ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Теоретическая и прикладная механика. Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математическая логика»

Авторы
Гусева И. А.,
Баранов И. В.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной формы обучения изучающих дисциплину «Математическая логика»

Авторы

Доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Гусева И.А

Доцент кафедры «Прикладная математика» Баранов И.В

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения, изучающих дисциплину «Математическая логика». Пособие включает в себя основные теоретические сведения дисциплины. Кроме того, пособие содержит задания для самостоятельной работы по всем темам курса и примеры решений стандартных задач.

Учебное пособие дополняет курс лекций по дисциплине «Математическая логика» и будет полезно студентам в самостоятельной работе и при подготовке к текущему, рубежному и итоговому контролю знаний по данной дисциплине в различных формах, в том числе в форме интернет-экзамена, а также при изучении различных смежных дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

ГЛАВА I. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Простые и составные высказывания. Высказывательные переменные

Понятие высказывания является одним из первичных неопределяемых понятий в математике. ***Высказывание*** – это повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, что оно является истинным или ложным. Т.о., отличительной особенностью высказываний является возможность принимать одно из двух значений: истина – 1, или ложь – 0. Эти значения ***называются истинностными значениями***.

Высказывания бывают:

1. простыми – если в них нельзя выделить часть, которая сама является высказыванием и не совпадает по смыслу с исходными;

2. составными – в противном случае.

Простые высказывания будем обозначать малыми буквами латинского алфавита, а факт истинности или ложности высказывания записывать соответственно: или .

Буквы, обозначающие переменные высказывания, будем называть ***высказывательными переменными***.

Для конструирования составных высказываний из простых используют так называемые ***логические связки***:

1. не; неверно, что;
2. и; а; но;

3. или; либо;
4. если, то;
5. тогда и только тогда, когда.

Этим связкам соответствуют ***логические операции над высказываниями***

1. ***Отрицанием высказывания а*** называется новое высказывание, обозначаемое , которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание а ложно, и наоборот.

2. ***Конъюнкцией двух высказываний а и b*** называется новое высказывание, обозначаемое , которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны и ложное во всех остальных случаях.

3. ***Дизъюнкцией двух высказываний а и b*** называется новое высказывание, обозначаемое , которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания и истинное во всех остальных случаях.

4. ***Импликацией двух высказываний а и b*** называется новое высказывание, обозначаемое ,которое ложно лишь в случае, когда 1-ое высказывание а истинно, а второе высказывание b – ложно.

5. ***Эквиваленцией двух высказываний а и b*** называется новое высказывание, обозначаемое a~b, , которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания принимают одинаковые значения истинности, т.е. либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Запишем данные определения в виде таблиц истинности:

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \sim b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

1.2. Формулы и их логические возможности

Под формулой в логике высказываний будем понимать:

1) любое конкретное или любое переменное высказывание;
2) если a и b формулы, то формулами также являются $\bar{a}$, $\bar{b}$, $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \to b$, $a \sim b$;
3) других формул, кроме указанных в пп. 1), 2) нет.

Формулы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Формулы в логике высказываний зависят от логических переменных.

Если в записи формулы F входят логические переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, то это будем записывать $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$, $F \in \{0,1\}$, и логические переменные и F принимают значения либо 0, либо 1.

Для определения порядка действий используем скобки, однако, при отсутствии скобок, порядок действий следующий:

«-», «$\wedge$», «$\vee$», «$\to$», «$\sim$».

Перечень всевозможных значений истинности, для входящих в некоторую формулу переменных, будем называть ***логическими возможностями*** рассматриваемой формулы.

Например, для формулы $F(x)$ имеется 2 логические возможности, для $F(x_1, x_2)$ – 4 логические возможности; для $F(x_1, x_2, x_3)$ – 8 = 2^3, …, для $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – 2^n логических возможностей.

Под таблицей истинности будем понимать перечень всех логических возможностей формулы с указанием значений истинности самой формулы в каждой логической возможности.

Общей логической возможностью двух формул будем называть перечень всевозможных значений истинности для переменных, входящих в запись хотя бы одной из этих формул.

Две формулы логики высказываний называются равносильными, если в каждой их общей логической возможности они принимают одинаковые значения истинности.

Формула называется тавтологией или тождественно истинной, если в каждой своей логической возможности она принимает значение истинности, равное 1.

Обозначение: $F \equiv 1$, $\models F$.

Формула называется противоречием или тожде-

ственно ложной формулой, если в каждой своей логической возможности она принимает значение истинности, равное 0. Обозначение $F \equiv 0$.

Формула называется выполнимой, если она принимает значение «истина», хотя бы в одной своей логической возможности и не является тавтологией.

1.3. Свойства логических операций (законы логики)

1. Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{a}} \equiv a.$$

2. Законы идемпотентности:

$$a \wedge a \equiv a, \ a \vee a \equiv a.$$

3. Законы коммутативности:

$$a \wedge b \equiv b \wedge a,$$

$$a \vee b \equiv b \vee a.$$

4. Законы ассоциативности:

$$a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c,$$

$$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c.$$

5. Законы дистрибутивности:

$$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

6. Законы поглощения:

$$a \wedge (a \vee b) \equiv a,$$

$$a \vee (a \wedge b) \equiv a.$$

7. Законы де Моргана:

$$\overline{a \wedge b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b},$$

$$\overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \wedge \overline{b}.$$

8. Закон исключения импликации:

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b.$$

9. Закон исключения эквиваленции:

$$a \sim b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a).$$

10. Закон контрапозиции:

$$a \to b \equiv \overline{b} \to \overline{a}.$$

11. Законы исключенного третьего и противоречия:

$$a \vee \bar{a} \equiv 1,\ a \wedge \bar{a} \equiv 0.$$

12. Законы нуля и единицы:

$$a \wedge 1 \equiv a, \qquad a \vee 1 \equiv 1,$$

$$a \wedge 0 \equiv 0, \qquad a \vee 0 \equiv a,$$

$$\bar{1} \equiv 0 \qquad \bar{0} \equiv 1$$

Заметим, что в законах 2 – 7, не меняя смысла закона, операцию конъюнкция можно заменить на операцию дизъюнкция и наоборот. В связи с этим операции конъюнкции и дизъюнкции называют двойственными операциями, а символы $\wedge, \vee$ – двойственными, или дуальными символами.

Некоторое множество с введенными на нем операциями, обладающее свойствами 1 – 7 называется ***булевой алгеброй***.

Под булевой алгеброй в узком смысле будем понимать логику высказываний, при этом высказывательные переменные будем называть булевыми переменными (могут принимать значения из множества {0, 1}).

Под булевой функцией будем понимать функцию, зависящую от булевых переменных, которая принимает значения из множества {0, 1}.

1.4. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам (РКС)

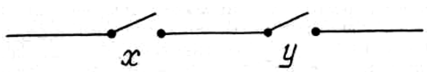
Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т. д.), при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Под релейно-контактной схемой (РКС) понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты РКС могут быть двух типов: *замыкающие и размыкающие*. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов, как замыкающих, так и размыкающих.

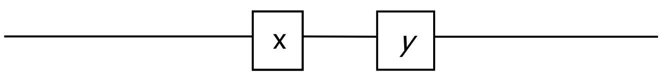
Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x_1 или x_2, ..., или x_n, которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символом x, а все размыкающие контакты, подключенные к реле, обозначаются отрицанием $\bar{x}$.

Каждая РКС, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую булеву функцию y от n аргументов. Она принимает значение 1 на тех и только тех наборах значений аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, которые соответствуют тем состояниям реле $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых данная схема проводит электрический ток. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***функцией проводимости данной РКС.***

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдем их функции проводимости. Первая схема состоит из двух ***последовательно соединенных контактов x и y,*** то есть контактов, связанных с двумя независимыми реле x и y, каждое из которых срабатывает независимо от другого.

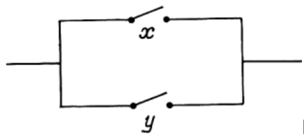


, или

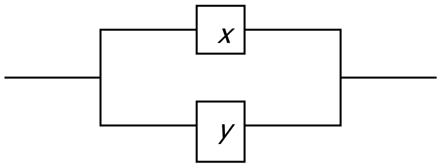


Данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты, то есть только тогда, когда обе переменных x и y принимают значение 1. Булева функция от двух аргументов x, y, удовлетворяющая такому условию – конъюнкция $x \wedge y$.

Вторая РКС состоит из двух параллельно соединенных контактов x и y.



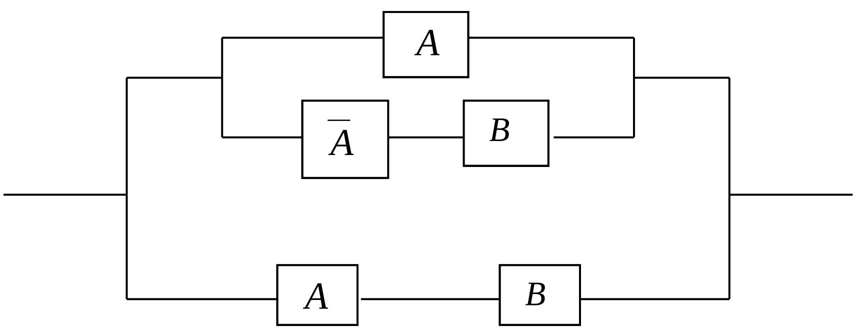
или



Эта схема проводит электрический ток в том и только в том случае, когда по меньшей мере один из контактов x или y замкнут, то есть лишь в случае, когда хотя бы одна из булевых переменных x или y принимает значение 1. Булева функция от двух аргументов x и y, удовлетворяющая условию – дизъюнкция $x \vee y$.

