ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Теоретическая и прикладная механика»

Краткий курс лекций

по дисциплине

«Теоретическая механика»

Автор

Галабурдин А.В.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Направления подготовки - 190600 "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", 190700 "Технология транспортных процессов", 100100 "Сервис"

Автор

Доцент, к.ф.-м. наук А.В. Галабурдин

Оглавление

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА ПО БЛОКАМ

№ блока	Темы заданий	Виды работ	*Max* количество баллов по видам работ	Суммарное *max* количество баллов в блоке
Второй семестр				
1	Статика	Изучение теоретического материала. Решение задач	10	25
	Кинематика	Изучение теоретического материала. Решение задач	15	
2	Динамика точки	Изучение теоретического материала. Решение задач	10	25
	Динамика твердого тела	Изучение теоретического материала. Решение задач	15	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ОСНОВНЫМ РАЗДЕЛАМ КУРСА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

1. Основные понятия статики.
2. Аксиомы статики.
3. Связи и их реакции. Аксиома связей.
4. Равнодействующая сходящейся системы сил.
5. Системы статически определимые и неопределимые.
6. Момент силы.
7. Равновесие произвольной системы сил.
8. Трение скольжения. Трение качения.
9. Центр тяжести твердого тела.
10. Кинематика. Закон движения. Основная задача кинематики.
11. Способы задания движения точки.
12. Скорость и ускорение точки.
13. Поступательное движение тела.
14. Вращательное движение тела.
15. Плоскопараллельное движение тела. Мгновенный центр скоростей.
16. Движение тела вокруг неподвижной точки.
17. Сложное движение точки. Сложение скоростей и ускорений при сложном движении точки.
18. Динамика. Динамика материальной точки. Основные законы динамики.
19. Основные задачи динамики. Дифференциальные уравнения движения точки. Решение первой и второй задачи динамики.
20. Теорема об изменении количества движения точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки. Теорема об изменении момента количества движения точки.
21. Динамика материальной системы. Свойства внутренних сил. Центр масс. Момент инерции механической системы.
22. Уравнение движения системы материальных точек. Теорема о движении центра масс механической системы.
23. Теорема об изменении количества движения механической системы.
24. Теорема об изменении момента количества движения механической системы.
25. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Силовое поле. Потенциальное поле. Закон сохранения механической системы.
26. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

ЛЕКЦИИ

Рекомендуемая литература

1. Тарг СМ. Краткий курс теоретической механики Москва «Высшая Школа» 2002.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах Москва, «Наука» 1991
3. Галабурдин А.В. Теоретическая механика: курс лекций для студ. всех форм обучения МТФ по спец. АС, КШИ, ТШИ Ростов н/Д: РИС ЮРГУЭС, 2005

Тема: «Основные понятия и аксиомы статики. Связи и их реакции. Равновесие системы сходящихся сил»

Основные вопросы темы: основные понятия статики (равновесие, сила, система сил, равнодействующая системы сил, эквивалентные системы сил, внешние и внутренние силы), аксиомы статики, свободное и несвободное тело, связи, наложенные на тело (гладкая поверхность, гибкая нить, цилиндрический шарнир, сферический шарнир, невесомый стержень), реакции связей, активные силы, сходящиеся система сил, равновесие сходящейся системы сил.

Вопросы для самоконтроля

1.Дайте определение основных понятий (равновесие, сила, система сил, равнодействующая системы сил, эквивалентные системы сил, внешние и внутренние силы)

2. Сформулируйте аксиомы статики

3.Что такое реакции связей и активные силы

4.Реакции связей гладкой поверхности, гибкой нити, цилиндрического шарнира, сферического шарнира, невесомого стержня.

5. Условие равновесия сходящиеся система сил.

Рекомендуемая литература:
[1]- гл.1,2 [3]- 1 ч.

Тема: Момент силы относительно точки и относительно оси. Теорема Вариньона

Основные вопросы темы: определение момента силы относительно точки и относительно оси, главный момент системы сил, теорема Вариньона

Вопросы для самоконтроля

1.Дайте определение момента силы относительно точки.

2.Дайте определение момента силы относительно оси.

3. Сформулируйте теорему Вариньона

4.Что такое главный момент системы сил?

Рекомендуемая литература:[1]- гл.3 [3]- 1 ч.

Тема: Пар сил. Момент пары сил. Равновесие плоской системы сил. Равновесие произвольной системы сил.

Основные вопросы темы: Пар сил, момент пары сил, неуравновешенность пары сил, условие равновесия плоской системы сил, условия равновесия произвольной системы сил.

Вопросы для самоконтроля

1.Что такое пара сил?

2. Чему равен момент пары сил?

3.Сформулируйте условие равновесия плоской системы сил.

4. Сформулируйте условие равновесия произвольной системы сил

Рекомендуемая литература:[1]- гл.7 [3]- 1 ч.

Тема: Силы трения Сила тяжести. Центр тяжести

Основные вопросы темы: сила трения скольжения, коэффициент трения скольжения, сила трения качения, коэффициент трения качения, сила тяжести, центр тяжести, определение центра тяжести.

Вопросы для самоконтроля

1.Что такое сила трения скольжения?

2. Что такое коэффициент трения скольжения и от чего он зависит?

3.Что такое сила трения качнеия?

4. Что такое коэффициент трения качения и от чего он зависит?

5. Что такое центр тяжести?

Рекомендуемая литература:[1]- гл.6,8 [3]- 1 ч.

Тема: Кинематика материальной точки

Основные вопросы темы: способы задания движения точки, вектор скорости точки, вектор ускорения точки, нормальная и касательная составляющая ускорения точки.

Вопросы для самоконтроля

1.Что такое векторный способ задания движения точки?

2.Что такое координатный способ задания движения точки?

3.Что такое естественный способ задания движения точки?

4.Что такое скорость точки?

5. Что такое ускорение точки?

6. Нормальная и касательная составляющие ускорения точки.

Рекомендуемая литература:[1]- гл.9 [3]- 1 ч.

Тема: Кинематика поступательного и вращательного движения

Основные вопросы темы: поступательное движение тела, задание поступательного движения тела, скорости и ускорения точек тела при поступательном движении, вращательное движение тела, задание вращательного движения тела, угловая скорость и угловое ускорение, скорости и ускорения точек тела при поступательном движении

Вопросы для самоконтроля

1.Что такое поступательное движение тела?

2. Скорость и ускорение точек тела при поступательном движении

3. Что такое вращательное движение тела?

4. Задание вращательного движения тела.

5. Дайте определение угловой скорости и углового ускорения.

6. Скорость и ускорение точек тела при вращательном движении

Рекомендуемая литература:[1]- гл.10 [3]- 1 ч.

Тема: Плоскопараллельное движение тела Движе-

ние тела вокруг неподвижной точки

Основные вопросы темы: плоскопараллельное движение тела, задание плоскопараллельного движения тела, скорость точек тела при плоскопараллельном движении тела, мгновенный центр скоростей, движение тела вокруг неподвижной точки, ускорение тела при плоскопараллельном движении тела, движение тела вокруг неподвижной точки и его задание, углы Эйлера, скорость и ускорение точек тела при движении тела вокруг неподвижной точки.

Вопросы для самоконтроля

1.Задание плоскопараллельного движения тела.

2. Скорость точек тела при плоскопараллельном движении тела

3. Что такое мгновенный центр скоростей?

4. Ускорение точек тела при плоскопараллельном движении тела

5. Задание движения тела вокруг неподвижной точки

6. Углы Эйлера

7. Скорость точек тела при движении тела вокруг неподвижной точки.

8. Ускорение точек тела при движении тела вокруг неподвижной точки.

Рекомендуемая литература:[1]- гл.11,12 [3]- 1 ч.

Тема: Законы динамики. Задачи динамики материальной точки. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Основные вопросы темы: законы динамики, первая и вторая задачи динамики, дифференциальные уравнения движения точки, решение первой и второй задач динамики точки

Вопросы для самоконтроля

1. Основные законы динамики точке
2. Сформулируйте основные задачи динамики точки
3. Дифференциальные уравнения движения точки
4. Решение первой и второй задач динамики точки

Рекомендуемая литература:[1]- гл.15,16 [3]- 2 ч.

Тема: Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения материальной точки.

Основные вопросы темы: количества движения точки, импульс тела, теоремы об изменении количества движения точки, закон сохранения количества движения, момент количества движения материальной точки, теорема об изменении количества движения точки, закон сохранения момента количества движения.

Вопросы для самоконтроля

1.Что такое количества движения точки?

2.Что такое импульс силы?

3.Сформулируйте теорему об изменении количества движения точки

4. Сформулируйте закон сохранения количества движения материальной точки

5. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения точки

6. Сформулируйте закон сохранения момента количества движения материальной точки.

Рекомендуемая литература:[1]- гл.17 [3]- 2 ч.

Тема: Прямолинейное колебание точки

Основные вопросы темы: дифференциальные уравнения свободных колебаний материальной точки, дифференциальные уравнения свободных колебаний материальной точки при наличии сил вязкого сопротивления, дифференциальные уравнения вынужденных колебаний материальной точки, резонанс.

Вопросы для самоконтроля

1. Выпишите дифференциальные уравнения свободных колебаний материальной точки.
2. Выпишите дифференциальные уравнения свободных колебаний материальной точки при наличии сил вязкого сопротивления.
3. Выпишите дифференциальные уравнения вынужденных колебаний материальной точки.
4. Что такое резонанс?

Рекомендуемая литература:[1]- гл.19 [3]- 2 ч.

Тема: Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Основные вопросы темы: работа силы, мощность, кинетическая энергия материальной точки, теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое работа силы?
2. Что такое мощность?
3. Что такое кинетическая энергия материальной точки?
4. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

Рекомендуемая литература:[1]- гл.17 [3]- 2 ч.

Тема: Механическая система. Внешние и внутренние силы. Свойства внутренних сил. Центр масс, момент инерции.

Основные вопросы темы: механическая система. внешние и внутренние силы. свойства внутренних сил, центр масс, момент инерции

Вопросы для самоконтроля

1.Что такое механическая система?

2. Какие силы называются внешними и какие силы называются внешними?

3. Свойства внутренних сил.

4. Что такое центр масс?

5. Что такое момент инерции?

Рекомендуемая литература:[1]- гл.21, [3]- 2 ч.

Тема: Дифференциальные уравнения движения системы тел. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении количества движения твердого тела

Основные вопросы темы: дифференциальные уравнения движения системы тел, теорема о движении центра масс механической системы, закон сохранения движения центра масс, количество движения твердого тела, теорема об изменении количества движения твердого тела, закон сохранения количества движения.

Вопросы для самоконтроля

1. Дифференциальные уравнения движения системы тел.
2. Теорема о движении центра масс механической системы.
3. Закон сохранения движения центра масс.
4. Что такое количество движения твердого тела?
5. Теорема об изменении количества движения твердого тела.
6. Закон сохранения количества движения

Рекомендуемая литература:[1]- гл.22,23, [3]- 2 ч.

Тема: Теорема об изменении момента количества движения твердого тела. Закон сохранения момента количества движения.

Основные вопросы темы: момента количества движения твердого тела, теорема об изменении момента количества движения твердого тела, закон сохранения момента количества движения.

Вопросы для самоконтроля

1.Что такое момент количества движения твердого тела?

2. Теорема об изменении момента количества движения твердого тела.

3. Закон сохранения момента количества движения.

Рекомендуемая литература:[1]- гл.24, [3]- 2 ч.

Тема: Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела. Закон сохранения механической энергии.

Основные вопросы темы: кинетическая энергия механической системы, теорема об изменении кинетической энергии твердого тела, потенциальное силовое поле, потенциальная энергия, закон сохранения механической энергии.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое кинетическая энергия механической системы?
2. Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела.
3. Что такое потенциальное силовое поле?
4. Что такое потенциальная энергия.
5. Закон сохранения механической энергии

Рекомендуемая литература:[1]- гл.25, [3]- 2 ч.

Тема: Динамика плоскопараллельного движения твердого тела.

Основные вопросы темы: дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела

Вопросы для самоконтроля

1.Уравнение движения центра масс тела.

