперация между игроками?

Рассмотрим теперь кооперативный вариант игры «Семейный спор».

Если в игре возможна коммуникация и сообщение между игроками до выбора и реализации стратегий, то в стремлении получить больший выигрыш игроки могут вступить в переговоры. В ходе переговоров игроки, во-первых, могут исключить из рассмотрения те исходы в игре, которые невыгодны или неприемлемы для обоих игроков (в игре «Семейный спор» это исходы (p_1, q_2) и (p_2, q_1)). Дальше игроки могут договариваться, например, о том, как игрок, если он получит больший выигрыш в том или ином исходе игры, может поделиться с другим игроком или компенсировать ему получение меньшего выигрыша.

Очевидно, что в этом случае вся игра, фактически, переносится в область переговоров. В общем случае здесь у игроков могут появиться такие новые альтернативы, как различного рода угрозы, уловки, соблазны, блеф и т.д., и результат этой игры переговоров может быть разным.

В случае игры «Семейный спор», в силу симметрии выигрышей, в качестве «справедливого» решения можно, видимо, принять бросание монеты, причем, например, герб будет означать, что совместно выбран футбол (исход (p_1, q_1)), а решка – что совместно выбран театр (исход (p_2, q_2)). При этом каждый игрок с вероятностью 0.5 получит выигрыш в 2 единицы и с вероятностью 0.5 выигрыш в одну единицу, т.е. ожидаемые выигрыши для каждого игрока будут равны 1.5. Заметим, что не существует исхода, в котором хотя бы один игрок получил бы больший выигрыш при условии, что другой игрок получил бы не меньший выигрыш, т.е. это решение можно считать оптимальным решением данной игры в кооперативном варианте. К сожалению, этот подход не универсален.

Заметим, что в некооперативном варианте игры такие выигрыши (выигрыш каждого игрока по 1.5 единицы полезности) невозможны, т.е. не существует ни чистых, ни смешанных стратегий игроков, приводящих к таким выигрышам, так как свои смешанные стратегии, т.е. вероятности применения

чистых стратегий, каждый игрок выбирает независимо. Другими словами, для игроков, которые не могут вступить в переговоры до игры, надежда на кооперативный вариант тщетна – невозможно поступать так, как будто находишься в сговоре с другим игроком.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *в играх с непротивоположными интересами могут иметь смысл переговоры до игры и принятие взаимообязывающих соглашений.* В антагонистических играх, очевидно, переговоры не имеют никакого смысла – не о чем договариваться, т.к. увеличение выигрыша одного игрока – это увеличение платежа другого игрока.

Практические задания к теме «Биматричная игра»

1.Подготовьте ответы на следующие теоретические вопросы

1. Дайте определение ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре.
2. Что такое смешанное расширение биматричной игры?
3. Приведите определение ситуации равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре.
4. Сформулируйте условия равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре 2×2.

5. Укажите необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в биматричной игре.

6. Запишите условия для определения вполне смешанных равновесных стратегий игроков в биматричной игре n×n.

7. Приведите необходимые и достаточные условия строгой доминируемости смешанной стратегии в биматричной игре.

2.Решить следующие практические задачи

2.1 Найти чистые ситуации равновесия в биматричной игре

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} v+18 & v+6 & v+6 \\ t+2 & s-10 & v-7 \\ t+14 & u+10 & t+2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} v+6 & u-2 & s+10 \\ u-2 & v-7 & v+6 \\ s+10 & v+18 & t+2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Проверить существование ситуации равновесия в чистых стратегиях. В случае их отсутствия найти ситуации равновесия в смешанных стратегиях и вычислить выигрыши игроков в ней, если

$$A = \begin{pmatrix} 5s & u \\ t & v+4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} v & t+5 \\ 6u & s \end{pmatrix}.$$

$t = 1$, $s = 2$, $u = 3$, $v = 4$.