При решении задач используется так называемый анализ и синтез РКС:

1. Анализ РКС заключается в следующем. Для данной схемы составляется соответствующая формула, которая на основании законов логики упрощается и для нее строится новая более простая схема, которая обладает теми же электрическими свойствами, что и исходная. Например, пусть дана схема

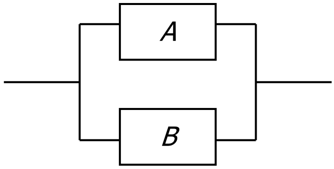


Запишем соответствующую ей формулу и преобразуем ее равносильными преобразованиями.

$$(A \vee (\overline{A} \wedge B)) \vee (A \wedge B) \equiv A \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge B) \equiv$$

$$\equiv A \vee (\overline{A} \wedge B) \equiv (A \vee \overline{A}) \wedge (A \vee B) \equiv 1 \wedge (A \vee B) \equiv A \vee B.$$

Т.о., исходная схема равносильна следующей:



2. Синтез схем заключается в построении схем с заданнми электрическими свойствами. На основании заданных электрических свойств строится формула алгебры высказываний, а по ней соответствующая схема.

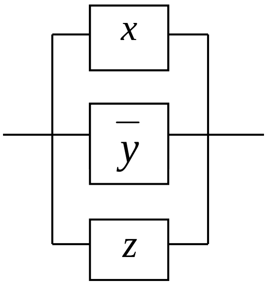
Например, составить РКС для формулы

$(\overline{x} \wedge y) \to (z \vee x)$.

Упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований:

$$(\overline{x} \wedge y) \to (z \vee x) \equiv \overline{\overline{x} \wedge y} \vee z \vee x \equiv x \vee \overline{y} \vee z \vee x \equiv x \vee \overline{y} \vee z.$$

Тогда РКС для данной формулы имеет вид



1.5. Полные системы связок (п.с.с.)

Обозначим через Ω множество всех унарных и бинарных связок. Пусть θ – множество основных связок $\theta = \{\,\bar{}\,,\ \wedge,\ \vee,\ \to,\ \sim\}$. Обозначим через $\Omega_1 \subset \Omega$.

Пусть $\Phi\{\Omega_1\}$ – множество формул, содержащих лишь связки из Ω_1.

Если всякая формула из $\Phi\{\theta\}$ равносильна некоторой формуле из $\Phi\{\Omega_1\}$, то ***множество*** Ω_1 ***называется полной системой связок (п.с.с.).***

Свойства п.с.с.:

1) θ – п.с.с., т.к. $\theta \subset \Omega$ и каждая формула из $\Phi\{\theta\}$ равносильна сама себе.
2) Если $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_2 \subset \Omega_1$ и Ω_2 - п.с.с., то Ω_1 – п.с.с.
3) Если $\Omega_2 \subset \Omega$, Ω_1 – п.с.с. и каждая формула из $\Phi\{\Omega_1\}$ равносильна формуле из $\Phi\{\Omega_2\}$, то Ω_2 – п.с.с.

Теоремы о связке отрицания:

1) Каждая п.с.с. из θ содержит связку отрицания.
2) Множество, содержащее лишь связку отрицание, не является п.с.с.

Теорема о двухэлементных системах связок:

П.с.с. являются множества:

1) $\{\bar{\ }, \wedge\}$;

2) $\{\bar{\ }, \vee\}$;

3) $\{\bar{\ }, \to\}$.

Одноэлементные п.с.с.

Рассмотрим две бинарные связки из $\Omega \setminus \theta$:

1) штрих Шеффера или отрицание конъюнкции (обозначение $\overline{\wedge}$, $\setminus$);

2) стрелка Пирса или отрицание дизъюнкции (обозначение $\overline{\vee}$, $\downarrow$).

Определим эти связки при помощи таблиц истинности:

a	b	$a \setminus b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

a	b	$a \downarrow b$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Теорема.
П.с.с. являются:
1) $\{\backslash\}$;
2) $\{\downarrow\}$.

1.6. Нормальные формы: ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) n ***переменных*** называется конъюнкция (дизъюнкция) переменных или их отрицаний.

Дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой (ДНФ (КНФ)) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию (конъюнкцию) элементарных конъюнкций (дизъюнкций).

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ее ДНФ (КНФ), причем не единственную.

Например:

1. $A \equiv x \wedge (x \to y) \equiv x \wedge (\overline{x} \vee y) \equiv (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y) \equiv x \wedge y$,
$ДНФ\ A \equiv (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y)$, или $ДНФ\ A \equiv x \wedge y$.

2. $A \equiv x \wedge (x \to y) \equiv x \wedge (\overline{x} \vee y) \equiv КНФ\ A$.

Среди многочисленных ДНФ (КНФ) существует ***единственная ДНФ (КНФ)***, которая обладает ***«свойствами совершенства»***. Такую ДНФ (КНФ) будем называть совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой – сокращенно **СДНФ** (**СКНФ**).

«Свойства совершенства»:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в запись формулы.
2. Все логические слагаемые различны.
3. Ни одно логическое слагаемое не содержит одновременно переменную и ее отрицание.
4. Ни одно логическое слагаемое не содержит одну и ту же переменную дважды.

Способы построения СДНФ (СКНФ)

- По таблице истинности:

1) Составляем таблицу истинности для формулы.
2) Выделяем те логические возможности формулы, в кото-

рых она принимает значение истинности, равное 1 (равное 0).

3) Составляем элементарные конъюнкции (дизъюнкции), истинные (ложные) лишь в выделенных логических возможностях (используя все переменные, входящие в формулу).

4) Берем дизъюнкцию (конъюнкцию) полученных конъюнкций (дизъюнкций), тем самым, получаем СДНФ (СКНФ).

Например, найти СДНФ и СКНФ формулы $F(x,y)\equiv\overline{(x\vee y)}\sim x\wedge y$.

Построим таблицу истинности заданной формулы:

x	y	$x\vee y$	$\overline{x\vee y}$	$x\wedge y$	$F(x,y)$	
1	1	1	0	1	0	$\overline{x}\vee\overline{y}$
1	0	1	0	0	1	$x\wedge\overline{y}$
0	1	1	0	0	1	$\overline{x}\wedge y$
0	0	0	1	0	0	$x\vee y$

СДНФ $F(x,y)\ \equiv(x\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\wedge y)$,

СКНФ $F(x,y)\ \equiv(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(x\vee y)$.

- С помощью равносильных преобразований:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из ДНФ (КНФ) A.

2. Если в полученной ДНФ (КНФ) A входящая в нее элементарная конъюнкция (дизъюнкция) B не содержит переменную x_i то, используя равносильность $B\wedge(x_i\vee\overline{x_i})\equiv B$ ($B\vee(x_i\wedge\overline{x_i})\equiv B$), элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) B заменяют на две элементарных конъюнкции $(B\wedge x_i)$ и $(B\wedge\overline{x_i})$ (на две элементарные дизъюнкции $(B\vee x_i)$ и $(B\vee\overline{x_i})$), каждая из которых содержит переменную x_i.

3. Если в ДНФ (КНФ) A входят две одинаковых элементар-

ных конъюнкции (дизъюнкции) B, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \vee B \equiv B$ ($B \wedge B \equiv B$).

4. Если некоторая элементарная конъюнкция (дизъюнкция) B, входящая в ДНФ (КНФ) A, содержит переменную x_i и ее отрицание $\overline{x_i}$, то $B \equiv 0$ ($B \equiv 1$), и B можно исключить из ДНФ (КНФ) A как нулевой член дизъюнкции (единичный член конъюнкции).

5. Если некоторая элементарная конъюнкция (дизъюнкция), входящая в ДНФ (КНФ) A, содержит переменную x_i дважды, то одну переменную можно отбросить. пользуясь равносильностью $x_i \wedge x_i \equiv x_i$ ($x_i \vee x_i \equiv x_i$).

Ясно, что после выполнения описанной процедуры будет получена СДНФ A (СКНФ A).

