



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге
ЦМК «Прикладная информатика»

Практикум по дисциплине

«Математический аппарат в отрасли информационных технологий»

Автор
Ковалева А.А.

Ростов-на-Дону, 2026

Аннотация

«Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине «Математический аппарат в отрасли информационных технологий» предназначены для студентов очной формы обучения по специальности 09.02.11 Разработка и управление программным обеспечением», 09.02.12 Техническая эксплуатация и сопровождение информационных систем.

Автор

Преподаватель ЦМК «Прикладная информатика»
Ковалева А.А.



Оглавление

Введение.....	4
Практическая работа №1	6
Практическая работа №2.....	9
Практическая работа №3.....	13
Практическая работа №4.....	17
Практическая работа №5.....	19
Практическая работа №6.....	23
Практическая работа №7.....	25
Практическая работа №8.....	29
Практическая работа №9.....	34
Практическая работа №10.....	36
Практическая работа №11	39
Перечень использованных информационных ресурсов	42

Введение

Дисциплина «Математический аппарат в отрасли информационных технологий» является частью общепрофессионального цикла подготовки обучающихся по специальности 09.02.12 Техническая эксплуатация и сопровождение информационных систем на направлена на формирование базовых математических знаний и навыков, необходимых при изучении специальных дисциплин и выполнении профессиональных задач.

Методические указания содержат сведения, необходимые для успешного выполнения практических занятий по данному курсу. Пособие разработано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математический аппарат в отрасли информационных технологий» и предназначено для обучающихся первого курса.

Цель освоения дисциплины. Формирование у обучающихся системных знаний и практических навыков применения элементов высшей математики при решении прикладных задач в области интеллектуальных интегрированных систем.

Задачи дисциплины. В результате изучения дисциплины обучающийся должен знать: основные элементы математического анализа; определения, свойства и графики элементарных функций; методы дифференцирования и интегрирования; основы линейной алгебры, матриц и систем линейных уравнений; основы векторной алгебры и аналитической геометрии

В результате изучения дисциплины обучающийся должен уметь: применять методы анализа функций при решении практических задач; вычислять производные и

интегралы элементарных функций; решать системы линейных уравнений различными методами; строить графики функций и выполнять их анализ; использовать математический аппарат при решении задач по специальности.

В практикуме представлены теоретические положения, формулы и примеры решения задач, а также задания для самостоятельного выполнения. Критерии оценки выполненных заданий:

- Правильность выполнения вычислений;
- Обоснованность действий;
- Наличие выводов;
- Аккуратность оформления.

Время выполнения: 2 академических часа.

Практическая работа №1 «Решение задач с комплексными числами»

Цель работы: Овладеть навыками выполнения арифметических операций с комплексными числами и представления комплексных чисел в алгебраической и тригонометрической формах.

Краткие теоретические сведения

1. Комплексное число имеет вид $z = a + bi$, где $i^2 = -1$.
2. Основные операции:
 - сложение: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
 - умножение: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;
 - деление:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

3. Модуль комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
4. Аргумент: $\varphi = \arg(z)$.
5. Тригонометрическая форма:
 $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

6. Умножение комплексных чисел:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

7. Деление комплексных чисел:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

8. Тригонометрическая форма: Если $z = a + bi$,

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arg(z),$$

то

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

9. Умножение в тригонометрической записи:

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Примеры решений

Пример 1.

Вычислить $(3 + 2i) + (1 - 5i) = 4 - 3i$.

Пример 2.

Найти модуль числа $3 - 4i$:

$$|3 - 4i| = 5.$$

Пример 3.

Преобразовать $z = 3 + 4i$ в тригонометрическую форму.

Модуль:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Аргумент:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right).$$

Ответ: $z = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Пример 4.

Вычислить произведение:

$$(2 + 3i)(4 - i).$$

$$\begin{aligned} (2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)) + (2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4)i \\ = (8 + 3) + (-2 + 12)i = 11 + 10i. \end{aligned}$$

Пример 5.Вычислить произведение: $(2 + 3i)(4 - i)$.

$$\begin{aligned}(2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)) + (2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4)i \\ = (8 + 3) + (-2 + 12)i = 11 + 10i.\end{aligned}$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Найти сумму:
 - а) $(2 + 3i) + (5 - 7i)$;
 - б) $(-1 + 4i) + (3 + 9i)$.
2. Найти разность:
 - а) $(8 - 2i) - (5 + 6i)$;
 - б) $(7 + 3i) - (-2 + 9i)$.
3. Вычислить произведение:
 - а) $(3 + 2i)(1 - 4i)$;
 - б) $(5 - i)(2 + 3i)$.