2. Уравнения вращательного движения тела вокруг его центра масс

Рекомендуемая литература:[1]- гл.26, [3]- 2 ч.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ.

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучается условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием понимается состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам.

В механике рассматриваются только задачи о равновесии твердых тел. Все твердые тела под влиянием внешних воздействий изменяют форму (деформируются). Эти деформации обычно бывают достаточно малыми и при изучении условий равновесия ими пренебрегают, рассматривая твердые тела как недеформируемые или абсолютно твердые.

Абсолютно твердым телом будем называть такое тело, расстояние между любыми точками которого всегда остается постоянным.

Состояние равновесия или движения тела зависит от характера его механических взаимодействий с другими телами, то есть от тех давлений, притяжений или отталкиваний, которые тело испытывает от этих взаимодействий.

Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется силой.

Сила есть векторная величина. Ее действие на тело определяется: 1) численной величиной, 2) направлением, 3) точкой приложения.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

Совокупность сил, действующих на какое-нибудь твердое тело, будем называть системой сил.

Тело, не скрепленное с другими телами, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется свободным.

Если одну систему сил, действующих на свободное тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или характер движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются эквивалентными.

Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется уравновешенной или эквивалентной нулю.

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей данной системы сил.

Сила, равная равнодействующей по модулю, но противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется уравновешивающей.

Силы, действующие на твердое тело можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел.

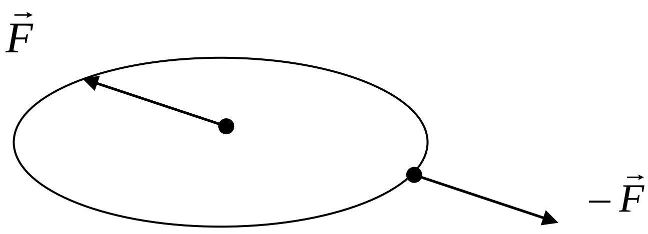
Внутренними называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

Сила действующая в какой-нибудь одной точке тела называется сосредоточенной. Сила, действующая на все точки данного объема или данной части поверхности тела называется распределенной.

Аксиомы статики.

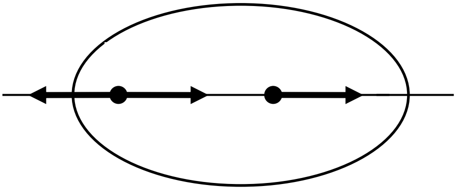
Аксиомы статики есть результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, из которых выводятся все теоремы и уравнения статики.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.



Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить уравновешенную систему сил.

Следствие из первой и второй аксиом. Действие сил на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.



Пусть на тело действует сила **F**, приложенная в точке А. Приложим в точке В силы $\mathbf{F_1} = -\mathbf{F}$ **и** $\mathbf{F_2} = \mathbf{F}$, представляющие уравновешенную систему сил. Силы **F** и $\mathbf{F_1}$ согласно аксиоме 1 тоже образуют уравновешенную систему сил и они могут быть отброшены.

Тогда на тело будет действовать только сила $\mathbf{F_2}$, равная силе **F** но приложенная в другой точке ее линии действия.

Аксиома 3. Две силы приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную векторной сумме этих сил и приложенную в той же точке.

Аксиома 4. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Аксиома 5. (принцип отвердевания) Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

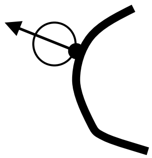
Связи и их реакции.

Тело, перемещением которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие тела, называется несвободным. Все то, что ограничивает перемещение тела в пространстве, будем называть связью. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой реакции связи. Силы, не являющиеся реакциями связей, называются активными.

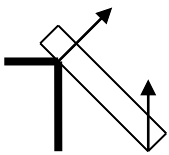
Модуль и направление активной силы непосредственно не зависят от других действующих на тело сил. Реакция связи отличается от активных сил тем, что ее числовое значение всегда зависит от этих сил и заранее неизвестна. Для определения величины реакции связи надо решать соответствующую задачу статики.

Рассмотрим некоторые основные виды связей.

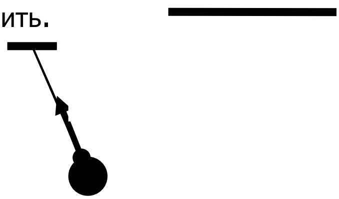
1.Гладкая поверхность.



Гладкой называется поверхность, трением о которую можно пренебречь. Реакция **N** гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел. Если одна из соприкасающихся поверхностей есть точка, то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

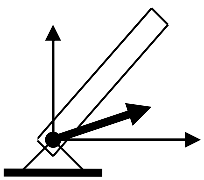


2. Гибкая нить.



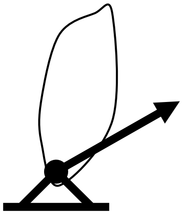
Реакция нити **T** направлена вдоль нити к точке ее подвеса А.

3. Цилиндрический шарнир (подшипник)



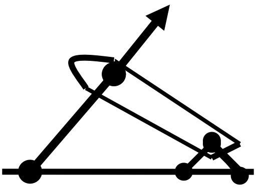
Тело прикрепленное к опоре D шарниром может поворачиваться как угодно вокруг оси шарнира. При этом точка А не может перемещаться перпендикулярно к оси шарнира. Реакция **R** цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости перпендикулярной к оси шарнира.

4.Шаровой шарнир.



Этот вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никаких перемещений в пространстве. Реакция **R** шарового шарнира может иметь любое направление в пространстве.

5.Стержень.

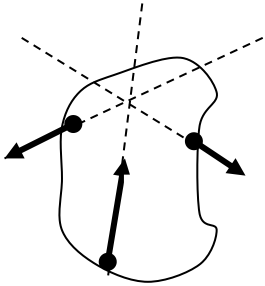


Пусть в конструкции связью является стержень АВ, закрепленный на концах шарнирами, весом которого можно пренебречь. Реакция стержня **N** всегда направлена вдоль оси стержня.

Аксиома связей: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.

Равнодействующая сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.



По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (точке пересечения их линий действия). Складывая векторно эти силы, получим равнодействующую системы сходящихся сил, равную сумме действующих сил и называемую **главным вектором системы**.

Уравновешенность системы сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым и достаточным условием равновесия тела. Для равновесия приложенных к телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил бала равна нулю

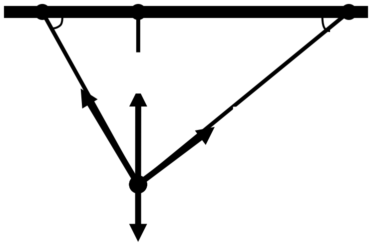
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (1)$$

Статически определимые и неопределимые системы.

При решении задач о равновесии несвободного твердого тела реакции наложенных связей являются величинами неизвестными. Число этих неизвестных зависит от числа и характера наложенных связей. Задача статики может быть решена только в том случае, когда для нее число неизвестных реакций связей не превышает числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Такие задачи называются статически определенными, а системы тел, для которых это имеет место – статически определимыми системами.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются статически неопределенными, а соответствующие системы тел – статически неопределимыми системами.

В качестве примера рассмотрим стержневую систему, в которой три стержня, расположенные в вертикальной плоскости, соединены шарнирно с горизонтальной плоскостью и между собой и нагружены вертикальной силой **P**.



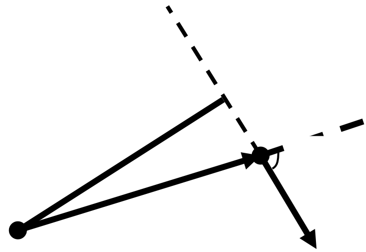
В этом случае имеем три неизвестные – T_1, T_2, T_3 (модули неизвестных сил реакций связей, направления этих сил известны). Уравнений равновесия в этом случае можно составить только два, спроектировав условие равновесия системы сходящихся сил (1) на ось X и ось У. Статическая неопределенность появляется от наложения лишних связей. В приведенном примере для обеспечения равновесия системы достаточно двух стержней, третий стержень является лишним.

Момент силы.

Моментом силы F относительно точки O называется векторная величина **M=r×F** , где r - радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы.

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| * \left|\vec{F}\right| * \sin\alpha = \left|\vec{F}\right| * l = \vec{M}\left(\vec{F}\right), \qquad l = \left|\vec{r}\right| * \sin\alpha$$

l – плечо силы **F**, расстояние от точки O до линии действия силы.



Если имеется система сил $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, … $\mathbf{F_n}$, то вектор $\mathbf{M_o}$, равный сумме моментов этих сил относительно точки О называется главным моментом системы сил.

$$\mathbf{M_o=M(F_1)+M(F_2)+\ldots+M(F_n)}$$

Если все силы приложены в одной точке, то

$$\mathbf{M_o=r\times F_1+ r\times F_2 +\ldots +r\times F_n = r\times(F_1+F_2+\ldots+F_n)}$$

Момент суммы сил в этом случае равен сумме моментов этих сил (теорема Вариньона).

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\vec{i}(yF_3-zF_2)+\vec{j}(zF_1-xF_3)+\vec{k}(xF_2-yF_1)$$

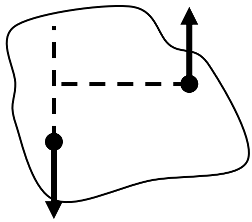
где

$(yF_3-zF_2),(zF_1-xF_3),(xF_2-yF_1)$, соответственно , моменты силы относительно осей X,Y,Z.

Из определения момента силы относительно осей следует, что момент относительно любой оси считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг оси против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси), и отрицательным в противоположном случае.

Пара сил.

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело



Расстояние d между линиями действия сил пары называется плечом пары.

Моментом пары сил называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо

$$M=\pm Fd$$

Система сил, образующих пару, не находится в равновесии, несмотря на то, что их сумма равна нулю.

Равновесие произвольной системы сил.

Для равновесия произвольной системы сил, очевидно, недостаточно потребовать, чтобы главный вектор системы равнялся нулю.

Если среди сил системы есть силы, образующие пару сил, или система может быть заменена эквивалентной системой сил, включающую в себя хотя бы одну пару сил, то в силу неуравновешенности пары сил такая система сил не может обеспечить телу состояния покоя. Следовательно, для равновесия произвольной системы сил необходимо потребовать равенство нулю еще и главного момента системы, то есть

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k=0 \qquad \sum_{k=1}^{n}\vec{M}(\vec{F}_k)=0$$, или

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{rz} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} Mz(\vec{F}) = 0$$

Таким образом, для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей и сумма их моментов относительно этих осей были равны нулю.

Трение.

Трение скольжение. При стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой трения скольжения. Величина этой силы может принимать любые значения от 0 до значения $\mathbf{F_{пр}}$, называемого предельной силой трения. Сила трения направлена в сторону противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения f_0 на нормальное давление

$$\mathbf{F_{пр}}=f_0\mathbf{N}$$

f_0- число отвлеченное, определяемое экспериментально, зависит от материала и состояния (шероховатость, температура, влажность)

трущихся поверхностей.

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению и равна $\mathbf{F_{тр}}=f\mathbf{N}$**,** где f – динамический коэффициент трения, определяемый также экспериментально.

f- зависит от материала тел, состояния трущихся поверхностей и от скорости движения.

Трение качения. Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Трение качения подчиняется формально тем же законам, что и трение скольжения, однако коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньше.

Центр тяжести.

На любую частицу тела действует направленная вертикально вниз сила тяжести. Для тел, размеры которых малы по сравнению с радиусом Земли, силы тяжести, действующие на разные частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину при любых поворотах тела.

Поле тяжести, в котором выполняются эти условия, называется однородным полем тяжести.

Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве.

Координаты центра тяжести тела определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum_k p_k x_k}{P}$$

$$y_c = \frac{\sum_k p_k y_k}{P} \qquad z_c = \frac{\sum_k p_k z_k}{P}$$

p_k – силы тяжести, действующие на частицы данного тела,

x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил тяжести $\mathbf{p_k}$ частиц тела.

Кинематика.

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил.