Например, привести к СДНФ (СКНФ) формулу: $A \equiv a \wedge (b \wedge c \to a \wedge b)$.

$$a \wedge (b \wedge c \to a \wedge b) \equiv a \wedge (\overline{b \wedge c} \vee (a \wedge b)) \equiv a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee (a \wedge b)) \equiv$$

$$\equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge a \wedge b) \equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b) \equiv$$

$$\equiv ДНФ\ A \equiv ((a \wedge \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{c})) \vee ((a \wedge \bar{c}) \wedge (b \vee \bar{b})) \vee$$

$$\vee ((a \wedge b) \wedge (c \vee \bar{c})) \equiv (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee$$

$$\vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \equiv (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee$$

$$\vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \equiv СДНФ\ A.$$

$$a \wedge (b \wedge c \to a \wedge b) \equiv a \wedge (\overline{b \wedge c} \vee (a \wedge b)) \equiv a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee (a \wedge b)) \equiv$$

$$\equiv a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee a) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee b) \equiv a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee a) \wedge 1 \equiv a \equiv КНФ\ A \equiv$$

$$\equiv a \vee (b \wedge \bar{b}) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \equiv ((a \vee b) \vee (c \wedge \bar{c})) \wedge$$

$$\wedge ((a \vee \bar{b}) \vee (c \wedge \bar{c})) \equiv (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge$$

$$\wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \equiv СКНФ\ A.$$

1.7. Полином Жегалкина

Рассмотрим еще одну бинарную логическую операцию – сложение по модулю два (двоичное сложение), или отрицание эквиваленции. Она определяется следующим образом: двоичное сложение – это новое высказывание, обозначаемое $x \oplus y$, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания имеют одинаковые логические значения. Приведем таблицу истинности:

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Легко проверить, что введенная операция обладает свойствами:

1. **Операция $\oplus$ коммутативна**: $x_1 \oplus x_2 \equiv x_2 \oplus x_1$;

2. **Операция $\oplus$ ассоциативна**:

$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 \equiv x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$;

3**. Операция $\wedge$ дистрибутивна по отношению к операции $\oplus$:**

$x_1(x_2 \oplus x_3) \equiv x_1x_2 \oplus x_1x_3$;

4. Операция $\oplus$ не идемпотентна:

$x \oplus x \equiv 0, \quad x \oplus x \oplus x \equiv x$.

Следует отметить, что отсутствие идемпотентности распространяется на сумму любого четного (нечетного) числа слагаемых.

Рассмотрим использование данной операции в вопросе представления булевой функции единственным образом, наряду с совершенными формулами.

Полиномом (многочленом) Жегалкина от n переменных называется функция

$$P \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_{1,2} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus$$
$$\oplus\, \alpha_{n-1,n} x_{n-1} x_n \oplus \ldots \oplus \alpha_{1,2,\ldots,n} x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Всего здесь 2^n слагаемых. Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{1,2,\ldots,n}$ являются константами (равными нулю или единице).

Теорема. Любая функция n переменных может быть представлена полиномом Жегалкина и это представление единственно.

Имеется два способа нахождения полинома Жегалкина. Один из них основан на равносильных преобразованиях для логических функций, *заданных в виде ДНФ*. Этот способ основан на том, что $x \oplus 1 \equiv \bar{x}$. Если функция задана в виде ДНФ, то сначала убираем дизъюнкцию, используя при этом законы де Моргана, а все отрицания заменяем прибавлением единицы. После этого раскрываем скобки по обычным правилам, при этом учитываем, что четное число одинаковых слагаемых равно нулю (так как $x \oplus x \equiv 0$), а нечетное число одинаковых слагаемых равно одному такому слагаемому.

Пример. Построим полином Жегалкина для функции $f(x,y,z) \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge z)$, итак запишем

$$f(x,y,z) \equiv xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z = \overline{\overline{(xy)} \cdot \overline{(\bar{x} \cdot \bar{y})} \cdot \overline{(\bar{y}z)}} \equiv$$
$$\equiv (xy \oplus 1)((x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1)((y \oplus 1)z \oplus 1) \oplus 1 \equiv$$
$$\equiv (xy \oplus 1)(xy \oplus x \oplus y)(yz \oplus z \oplus 1) \oplus 1 \equiv (x \oplus y)(yz \oplus z \oplus 1) \oplus 1 \equiv$$
$$\equiv xyz \oplus yz \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1 \equiv xyz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus 1.$$

Последнее выражение и есть полином Жегалкина данной функции.

Другой способ основан на построении таблицы истинности для функции. Запишем сначала данную функцию в виде полинома Жегалкина с неопределенными коэффициентами. Затем по очереди подставляем всевозможные наборы значений переменных, начиная с младшего набора и из полученного уравнения находим неизвестный коэффициент. Так как число наборов равно числу коэффициентов (и равно 2^n), то все коэффициенты однозначно определяются.

Пример. Построим полином Жегалкина для дизъюнкции, т.е. для функции $f(x,y) \equiv x \vee y$. Таблица истинности для указанной функции хорошо известна. Запишем полином Жегалкина с неопределенными коэффициентами: $f(x,y) \equiv a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_{1,2} xy$, но

$$f(0,0) = a_0 = 0; \quad f(0,1) = a_2 = 1; \quad f(1,0) = a_1 = 1;$$

$$f(1,1) = 1 \oplus 1 \oplus a_3 = a_3 = 1.$$

Таким образом, полином Жегалкина для дизъюнкции имеет вид:

$$f(x,y) \equiv x \vee y \equiv x \oplus y \oplus xy$$

1.8. Проблема разрешимости

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1) тождественно истинные;
2) тождественно ложные;
3) выполнимые.

В связи с этим, возникает задача: к какому классу относится данная формула? Эта задача носит название проблемы разрешимости.

Проблема разрешимости алгебры логики разрешима, т.к. для каждой формулы алгебры логики может быть записана таблица истинности, которая и даст ответ на поставленный вопрос.

Существует другой способ, позволяющий, не используя таблицы истинности, определить, к какому классу относится формула A. Этот способ основан на приведении формулы к нормальной форме (КНФ или ДНФ) и использовании алгоритма, который позволяет определить, является ли данная формула тождественно истинной или не является. Одновременно с этим решается вопрос о том, будет ли формула A выполнимой.

Критерий тождественной истинности (ложности) для формул алгебры логики:

Теорема 1: Для того, чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинна (тождественно ложна), необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция (конъюнкция), входящая в ее КНФ (ДНФ), содержала некоторую переменную одновременно с ее отрицанием.

Например, выяснить, является ли формула тождественно истинной $A \equiv y \vee (\overline{y} \wedge x) \vee (x \wedge \overline{y})$.

Т.к.

$$A \equiv y \vee (\overline{y} \wedge x) \vee (x \wedge \overline{y}) \equiv y \vee (\overline{y} \wedge (x \vee \overline{x})) \equiv$$
$$\equiv (y \vee \overline{y}) \wedge (y \vee x \vee \overline{x}) \equiv КНФ\ A,$$

то каждая элементарная дизъюнкция $y \vee \overline{y}$ и $y \vee x \vee \overline{x}$, входящая в КНФ A, содержит переменную и ее отрицание. $\Rightarrow$ $A \equiv 1$.

ГЛАВА II. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ)

2.1. Формальные и содержательные теории

Для создания аксиоматической теории пользуются следующими принципами:

1) задают язык теории, т.е. алфавит и понятие формулы данной теории;

2) задают аксиомы этой теории;

3) задают правила вывода новых формул или теорем рассматриваемых теорий.

По типу правил вывода теории делятся на:

- содержательные аксиоматические теории;
- формальные аксиоматические теории.

Содержательные аксиоматические теории – это теории, правила вывода в которых считаются интуитивно известными и вопрос о их формализации не ставится (например, геометрия, изучаемая в школьном курсе).

Формальные аксиоматические теории – это теории, в которых логический аппарат постулируется, т.е. указывается перечень правил, которыми и только которыми можно пользоваться при выводе одних утверждений из других.

АВ является содержательной теорией. Построим по ней теорию исчисления высказываний (ИВ), которая является формализацией АВ.

2.2. Язык, понятие формулы и аксиомы исчисления высказываний

Под алфавитом ИВ будем понимать:

1) счетное множество символов $\{a_1, a_2, ..., a_n, ..., z_1, z_2, ...\}$ – основные символы (буквы) алфавита;

2) множество связок $\{-, \to\}$ – логические символы;

3) скобки (,) – вспомогательные символы.

Формулу ИВ определим следующим образом :

1) все буквы являются формулами;

2) если a и b формулы, то формулами будут являться $\bar{a},\ \bar{b},\ (a \to b),\ (b \to a)$;

3) других формул нет.

Аксиомы ИВ:

А1: $(A \to (B \to A))$;

А2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

А3: $(\bar{B} \to \bar{A}) \to ((\bar{B} \to A) \to B)$

Правила вывода:

1. Правило подстановки: если известно, что некоторая формула ИВ, зависящая от букв $A_1, A_2, ..., A_n$, является доказуемой, т.е. теоремой, то ее доказуемость сохранится в случае, если вместо $A_1, A_2, ..., A_n$ подставить любую формулу ИВ.

2. Правило заключения (Modus ponens): если доказуемой является формула A и доказуемой является формула $A \to B$, то доказуемой будет является также формула B (или в виде функции вида: $f(A, A \to B) = B$).

2.3. Выводимость (доказуемость) формул ИВ

Выводом в теории будем называть всякую конечную последовательность формул $B_1, B_2, ..., B_n$, каждая из которых является либо аксиомой, либо получена из предыдущих формул по правилам вывода, при этом ***формулу*** B_n ***называют выводи-***

мой формулой с использованием вывода длины $n-1$.

Конечная последовательность формул $U_1,U_2,...,U_n$ называется ***выводом из гипотез (или множества формул*** Γ ***),*** если каждая из формул U_i, $i=\overline{1,n}$ из этой последовательности является либо аксиомой, либо произвольной формулой ИВ, либо получена из предыдущих по правилам вывода.