4. Найти результат деления:

$$\frac{4 + 3i}{1 - 2i}.$$

5. Найти модуль и аргумент:
 - а) $3 + 4i$;
 - б) $-5 + 5i$.

6. Выполнить умножение:
 - а) $(3 + i)(2 - 4i)$;
 - б) $(1 - 3i)(-2 + 5i)$.

7. Найти частное:

$$\frac{5 - 2i}{1 + 3i}.$$

8. Представить в тригонометрической форме:
 - a) $1 + i$;
 - b) $-3 + 3i$.
9. Вычислить модуль и аргумент комплексного числа:
 - a) $4 - 4i$;
 - b) $-1 - 2i$.
10. Выполнить умножение в тригонометрической форме двух комплексных чисел:
$$z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ), z_2 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
3. Как выполняется деление комплексных чисел?
4. Как выглядит тригонометрическая форма комплексного числа?

Практическая работа №2 «Вычисление неопределенных и определенных интегралов. Нахождение несобственных интегралов применение определенных интегралов»

Цель работы: Освоить вычисление неопределённых интегралов элементарных функций и применять стандартные методы интегрирования: вынесение константы, замена переменной, интегрирование по частям. Освоить вычисление определённых интегралов, применять формулу Ньютона–Лейбница, использовать методы разложения на множители, замену переменной и интегрирование по частям.

Краткие теоретические сведения

1. Неопределённый интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$.

2. Основные формулы интегрирования:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

3. Интегрирование по частям: $\int u dv = uv - \int v du$.4. Замена переменной: $x = g(t), dx = g'(t)dt$.**Примеры решений****Пример 1.**

$$\int (3x^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 2x^2 + x + C.$$

Пример 2.

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

Пример 3. (интегрирование по частям)

$$\int x \sin x dx.$$

Берём $u = x, dv = \sin x dx$.

$$du = dx, v = -\cos x.$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Пример 4.

$$\int_0^2 (3x^2 - 2) \, dx = [x^3 - 2x]_0^2 = (8 - 4) - 0 = 4.$$

Пример 5.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln |x|]_1^2 = \ln 2.$$

Пример 6. (по частям)

$$\int_0^1 x e^x \, dx.$$

Берём $u = x, dv = e^x dx$.

$$du = dx, v = e^x.$$

$$\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = (1 \cdot e - 0) - (e - 1) = 1.$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Вычислить интегралы:

а) $\int (4x^3 - 2x + 1) \, dx;$

б) $\int (6x^2 + 3x - 7) \, dx.$

2. Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x};$

б) $\int \frac{2dx}{x+3}.$

3. Вычислить интегралы:

а) $\int e^{3x} \, dx;$

б) $\int \cos(5x) \, dx.$

4. Вычислить интегралы методом замены переменной:

а) $\int 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx$;

б) $\int \frac{3}{x+1} dx$.

5. Найти интеграл по частям:

а) $\int x e^x dx$;

б) $\int x \cos x dx$.

6. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^3 (2x - 4) dx$;

б) $\int_1^4 (x^2 - 1) dx$.

7. Найти:

а) $\int_2^5 \frac{dx}{x}$;

б) $\int_0^1 e^{3x} dx$.

8. Вычислить: $\int_0^2 (x^2 + 3x) dx$.

Рассчитать определённый интеграл методом замены переменной:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx.$$

9. Вычислить интеграл по частям:

$$\int_0^1 x \cos x dx.$$

Контрольные вопросы

1. Что понимается под неопределённым интегралом?
2. Назовите основные формулы интегрирования.
3. В чём заключается метод замены переменной?
4. В чём состоит метод интегрирования по частям?
5. Что означает произвольная константа C в результате?

Практическая работа №3 «Нахождение производной функции одной переменной. Исследование и построение графика функции»

Цель работы: Научиться находить производные основных элементарных функций, применять правила дифференцирования и вычислять производные сложных выражений.