Под движением понимается изменение с течением времени положения тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, которая вместе с телом образует систему отсчета. Если координаты всех точек тела в выбранной системе координат остаются постоянными, то тело по отношению к этой системе отсчета находится в покое. В противном случае тело по отношению к данной системе отсчета находится в движении.

Кинематически задать движение или закон движения тела значит задать положение этого тела, относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения тела определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности.

Способы задания движения точки.

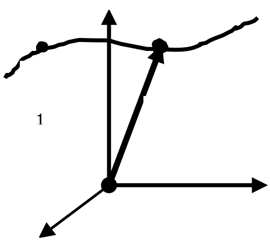
1.Координатный способ.

При координатном способе задания движения положение точки в пространстве в любой момент времени t определяется заданием ее координат как функций времени

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

2.Векторный способ.

При векторном способе задания движения положение точки в любой момент времени t задается ее радиусом-вектором **r**=**r(t)**



3.Естественный способ.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка, называется траекторией движения точки. Выберем на траектории какую-нибудь фиксированную точку O_1, которую примем за начало отсчета. Рассматривая траекторию как криволинейную координатную ось, установим на ней положительное и отрицательное направления. Положение точки М на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой s, равной расстоянию от точки O_1 до М по дуге траектории O_1M, взятой со знаком плюс или минус, в зависимости от того, по какую сторону от фиксированной точки O_1 располагается точка М.

Скорость точки.

Скорость точки **v** в данный момент времени есть первая производная от ее радиуса вектора по времени.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \overset{\circ}{\vec{r}}$$

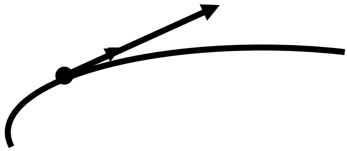
Производную по времени в механике принято обозначать точкой над дифференцируемой величиной.

Если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то вектор скорости $\vec{v} = \overset{\circ}{x}\vec{i} + \overset{\circ}{y}\vec{j} + \overset{\circ}{z}\vec{k}$.

Таким образом $v_x = \overset{\circ}{x}$, $v_y = \overset{\circ}{y}$, $v_z = \overset{\circ}{z}$

При естественном способе задания движения точки будем рассматривать радиус-вектор как сложную функцию $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$.

Тогда $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}v$, где $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ - единичный вектор, касательный к траектории движения точки, $v = \frac{ds}{dt}$ - величина скорости.



Ускорение точки.

Вектор ускорения точки **W** в данный момент времени равен первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной по времени от радиуса – вектора точки.

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overset{\circ\circ}{\vec{r}}$$

При векторном способе задания движения имеем

$$\vec{w} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Тогда $w_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt}$, $w_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt}$,

$$w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}$$

При естественном способе задания движения точки $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

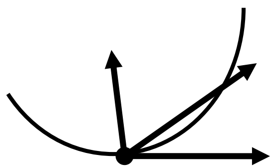
$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau}v) = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v + \vec{\tau}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}v + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}$$

,

Из дифференциальной геометрии известно, что $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{\rho}$, где

$\vec{n}$ -единичный вектор главной нормали к траектории, ρ-радиус кривизны траектории, $\dfrac{ds}{dt} = v$, $\dfrac{dv}{dt} = w_\tau$ -касательная составляющая вектора ускорения.

Тогда $$\vec{w} = \frac{\vec{n}}{\rho}v^2 + \vec{\tau}w_\tau = \vec{n}w_n + \vec{\tau}w_\tau$$, где w_n - нормальная составляющая вектора ускорения.



Поступательное движение твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Теорема. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения.

Возьмем в теле совершающем поступательное движение две произвольные точки A и B, положение которых в момент времени t определяется радиусами- векторами $\mathbf{r_A}$ и $\mathbf{r_B}$. Тогда $\mathbf{r_B}=\mathbf{r_A}+\mathbf{AB}$. Учитывая тот факт, что в силу определения поступательного дви-жения вектор **AB** все время остается постоянным (его длина не изменяется так как тело является твердым и его направление остается неизменным так как он лежит на прямой, которая переме-щается параллельно самой себе), имеем

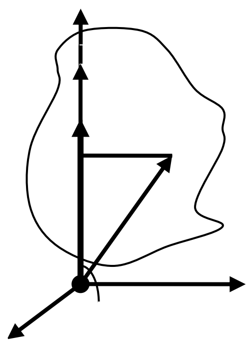
$\vec{v}_B = \dfrac{d\vec{r}_B}{dn} = \dfrac{dr_A}{dt} = v_A$, тогда $\vec{w}_B = \vec{w}_A$ и траектория точки В получается из траектории точки А параллельным смещением на вектор **АВ.** В силу произвольности точек А и В данные соотношения справедливы для любых точек тела.

Таким образом, для того, чтобы изучить движение тела, совершающего поступательное движение, достаточно изучить движение любой его точки.

Вращательное движение твердого тела.

Вращательным движением называется такое, при котором какие-нибудь две точки принадлежащие телу или неизменно связанные с ним остаются во все время движения неподвижными.

Проходящая через эти неподвижные точки прямая, называется осью вращения.



Положение тела в любой момент времени t определяется угловой координатой (углом закручивания) $\varphi=\varphi(t)$. Угол $\varphi>0$, если для смотрящего с положительного конца оси z тело вращается против часовой стрелки, и $\varphi<0$ в противном случае.

Угловой скоростью $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$. Угловую скорость можно представить в виде вектора $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.

Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. Угловое ускорение также можно представлять в виде вектора $\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k}$.

Рассмотрим точку M, расположенную на расстоянии h от оси вращения z. За время Δt тело поворачивается на угол $\Delta\varphi$ и точка M, двигаясь по окружности радиуса h, получает перемещение $\Delta s = h\Delta\varphi$.

Тогда

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h\Delta\varphi}{\Delta t} = h \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = h\frac{d\varphi}{dt} = h\omega$$

Для определения ускорения точки воспользуемся ранее полеченными формулами

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(h\omega)}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon,$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{h^2\omega^2}{h} = h\omega^2$$, здесь учтено, что $h=\rho$.

Касательное ускорение w_τ направлено по касательной к траектории, а нормальное ускорение w_n направлено по радиусу h к оси вращения.

Полученное выражение для скорости можно представить в виде

$$v = h\omega = |\vec{r}||\vec{\omega}|\sin\alpha = |\vec{\omega}\times\vec{r}|.$$

Тогда вектор скорости представим как $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

Линейная скорость точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольной точки, лежащей на оси вращения.

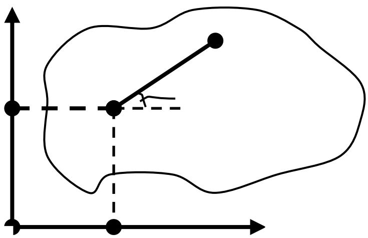
Плоскопараллельное движение тела.

Плоскопараллельным движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости П.

При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой перпендикулярной плоскости П движутся одинаково. Поэтому для изучения движения всего тела достаточно изучить как движется сечение S тела плоскостью параллельной плоскости П.

Положение сечения S в плоскости OXY определяется положением какого-нибудь проведенного в этом сечении отрезка AB. Положение отрезка определяется координатами точки A(x_A, y_B) и углом φ, который отрезок AB образует с осью X. Точка A при этом называется полюсом. Тогда плоскопараллельное движение тела задается соотношениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\varphi=\varphi(t)$.

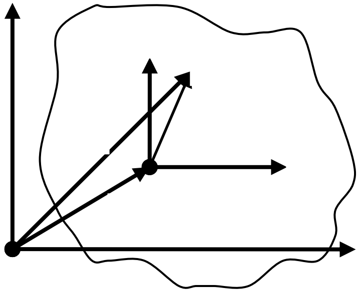
При движении сечения S отрезок AB совершает поступательное движение и вращательное движение вокруг полюса A, которое описывается заданием изменения во времени угла φ.



Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении.

Положение любой точки тела M в сечении S определяется радиус-вектором , $\mathbf{r}=\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}$ –радиус-вектор точки в неподвижной системе координат OXY, $\mathbf{r}_A$- радиус –вектор определяющий положение подвижной си- стемы координат

AX_1Y_1,связанной с полюсом движущегося тела A, по отношению к неподвижной системе, **r**$_1$- радиус-вектор, определяющий положение точки в подвижной системе координат AX_1Y_1.



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$$,где $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ - скорость полюса A,

$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_{MA}$ - скорость, которую точка M получает относительно системы AX_1Y_1, при вращении тела вокруг полюса A.

Скорость точки M во вращательном движении вокруг полюса A, как было показано ранее, определяется по формуле $\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$,

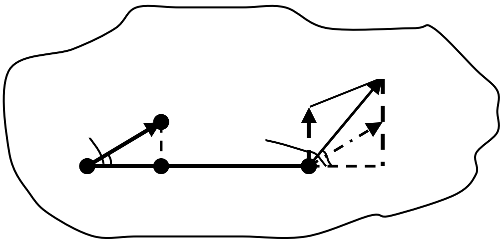
тогда $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_1$.

Скорость любой точки M векторно складывается из скорости полюса A и скорости точки M в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.

Теорема. Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу.

Рассмотрим какие-нибудь две точки тела A и B. Принрмая точку A за полюс получим $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Проектируя обе части данного равенства на прямую AB и учитывая, что $\vec{v}_{BA} \perp AB$, получим

$$ПР_{AB}\vec{v}_B = ПР_{AB}\vec{v}_A.$$



Мгновенный центр скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка Р сечения S тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если в данный момент времени взять в качестве полюса мгновенный центр скоростей, то для любой точки сечения А будем иметь $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AP}$, так как $\vec{v}_P = 0$.

Таким образом скорость любой точки тела, лежащего в сечении S, равна ее вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей Р.

Рассмотрим любые две точки тела А и В, совершающего плоскопараллельное движение. Тогда из вышесказанного получим

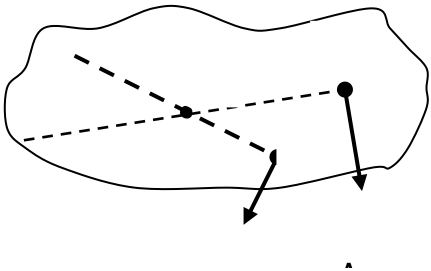
$$|\vec{v}_A| = \omega \times PA, \quad |\vec{v}_B| = \omega \times PB,$$ то есть $\vec{v}_A / PA = \vec{v}_B / PB$.

Скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Для определения положения мгновенного центра скоростей надо знать направления скоростей любых двух точек сечения А и В. Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек А и В к векторам скоростей этих точек.

Для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки тела А и направление скорости другой точки В. Восстановив из точек А и В перпендикуляры к $\vec{v}_A u \vec{v}_B$, можно определить положение мгновенного центра скоростей Р. По направлению скорости в точке А определяется направление поворота тела вокруг Р. После этого значение скорости любой точки тела М определяется по формуле

$$\left|\vec{v}_M\right| = \left|\vec{v}_A\right| \times PM / PA.$$



Угловая скорость вращения тела вокруг мгновенного центра скоростей Р в каждый момент времени равна отношению скорости какой-нибудь точки сечения S к ее расстоянию от Р $\omega = \left|\vec{v}_A\right| / PA$.

Ускорение точек тела в плоскопараллельном движении.

Ускорение произвольной точки сечения М равно

$$\vec{W}_M = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}\text{, где}$$

$\dfrac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = \vec{W}_A$ - ускорение полюса А, $\dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{W}_{MA}$ - ускорение точки М при ее вращении вместе с телом вокруг полюса А.

Для ускорения $\vec{W}_{MA}$ точки справедливы ранее полученные формулы для вращательного движения тела .