Формула ИВ называется доказуемой или теоремой, если существует вывод, оканчивающийся этой формулой, причем каждая формула вывода может быть:

1) аксиомой;
2) доказуемой (теоремой);
3) получена из предыдущих по правилам вывода.

Доказуемые формулы обозначают $\vdash B_n$.

Рассмотрим теперь выводимость формул из так называемого множества гипотез Γ – множества формул ИВ.

Формула называется выводимой из множества гипотез Γ***,*** если существует вывод из Γ, оканчивающийся этой формулой, причем каждая формула вывода в этом случае может быть:

1) аксиомой;
2) доказуемой (теоремой);
3) формулой из Γ;
4)получена из предыдущих по правилам вывода.

Если U_n ***выводима из множества формул*** Γ (множества гипотез Γ), то это записывается $\Gamma \vdash U_n$.

Теорема: формула U ИВ доказуема ($\vdash U$) $\Leftrightarrow$ она выводима из пустого множества гипотез.

2.4. Производные правила вывода

1. Правило сложного заключения.

Данное правило применяется к формулам вида

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))$$

и формулируется так :

если формулы $A_1, A_2,..., A_n$ и $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (..(A_n \to L)...)))$ доказуемы, то и формула

L доказуема.

Правило сложного заключения схематично записывается так:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, ..., \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (..(A_n \to L)...))}{\vdash L}.$$

2. Правило силлогизма.

Если доказуемы формулы $A \to B$ и $B \to C$, то доказуема формула $A \to C$, т. е.

$$\frac{\vdash A \to B, \vdash B \to C}{\vdash A \to C}.$$

2.5. Правила выводимости из гипотез

1. $\frac{H \vdash A}{H, W \vdash A}$, где $H = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$ – произвольные формулы ИВ, $W = \{W_1, W_2, ..., W_n\}$, $H, W = H \cup W$.

2. $\frac{H, C \vdash A; H \vdash C}{H \vdash A}$, где C – некоторая формула ИВ.

3. Если формула A выводима из множества H и некоторого его подмножества, то в выводе формулы A можно отбросить гипотезы из H, не вошедшие в ее непосредственный вывод.

4. $\frac{H, C \vdash A,\ W \vdash C}{H, W \vdash A}$

5. $\frac{H \vdash C \to A}{H, C \vdash A}$, где C – некоторая формула ИВ.

6. **Теорема дедукции:** Если из множества формул $B_1, B_2, ..., B_n$ выводима формула B, то $B_1, B_2, ..., B_{n-1} \vdash B_n \to B$.

Заметим, что данную теорему можно записать по-другому: $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$.

2.6. Следствия теоремы дедукции

1. Правило силлогизма (ПС).

Для любых формул A, B, C справедлива выводимость:

$$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C).$$

2. Правило исключения промежуточной посылки (ПИПП).

Для любых формул A, B, C справедлива выводимость:

$$A \to (B \to C), B \vdash A \to C.$$

3. Правило перестановки посылок (ППП).

$$A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C).$$

4. Обобщенная теорема дедукции (ОТД):

Если из формул $A_1, A_2, ..., A_n$ выводима формула B, то выводимой будет являться $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to ...(A_n \to B))...)$ или

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n \vdash B}{\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_2 \to ...(A_n \to B))...)}.$$

2.7. Некоторые примеры доказательств, использующие теорему дедукции. Теорема о выводимости

1. Закон двойного отрицания:

а) $\vdash \overline{\overline{B}} \to B$; б) $\vdash B \to \overline{\overline{B}}$.

2. Закон противоречивой посылки: $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$.

3. Закон контрапозиции:

а) $\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$;

б) $\vdash (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$.

4. Первое правило отрицания импликации: $\vdash A \to (\overline{B} \to (\overline{A \to B}))$.

5. Обобщенное правило противоречивой посылки:

$\vdash (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$.

6. Теорема о выводимости.

Пусть $A = A(B_1,\ldots, B_k)$ - формула от $B_1,\ldots, B_k$ высказывательных переменных, α - некоторая логическая возможность формулы A. Положим:

$$B_i' = \begin{cases} B_i, & \textit{если } B_i = 1 \textit{ в логической возможности } \alpha, \\ \overline{B}_i, & \textit{если } B_i = 0 \textit{ в логической возможности } \alpha. \end{cases}$$

$$A' = \begin{cases} A, & \textit{если } A = 1 \textit{ в логической возможности } \alpha, \\ \overline{A}, & \textit{если } A = 0 \textit{ в логической возможности } \alpha. \end{cases}$$

Теорема: $B_1', B_2',\ldots, B_k' \vdash A'$.

2.8. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний

Всякая аксиоматическая теория для ее обоснования требует рассмотрения четырех проблем:

1) проблемы полноты;
2) проблемы непротиворечивости;
3) проблемы разрешимости;
4) проблемы независимости.

1. Проблема полноты исчисление высказываний

Пусть T' – некоторая аксиоматическая теория, T – ее формализация. ***Теория*** T ***называется полной относительно теории*** T' тогда и только тогда, когда все теоремы теории T тождественно истинны в теории T'.

Теорема о полноте: ИВ является полной теорией относительно АВ.

Данную теорему можно сформулировать иначе: Формула ИВ является доказуемой тогда и только тогда, когда эта формула является тавтологией в АВ.

2. Проблема непротиворечивости исчисления высказываний

Логическое исчисление называется непротиворечи-

вым, если в нем не доказуемы никакие две формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Иначе говоря, ***аксиоматическое исчисление называется непротиворечивым***, если в нем не существует такая формула A, что доказуема как формула A, так и формула $\overline{A}$.

Проблема непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет?

Если в исчислении обнаруживаются доказуемые формулы вида A и $\overline{A}$, то такое исчисление называется противоречивым. В рассмотренном нами исчислении высказываний невозможно вывести одновременно формулы A и $\overline{A}$, т.е. это исчисление высказываний непротиворечиво.

3. Проблема разрешимости исчисления высказываний

Проблема разрешимости исчисления высказываний заключается в доказательстве существования алгоритма, который позволил бы для любой заданной формулы исчисления высказываний определить, является ли она доказуемой или не является.

Имеет место **теорема:** проблема разрешимости для исчисления высказываний разрешима.

Действительно, любая формула исчисления высказываний является также формулой алгебры высказываний, которая может быть отнесена к определенному классу с использованием таблицы истинности, а, следовательно, по теореме о полноте разрешимой является и ИВ.

4.Проблема независимости аксиом исчисления высказываний

Для всякого аксиоматического исчисления возникает вопрос о независимости его аксиом. Вопрос этот ставится так: можно ли какую-нибудь аксиому вывести из остальных аксиом, применяя правила вывода данной системы?

Если для некоторой аксиомы системы это возможно, то эту аксиому можно исключить из списка аксиом системы, и логическое исчисление при этом не изменится, т. е. класс доказуемых формул останется без изменений.

Аксиома A ***называется независимой*** от всех остальных аксиом исчисления, если она не может быть выведена из остальных аксиом. Система аксиом исчисления называется независимой, если каждая аксиома системы независима.

Теорема: Система аксиом ИВ независимая.

ГЛАВА III. АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ (АП)

3.1. Понятие предиката

n ***-местной высказывательной формой*** будем называть всякое высказывание, содержащее n переменных об элементах некоторого множества *M*.

Например: 1. Студент x решил задачу.
2. Студент «x» решил задачу «y».

Заметим, что в примере 2 $M=\{M_1 \times M_2\}$, где M_1 - множество студентов, M_2 - множество задач.

0-местная высказывательная форма является высказыванием. Кроме того, если в высказывательную форму вместо переменных подставить их конкретные значения из множества M, то высказывательная форма превратится в высказывание, которое может быть либо истинным, либо ложным.

Т.о. каждой высказывательной форме можно поставить в соответствие значение из множества $\{0,1\}$, а, значит, задать некоторую функцию P, определенную на множестве M со значениями на множестве $\{0,1\}$. Такую ***функцию*** будем называть ***предикатом.***

n ***-местным предикатом*** $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ будем называть функцию, действующую из декартового произведения множеств $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ в $\{0,1\}$.

Множество M, на котором определен предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, называется ***областью определения (предметной областью) предиката*** $P(x_1, x_2, ..., x_n)$***, а сами переменные –*** $x_1, x_2, ..., x_n$ ***называются предметными переменными.***

Множество всех элементов $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M$, при которых предикат принимает значения «истина» (1), называется ***множеством (областью) истинности предиката*** $P(x_1, x_2, ..., x_n)$***,*** т.е. множество истинности предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это множество $I_P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in M : P(x_1, ..., x_n) = 1\}$.

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множестве M, называется ***тождественно истинным*** $P(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 1$, если его область истинности совпадает с областью определения, т. е. $I_P = M$.

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенный на множестве *M*, называется ***тождественно ложным*** $P(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$, если его область истинности является пустым множеством, т. е. $I_P = \varnothing$.

3.2. Логические операции над предикатами

Предикаты так же, как высказывания, могут принимать два значения: «истина» (1) и «ложь» (0), поэтому к ним применимы все операции АВ, в результате чего из элементарных предикатов формируются сложные предикаты (как и в логике высказываний, где из элементарных высказываний формировались сложные, составные). Рассмотрим применение операций АВ к предикатам на примерах одноместных предикатов. Эти операции в АП сохраняют тот же смысл, который был им присвоен в АВ.