Краткие теоретические сведения

1. Производная функции:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

2. Производные элементарных функций:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(e^x)' = e^x, (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

3. Основные правила:

– суммы: $(f + g)' = f' + g'$;

– произведения: $(fg)' = f'g + fg'$;

– частного: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;

– сложной функции (правило цепочки):

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Исследование функции включает следующие этапы:

1. Область определения функции (ОДЗ).

2. Нахождение первой производной $f'(x)$.

3. Определение критических точек: точки, в которых

$f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

4. Исследование поведения функции:

– интервалы возрастания и убывания;

– нахождение точек максимума и минимума.

5. Вторая производная:

$f''(x)$ и определение выпуклости функции.

6. Точки перегиба: значения, где меняется знак второй производной.

7. Построение графика функции.

Примеры решения

Пример 1.

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 5x + 7) = 3x^2 - 5.$$

Пример 2.

$$\frac{d}{dx}(\sin(3x)) = 3\cos(3x).$$

Пример 3.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right) = \frac{(2x)(x - 1) - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x - 1)^2}.$$

Пример 4.

Исследовать функцию

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

1. ОДЗ: все x .

2. Производная:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

3. Критические точки:

$$x = -1, x = 1.$$

4. Исследуем знаки $f'(x)$:

- убывает при $(-\infty, -1)$;
- возрастает при $(-1, 1)$;
- убывает при $(1, \infty)$.

5. Экстремумы:

- максимум при $x = -1$: $f(-1) = 2$;
- минимум при $x = 1$: $f(1) = -2$.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Найти производную:

- а) $y = 3x^4 - 5x^2 + x - 7$;
- б) $y = \sqrt{x}$.

2. Найти производные тригонометрических функций:

- а) $y = \sin(2x)$;
- б) $y = \cos(5x)$.

3. Найти производную произведения:

$$y = (x^2 + 3x)(x - 4).$$

4. Найти производную сложной функции:

$$y = e^{2x-1}.$$

5. Найти производную дроби:

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}.$$

6. Провести полное исследование функции:

- а) $f(x) = x^3 - 6x$;
- б) $f(x) = x^4 - 4x^2$.

7. Найти промежутки возрастания и убывания:

- а) $f(x) = x^2 - 4x + 1$;
- б) $f(x) = x^3 + x$.

8. Найти экстремумы функции:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

9. Найти точки перегиба функции:

$$f(x) = x^4 - 4x^2.$$

10. Построить график функции по результатам исследования:

$$f(x) = x^3 - x.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной.
2. Назовите основные формулы дифференцирования.
3. Как найти производную сложной функции?
4. Как дифференцировать произведение функций?
5. Какие функции являются элементарными?
6. Какие действия входят в исследование функции?
7. Что такое критическая точка?
8. Как определить, возрастает или убывает функция?
9. Как вычисляются экстремумы функции?
10. В чём смысл второй производной?

Практическая работа №4 «Вычисление предела функции нескольких переменных нахождение частных производных»

Цель работы: Освоить вычисление частных производных функций нескольких переменных, находить градиент, исследовать функции на экстремум.

Краткие теоретические сведения

1. Функция двух переменных $z = f(x, y)$ задаёт поверхность в пространстве.
2. Частные производные:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Вычисляются как обычные производные, рассматривая другую переменную постоянной.

3. Градиент функции:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

4. Критические точки функции — точки, в которых

$$f'_x = 0, f'_y = 0.$$

5. Вторая производная и определитель Гессе позволяют определить тип точки.

Примеры решений

Пример 1.

Найти частные производные функции

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + 3y. \\ f'_x &= 2xy, f'_y = x^2 + 3. \end{aligned}$$

Пример 2.

Найти градиент функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$\nabla f = (2x, 2y).$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Найти частные производные функций:

а) $f(x, y) = x^2 + 3xy$;

б) $f(x, y) = \sin(xy)$.

2. Найти f'_x и f'_y :

а) $f(x, y) = x^3 y^2$;

б) $f(x, y) = e^{x+y}$.

3. Вычислить градиент:

а) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

б) $f(x, y) = xy + 3x$.

4. Найти критические точки функции:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$$

5. Определить, являются ли точки экстремумами:

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6x - 2y.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое функция двух переменных?
2. Как вычисляются частные производные?
3. Что такое градиент?
4. Как находятся критические точки?
5. Для чего используется вторая производная (Гесс)?