$\vec{W}_{MA} = \vec{W}_{MA}^{n} + \vec{W}_{MA}^{\tau}$, где $\vec{W}_{MA}^{n}$ - нормальная составляющая ускорения,

$\vec{W}_{MA}^{\tau}$ - касательная составляющая ускорения. При этом

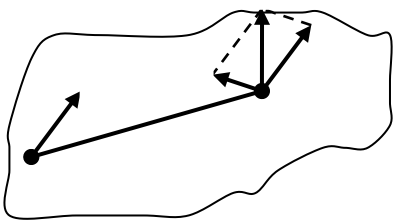
$\vec{W}_{MA}^{\tau} \perp \vec{W}_{MA}^{n}$ и $\left|\vec{W}_{MA}^{\tau}\right| = MA\omega^2$,

$\left|\vec{W}_{MA}^{n}\right| = MA\varepsilon$,

где ω - угловая скорость , а ε - угловое ускорение вращения сечения относительно полюса А.

Ускорение любой точки тела векторно складывается из ускорения точки, принятой за полюс и ускорения точки М в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.

При решении задач удобнее вектор $\vec{W}_{MA}$ заменять его касательной $\vec{W}_{MA}^{\tau}$ и нормальной $\vec{W}_{MA}^{n}$ составляющими.



Вектор $\vec{W}_{MA}^{\tau}$ направлен перпендикулярно АМ в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения в противном случае.

Тогда $\vec{W}_{M} = \vec{W}_{A} + \vec{W}_{MA}^{\tau} + \vec{W}_{MA}^{n}$.

Если полюс движется не прямолинейно, то его ускорение также будет слагаться из касательного и нормального

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A^{\tau} + \vec{W}_A^{n} + \vec{W}_{MA}^{\tau} + \vec{W}_{MA}^{n},$$

где $\left|\vec{W}_A^{\tau}\right| = OA \times \varepsilon_A$, $\left|\vec{W}_A^{n}\right| = OA \times \omega_A^2$,

О – точка, вокруг которой вращается полюс А, ω_A, ε_A - соответственно, угловая скорость и угловое ускорение полюса А.

Движение тела вокруг неподвижной точки.

Пусть имеем тело с одной неподвижно закрепленной точкой, вокруг которой тело может как угодно поворачиваться. Будем называть движение такого тела с одной неподвижной точкой движением вокруг неподвижной точки.

Рассмотрим движение по отношению к системе отсчета $OX_1У_1Z_1$

твердого тела, закрепленного так, что одна его точка О остается неподвижной. Свяжем жестко с телом систему отсчета ОХУZ.

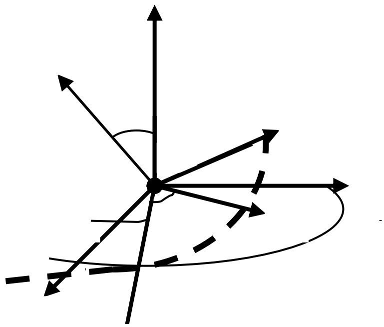
Линия ОК, вдоль которой пересекаются плоскости ОХУ и $OX_1У_1$

называется линией узлов.

Положение по отношению к системе отсчета $OX_1У_1Z_1$ системы отсчета ОХУZ, а значит и самого тела можно определить углами

$\varphi = \angle KOX$, $\psi = \angle X_1OK$, $\theta = \angle Z_1OZ$.

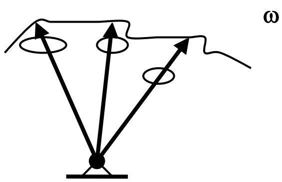
Эти углы называются углами Эйлера: φ - угол собственного вращения, ψ - угол прецессии, θ - угол нутации.



Тогда положение тела в любой момент времени определяется этими углами и закон движения имеет вид

$$\varphi = \varphi(t)\ , \quad \psi = \psi(t)\ , \quad \theta = \theta(t)\ .$$

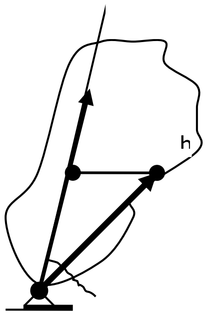
Теорема Эйлера – Даламбера. Всякое элементарное (бесконечно малое) перемещение тела, имеющего неподвижную точку, представляет собою элементарный поворот вокруг неподвижной мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку.



Угловая скорость **ω** , с которой тело совершает элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения, называется угловой скоростью в данный момент времени или мгновенной угловой скоростью тела. Она представляется в виде вектора **ω**, направление которого меняется со временем, а его конец А описывает в пространстве некоторую кривую. Мгновенное ускорение тела $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Скорости и ускорения точек тела, имеющего одну неподвижную точку.

При движении около неподвижной точки тело имеет в каждый момент времени мгновенную ось вращения OP.



Тогда $|\vec{v}_м| = |\vec{\omega}| \times h = |\vec{\omega}| \times |\vec{r}| \times \sin\alpha = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$

, где h – расстояние от точки M до оси вращения OP, а $\vec{r}$ - радикс – вектор точки M.

Следовательно $\vec{v}_м = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Вектор скорости любой точки M тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус – вектор этой точки.

Для определения ускорения продифференцируем по времени полученное векторное выражение для вектора скорости.

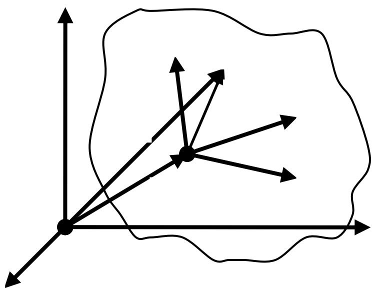
$$\vec{W}_м = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

,

где $\vec{W}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ - вращательное ускорение, $\vec{w}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}$ - осестреми- тельное ускорение.

Сложное движение точки.

В ряде случаев оказывается целесообразно рассматривать движение точки или тела одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых является неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение при этом совершаемое телом называется сложным.



Движение, совершаемое точкой М по отношению к подвижной системе отсчета, называется относительным движением. Скорость движения точки М по отношению к подвижной системе отсчета называется относительной скоростью $\vec{V}_r$, а ускорение относительным ускорением $\vec{W}_r$.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета, является для точки М переносным движением. Скорость той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка М, называется переносной скоростью точки М в этот момент $\vec{V}_e$, а ускорение – переносным ускорением $\vec{W}_e$.

Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета, называется абсолютным, скорость – абсолютной скоростью $\vec{V}_a$, а ускорение – абсолютным ускорением

$\vec{W}_a$.

Пусть подвижная система отсчета $AX_1У_1Z_1$ движется произвольным образом относительно неподвижной системе отсчета OXYZ.

Положение точки М определяется в неподвижной системе отсчета радиус-вектором **r**, а в подвижной системе отсчета – $\mathbf{r_1}$, причем $\mathbf{r} = \mathbf{r_A} + \mathbf{r_1}$, где $\mathbf{r_A}$ – радиус – вектор определяющий положение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной.

Тогда $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}$, где $X_1,У_1,Z_1$ – координаты точки М в подвижной системе отсчета, $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ - единичные вектора, направленные, соответственно, вдоль осей AX_1, $AУ_1$, AZ_1 и абсолютная скорость движения точки М равна

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

При непоступательном движении системы отсчета $AX_1У_1Z_1$ направления ортов $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ непрерывно изменяются, следовательно, они являются переменными векторами.

Ранее при изучении движения твердого тела вокруг неподвижной точки было получено соотношение $\vec{v}_м = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,

определяющее производную вектора $\vec{r}$, вращающегося вокруг мгновенной оси вращения OP с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Очевидно, что для векторов $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, совершающих вращательное движение вокруг закрепленной по отношению к подвижной системе отсчета точки А, справедливы те же формулы

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1,$$

где $\vec{\omega}$ - мгновенная угловая скорость вращения подвижной системы отсчета.

$$\vec{v}_r = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$ - есть скорость

точки М относительно подвижной системы координат, то есть относительная скорость, а

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + x_1(\vec{\omega}\times\vec{i}_1) + y_1(\vec{\omega}\times\vec{j}_1) + z_1(\vec{\omega}\times\vec{k}_1) =$$

$$= \vec{\omega}\times(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) = \vec{\omega}\times\vec{r}_1$$

- представляет собой переносную скорость.

Таким образом при сложном движении абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Абсолютное ускорение

$$\vec{W}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt},$$

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}_1\right) = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_1 + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}_1 + \vec{\omega}\times\vec{v}_r = \vec{W}_e + \vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

, где $\vec{W}_e = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ - переносное ускорение, а

$$\vec{W}_A = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2}$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}\right) = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1$$

$$+\frac{dx_1}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{i}_1) + \frac{dy_1}{dt}(\omega\times\vec{j}_1) + \frac{dz_1}{dt}(\omega\times\vec{k}_1)$$

$$= \vec{W}_r + \vec{\omega}\times\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}\right) = \vec{W}_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

, где $\vec{W}_r = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}$ - относительное ускорение.

Тогда $\vec{W}_A = \vec{W}_e + \vec{W}_r + 2\omega\times\vec{v}_r = \vec{W}_e + \vec{W} + \vec{W}_k$,

где $\vec{W}_k = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ - ускорение Кариолиса.

Если подвижная система отсчета движется поступательно, то ее мгновенная угловая скорость $\vec{\omega} = 0$ и ускорение Кариолиса равно нулю.

При сложном движении абсолютное ускорение равно векторной сумме относительного ускорения, характеризующего изменение относительной скорости в относительном движении, переносного ускорения, характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении, и Кариолисова ускорения, характеризующего изменение относительной скорости в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.

Динамика.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

На тело наряду с постоянными силами действуют обычно и силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются. Переменные силы могут определенным образом зависеть от времени, от положения тела и от его скорости.

Если одну и ту же силу приложить к двум разным телам, то в общем случае по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил. Более инертное тело при этом медленнее изменяет свою скорость.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина называемая массой тела.

Динамика материальной точки.

Материальной точкой называется материальное тело имеющее массу, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь, то есть когда расстояния, проходимые точками тела при его движении, очень велики по сравнению с размерами тела.

Законы динамики.

В основе динамики лежат законы, впервые точно сформулированные и систематически изложенные Исааком Ньютоном, Все дальнейшие выводы получаются из этих основных законов.

I закон (закон инерции). Если на материальную точку не действуют никакие силы. То эта точка или находится в покое, или движется прямолинейно и равномерно.

Системы отсчета, по отношению к которым выполняется закон инерции, называются инерциальными системами отсчета.

II закон (основной закон динамики). Модуль силы, действующей на материальную точку, равен произведению массы точки на модуль ее ускорения, а направление силы совпадает с направлением ускорения.

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

Закон действует только в инерциальной системе отсчета. Если на точку действуют одновременно несколько сил, то они заменяются равнодействующей и закон принимает вид $m\vec{w} = \sum_k \vec{F}_k$.

III закон. Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, всегда равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Основные задачи динамики.

Для свободной материальной точки основными задачами динамики являются следующие:

зная закон движения точки, определить действующую на нее силу;

зная действующие на точку силы, определить закон движения точки.

В технике часто изучается несвободное движение точки, то есть когда точка, в силу наложенных на нее связей, движется по заданной неподвижной поверхности или кривой. В этих случаях при решении задач используется аксиома связей и несвободная материальная точка рассматривается как свободная, а отброшенные связи заменяются реакциями связей $\vec{N}$. Тогда основной закон динамики принимает вид $m\vec{w} = \sum_r \vec{F}_k + \vec{N}$.

Первая задача динамики для несвободного движения сводится к определению реакции связи по известному закону движения и по известным действующим активным силам.

Вторая задача динамики несвободного движения распадается на две:

а) зная действующие на точку активные силы определить закон движения точки;

б) зная действующие на точку активные силы определить реакцию наложенных связей.

Дифференциальные уравнения движения точки.

Представим основной закон динамики в виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} ,$$

(2)

где $\vec{r}$ - радиус – вектор точки в инерциальной системе отсчета,

$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$ - равнодействующая приложенных к точке сил.

Проецируя приведенное соотношение на оси координат, получим систему дифференциальных уравнений относительно координат точки, описывающих движение материальной точки.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

Решение первой задачи динамики.

Эта задача состоит в том, чтобы зная закон движения точки, то есть соотношения x=x(t), y=y(t), z=z(t), найти действующую на точку силу $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, используя дифференциальные уравнения движения материальной точки $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$, $m\ddot{z} = F_z$.