Пусть на некотором множестве М определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P(x)}$, определенный на той же предметной области *M* и принимающий значение «истина» при тех и только тех значениях предметной переменной $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь».

Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ ***и*** $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$, определенный на той же предметной области *M* и принимающий значение «истина» при тех и только тех значениях предметной переменной $x \in M$, при которых оба предиката принимают значение «истина.

Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ ***и*** $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$ определенный на той же предметной области M и принимающий значение «ложь» при тех и только тех значениях предметной переменной $x \in M$, при которых оба предиката принимают значение «ложь».

Импликацией предикатов $P(x)$ ***и*** $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \to Q(x)$, определенный на той же предметной области M и принимающий значение «ложь» при тех и только тех значениях предметной переменной $x \in M$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ – значение «ложь».

Эквиваленцией предикатов $P(x)$ ***и*** $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \sim Q(x)$, определенный на той же предметной области M и принимающий значение «истина» при тех и только тех значениях предметной переменной $x \in M$, при которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ принимают одинаковые значения истинности.

3.3. Кванторные операции.

1. Квантор общности

Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\forall x\ P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества M, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение звучит так: «Для всякого x $P(x)$ истинно».

Символ $\forall$ называют ***квантором общности***. Переменную x в предикате $P(x)$ называют ***свободной*** (ей можно придавать различные значения из M), в высказывании же $\forall x\ P(x)$ x называют связанной квантором общности.

Квантор существования

Пусть $P(x)$ – предикат определенный на множестве M. Под выражением $\exists x\ P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным – в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение звучит так: «Существует x, при котором $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называют ***квантором существования***. В высказывании $\exists x\ P(x)$ переменная x связана этим квантором (на нее навешен квантор).

Рассмотрим применение кванторных операций к многоместным предикатам на примере «навешивания» квантора общности.

Пусть предикат $P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ определен на множестве M, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = M$.

Рассмотрим следующее выражение: $\forall x_i\ P(x_1, x_2, ..., x_n)$, получающееся в результате «навешивания» квантора общности на i-ую предметную переменную. Зафиксируем все предметные переменные, кроме x_i. В результате получим одноместный предикат $P(x_1^0, x_2^0, .., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ..., x_n^0) = P(x_i)$. Теперь на полученный одноместный предикат «навесим» квантор общности. Получим высказывание

$$\forall x_i\ P(x_i) \equiv \forall x_i P(x_1^0, x_2^0, .., x_i, ..., x_n^0). \quad (1)$$

Теперь в выражении (1) перейдем от фиксированных переменных $x_1^0, .., x_i, ..., x_n^0$ к исходным $x_1, ..., x_i, ..., x_n$. В результате получим $(n-1)$-местный предикат

$$\forall x_i\ P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \equiv \tilde{P}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Аналогичным образом происходит «навешивание» квантора существования на многоместный предикат.

Т.о. при «навешивании» какого-либо квантора на предикат его местность уменьшается на единицу.

3.4. Понятие формулы АП

Под формулой АП будем понимать:

1) всякий конкретный предикат или предикатную переменную;

2) если $P(x)$ и $Q(x)$ – формулы, то формулами также являются $\overline{P(x)}$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \rightarrow Q(x)$,

$P(x) \sim Q(x)$, $\forall x \; P(x)$, $\exists x \; P(x)$;

3) других формул, кроме определенных в пп. 1), 2) нет.

Формулы АП будем обозначать заглавными буквами $F, \; G, \; R, \ldots$, а в скобках перечислять предметные переменные, входящие в рассматриваемые формулы. Например, $F \equiv P(x_1, x_2) \vee Q(x_3) \equiv F(x_1, x_2, x_3)$.

Две формулы F ***и*** G ***АП*** будем называть равносильными, если они принимают одинаковые значения истинности на одних и тех же наборах значений, входящих в эту формулу предметных переменных.

Если в формулу входят кванторы, то все предметные переменные, которые входят в формулу под знаком кванторов называют ***связанными***, а остальные – ***свободными.***

Например, $F \equiv P(x) \to \exists y Q(y)$, здесь x – свободная переменная, y - связанная переменная.

Замечание: все равносильности (законы логики) имеют место и для формул АП, т.к. при подстановке в формулу вместо предметной переменной ее значения из M формула АП становится формулой АВ.

3.5. Теорема об области истинности отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции предикатов

В данном пункте выразим область истинности отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции через области истинности исходных предикатов. Проделаем это на примере одноместных предикатов.

Теорема: Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - одноместные предикаты на множестве M. Тогда:

1) $I_{\overline{P(x)}} \equiv \overline{I}_{P(x)}$;

2) $I_{P(x) \wedge Q(x)} \equiv I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}$;

3) $I_{P(x) \vee Q(x)} \equiv I_{P(x)} \cup I_{Q(x)}$;

4) $I_{P(x) \to Q(x)} \equiv \overline{I}_{P(x)} \cup I_{Q(x)}$;

5) $I_{P(x)\sim Q(x)} \equiv (I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}) \cup (\overline{I}_{P(x)} \cap \overline{I}_{Q(x)})$.

3.6. Свойства кванторных операций (основные равносильности АП)

1. Коммутативность одноименных кванторов:

$$\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y);$$

$$\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y).$$

2. Некоммутативность разноименных кванторов:

$$\forall x \exists y P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x P(x,y)$$

3. Независимость формул от связанных переменных:

$$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y);$$

$$\exists x P(x) \equiv \exists y P(y).$$

4. Вынесение кванторов за знак отрицания:

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)};$$

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}.$$

5. Вынесение квантора общности за знак конъюнкции:

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x [P(x) \wedge Q(x)].$$

6. Вынесение квантора существования за знак дизъюнкции:

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x [P(x) \vee Q(x)].$$

7. Вынесение квантора общности за знак дизъюнкции в исключительном случае:

$$\forall x P(x) \vee Q(y) \equiv \forall x [P(x) \vee Q(y)].$$

8. Вынесение квантора существования за знак конъюнкции в исключительном случае:

$$\exists x P(x) \wedge Q(y) \equiv \exists x [P(x) \wedge Q(y)].$$

9. Законы поглощения кванторов:

$$\forall x P(y) \equiv P(y);$$

$$\exists x P(y) \equiv P(y).$$

3.7. Классификация формул АП

Пусть M – область определения для формулы $F(x)$, где $F(x)$ - формула АП (x – одна переменная или набор переменных).

Формула $F(x)$ ***АП называется выполнимой в области*** M***,*** если существуют значения переменных входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула $F(x)$ принимает истинные значения.

Формула $F(x)$ ***АП называется выполнимой***, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Формула $F(x)$ ***АП называется тождественно-истинной в области*** M***,*** если она принимает значение «истина» для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Формула $F(x)$ ***АП называется общезначимой***, если она тождественна истинна на всякой области.

Формула $F(x)$ ***АП называется тождественно ложной в области*** M***,*** если она принимает значение «ложь» для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Формула $F(x)$ ***АП называется тождественно ложной (невыполнимой),*** если она тождественно ложна на всякой области (на всякой модели).

Например, доказать, что формула $F(x)$ является общезначимой:

$$F(x) \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \overline{\forall x(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)})} \vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x \overline{P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x[(P(x)\wedge Q(x))\vee \overline{Q(x)}]\vee \forall x\overline{P(x)}\equiv$$

$$\equiv \exists x[(P(x)\vee \overline{Q(x)})\wedge \underbrace{(Q(x)\vee \overline{Q(x)})}_{\equiv 1}]\vee \forall x\overline{P(x)}\equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x)\vee \overline{Q(x)})\vee \forall x\overline{P(x)}\equiv \exists xP(x)\vee \exists x\overline{Q(x)}\vee \forall x\overline{P(x)}\equiv$$

$$\equiv \exists xP(x)\vee \exists x\overline{Q(x)}\vee \overline{\exists xP(x)}\equiv \underbrace{[\exists xP(x)\vee \overline{\exists xP(x)}]}_{\equiv 1}\vee \exists x\overline{Q(x)}\equiv 1.$$

Поскольку результат не зависит от выбора предметной области, получаем, что рассматриваемая формула является общезначимой.

3.8. Нормальные формы формул алгебры предикатов

В АП, как и в АВ, формулы могут иметь нормальную форму, т.е. существуют эквивалентные нормальные формы представления любых предикатных формул. При этом, используя равносильности АВ и АП, каждую формулу АП можно привести к нормальной форме. В АП различают два вида нормальных форм: приведенную и предваренную.

Говорят, что формула АП имеет ***приведенную нормальную форму***, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Пример 1.

$$(\exists xP(x)\rightarrow \forall yQ(y))\rightarrow R(z)\equiv \overline{\overline{\exists xP(x)}\vee \forall yQ(y)}\vee R(z)\equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\exists xP(x)}}\wedge \overline{\forall yQ(y)}\vee R(z)\equiv \exists xP(x)\wedge \exists y\overline{Q(y)}\vee R(z).$$

Получили приведенную нормальную форму исходной формулы.