Практическая работа №5 «Свойства рядов. Общий член ряда. Виды рядов. Признаки сходимости. Область сходимости»

Цель занятия: Научиться определять общий член числового ряда, различать основные виды рядов, исследовать ряды на сходимость с помощью признаков сходимости и находить область сходимости функциональных рядов.

Краткие теоретические сведения

Числовой ряд — это выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где a_n — общий член ряда.

Виды рядов

1. Числовые ряды
2. Функциональные ряды
3. Степенные ряды
4. Знакопеременные ряды

Основные свойства рядов

- Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(необходимое условие сходимости)

- Если ряд расходится, его сумма не существует.

Признаки сходимости рядов

1. Признак сравнения

Если $0 \leq a_n \leq b_n$ и ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ также сходится.

2. Признак Даламбера (признак отношений)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$$

если $q < 1$ — ряд сходится; если $q > 1$ — ряд расходится.

3. Признак Коши (коренной признак) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

4. Признак Лейбница (для знакопеременных рядов)

Область сходимости

Область сходимости — множество значений переменной, при которых ряд сходится.

Примеры решений

Пример 1

Определить сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Решение: Ряд является обобщённым гармоническим с показателем $p = 2 > 1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 2

Исследовать ряд по признаку Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Ряд сходится.

Пример 3

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Решение: Это геометрический ряд, он сходится при:

$$|x| < 1$$

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Определить общий член ряда и его вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

2. Исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

3. Исследовать ряды по признаку Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

4. Исследовать знакпеременный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

5. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Контрольные вопросы

1. Что понимают под числовым рядом?
2. Какое условие является необходимым для сходимости ряда?
3. Какие признаки сходимости рядов вы знаете?
4. В чём состоит признак Даламбера?
5. Что понимают под областью сходимости ряда?

Практическая работа №6 «Решение дифференциальных уравнений»

Цель работы: Научиться решать простейшие дифференциальные уравнения первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения, а также уравнения в полном дифференциале.

Краткие теоретические сведения

1. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

2. Уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

разделяются в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx.$$

3. Линейное дифференциальное уравнение:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Интегрирующий множитель:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}.$$

Решение: $y\mu(x) = \int q(x)\mu(x) dx + C.$

4. Уравнение в полном дифференциале:

Уравнение вида $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ является полным, если

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Примеры решений

Пример 1. Уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Интегрируем:

$$y = x^3 + C.$$

Пример 2. Линейное уравнение

$$y' + 2y = 4.$$

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

$$ye^{2x} = \int 4e^{2x} dx + C = 2e^{2x} + C.$$

$$y = 2 + Ce^{-2x}.$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Решить уравнение с разделяющимися переменными:

а) $\frac{dy}{dx} = 2x;$

б) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$

2. Решить линейные уравнения:

а) $y' + y = e^x;$

б) $y' - 3y = 6.$

3. Решить методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)(y^2 + 1).$$

4. Проверить, является ли уравнение полным:

$$(2xy + 3) dx + (x^2 + 4y) dy = 0.$$

5. Решить: $y' = xe^{x^2}$.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под дифференциальным уравнением первого порядка?

2. Как решаются уравнения с разделяющимися переменными?

3. Что такое интегрирующий множитель?

4. Как решаются линейные дифференциальные уравнения?

5. Когда уравнение называется полным?

Практическая работа №7 «Действия над матрицами вычисление определителя»

Цель занятия: Научиться выполнять базовые операции над матрицами: сложение, вычитание, умножение, транспонирование, вычисление произведения и определителя.

Краткие теоретические сведения

1. Матрица — это таблица чисел вида

$$A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

2. Сложение матриц: матрицы одинакового размера складываются поэлементно:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

3. Умножение матрицы на число:

$$kA = (ka_{ij}).$$

4. Умножение матриц:

Произведение $C = AB$ определяется как

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

где число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

5. Несовместимость размеров: Если размеры матриц не удовлетворяют условию умножения, произведение не определено.

Примеры решений. Найти сумму матриц:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \text{нельзя, т.к. размеры матриц различны.}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B) + C=A+(B+C)$.

Примеры.

$$1. -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{Найти } 2A-B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти $C = -3A + 4B$.

Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = AB.$$

1. Пусть

Найти элементы c_{12} , c_{23} и c_{21} матрицы C .

$$c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1, \quad c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1, \quad c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$$

2. Найти произведение матриц.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.