Решение второй задачи динамики.

Решение второй задачи динамики сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

При решении системы дифференциальных уравнений в общем случае появляются шесть констант, которые определяются по начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0,$$

$$\dot{x}(0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(0) = v_{z0}.$$

Если движение точки происходит в плоскости или по прямой, то число дифференциальных уравнений сокращается, соответственно, до двух или до одного.

Общие теоремы динамики точки.

Теорема об изменении количества движения.

Количеством движения точки называется векторная величина $m\vec{v}$, равная произведению массы на вектор скорости**.**

Импульсом силы $\vec{F}$ за любой промежуток времени t_1 назовем векторную величину $\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}(t)dt$.

Соотношение второго закона динамики

$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k$ можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_k \vec{F}_k \qquad (4)$$

, и таким образом доказана теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме.

Теорема. Производная по времени от количества движения равна векторной сумме действующих на точку сил.

Пусть точка в момент t=0 имела скорость $\vec{v}_0$, а в момент t=t_1 – скорость $\vec{v}_1$, то интегрируя полученное соотношение (4) в пределах от 0 до t_1, получим соотношение, выражающее суть теоремы об изменении количества движения в конечном виде

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum_k \int_0^{t_1} \vec{F}_k(t)dt$$

Теорема. Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно векторной сумме всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

Если сумма всех действующих на точку сил равна нулю $\sum_k \vec{F}_k = 0$, то вектор количества движения точки будет постоянным по величине и направлению $m\vec{v}_1 = m\vec{v}_0$.

Теорема об изменении момента количества движения.

Момент вектора $m\vec{v}$ определяемый соотношением $\vec{r} \times m\vec{v}$ называется моментом количества движения относительно точки O, которая является началом вектора $\vec{r}$.

Теорема. Производная по времени от момента количества движения точки относительно какого-либо центра равна моменту действующей силы относитель- но того же центра.

Умножим уравнение основного закона динамики

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

векторно на $\vec{r}$

$$m(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

$$(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}) = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}),$$

тогда

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$, что и требовалось доказать.

Проектируя обе части полученного соотношения на оси координат получим

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} m(y\dot{z} - z\dot{y}) = yF_z - zF_y \\ \dfrac{d}{dt} m(z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_x - xF_z \\ \dfrac{d}{dt} m(x\dot{y} - y\dot{x}) = xF_y - yF_x \end{cases}$$

Левые части полученных соотношений представляют собой моменты количества движения относительно координатных осей ОХ, ОУ, OZ, а правые – моменты действующей силы относительно тех же осей . Следовательно , доказанная теорема может быть сформулирована следующим образом: производная от момента количества движения точки относительно какой- либо оси равна моменту действующей силы относительно той же оси.

Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Кинетической энергией точки Т называется скалярная величина равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2}$$

Элементарной работой силы $\vec{F}$, приложенной к материальной точке на бесконечно малом перемещении равна

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fds\cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_\tau ds$$

,

где $d\vec{r}$ - вектор , определяющий бесконечно малое перемещение,

$ds = |d\vec{r}|$, F_τ - проекция силы $\vec{F}$ на касательную к траектории.

Работа силы на конечном перемещении M_0M равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы

$$A_{M_0M} = \int_{M_0}^{M} F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

Мощностью называется величина равная работе, совершенной силой в единицу времени

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v \quad .$$

Мощность, таким образом, равна произведению касательной составляющей силы на скорость движения.

Спроектируем обе части уравнения основного закона динамики

$$m\vec{w} = \sum_k \vec{F}_k$$

на касательную к траектории точки, направленную в сторону движения $mw_\tau = \sum_k F_{k\tau}$. Но

$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$. Тогда

$mv\frac{dv}{ds} = \sum_k F_{k\tau}$. Умножив обе части этого равенства на ds, внесем m под знак дифференциала $d(\frac{mv^2}{2}) = \sum_k F_{k\tau}ds$.

Учитывая, что $F_{k\tau}ds = dA_k$ - элементарная работа силы $\vec{F}_k$, получим $d(\frac{mv^2}{2}) = \sum_k dA_k$. Интегрируя это соотношение в соответствующих пределах, получим

$$\frac{m\vec{v}_1^{\,2}}{2} - \frac{m\vec{v}_0^{\,2}}{2} = \sum_k A_{kM_0M}.$$

Теорема. Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Динамика механической системы.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки или тела зависит от положения или движения всех остальных.

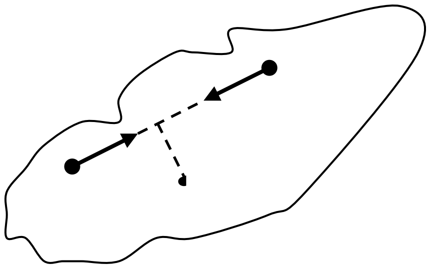
Материальное тело также будем рассматривать как систему материальных точек.

Свойства внутренних сил.

Внутренние силы, действующие на точки механической системы будем обозначать $\vec{F}^{\,i}$, а внешние - $\vec{F}^{\,e}$.

1.Векторная сумма всех внутренних сил системы рвана нулю.

По третьему закону динамики любые две точки системы действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\vec{F}^{\,i}_{1,2} u \vec{F}^{\,i}_{2,1}$, сумма которых равна 0. Так как тот же результат справедлив для любой пары точек системы то $\sum\limits_{r} \vec{F}^{\,i}_{k} = 0$.



Сумма моментов всех внутренних сил механической системы относительно любого центра или оси равна 0.

Если взять произвольный центр O, то **M**$_o$(**F**$^i_{1,2}$)+**M**$_o$(**F**$^i_{2,1}$)=0 .

Аналогичный результат получается при вычислении моментов относительно оси. Тогда суммируя моменты всех внутренних сил системы получим Σ **M**$_o$(**F**^i_k)=0.

Движение механической системы, кроме действующих сил, зависит от ее суммарной массы и от распределения масс. В однородном поле тяжести вес частицы тела пропорционален ее массе. Поэтому о распределении массы в теле можно судить по положению центра тяжести С

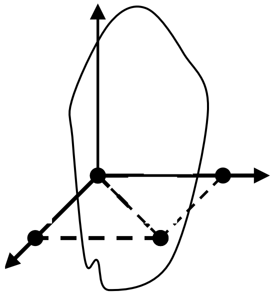
$$x_c = \frac{\sum\limits_k p_k x_k}{P} = \frac{\sum\limits_k m_k g x_k}{Mg} = \frac{\sum\limits_k m_k x_r}{M}$$, аналогично

$$y_c = \frac{\sum\limits_k m_k y_r}{M} \quad z_c = \frac{\sum\limits_k m_k z_r}{M} \quad \text{или} \quad \vec{r}_c = \frac{\sum\limits_k m_k \vec{r}_r}{M}.$$

Точка С, координаты которой определены выше, называется центром масс.

Момент инерции.

Моментом инерции тела относительно данной оси OZ называется скалярная величина , равная сумме произведений масс всех точек на квадрат их расстояний от этой оси.



$$J_z = \sum_k m_k h^2{}_k = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$$, аналогично

$$J_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2)\ , \quad J_y = \sum_k m_k (\,_k^2 + z_k^2)\ .$$

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, получим, что в пределе сема обратится в интеграл

$$J_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

$$J_x = \int_V \rho(z^2 + y^2) dV \qquad J_y = \int_V \rho(x^2 + z^2) dV\ .$$

Уравнения движения системы материальных точек.

Пусть система состоит из n материальных точек, каждая из которых имеет массу m$_k$, испытывает действие внешних сил $\vec{F}_k^{\,e}$ и внутренних сил $\vec{F}_k^{\,i}$ и занимает положение, определяемое радиус – вектором $\vec{r}_k$. Записывая равнение основного закона динамики для каждой точки, получим систему дифференциальных уравнений движения системы материальных точек

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{\,i} + \vec{F}_1^{\,e} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{\,i} + \vec{F}_2^{\,e} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n^{\,i} + \vec{F}_n^{\,e} \end{cases} \qquad (5)$$

Теорема о движении центра масс.

Сложим почленно левые и правые части уравнений ,полученной ранее системы (5)

$$\sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_k \vec{F}_k^{\,e} + \sum_k \vec{F}_k^{\,i}$$, но

$\sum_k \vec{F}_k^{\,i} = 0$, по свойству 1 внутренних сил системы, и кроме того

$\sum_k m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c$, где $\vec{r}_c$ - радиус-вектор центра масс механической системы. Дифференцируя по времени дважды это соотношение, получим $\sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k = M \ddot{\vec{r}}_c$. Тогда окончательно будем иметь

$$M \ddot{\vec{r}}_c = \sum_k \vec{F}_k^{\,e} .$$

Теорема. Центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Если сумма внешних сил равна 0, то $\ddot{\vec{r}}_c = 0$ и $\vec{v}_c = 0$, то есть центр масс движется с постоянной скоростью.

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек.

Количеством движения системы материальных точек называется векторная величина $\vec{Q}$, равная векторной сумме количеств движения всех точек системы

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k .$$

Из $\sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c$ следует после дифференцирования по времени $\sum_k m_k \vec{v}_k = M\vec{v}_c = \vec{Q}$ и тогда количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Если тело вращается относительно оси, проходящей через его центр масс, то $\vec{Q} = 0$, так как скорость его центра масс равна 0.

Таким образом, количество движения характеризует только поступательное движение тела.

Из ранее полученного соотношения $\sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_k \vec{F}_k^e$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \vec{v}_k\right) = \sum_k \vec{F}_k^e \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\vec{Q} = \sum_k \vec{F}_k^e .$$

Таким образом доказана теорема об изменении количества движения системы материальных точек в дифференциальной форме.

Теорема. Производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех действующих на систему внешних сил.

Если система в момент времени t=0 имела количество движения $\vec{Q}_0$, а в момент времени t_1 - $\vec{Q}_1$, то после интегрирования по времени полученного соотношения, будем иметь

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum_k \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e(t)dt = \sum_k \vec{S}_k^e,$$

и тем самым доказана теорема об изменении количества движения системы материальных точек в конечном виде.

Теорема в интегральном виде . Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за то же промежуток времени.

Пусть сумма внешних сил, действующих на систему равна нулю,

Тогда $\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = 0$, то есть $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_0$.

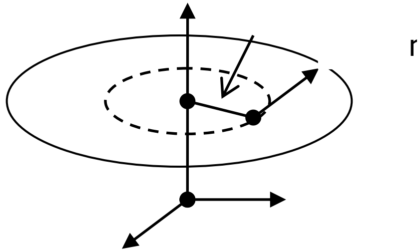
Таким образом, если сумма внешних сил, действующих на механическую систему равна нулю, то количество движения будет величиной постоянной.

Теорема об изменении момента количества движения механической системы.

Моментом количества движения механической системы относительно точки О называется векторная величина равная векторной сумме моментов количества движения всех точек системы.

$$\vec{G} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k .$$

Определим момент количества движения абсолютно твердого тела относительно оси Z



$$\vec{G}_z = \sum m_k v_k h_k = \sum m_k h_k^2 \omega = \omega \sum m_k h_k^2 = J_z \omega$$

, где ω - угловая скорость вращения тела относительно оси Z.

Умножим каждое дифференциальное уравнение движения механической системы $m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$ векторно на $\vec{r}_k$ и сложим все полученные соотношения

$$\sum_k m_k \vec{r}_k \times \ddot{\vec{r}}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i$$

и учитывая, что по второму свойству внутренних сил $\sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = 0$, а также равенство

$$\vec{r}_k \times \ddot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k),$$

получим

$$\frac{d}{dt} \sum_k m_k \vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_k m_k \vec{r}_k \times \vec{v}_k = \frac{d}{dt} \vec{G} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e .$$

Теорема. Производная по времени от момента количества движения системы относительно какого-либо неподвижного центра равна сумме моментов внешних сил, действующих на механическую систему, относительно того же центра.