Среди нормальных форм формул АП выделяют так называемую ***предваренную (префиксную, пренексную) нормальную форму (ПНФ).*** В ней кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций АВ, т.е. ПНФ формулы АП имеет вид

$$(\sigma_{x1})(\sigma_{x2})...(\sigma_{xn})A(x_1,x_2,...,x_m), n\le m,$$

где под символом σ_{xi} понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула F кванторов не содержит.

Процедура получения (приведения) ПНФ состоит в следующем:

1. Используя формулы (отнесенные к предикатам), заменить операции $\rightarrow$ и ~ на $\wedge, \vee$.

2. Используя формулы алгебры предикатов, а также формулы АВ, представить предикатную формулу таким образом, чтобы символы отрицания относились непосредственно к символам предикатов (и, таким образом, мы приводим исходную формулу к приведенной форме).

3. Для формул, содержащих подформулы вида $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x),\ \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$, ввести новые переменные, позволяющие использовать основные равносильности АП.

Пример 2.

$$\exists x\forall yP(x,y) \vee \overline{\forall x\exists yQ(x,y)} \equiv \exists x\forall yP(x,y) \vee \exists x\forall y\overline{Q(x,y)} \equiv$$

$$\equiv \exists x[\forall yP(x,y) \vee \forall y\overline{Q(x,y)}] \equiv \Big|$$

обозначим в предикате Q переменную y через z :

$$\Big| \equiv \exists x[\forall yP(x,y) \vee \forall z\overline{Q(x,z)}] \equiv \exists x\forall y\forall z(P(x,y) \vee \overline{Q(x,z)}) \equiv ПНФ$$

.

Пример 3.

$$\overline{(\exists x\forall yP(x,y) \wedge \exists x\forall yQ(x,y))} \equiv \overline{\exists x\forall yP(x,y)} \vee \overline{\exists x\forall yQ(x,y)} \equiv$$

$$\equiv \forall x\exists y\overline{P(x,y)} \vee \forall x\exists y\overline{Q(x,y)} \equiv \Big|$$

обозначим в предикате Q переменную x через z :

$$\Big| \equiv \forall x\exists y\overline{P(x,y)} \vee \forall z\exists y\overline{Q(z,y)}] \equiv \forall x\forall z(\exists y\overline{P(x,y)} \vee \exists y\overline{Q(z,y)}) \equiv$$

$$\equiv \forall x\forall z\forall y(\overline{P(x,y)} \vee \overline{Q(z,y)}) \equiv ПНФ.$$

Пример 4.

$$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge Q(y,z))\to\exists uR(x,y,u))\equiv$$

$$\equiv\forall x\forall y(\overline{\exists z(P(x,z)\wedge Q(y,z))}\vee\exists uR(x,y,u)\equiv$$

$$\equiv\forall x\forall y(\forall z\overline{(P(x,z)\wedge Q(y,z)}\vee\exists uR(x,y,u)\equiv$$

$$\equiv\forall x\forall y(\forall z(\overline{P(x,z)}\vee\overline{Q(y,z)})\vee\exists uR(x,y,u)\equiv\Big|$$

последний предикат не зависит от переменной z:

$$\Big|\ \equiv\forall x\forall y\forall z(\overline{P(x,z)}\vee\overline{Q(y,z)}\vee\exists uR(x,y,u))\equiv\Big|$$

два первых предиката не зависят от переменной u:

$$\Big|\equiv\forall x\forall y\forall z\exists u(\overline{P}(x,z)\vee\overline{Q}(y,z)\vee R(x,y,u))\equiv ПНФ\,.$$

Пример 5.

$$(\overline{\exists uP(u)}\to\overline{\forall y\forall uQ(y,u)})\to\forall xR(x)\equiv\overline{\overline{(\exists uP(u)}}\vee\overline{\forall y\forall uQ(y,u))}\to$$

$$\to\forall xR(x)\equiv\exists uP(u)\vee\overline{\forall y\forall uQ(y,u)}\to\forall xR(x)\equiv$$

$$\equiv\overline{\exists uP(u)\vee\overline{\forall y\forall uQ(y,u)}}\vee\forall xR(x)\equiv\overline{\exists uP(u)}\wedge\overline{\overline{\forall y\forall uQ(y,u)}}\vee\forall xR(x)\equiv$$

$$\equiv\overline{\exists uP(u)}\wedge\forall y\forall uQ(y,u)\vee\forall xR(x)\equiv\forall u\overline{P(u)}\wedge\forall y\forall uQ(y,u)\vee\forall xR(x)\equiv$$

$$\equiv\forall u(\overline{P(u)}\wedge\forall yQ(y,u))\vee\forall xR(x)\equiv\forall u\forall y(\overline{P(u)}\wedge Q(y,u))\vee\forall xR(x)\equiv$$

$$\equiv\forall u\forall y\forall x(\overline{P(u)}\wedge Q(y,u)\vee R(x))\equiv\forall x\forall y\forall u(\overline{P(u)}\wedge Q(y,u)\vee R(x))\equiv ПНФ.$$

3.9. Проблема разрешимости для формул АП

Проблема разрешимости в алгебре предикатов ставится так же, как и в АВ: существуют ли алгоритмы, позволяющие для любой формулы F из АП установить, к какому типу (классу) она относится.

Формулы АП образуют 3 класса:

1) выполнимые формулы;
2) общезначимые формулы;
3) тождественно-ложные формулы.

Под проблемой разрешимости понимают проблему отнесения формулы АП к тому или иному классу.

Если бы такой алгоритм существовал, то, как и в АВ, он сводился бы к критерию тождественной истинности любой формулы АП. Отметим, что, в отличие от АВ, в АП не применим метод перебора всех вариантов значений переменных, входящих в формулу, так как таких вариантов может быть бесконечное множество.

Тезис Чёрча.

Проблема разрешимости в АП в общем случае неразрешима.

3.10. Применение алгебры предикатов к логико-математической практике. Прямые и обратные теоремы. Необходимые и достаточные условия

Под теоремой понимают некоторое математическое утверждение, истинность которого устанавливают путем доказательства.

Любую теорему можно представить в импликативной форме:

$$(\forall x \in M)(P(x) \to Q(x)). \qquad (1)$$

$\forall x \in M$ - разъяснительная часть теоремы, $P(x)$ – условие, $Q(x)$ – заключение.

Рассмотрим

$$(\forall x \in M)(Q(x) \to P(x)). \qquad (2)$$

Теоремы (1) и (2) называют ***взаимообратными***.

Пусть (1) - прямая, (2) – обратная теорема.

Рассмотрим

$$(\forall x \in M)(\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}). \qquad (3)$$

Теорему (3) называют ***противоположной к (1)***.

Рассмотрим

$$(\forall x \in M)(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}). \qquad (4)$$

Теорему (4) называют ***противоположной к обратной или обратной к противоположной***.

Согласно закону контрапозиции, одновременно истинными являются пары теорем (1) – (4), (2) – (3).

На этом основывается ***метод доказательства от противного***: предполагают, что заключение (1) неверно и если в результате доказательства получают противоречие с условием

(1), т.е. доказывают что истинным является $\overline{P(x)}$, то тем самым доказывают истинность импликации (4), но, а, значит, согласно закону контрапозиции, истинность (1).

Рассмотрим истинность (1) и (2). Пусть (1) истинна, тогда $Q(x)$ ***называют условием, необходимым для*** $P(x)$***, а*** $P(x)$ ***– достаточным для*** $Q(x)$ или говорят, что $Q(x)$ ***логически следует из*** $P(x)$**.**

Если одновременно с (1) истинна (2), то в этом случае говорят, что $P(x)$ ***необходимое и достаточное для*** $Q(x)$ ***и наоборот.***

Пусть теорема (1) T1 $\equiv$ 1, а теорема (2) T2 $\equiv$ 0 $\Rightarrow$ $Q(x)$ является необходимым, но не достаточным условием для $P(x)$ и наоборот, $P(x)$ является достаточным, но не необходимым для $Q(x)$.

Пусть T1 $\equiv$ 0, T2 $\equiv$ 1 $\Rightarrow$ $Q(x)$ является достаточным, но не необходимым условием для $P(x)$ и наоборот, $P(x)$ является необходимым, но не достаточным для $Q(x)$.

Условия истинности прямой и обратной теорем

Рассмотрим T1. Обозначим $I_{P(x)}, I_{Q(x)}$ – области истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, $x \in M$.

Теорема: Прямая теорема вида (1) является истинной, когда $I_{P(x)} \subset I_{Q(x)}$.

Из данной теоремы следует, что предикат $Q(x)$ ***логически следует из предиката*** $P(x)$ ($Q(x)$ – необх., $P(x)$ – дост.).

Следствие: Обратная теорема вида (2) истинна, когда $I_{Q(x)} \subset I_{P(x)}$.

Очевидно, что теоремы (1) и (2) будут одновременно истинны, тогда, когда области истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают, т.е $I_{P(x)} = I_{Q(x)}$. Заметим, что в этом случае предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ являются равносильными.