2.3 Проверить существование ситуации равновесия в чистых стратегиях. В случае их отсутствия найти ситуации равновесия в смешанных стратегиях и вычислить выигрыши игроков в ней (предварительно, получив новую платежную матрицу, используя принцип доминирования.), если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Игра с иерархической структурой – это модель конфликтной ситуацией при фиксированной последовательности ходов и обмена информацией участников.

Иерархические игры относятся к непротивоположным играм. В иерархических играх предполагается, что игроки не равноправны: первый игрок является «управляющим», а второй - «управляемым».

На основании предположений в зависимости от информации о выборах 2-го игрока, которую игрок 1 имеет или ожидает иметь, формулируются разные игры.

Игра Γ_1. В этой игре ни один из игроков заранее не знает о выборе другого. Здесь игрок 1 выбирает стратегию x_1 и сообщает об этом игроку 2, а он в свою очередь выбирает x_2 (множество точек, которое доставляет максимум функции).

Управляющий игрок, зная функцию выигрыша управляемого игрока, первым выбирает свою стратегию и сообщает ее второму игроку, который делает свой выбор так, чтобы максимизировать свою функцию выигрыша. Тогда наибольший гарантированный результат первого игрока в игре определяется равенством

$$\gamma = \max_{\varphi_1 \in \Phi_1} \min_{y \in M(\varphi_1)} F(\varphi_1(y), y) \quad ,$$

где $M(\varphi_1) = \left\{ y' : G(\varphi_1(y'), y') = \max_{y} G(\varphi_1(y), y) \right\}$,

$\varphi_1 : Y \to X$.

Для подсчета γ можно применить следующую формулу: $\gamma = max\ (K, M)$,

где

$$K = \begin{cases} \max\limits_{(x,y \in D)} F(x,y), & D \neq 0 \\ -\infty, & D = 0 \end{cases},$$

$$D = \left\{(x,y): G(x,y) > \max_y \min_x G(x,y)\right\}.$$

$$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x,y),$$

$$E = \left\{y': \min_x G(x,y') = \max_y \min_x G(x,y)\right\},$$

Причем в случае $\gamma = K$ стратегия φ_1^0, гарантирующая результат K, определяется равенством

$$\varphi_1^0(y) = \begin{cases} x_0, & y = y_0, \\ \varphi_1^-(y), & y \neq y_0, \end{cases}$$

где $(x_0, y_0) \in D$, $F(x_0, y_0) = \max\limits_{(x,y) \in D} F(x,y)$,

при всех y $G(\varphi_1^-(y), y) = \min\limits_x G(x,y)$, а при $\gamma = M$ φ_1^0

находится из условия

$$\varphi_1^0(y) = \begin{cases} \varphi_1^+(y), & y \in E, \\ \varphi_1^-(y), & y \notin E, \end{cases}$$

При всех y $F(\varphi_1^+(y), y) = \max\limits_x F(x,y)$.

<u>Пример Игра $Г_1$</u>. Проиллюстрируем решение иерархических игр.

Игра $M_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Определим множества рациональных ответов второго игрока. Для этого выпишем матрицу второго игрока и определим максимум по столбцам, то есть по y_i .

$x \setminus y$	y_1	y_2	y_3	max
x_1	6	0	**7**	7
x_2	0	**4**	0	4
x_3	2	**3**	0	3

Места, занимаемые максимумами по y_i - это и есть множество D: {(1;3) (2;2) (3;2)}. Выпишем элементы матрицы M_1, стоящие на тех же местах и найдем из них *max*.

$x \setminus y$	y_1	y_2	y_3	max
x_1	6	0	**2**	2
x_2	0	**4**	3	4
x_3	7	**0**	0	0

То есть

$R(1) = 3, \quad M_2(1,3) = 7, \quad M_1(1,3) = 2$

$R(2) = 2, \quad M_2\,(2,2) = 4, \quad M_1\,(2,2) = 4$

$R(3) = 2, \quad M_2\,(3,2) = 3, \quad M_1\,(3,2) = 0$

Тогда $\max\min M_1\,(x, y) = \max\,[2,4,0] = 4$

Четверка стоит во второй строке и втором столбце матрицы M_1. Следовательно, гарантированный результат первого игрока =4 при использовании оптимальной стратегии при $x_1^0 = 2$, $x_2^0 = 2$

Пример Игра Γ_2.