Если сумма моментов внешних сил, относительно некоторого центра равна нулю, то $\frac{d}{dt}\vec{G} = 0$ и значит $\vec{G} = const$, то есть при этих условиях момент количества движения есть величина постоянная.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Кинетической энергией системы называется скалярная величина Т, равная сумме кинетических энергий всех точек системы

$$T = \sum_k \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}.$$

Пусть к к^{ой} точке системы приложены внутренние и внешние силы, равнодействующая которых равна $\vec{F}_k$, а равнодействующая реакции связей, приложенных к этой точке равна $\vec{N}_k$. По теореме об изменении кинетической энергии точки

$$d\left(\frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k \vec{v}_k dt + \vec{N}_k \vec{v}_k dt.$$

При идеальных связях $\vec{N}_k \vec{v}_k = 0$, тат как вектор $\vec{N}_k$ ортогонален вектору $\vec{v}_k$. Тогда $d\left(\frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k \vec{v}_k dt$ и суммируя по всем точкам,

получим $$d\sum_k \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} = \sum_k \vec{F}_k \vec{v}_k dt$$ или

$$dT = \sum_k \vec{F}_k \vec{v}_k dt = \sum_k dA_k$$

Интегрируя последнее равенство , получаем

$T_1 - T_o = \sum\limits_k A_k$, где T_0 и T_1 , соответственно, кинетическая энергия механической системы в начальный и конечный момент времени.

Теорема. При идеальных связях без трения изменение кинетической энергии системы равна сумме работ всех сил действующих на эту систему, как внешних, так и внутренних.

Силовым полем называется часть пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от положения точки.

Работа силы $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, приложенной к телу в точке М, по перемещению из точки M_0 в точку М равна

$$A_{M_0M} = \int\limits_{M_o}^{M} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

и в общем случае зависит от траектории. Если сила такова, что

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}\quad,$$

то указанный интеграл и работа от формы траектории не зависят.

Силовое поле в этом случае называется потенциальным и существует такая функция U, что $dA = dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

Тогда $A_{M_oM} = U(M) - U(M_o)$, где $U(M)$ и $U(M_o)$ значения функции U , соответственно, в точках М и M_o пространства.

Потенциальной энергией материальной точки в данном положении М называется скалярная величина П, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положении М в некоторое «нулевое» положение $П=A_{Mo}$.

Полагая $U_o=0$, имеем $A_{MO} = U_0 - U_M = -U_M$ и следовательно П(x,y,z)=-

$U_M(x,y,z)$.

Тогда $A_{M_oM} = U_{M_O} - U_M = \Pi_M - \Pi_{M_O}$.

Закон сохранения механической энергии.

Пусть все внутренние и внешние силы действующие на механическую систему потенциальны. Тогда работа приложенных к k[ой] точке сил равна $A_k = \Pi_{ko} - \Pi_{k1}$, где $\Pi_{ко}$ и $\Pi_{к1}$ соответственно потенциальная энергия точки в начальном и конечном положении.

Для всех внешних и внутренних сил имеем

$$\sum_k A_k = \sum_k \Pi_{ko} - \sum_k \Pi_{k1} = \Pi_o - \Pi_1$$

, где $\Pi_o = \sum_к \Pi_{ко}$ и $\Pi_1 = \sum_к \Pi_{к1}$ соответственно потенциальная энергия всей системы в ее начальном и конечном положении.

Но $T_1 - T_o = \sum_k A_k$ и тогда $T_1 - T_o = \Pi_o - \Pi_1 \Rightarrow T_1 + \Pi_1 = T_o + \Pi_o = const$.

При движении механической системы под действием потенциальных сил сумма потенциальной и кинетической энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной.

Кинетическая энергия твердого тела.

Если за полюс взять центр масс тела C, то скорость любой точки k будет равна $\vec{v}_k = \vec{v}_c + \vec{v}_k'$, где $\vec{v}_C u \vec{v}_k'$, соответственно, скорость центра масс и скорость точки k по отношению к подвижной системе отсчета, связанной с центром масс. Тогда

$$T=\frac{1}{2}\sum_k m_k(\vec{v}_c+\vec{v}'_k)^2=\frac{1}{2}\sum_k m_k\vec{v}_c^2+\frac{1}{2}\sum_k m_k\vec{v}_k'^2+\sum_k m_k\vec{v}_c\vec{v}'_k=\frac{\vec{v}^2{}_c}{2}\sum_k m_k+$$
$$\frac{1}{2}\sum_k m_k\vec{v}_k'^2+\vec{v}_c\sum_k m_k\vec{v}'_k$$

Но $\sum_k m_k=M$ -масса тела, а

$$\sum_k m_k\vec{v}'_k=\frac{d}{dt}\sum_k m_k\vec{r}'_k=M\frac{d}{dt}\vec{r}_c{}'=0$$

$\frac{d}{dt}\vec{r}_c{}'=0$ как скорость центра масс в системе отсчета связанной с центром масс. Движение тела относительно подвижной системы отсчета представляет собой вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку С. Тогда

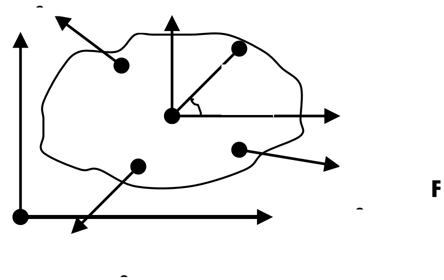
$|\vec{v}'_k|^2=\omega^2h_k^2$, где $h^2_к$ – расстояние от точки к до оси вращения и

$$\frac{1}{2}\sum_k m_k\vec{v}_k'^2=\frac{1}{2}\sum_k m_k\omega^2h_k^2=\frac{\omega^2}{2}\sum_k m_kh_k^2=\frac{\omega^2J}{2}$$

Окончательно имеем $T=\frac{M\vec{v}_c^2}{2}+\frac{\omega^2J}{2}$.

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

Положение тела , совершающего плоскопараллельное движение определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота тела вокруг полюса. Возьмем в качестве полюса центр масс телаС.



Пусть на тело действуют внешние силы $\vec{F}_1^{\,e}, \vec{F}_2^{\,e}, \ldots \vec{F}_n^{\,e}$.

Уравнение движения центра масс найдем по теореме о движении центра масс $M\ddot{\vec{r}}_c = \sum_k \vec{F}_k^{\,e}$. Уравнение вращательного движения тела вокруг центра масс С получим по теореме об изменении момента количества движения

$\dfrac{d}{dt}(J_c\dot{\varphi}) = \sum_k M_c(\vec{F}_k^{\,e})$ или $J_c\ddot{\varphi} = \sum_k M_c(\vec{F}_k^{\,e})$.

Окончательно имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\vec{r}}_c = \sum_k \vec{F}_k^{\,e} \qquad (6)$$

$$J_c\ddot{\varphi} = \sum_k M_c(\vec{F}_k^{\,e}). \qquad (7)$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Темы практических занятий с краткими указаниями по изучению темы и рекомендуемой литературой

Рекомендуемая литература

1. Тарг СМ. Краткий курс теоретической механики Москва «Высшая Школа» 2002.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах Москва, «Наука» 1991
3. Галабурдин А.В. Теоретическая механика: курс лекций для студ. всех форм обучения МТФ по спец. АС, КШИ, ТШИ Ростов н/Д: РИС ЮРГУЭС, 2005

1. Тема: «Решение задач на равновесие системы сходящихся сил»

При решении задач на равновесие тела, находящегося под действием сходящейся системы сил следует:

1) убедиться, что задача является статически определенной;

2) ввести систему прямоугольных координат;

3) составить уравнения равновесия тела в проекциях но оси координат;

4)решить полученную систему уравнений, определив неизвестные величины.

[1,2]

2. Тема: «Решение задач на равновесие плоской системы сил»

При решении задач на равновесие тела, находящегося под действием сходящейся системы сил следует:

1) убедиться, что задача является статически определенной;

2) ввести систему прямоугольных координат;

3) составить уравнения равновесия тела ;

4) решить полученную систему уравнений, определив неизвестные величины.

[1,2,3]

3. Тема: «Решение задач на равновесие системы сил при наличии силы трения»

При решении задач на равновесие тела при наличии сил трения следует придерживаться следующего алгоритма:

1) реакцию шероховатой поверхности представить двумя составляющими- нормальной реакцией и силой трения;

2) сопоставить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия, которые должны быть равны для статически определимых задач, добавив к уравнениям равновесия зависимость силы трения от нормального давления;

3) ввести систему координат;

4) составить систему уравнений равновесия для сил, приложенных к телу;

5) решить полученную систему уравнений, определив неизвестные величины

[1,2]

4.Тема: «Вычисление скорости и ускорения материальной точке по заданному закону движения»

При решении задач на определение скоростей и ускорений точки полезно использовать следующий алгоритм:

1) ввести систему координат;

2) составить уравнение движения точки в выбранной системе координат;

3)по уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси координат ;

4) используя проекции вектора скорости, определить проекции ускорения на оси координат.

[1,2]

5.Тема: «Скорости и ускорения точек вращающегося тела»

При решении задач на определение скорости и ускорения точек вращающегося тела по заданному закону движения следует:

1) ввести систему координат, направив ось Z по оси вращения;

2) дифференцируя по времени угол поворота, определяют угловую скорость и угловое ускорение;

3) вычисляют линейную скорость, нормальное и касательное ускорение точки;

При решении задач на определение закона движения, по заданному угловому ускорению или угловой скорости следует:1) интегрируя дифференциальное уравнение, определяю-щее угловое ускорение, находят угловую скорость, при этом постоянную интегрирования определяют по начальным условиям;

2) интегрируя дифференциальное уравнение, определяющее угловую скорость, находят закон вращения тела, определяя постоянную интегрирования по начальным условиям.

[1,2,3]

6. Тема: «Определение скоростей и ускорений точек плоской фигуры»

При решении задач на определение скорости и ускорения точки тела при плоскопарал-лельном движении необходимо:

1)составить уравнение движения полюса и уравнение движения фигуры вокруг полюса;

2)используя полученные выше уравнения получить уравнения движения соответствующей точки;

3)определить проекции вектора скорости и вектора ускорения точки.

[1,2,3]

7. Тема: « Решение задач динамики точки»

При решении задач динамики точки необходимо придерживаться следующего алгоритма:

1) ввести систему координат;

2) записать начальные условия движения точки;

3) составить систему дифференциальных уравнений движения точки;

4) проинтегрировать вышеуказанную систему, учитывая начальные условия:

5) используя полученное решение определить искомые величины.

[1,2,3]

8. Тема: «Решение задач на использование общих теорем динамики точки»

При решении задач динамики точки часто используются общие теоремы динамики.

В этом случае следует уяснить следующие. Теорему об изменении количества движения точки в интегральной форме применяют в задачах, где силы постоянны или являются известными функциями времени, а в число данных и неизвестных величин входят масса точки, силы, приложенные к точке, скорости точки в начальный и конечный моменты времени. Теорему об изменении момента количества движения материальной точки применяют при движении точки в поле действия центральной силы, когда в число данных и искомых величин входят масса точки, положение точки в некоторые моменты времени, скорости точки в эти моменты времени. Теорему об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме применяют в задачах, где силы, приложенные к точке, посто-янны или зависят от положения точки, а в число данных и неизвестных входят масса точки, силы, приложенные к точке, перемещение и скорость точки в начальный и конеч-ный момент времени.

[1,2]

9. Тема: «Вычисление моментов инерции различных тел»

При вычислении моментов инерции тел необходимо знать формулы, посредством которых они определяются, уяснить смысл этого понятия. Применение теоремы Штейнера о зависимости между моментами инерции твердого тела относительно параллельных осей, очень часто существенно упрощает нахождение моментов инерции тел.