ГЛАВА IV.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1. Таблицы истинности

I. Составить таблицы истинности формул, предварительно определив порядок действий:

1) $F(x,y) \equiv x \to y \wedge \bar{x}$;
2) $F(x,y,z) \equiv x \to y \vee z$;
3) $F(x,y,z) \equiv x \vee y \vee z \to \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$;
4) $F(x,y) \equiv x \vee y \to x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y}$;
5) $F(x,y,z) \equiv x \wedge \bar{y} \to y \vee \bar{x} \to \bar{z}$;
6) $F(x,y,z) \equiv x \vee \bar{y} \to (y \wedge \bar{z} \to x \vee (y \sim z))$;
7) $F(x,y,z) \equiv x \to \bar{y} \to \overline{x \vee y} \wedge \bar{z}$;
8) $F(x,y,z,u) \equiv (\bar{x} \vee z) \wedge (y \to u \to x)$;
9) $F(x,y,z) \equiv (x \sim y \sim z \to \bar{x} \vee \bar{y} \to \bar{z}) \sim x \vee y$;
10) $F(x,y,z) \equiv x \sim \overline{y \vee z} \sim x \sim y \vee z$.

II. Применяя таблицы истинности, доказать тождественную истинность формул:

1) $F(x,y) \equiv \bar{x} \to (x \to y)$;
2) $F(x) \equiv \overline{(x \wedge \bar{x})}$;
3) $F(x,y) \equiv ((x \to y) \wedge x) \to y$;
4) $F(x,y,z) \equiv ((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;
5) $F(p,q,r) \equiv (p \to (q \to r)) \sim (q \to (p \to r))$;
6) $F(p,q,r) \equiv (p \to (q \wedge r)) \sim ((p \to q) \wedge (p \to r))$;
7) $F(p,q,r) \equiv (p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$;
8) $F(p,q,r) \equiv (p \to (q \to r)) \sim ((q \wedge p) \to r))$;
9) $F(x,y,z) \equiv (x \to (y \to z)) \to ((x \wedge y) \to z)$;

10) $F(p,q,r) \equiv (p \to (q \to r)) \sim (q \to (p \to r))$.

III. С помощью таблиц истинности доказать равносильность формул:

1) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$;
2) $x \sim y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$;
3) $x \to y \equiv \bar{y} \to \bar{x}$;
4) $a \wedge (a \vee b) \equiv a$;
5) $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
6) $\overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$;
7) $x \vee y \equiv \bar{x} \to y$;
8) $x \sim (y \sim z) \equiv (x \sim y) \sim z$.

4.2. Тождественно истинные, тождественно ложные и равносильные формулы. Законы логики

I. Упросить формулы, используя законы логики:

1) $(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to x))$;
2) $x \vee \bar{y} \to (z \to y \vee \bar{y} \vee x) \wedge (x \vee \overline{x \to (x \to x)}) \to y$;
3) $\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee (x \to y) \wedge x$;
4) $(x \sim y) \wedge (x \vee y)$;
5) $(x \vee \bar{y} \to (z \to y \vee \bar{y} \vee x)) \wedge (x \vee \overline{x \to (x \to y)}) \to y$;
6) $(x \wedge \overline{x \wedge \bar{x} \to y \wedge \bar{y}} \to z) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
7) $(x \wedge (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \wedge x \wedge \bar{y}) \vee x \vee (y \wedge \overline{x \wedge \bar{x}})$;
8) $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$;
9) $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (x \to z)$;
10) $(x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$;
11) $(x \to x) \to x$;
12) $x \to (x \to y)$.

II. Доказать равносильность формул, используя законы логики:

1) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$;
2) $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y$;
3) $x \sim y \equiv \bar{x} \sim \bar{y}$;
4) $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$;
5) $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$;
6) $x \wedge y \vee z \wedge t \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee t) \wedge (y \vee t)$;
7) $(x \vee y) \wedge (z \vee t) \equiv (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge t) \vee (y \wedge t)$;
8) $x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \equiv x \to y$;
9) $x \to (y \to z) \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z)$;
10) $\bar{x} \vee x \wedge y \vee x \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{x} \wedge z \equiv x \to y \vee z$.

III.Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул:

1) $x \wedge y \to x$;
2) $x \to (x \vee y)$;
3) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;
4) $(\bar{y} \to \bar{x}) \to (x \to y)$;
5) $(x \to y)$;
6) $x \wedge (x \to y) \wedge (x \to \bar{y})$;
7) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;
8) $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$;
9) $(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$;
10) $x \vee \bar{x} \to y \wedge \bar{y}$;
11) $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;
12) $(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$.

IV. Выразить все основные операции:

1) через операции дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2) через конъюнкцию и отрицание;
3) через импликацию и отрицание;
4) через дизъюнкцию и отрицание

V. 1) Выразить отрицание импликации через основные операции так, чтобы отрицания стояли только над аргументами.

2) Выразить операцию дизъюнкцию через импликацию.

VI. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только логические связки $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

1) $((x\to y)\wedge(y\to x))\to(x\vee y)$;

2) $((x\to y)\wedge(y\to\bar{x}))\to(z\to x)$;

3) $((x\to y)\wedge(\bar{x}\to\bar{y}))\to((x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}))$;

4) $((x\sim\bar{y})\to z)\to(x\sim\bar{z})$;

5) $(x\to(y\sim z))\sim((x\to y)\sim z)$.

VII. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только к пропозициональным переменным:

1) $\overline{((x\wedge(\bar{y}\vee\bar{z}))\vee z)}$;

2) $\overline{((x\wedge y)\vee\bar{z})}\to\overline{(x\wedge z)}$;

3) $\overline{((\bar{x}\sim\bar{y})\vee z)}\wedge y$;

4) $\overline{\overline{\overline{(x\wedge y)}\to y)}\to(\bar{x}\wedge z)}$;

5) $\overline{\overline{(x\vee(\bar{y}\wedge z)\vee\bar{z})}\vee(y\vee z)}$.

VIII. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только логические связки:

1. $\neg$, $\wedge$ **;**

2. $\neg$, $\vee$ **.**

1) $(\bar{x}\to y)\vee\overline{(x\to y)}$;

2) $((x\vee y\vee z)\to x)\vee z$;

3) $(\bar{x}\sim y)\to z$;

4) $(x\to y)\to(y\wedge z)$;

5) $((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z) \rightarrow (z \wedge \bar{y})$.

IX. Равносильными преобразованиями приведите следующие ниже формулы к виду, содержащему лишь связку

а) $\overline{\wedge}$**; б)** $\overline{\vee}$**:**

1) $\bar{F} \wedge G$;

2) $F \vee \bar{G}$;

3) $\bar{F} \rightarrow G$;

4) $F \rightarrow \bar{G}$;

5) $F \sim G$.

4.3. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

I. Привести к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ):

1) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \rightarrow (x \vee z)$;

2) $(x \rightarrow y) \sim (x \rightarrow (y \rightarrow z))$;

3) $(x \sim y) \wedge (y \sim z)$;

4) $(x \vee y \vee z) \wedge (x \rightarrow y)$;

5) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$;

6) $\overline{(x \wedge y)} \vee (x \rightarrow y)$;

7) $x \sim y \sim z$;

8) $(x \rightarrow y) \sim \overline{(x \rightarrow (y \rightarrow z))}$;

9) $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \rightarrow (x \sim z)$;

10) $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \wedge (z \sim x)$.

II. Привести к конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

1) $x \rightarrow y \wedge z$;

2) $x \sim (y \wedge z)$;

3) $(x \wedge y) \sim (\bar{x} \wedge \bar{y})$;

4) $(x \to y) \to x \vee \bar{y} \sim x$;

5) $x \sim y \sim z$;

6) $x \vee y \sim x \sim z$;

7) $x \vee y \wedge z$;

8) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee \bar{z}$;

9) $x \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$;

10) $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \to (x \sim z)$.

III. Используя критерий тождественной истинности и тождественной ложности формулы, установить будет ли данная формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой:

1) $x \vee y \to x \wedge y$;

2) $(x \to y) \wedge x \to x \vee y \vee z$;

3) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

4) $(x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}) \sim (y \vee x) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$;

5) $(x \wedge y) \to (x \vee y)$;

6) $(\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$

;

7) $(x \to y) \wedge x \to x \vee y \vee z$;

8) $(x \vee y) \to x \wedge y$;

9) $x \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$;

10) $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \to (x \sim z)$.

IV. Приведите равносильными преобразованиями каждую из следующих формул к КНФ и ДНФ:

1) $(x \sim y) \wedge \overline{(z \to t)}$;

2) $((x \to y) \to (z \to \bar{x})) \to (y \to \bar{z})$;

3) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to \bar{z}) \to (x \to \bar{y}))$;

4) $((x \to y) \vee \bar{z}) \to (x \vee (x \sim z))$;

5) $\overline{(x \vee z)} \wedge (x \to y)$;

6) $(x \to z) \to ((x \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;

7) $(\bar{x} \wedge y) \to (x \wedge \bar{y})$;

8) $(x \to y) \to z$;

9) $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \sim z)$;

10) $(x \sim y) \to (x \wedge z)$.

4.4. Совершенные нормальные формы (СДНФ, СКНФ)

I. Для каждой из следующих формул алгебры высказываний с помощью ее таблицы истинности найдите СДНФ:

1) $(x \wedge y) \vee z$;

2) $(x \sim z) \to (x \wedge \bar{y})$;

3) $x \vee (y \to (z \sim (x \wedge y)))$;

4) $((x \vee y) \to z) \sim \bar{x}$;

5) $(\bar{z} \to \bar{y}) \to ((x \wedge \bar{z}) \wedge y)$;

6) $((x \wedge \bar{y}) \vee z) \wedge t$;

7) $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \wedge (z \sim t)$;

8) $(x \sim y) \wedge (\bar{z} \to (t \wedge \bar{x}))$;

9) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \sim x)$;

10) $(x \to y) \wedge (y \to z) \wedge (z \to x)$.