5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти AB и BA .

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти AB и BA .

$$AB = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}, B \cdot A - \text{не имеет смысла.}$$

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Вычислить матрицу $C = 6A - B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Даны матрицы A и B . Найти $C = 3A + 5B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 10 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Даны матрицы A и B . Найти $C = 6A - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 8 & 10 & -1 \\ -2 & -6 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Даны матрицы A и B . Найти $C = 6(A + 7B)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -5 & -13 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Даны матрицы A и B . Найти $C = -10(3A - B)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 73 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу $C = A + \lambda E$, где λ – некоторое число, E – единичная матрица, A – заданная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & 10 & -2 \\ -2 & -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

8. Вычислить $C = A - \lambda E$, при $\lambda = 5$.

Контрольные вопросы:

1. Что понимают под матрицей?
2. При каких условиях возможно сложение матриц
3. Как выполняется умножение матриц
4. Что такое транспонирование матрицы
5. Когда операция умножения матриц не определена

Практическая работа №8 «Нахождение обратной матрицы, ранга матрицы»

Цель занятия:

Сформировать навыки вычисления обратной матрицы, ранга матрицы различными методами.

Краткие теоретические сведения

1. Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2. Определитель третьего порядка (правило Саррюса):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

3. Основные свойства определителей:

- при перестановке двух строк определитель меняет знак;
- при умножении строки на число определитель умножается на это число;
- если строки пропорциональны, определитель равен нулю.

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6$$

3. Вычислить определитель матрицы D , если $D = -A + 2B$
и

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix}, \quad |D| = 0.$$

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 3$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2 \cdot 4 = 9$$

1. **Пример.** Дан определитель $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Найти A_{13} , A_{21} , A_{32} .

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, раскладывая его по элементам 2-го столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1 + 9) - 4(6 - 2) = -8 - 16 = -24.$$

2. Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Сделать проверку.

$|A| = 2$. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A .

$$A_{11} = 2, A_{12} = 0, A_{21} = 1, A_{22} = 1.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{|A|} A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A')^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогично $A \cdot A^{-1} = E$.

1. Найти элементы α_{12}^{-1} и α_{31}^{-1} матрицы A^{-1} обратной данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A| = 4$. Тогда

$$\alpha_{12}^{-1} = \frac{1}{4} A_{21} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

$$\alpha_{31}^{-1} = \frac{1}{4} A_{13} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найдём обратную матрицу.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9.$$

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = -6, \quad A_{13} = 3, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -1, \quad A_{31} = 2, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = -4.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad (A')^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}(A')^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Упражнения для самостоятельного выполнения

Вычислить определитель матрицы.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 9 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 4 \\ -1 & -9 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу обратную матрице A.

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы:

1. Что понимают под определителем матрицы
2. Как вычисляется определитель матрицы 2×2
3. Что такое правило Саррюса
4. Когда используется разложение по строке или столбцу
5. Какие свойства определителя используются для упрощения вычислений

Практическая работа №9 «Действия над матрицами, решение СЛУ»

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными с применением метода Крамера.

Краткие теоретические сведения

1. Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

2. Определитель системы (главный определитель):

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

3. Частные определители:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

4. Решение по формулам Крамера:

Если $D \neq 0$, то

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}.$$

5. Метод Крамера применяется к системам, где число уравнений равно числу неизвестных.

Примеры решений

Пример 1.

Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Главный определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5.$$

Частные определители:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 3 = -10, D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 7 = -5.$$

Решение:

$$x = \frac{-10}{-5} = 2, y = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Решить систему:

$$\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

2. Решить систему:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$$

3. Найти решение:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y + z = 1, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$$

4. Указать, имеет ли система единственное решение:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

5. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ 7x + y = 10. \end{cases}$$

Контрольные вопросы:

1. В чём состоит идея метода Крамера?
2. Когда система имеет единственное решение?
3. Как вычисляются частные определители?
4. Когда метод Крамера неприменим?
5. Что означает $D = 0$ для системы?

Практическая работа №10 «Решение СЛУ»

Цель работы: Освоить метод последовательных исключений (метод Гаусса) и научиться приводить расширенную матрицу системы к ступенчатому виду для нахождения решения.