[1,2]

10. Тема: «Решение задач на применение теоремы об изменении количества движения твердого тела и о движении центра масс»

При решении задач на применение теоремы об изменении количества движения твердого тела следует:

1) ввести систему координат;

2) записать теорему об изменении количества движения в проекциях но оси координат;

3) если сумма проекций импульсов внешних сил на ось оказывается равной нулю, то следует приравнять между собой проекции на эту ось вектора количества движения системы в начальный и конечный момент времени и из полученного соотношения определить искомую величину;

При решении задач на применение теоремы о движении центра масс механической системы необходимо:

a. ввести систему координат;

b. записать теорему о движении центра масс в проекциях на декартовы оси координат;

c. вычислить суммы проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат и подставить в соотношение полученное в предыдущем пункте;

d. из полученного уравнения определить искомую величину. [1,2]

11. Тема: «Решение задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии твердого тела и теоремы об изменении момента количества движения твердого тела»

Алгоритм решения задач на применение теоремы об изменении момента количества движения твердого тела:

1) направить одну из осей введенной системы координат вдоль неподвижной оси вращения;
2) записать теорему об изменении момента количества движения тела относительно соответствующей оси;
3) вычислить сумму моментов внешних сил относительно неподвижной оси;
4) вычислить момент количеств движения тела относительно неподвижной оси и вычислить от него производную по времени
5) подставить результаты, полученные в пунктах 3) и 4) в соотношения пункта 2) и из полученного уравнения найти искомую величину.

Алгоритм решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии твердого тела:

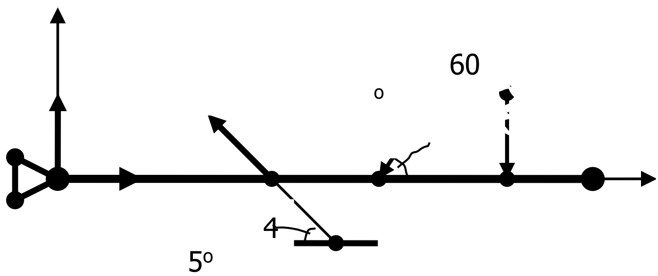
1) вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы;

2) вычислить кинетическую энергию тела в начальный и конечный момент;

3) используя результаты, полученные в пунктах 1) и 2) записать об изменении кине тической энергии твердого тела и определить искомую величину. [1,2]

Примеры решения задач.

Задача1. Горизонтально расположенная невесомая балка АВ закреплена шарнирно в точке А, а в точке С прикреплена к невесомому стержню СК. В точках Е и Н на балку действуют силы $\vec{F}_1 u \vec{F}_2$, как показано на чертеже. Определить реакции связей в точках А и С, если АВ=3м, АС=1.3м, АЕ=1.6м, АН=2.5м, $F_1 = 10kH, F_2 = 5kH.$



Рассмотрим равновесие балки АВ, для чего разложим реакцию шарнира в точке А на горизонтальную и вертикальную составляющие **Х** и **У,** а реакцию стержня **N** направим по направлению DC. Балка находится в равновесии под действием пяти сил **Х, У, N, F_1, F_2.** Так как все действующие на балку силы расположены в вертикальной плоскости , то будем иметь три уравнения равновесия. Неизвестных в задаче тоже три: **Х, У, N,** то есть задача статически определенная.

Составим уравнения равновесия, взяв за центр моментов точку А.

$$\sum_k F_{kx} = -N\cos 45^o - F_1\cos 60^0 + X = 0$$

$$\sum_k F_{ky} = Y + N\sin 45^o - F_1\sin 60^o - F_2 = 0$$

$$\sum_k M_A(\vec{F}_k) = N * AC\sin 45^o - F_1 AE\sin 60^o + F_2 AH = 0$$

Из третьего уравнения получаем $N = (F_1 AE\sin 60^o - F_2 AH)/AC\sin 45^o = 1.476kH$. Из первого уравнения найдем Х $X = N\cos 45^o + F_1\cos 60^0 = 6.044kH$., а из второго уравнения определим У $Y = -N\sin 45^o + F_1\sin 60^o + F_2 = 11.027kH$

Задача 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси задано соотношением $\varphi = 0.5t^4 - 16t^2$. Определить скорость и ускорение точки тела в момент времени t=5сек., отстоящей от оси вращения на расстоянии 0.25м.

Найдем угловую скорость вращения тела $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 2t^3 - 32t$. Угловая скорость тела в момент времени t=5 равна $\omega = 2*5^3 - 32*5 = 90сек^{-1}$, а линейная скорость указанной точки $v = \omega \times h = 90 \times 0.25 = 23.5м/сек$.

Угловое ускорение тела $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 6 \times t^2 - 32$ в момент времени t=5 равно $\varepsilon = 6 \times 5^2 - 32 = 118 сек^{-2}$. Тогда касательное ускорение точки равно $w_\tau = h \times \varepsilon = 0.25 \times 118 = 29.5 м/сек^2$, а нормальное

$$w_n = h \times \omega^2 = 0.25 \times 90^2 = 2025 м/сек^2$$

Суммарное ускорение точки, учитывая то, что вектор касательного ускорения Wτ и вектор нормального ускорения Wn ортогональны, определяется по формуле

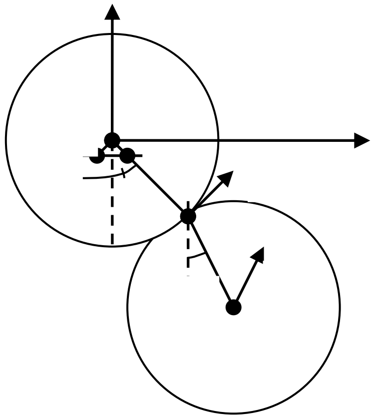
$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}.$$

$$w = \sqrt{29.5^2 + 2025^2} = \sqrt{870.25 + 4100625} = 2025.21 м/сек^{-2}$$

Задача 3. Два одинаковых диска радиуса r=3 каждый соединены цилиндрическим шарниром А. Диск I вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси О по закону

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{3}(t^2 - t + 1)$$

Диск II вращается вокруг горизонтальной оси А согласно уравнению $\psi(t) = \frac{\pi}{6}(t^3 - t^2 + 1)$. Оси О и А перпендикулярны к плоскости чертежа. Углы $\varphi и\ \psi$ отсчитываются от вертикали против часовой стрелки. Найти скорость и ускорение центра С диска II в момент времени t=1с.



Диск II совершает плоскопараллельное движение. Определим угловую скорость диска I в момент времени t=3: $\omega(t)=\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{\pi}{3}(2t-1)$,

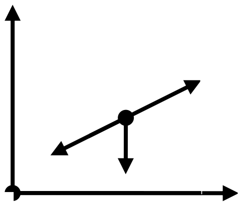
$\omega(1)=\dfrac{\pi}{3}$. Тогда скорость точки А равна

$v_A=\omega(1)r=\pi\dfrac{м}{с}$ и направлена по касательной к диску I

в точке А. Учитывая, что $\varphi(1)=\dfrac{\pi}{3}$, определим координаты вектора $\vec{v}_A$: $\vec{v}_A=(v_A\cos\dfrac{\pi}{3};v_A\sin\dfrac{\pi}{3})=(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2})$.

Скорость точки С складывается из скорости точки А и скорости вращательного движения точки С вокруг точки А $\vec{v}_C=\vec{v}_A+\vec{v}_{CA}$.

Задача 4. Тело массой m брошено под углом α к горизонту со скоростью $\vec{v}_0$. Определить закон движения тела, если при движении оно испытывает сопротивление воздуха, пропорциональной скорости движения $\vec{R} = -k\vec{v}$.



Решение задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -R_x \\ m\ddot{y} = -R_y - mg \end{cases}$$

при следующих начальных условиях

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v\cos\alpha$, $\dot{y}(0) = v\cos\alpha$.

Решим первое уравнение системы, учитывая что $R_x = k\dot{x}$. Тогда

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} \quad \text{или} \quad m\ddot{x} + k\dot{x} = 0.$$

Строим характеристическое уравнение $m\lambda^2 + k\lambda = 0$ корни которого $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -k/m$. Общее решение уравнение имеет вид

$$x(t)=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Производная решения $\dot{x}(t)=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}t}$.

Удовлетворяя начальным условиям, получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} x(0)=C_1+C_2=0 \\ \dot{x}(0)=-\frac{k}{m}C_2=v\cos\alpha \end{cases},$$ тогда

$C_2=-\frac{m}{k}v\cos\alpha$, $C_1=\frac{m}{k}v\cos\alpha$ и решение уравнения

$$x(t)=\frac{m}{k}v\cos\alpha-\frac{m}{k}v\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Рассмотрим второе уравнение системы, с учетом того что,

$R_y=k\dot{y}$: $m\ddot{y}=-k\dot{y}-mg$. Представим его в виде

$$m\ddot{y}+k\dot{y}=mg. \qquad (3)$$

Общее решение данного уравнение представляет сумму общего решения соответствующего однородного уравнения

$m\ddot{y}+k\dot{y}=0$ y_0 и частного решения неоднородного уравнения $y_ч$. Однородное уравнение совпадает с уравнением, которое было рассмотрено выше. Поэтому сразу выпишем его общее решение

$$y_ч(t)=C_3+C_4e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$y_ч=C_5t$, где C_5 – константа, для определения которой подставим этот вид в неоднородное уравнение (3), получим

$kC_5=mg$, откуда $C_5=\dfrac{mg}{k}$. Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид $y(t)=C_3+C_4e^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}t$. Производная по времени найденного решения $\dot{y}(t)=-\dfrac{k}{m}C_4e^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}$.

Удовлетворяя начальным условиям, получим систему уравнений, из которой определи C_3 и C_4

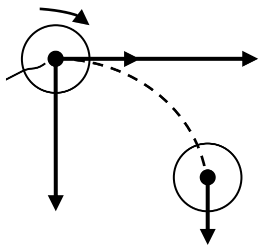
$$\begin{cases} y(0)=C_3+C_4=0 \\ \dot{y}(0)=-\dfrac{k}{m}C_4+\dfrac{mg}{k}=v\sin\alpha \end{cases}.$$

Решая полученную систему уравнений относительно C_3, C_4 получим $C_4=g-\dfrac{mv}{k}\sin\alpha$, $C_3=-g+\dfrac{mv}{k}\sin\alpha$. Тогда решение уравнения (2) $y(t)=(\dfrac{mv}{k}\sin\alpha-g)(1-e^{-\frac{k}{m}t})+\dfrac{mg}{k}t$.

Закон движения точки задается уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{m}{k} v\cos\alpha - \dfrac{m}{k} v\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t} \\ y(t) = (\dfrac{mv}{k}\sin\alpha - g)(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + \dfrac{mg}{k}t \end{cases}$$

Задача 5. Диск падает в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Момент сопротивления движению относительно подвижной горизонтальной оси , проходящей через центр тяжести С диска перпендикулярно к плоскости движения его, m_c пропорционален первой степени угловой скорости ω, причем коэффициент пропорциональности к= 0.5. Момент инерции диска относительно этой оси равен J_c=5. В начальный момент диску сообщена угловая скорость ω_0=1.5, а его центр тяжести С, находящийся в начале координат, имел горизонтально направленную скорость v_0=1. Найти уравнения движения диска.



Уравнение (6) в проекции на оси координат в данном случае даст два дифференциальных уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{и}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g\,.$$

Интегрируя по t полеченные уравнения будем иметь

$\frac{dx}{dt} = C_1$, $\frac{dy}{dt} = gt + C_2$. Учитывая начальные условия определим C_1 и C_2.

$v_x(0) = \frac{dx(0)}{dt} = 1 = C_1$, $v_y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0 = C_2$. Тогда

$\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = gt$. Еще раз интегрируя по времени, получим

$\frac{dx}{dt} = t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{gt^2}{2}$. Таким образом получены уравнения движения центра тяжести диска. Уравнение (7) в нашем случае примет вид $J_c \frac{d^2\varphi}{dt^2} = k\frac{d\varphi}{dt}$ или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{k}{J_c}\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Общее решение этого уравнения $\varphi = C_3 + C_4 e^{-\frac{k}{J_c}t}$.

Будем считать $\varphi(0) = 0$, тогда $C_3 + C_4 = 0$.

$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{k}{J_c} C_4 e^{-\frac{k}{J_c}t}$. Из начальных условий следует $\frac{d\varphi(0)}{dt} = -\frac{k}{J_c} C_4 = \omega_o = 1.5$, откуда $C_4 = \omega_o J_c / k = 15$, а

$C_3 = -C_4 = -15$

и окончательно имеем $\varphi = 15(1 - e^{-0.1t})$.