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 1 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & -8 & 18 \\ 11 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 6 & 5 & -1 \\ 6 & -2 & 5 & 8 \\ -1 & 5 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

K: $\min\limits_{x} G(x,y)$

4	-2	**-1**	-3
-1	6	5	-1
6	**-2**	5	8
-1	5	8	**-5**
$\max\limits_{y}$ = -1			

$$D = \left\{(x,y): G(x,y) > \max_{y}\min_{x} G(x,y)\right\}$$

$$D = \{(2{,}2),(2{,}3),(3{,}1),(3{,}3),(3{,}4),(4{,}2),(4{,}3),\}$$

$\max\limits_{(x,y\in D)} F(x,y), \quad D \neq 0$:

-9	1	8	-2
3	**4**	**4**	3
-4	-2	**-8**	**18**
11	**2**	**4**	1
$\max\limits_{(x,y\in D)} F(x,y) = 18$			

$x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 1$

M:

$$E = \left\{y' : \min_{x} G(x,y') = \max_{y}\min_{x} G(x,y)\right\}$$

$$= \left\{y' : \min_{x} G(x,y') = -1\right\} =$$

= {1; 3; 4}

$$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = \min_{y \in E}\{11, 8, 18\} = 8$$

Практические задания к теме «Иерархические игры».

1.Подготовьте ответы на следующие теоретические вопросы.

1. Критерии эффективности. Ситуации равновесия.
2. Равновесие Нэша.
3. Эффективность по Парето.
4. Равновесие по Штакельбергу.
5. Теорема Нэша.
6. Отношения доминирования.
7. Определение классической кооперативной игры.
8. Дележи в кооперативной игре.

2.***Произведите необходимые вычисления***

Наибольший гарантированный результат управляющего игрока и найти его оптимальную стратегию в иерархической игре где $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,
Y= $(y_1, y_2, y_3, y_4,)$, функции F и G задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -3s & v & 2t & -u \\ t-1 & t & t & s \\ -2u & -u & -4u & 4t+2 \\ 2t+s & t-2 & t & v \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} t & -2v & -v & -3v \\ -v & t+2 & u+s & -v \\ 3u & -2v & v+4 & 2t \\ -v & u+3 & t+4 & -5v \end{pmatrix},$$

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1.ИвановаА.П., Теория игр: учебное пособие для вузов /А.П. Иванова, Г.Л. Эпщтейн. – Санкт-Петербург: Лань, 2025. -208 с.
2.Вартанов, С.А. Введение в теорию игр : учебное пособие для студентов 2 курса специальности 38.03.01 «Экономика» (уровень бакалавриата) / С. А. Вартанов. – Москва : МАКС Пресс, 2018. – 140 с.
3.Мазалов В.В., Математическая теория игр и приложения / В.В. Мазалов. – 6-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2024. -500 с.
4.Дадашов Ч.М. Теория игр. Игры с природой: учебно-методическое по-собие 1-я часть «Московский авиационный институт (национальный исследо-вательский университет)» Кафедра «Высшая математика» -Москва 2016-19 с.
5.Оверчук, М.Л. О313 Теория игр в задачах: методические указания / М.Л. Оверчук. – М.: МАДИ, 2016. – 56 с.
6.Прянишникова Л.И., Богачева М.Н. Теория игр: учебное пособие для бакалавров специальностей «Экономика предприятий и организаций, Финан-сы и кредит, Бухгалтерский учет, анализ и аудит, Налоги и налогообложения, Прикладная информатика в экономике»: учеб. Пособие. Режим доступа: https://ntb.donstu.ru/content/teoriya-igr-uchebnoe- posobie-dlya-bakalavrov-specialnostey-ekonomika- predpriyatiy-i-organi-zaciy-finansy-i-kredit- buhgalter-skiy-uchet-analiz-i-audit-nalogi-i- nalogooblozheniya-prikladnaya-informatika-v-ekonomike 2012