Краткие теоретические сведения

1. Система линейных уравнений записывается в виде расширенной матрицы:

$$(A \mid B).$$

2. Метод Гаусса основан на преобразовании строк матрицы:

- перестановка строк;
- умножение строки на число;
- прибавление к строке другой строки, умноженной на число.

3. Цель — привести матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

4. После приведения проводится обратный ход, откуда последовательно находятся переменные.
5. Если в процессе появляется строка вида $(0 \ 0 \ 0 \ | \ k), k \neq 0$, система не имеет решений.

Примеры решений

Пример 1

Решить систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + 3z = 14, \\ 3x + 4y - z = 2. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу и выполняем преобразования строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 14 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

1. $R_2 := R_2 - 2R_1$
2. $R_3 := R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -16 \end{array} \right)$$

Меняем строки $R_2 \leftrightarrow R_3$, затем:

$$3. \quad R_3 := R_3 + 3R_2$$

Получаем ступенчатую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -11 & -46 \end{array} \right)$$

Обратный ход:

$$\begin{aligned} -11z &= -46 \Rightarrow z = \frac{46}{11}, \\ y - 4z &= -16 \Rightarrow y = \frac{8}{11}, \\ x + y + z &= 6 \Rightarrow x = \frac{12}{11}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x - y + 2z = 3, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$$

2. Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

3. Найти решение системы:

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + z = 3, \\ -x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

4. Установить совместность системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

5. Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 6x - 2y = 10, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. В чём заключается метод Гаусса?
2. Какие преобразования строк допускаются?
3. Что такое ступенчатый вид матрицы?
4. Когда система не имеет решения?
5. Можно ли применять метод Гаусса при неодинаковом числе уравнений и неизвестных?

Практическая работа №11 «Координаты вектора, Вычисление длины вектора»

Цель работы: Сформировать навыки нахождения координаты вектора, вычисление длины вектора выполнения основных операций с векторами: сложения, вычитания, умножения вектора на число, вычисления скалярного произведения и нахождения угла между векторами.

Краткие теоретические сведения

1. Вектор — направленный отрезок, обозначается $\vec{a} = (a_1, a_2)$ или (a_1, a_2, a_3) .

2. Сложение векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

3. Умножение на число:

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2).$$

4. Длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

5. Скалярное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

6. Угол между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Примеры решений

Пример 1.

Найти сумму векторов

$$\vec{a} = (3, -2), \vec{b} = (1, 4):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + 1, -2 + 4) = (4, 2).$$

Пример 2.

Найти угол между векторами

$$\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (1, -1):$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -1,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{26}}$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Найти сумму и разность векторов:
 - а) $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (5, 3)$
 - б) $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (1, -2)$
2. Найти произведение вектора на число:
 - а) $3\vec{a}$, где $\vec{a} = (2, -5)$;
 - б) $-2\vec{b}$, где $\vec{b} = (-1, 3)$.
3. Вычислить длину векторов:
 - а) $(3, 4)$;
 - б) $(-2, -1)$.
4. Найти скалярное произведение:
 - а) $(1, 2) \cdot (3, -1)$;
 - б) $(4, -3) \cdot (-2, 5)$.
5. Найти угол между векторами:
 - а) $(2, 1)$ и $(1, -2)$;
 - б) $(3, -3)$ и $(1, 1)$.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под вектором?
2. Как выполняется сложение и вычитание векторов?
3. Что такое скалярное произведение?
4. Как вычисляется длина вектора?
5. Как найти угол между двумя векторами?

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1.Растопчина, О. М. Высшая математика: учебное пособие [Электронный ресурс] / О. М. Растопчина. — Москва: Московский педагогический государственный университет, 2024. — Режим доступа:

<https://www.iprbookshop.ru/145721.html> (дата обращения: 01.10.2025).

2.Шнарёва, Г. В. Высшая математика. Линейная алгебра: учебно-методическое пособие (рекомендации по самостоятельному изучению дисциплины) [Электронный ресурс] / Г. В. Шнарёва. — Симферополь: Университет экономики и управления, 2022. — Режим доступа:

<https://www.iprbookshop.ru/128043.html> (дата обращения: 01.10.2025)

3.Абрамова, И. В. Высшая математика: учебно-методическое пособие для практических занятий [Электронный ресурс] / И. В. Абрамова, З. В. Шилова. — Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2023. — Режим доступа:

<https://www.iprbookshop.ru/125591.html> (дата обращения: 01.10.2025)