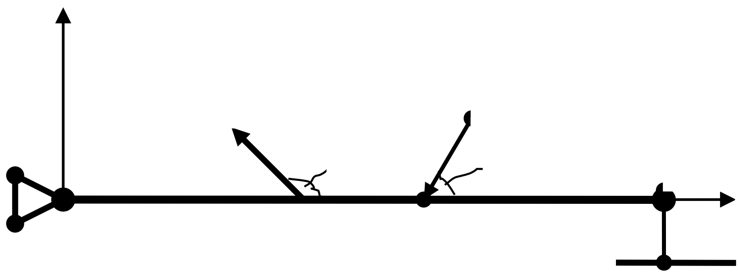
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа состоит из пяти задач. Номер варианта каждой задачи выбирается студентом в соответствии с начальной буквой фамилии (первая и вторая задачи), имени (третья и четвертая задачи) и отчества (пятая задача).(Смотри таблицу ниже.)

Первые буквы фамилия	Варианты задач1,2	Первые буквы имени.	Варианты задач 3,4	Первые буквы отчества	Варианты задачи 5
А	1	А	1	А	1
Б	2	Б	2	Б	2
В,Г	3	В,Г	3	В,Г	3
Д,Е	4	Д,Е	4	Д,Е	4
Ж,З	5	Ж,З	5	Ж,З	5
И,К	6	И,К	6	И,	6
Л,М	7	Л,М	7	Л,М	7
Н,О	8	Н,О	8	Н,О	8
П,Р	9	П,Р	9	П,Р	9
С,Т	10	С,Т	10	С,Т	10
У,Ф	11	У,Ф	11	У,Ф	11
Х,Ц	12	Х,Ц	12	Х,Ц	12
Ч,Ш	13	Ч,Ш	13	Ч,Ш	13
Щ,Э	14	Щ,Э	14	Щ,Э	14
Ю,Я	15	Ю,Я	15	Ю,Я	15

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради, на титульном листе которой следует указать наименование факультета, номер курса, название группы, фамилию, имя и отчество студента. Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, далее выписывается условие задачи и вычерчивается чертеж. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями.

Задача1. Горизонтально расположенная невесомая балка AB закреплена шарнирно в точке A, а в точке B прикреплена к невесомому стержню BD. В точках C и E на балку действуют силы $\vec{F}_1 u \vec{F}_2$, как показано на чертеже. Определить реакции связей в точках A и B по данным приведенным в таблице.



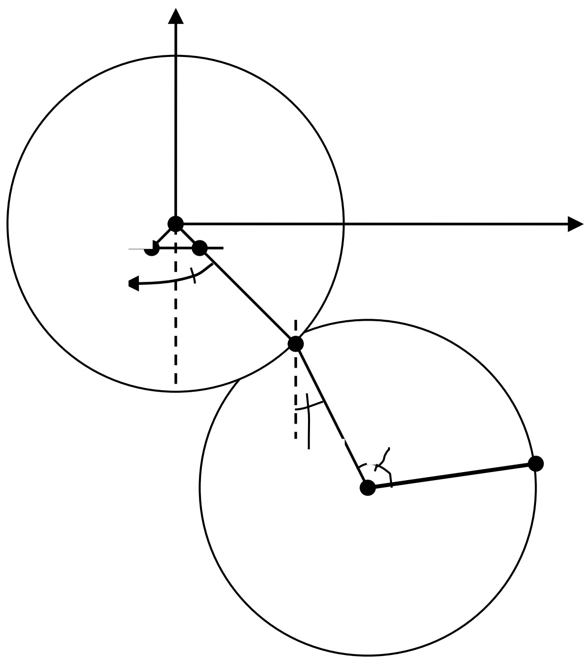
Вариант	AB	AC	AE	φ	ψ	F_1	F_2
1	3м.	1.2м.	1.6м.	45°	30°	5кН	15кН
2	2м.	0.8м.	1.2м.	30°	45°	10кН	5кН
3	2.5м.	1м.	1.3м.	60°	30°	15кН	10кН
4	3.5м.	1.5м.	1.8м.	45°	60°	5кН	10кН
5	1.5м.	0.7м.	0.9м.	120°	45°	10кН	5кН
6	3м.	1.1м.	1.7м.	150°	60°	25кН	10кН
7	2м.	0.7м.	1.1м.	30°	120°	10кН	25кН
8	2.5м.	1.1м.	1.3м.	-30^0	150°	15кН	15кН
9	3.5м.	1.6м.	1.9м.	-45°	-30°	25кН	15кН
10	1.5м.	0.6м.	0.8м.	45°	-45°	20кН	5кН
11	3м.	1м.	2м.	-60°	-30°	5кН	20кН
12	2м.	0.6м.	1.4м.	-120^0	30°	20кН	20кН
13	2.5м.	1.1м.	1.5м.	-150°	120°	15кН	5кН
14	3.5м.	1.2м.	2.1м.	150°	-120°	5кН	5кН

15	1.5м.	0.5м.	1м.	-150°	-120°	10кН	10кН

Задача 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси задано соотношением $\varphi = \varphi(t)$. Определить скорость и ускорение точки тела в момент времени t_o, отстоящей от оси вращения на расстоянии h по данным приведенным в таблице.

Вариант	$\varphi(t)$	t_o	h
1	$t^3 - 3t$	2с.	0.15м.
2	$t^4 - 2t$	1с.	0.25м.
3	$t^3 - 3t^2$	3с.	0.10м.
4	$2t^3 - 3t^2$	2с.	0.35м.
5	$t^4 - t^2$	1с.	0.3м.
6	$t^4 + 3t$	3с.	0.2м.
7	$t^3 + 2t^2$	2с.	0.25м.
8	$t^3 + t$	1с.	0.15м.
9	$t^3 + 2t$	3с.	0.35м.
10	$\ln(1+t^2)$	2с.	0.3м.
11	$\sin(\pi t / 4)$	1с.	0.10м.
12	$t/(1+t^2)$	3с.	0.15м.
13	$\cos(\pi t / 4)$	1с.	0.35м.
14	$5t^{2.5} - 3t$	4с.	0.25м.
15	$t^{2.5} + 1$	4с.	0.10м.

Задача 3. Два одинаковых диска радиуса r каждый соединены цилиндрическим шарниром А. Диск I вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси О по закону $\varphi = \varphi(t)$.Диск II вращается вокруг горизонтальной оси А согласно уравнению $\psi = \psi(t)$.Оси О и А перпендикулярны к плоскости чертежа. Углы $\varphi и \psi$ отсчитываются от вертикали против часовой стрелки. Найти скорость и ускорение точки В диска II в момент времени t.

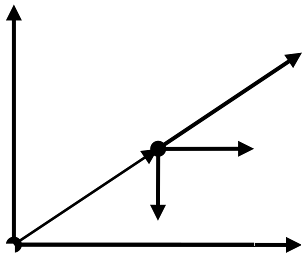


Вариант	r	$\varphi(t)$	$\psi(t)$	α	t
1	0.5м.	$\pi(t^2+t)/3$	$\pi(t^2+t)/6$	45°	1 с.

2	0.3м.	$\pi(2t^2-3t)/3$	$\pi(2t^2+t)/6$	30°	2 с.
3	0.15м.	$\pi(t^2+t)/4$	$\pi(t^2+1)/4$	60°	2 с.
4	0.25м.	$\sin(\pi t/4)$	$\cos(\pi t/4)$	90°	1 с.
5	0.2м.	$\sin(\pi t/3)$	$\sin(\pi t/4)$	45°	1 с.
6	0.35м.	$\sin(\pi t/6)$	$\sin(\pi t/3)$	30°	2 с.
7	0.40м.	$\cos(\pi t/3)$	$\sin(\pi t/6)$	60°	2 с.
8	0.45м.	$\cos(\pi t/6)$	$\cos(\pi t/3)$	90°	2 с.
9	0.20м.	$3\cos(\pi t/3)$	$6\cos(\pi t/6)$	45°	2 с.
10	0.5м.	$6\sin(\pi t/3)$	$6\cos(\pi t/3)$	30°	1 с.
11	0.45	$6\cos(\pi t/3)$	$\sin(\pi t/3)$	60°	1 с.
12	0.40м.	$4\cos(\pi t/4)$	$\sin(\pi t/4)$	90°	3 с.
13	0.35м.	$\cos(\pi t/4)$	$3\cos(\pi t/3)$	45°	1 с.
14	0.30м.	$3\cos(\pi t/6)$	$6\sin(\pi t/3)$	30°	1 с.
15	0.25м.	$2\cos(\pi t/6)$	$2\cos(\pi t/3)$	60°	1 с.

Задача 4. Материальная точка М массы m движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы, пропорциональной расстоянию до неподвижного центра О: $\vec{F} = k\vec{r}$, горизонтальной силы $\overline{Q}(t)$ и веса $\vec{P}$. В начальный момент точка занимала положение $M_o(x_o;y_o)$ и имела скорость $\vec{v}_o = v_{01}\vec{i} + v_{02}\vec{j}$. m брошено под углом α к горизонту со

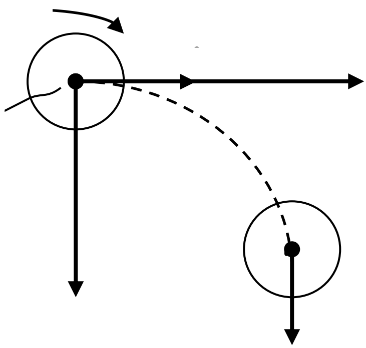
скоростью $\vec{v}_0$. Определить закон движения точки.



Вариант	m	k	x_0	y_0	$Q(t)$	v_{01}	v_{02}
1	3кг	5	1	2	$3t^2$	5м/с	1м/с
2	5кг	-7	3	2	$4e^{-t}$	-3м/с	2м/с
3	2кг	-3	-2	5	$5(t+1)$	1м/с	-5м/с
4	7кг	4	0	-3	$5(t+t^2)$	2м/с	-2м/с
5	4кг	-4	-3	3	$7(t^2+1)$	-5м/с	3м/с
6	1.5кг	7	-1	-2	$3\sin t$	-1м/с	-3м/с
7	2.5кг	2	2	3	$3\cos t$	5м/с	-1м/с
8	3.5кг	-2	2	-3	$3\sin 3t$	4м/с	-3м/с
9	5кг	-5	3	-3	$3\cos 2t$	-4м/с	3м/с
10	4кг	3	3	3	$5\sin 3t$	5м/с	-1м/с
11	3кг	2	-3	2	$3e^{-2t}$	1м/с	2м/с

12	2.5кг	6	5	-3	$5e^{-3t}$	-4м/с	5м/с
13	7кг	-6	5	-4	$5(t^2-1)$	4м/с	3м/с
14	6кг	-3	4	-5	$5(t^2-t)$	3м/с	-5м/с
15	5кг	2	3	4	$7(t^2+5)$	1м/с	-1м/с

Задача 5. Диск падает в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Момент сопротивления движению относительно подвижной горизонтальной оси , проходящей через центр тяжести С диска перпендикулярно к плоскости движения его, m_c пропорционален ω^{α} , где ω угловая скорость вращения диска, причем коэффициент пропорциональности равен к. Момент инерции диска относительно этой оси равен J_c. В начальный момент диску сообщена угловая скорость ω_0, а его центр тяжести С, находящийся в начале координат, имел горизонтально направленную скорость v_0. Найти уравнения движения диска.



Вариант	k	α	J_c	ω_0	v_0
1	3	0.5	0.1	2	1
2	2	0.3	0.2	1	1.5
3	4	0.4	0.15	3	2
4	3	0.2	0.25	1.5	0.5
5	1	0.25	0.3	2.5	1
6	2	0.5	0.3	2	1.5
7	3	0.3	0.1	1	2.5
8	4	0.2	0.2	3	2
9	1	0.4	0.15	1.5	1
10	4	0.25	0.25	2	1.5
11	3	0.5	0.3	3	2.5
12	2	0.3	0.15	2.5	2
13	1	0.4	0.2	2	0.5
14	4	0.25	0.3	1	2.5
15	3	0.3	0.25	3	1