II. Для каждой из следующих формул алгебры высказываний с помощью ее таблицы истинности найдите СКНФ:

1) $\overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \wedge (x \to (y \wedge z))$;

2) $x \wedge \overline{(\bar{y} \wedge (z \to (x \sim y)))}$;

3) $\overline{(x \wedge \bar{y})} \wedge (z \sim (\bar{x} \wedge y))$;

4) $\overline{(((x \vee y) \to \overline{(x \vee y)}) \wedge \bar{z})}$;

5) $((x \vee y) \to z) \sim \bar{x}$;

6) $(x \wedge y \wedge z) \vee t$;

7) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge t)$;

8) $(x \wedge ((y \wedge z) \vee t)) \vee \bar{t}$;

9) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \sim x)$;

10) $(x \to y) \wedge (y \to z) \wedge (z \to x)$.

III. По таблицам истинности найдите формулы, определяющие функции $F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$, $F_3(x,y,z)$, $F_4(x,y,z)$, $F_5(x,y,z)$,и придайте им более простой вид:

x	*y*	*z*	$F_1(x,y,z)$	$F_2(x,y,z)$	$F_3(x,y,z)$	$F_4(x,y,z)$	$F_5(x,y,z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0

IV Применяя равносильные преобразования, найдите СДНФ:

1) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \to (x \vee z)$;

2) $(x \to y) \sim (x \to (y \to z))$;

3) $(x \sim y) \wedge (y \sim z)$;

4) $(x \vee y \vee z) \wedge (x \to y)$;

5) $x \to (y \to z)$;

6) $\overline{(x \wedge y)} \vee (x \to y)$;

7) $x \sim y \sim z$;

8) $(x \to (x \sim y)) \wedge z$;

9) $(x \wedge (x \vee y)) \wedge (\bar{y} \to x)$;

10) $((x \to y) \wedge z) \vee \bar{x} \wedge y$.

V Применяя равносильные преобразования, найдите СКНФ:

1) $x \to y \wedge z$;

2) $x \sim (y \wedge z)$;

3) $(x \wedge y) \sim (\bar{x} \wedge \bar{y})$;

4) $(x \to y) \to x \vee \bar{y} \sim x$;

5) $x \vee y \sim x \sim z$;

6) $x \vee y \wedge z$;

7) $(x \sim y) \to \bar{z}$;

8) $x \vee y \to (x \sim y)$;

9) $\overline{(x \vee \bar{y})} \wedge \overline{(x \wedge y)}$;

10) $\overline{(x \wedge \bar{y})} \sim \bar{x}$.

VI Найдите более простой вид формул, имеющих следующие совершенные нормальные формы:

1) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$;

2) $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$;

3) $(x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$;

4) $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

VII. Приведите каждую формулу из IV к КНФ, ДНФ, СДНФ, СКНФ.

4.5. Полином Жегалкина

I. Построить полином Жегалкина для функций методом неопределенных коэффициентов:

1) $\bar{x} \to (x \to y)$;

2) $(x \vee y) \wedge \bar{x} \to y$;

3) $\overline{(\bar{x} \to y)}$;

4) $x \to \bar{y}$;

5) $x \wedge \bar{y} \to (\bar{y} \to x)$;

6) $(x \to \bar{y}) \vee \overline{(x \vee y)}$;

7) $(x \vee y) \to (\bar{x} \vee z)$;

8) $(x \vee y) \sim (\bar{x} \to \bar{z})$;

9) $(x \sim y) \wedge (y \sim z)$;

10) $(x \to y) \sim (y \sim z)$.

II. Построить полином Жегалкина для функций с помощью эквивалентных преобразований:

1) $\bar{x}\bar{z} \vee (\bar{x}z \vee x\bar{z})y \vee x\bar{y}\bar{z}$;

2) $xz \vee (x \oplus z)y \vee \bar{x}\bar{z}$;

3) $\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$;

4) $\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{z}$;

5) $\bar{x}(y\bar{z} \vee \bar{y}z)$;

6) $x \to (y \to \bar{z})(y\bar{z} \to x)$;

7) $\bar{x}\bar{z} \vee (\bar{x}y \vee x\bar{y})z$;

8) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$;

9) $(x \sim y)(x\bar{y} \vee y)$;

10) $(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

III. Отыскав для каждой из следующих булевых функций представляющий ее полином Жегалкина, установите, какие из следующих функций тождественно равны 1, а какие – 0:

1) $(y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

2) $x \to (\bar{x} \to \bar{y})$;

3) $(x \to y) \to ((x \to (y \to z)) \to (x \to z))$;

4) $((x \to y) \to x) \to x$;

5) $(x \to (y \to x)) \to (\overline{(\bar{y} \to \bar{x})}(x \to z))$;

6) $(x \to yz) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

7) $\bar{x} \to (x \to y)$;

8) $(x \to (y \to z))(x \to y)(x \to z)$;

9) $\overline{(\bar{x} \vee (y \to x))}$;

10) $\overline{(x \vee y)} \vee \bar{x}y \vee x$.

IV. Выясните, какие из следующих функций линейны:

1) $\bar x\bar y\bar z\vee\bar x\bar y z\vee\bar x yz\vee xy\bar z$;
2) $\bar x\bar y\bar z\vee\bar x y\bar z\vee xy\bar z\vee xyz$;
3) $(x\vee y\vee\bar z)(x\vee\bar y\vee z)(\bar x\vee y\vee\bar z)(\bar x\vee\bar y\vee z)$;
4) $(xy\to\bar z)\vee(\bar x\vee\bar y)(x\vee y)z$;
5) $\bar x\to(y\vee\bar z)$;
6) $xyz\vee x\bar y z\vee xy\bar z$;
7) $\overline{(\overline{(\bar x\to y)}\to z)}$;
8) $\bar x y\bar z\vee\bar x yz\vee xy\bar z\vee xyz$;
9) $xyz\vee x\bar y z\vee\bar x y\bar z\vee\bar x\bar y\bar z$;
10) $((x\vee y\vee z)\to x\bar y z)\vee(\bar x z\vee x\bar z)y\vee x\bar y\bar z$.

V. Докажите монотонность следующих булевых функций:

1) $xyz\vee\bar x yz\vee\bar x yz\vee xy\bar z$;
2) $xyz\oplus xy\oplus xz$;
3) $(x\vee y\vee z)(x\vee\bar y\vee z)(x\vee\bar y\vee z)$;
4) $xyz\oplus x\oplus yz$;
5) $xyz\vee(xyz\oplus xy)$;
6) $(x\vee y\vee z)(\bar x\vee y\vee z)(x\vee\bar y\vee z)(x\vee y\vee\bar z)(\bar x\vee\bar y\vee z)(x\vee$
;
7) $\bar x\bar y z\vee x\bar y\bar z\vee\bar x yz\vee xyz$;
8) $xyz\vee xz\vee yz$;
9) $xy\oplus(x\oplus y)$;
10) $(x\vee y\vee z)(\bar x\vee y\vee z)(x\vee\bar y\vee z)$.

4.6. Приложения алгебры высказываний. Приложение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам

I. Составить РКС для формулы:

1) $(\bar{x} \vee y) \wedge (z \wedge y \vee x) \vee u$;
2) $(x \to y) \wedge (y \to z)$;
3) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;
4) $(x \to y) \to (\bar{x} \wedge (y \vee z))$;
5) $(x \to (y \to z)) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;
6) $(z \downarrow x \wedge y) \wedge ((x \vee \bar{z}) \downarrow (y \wedge z))$;
7) $x \wedge ((\bar{y} \wedge z) \vee x \vee y)$;
8) $(x \wedge y \wedge z) \vee \overline{(x \wedge y \wedge z)} \vee (\bar{x} \wedge y)$;
9) $(x \wedge y \to \bar{x} \wedge y) \wedge (x \vee z \wedge y)$;
10) $(x \to (y \to \bar{z})) \vee (x \wedge y \sim z)$.

II. Построить схемы, реализующие следующие операции: «~» и «$\overline{\wedge}$» (штрих Шеффера).

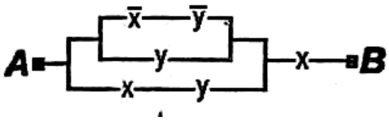
III. Построить РКС для формулы $F(x, y, z)$, если известно, что:

1) $F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;
2) $F(1,0,1) = F(1,1,0) = 1$;
3) $F(0,0,1) = F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = F(1,1,0) = 1$

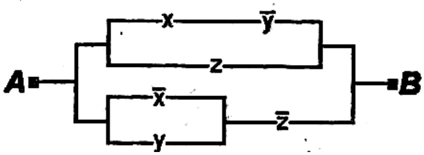
4) $F(0,0,1) = F(1,1,1) = F(0,1,1) = 1$;
5) $F(1,1,0) = F(1,0,0) = F(0,1,0) = 1$;
6) $F(1,1,0) = F(1,0,0) = F(0,0,0) = 1$;
7) $F(0,0,0) = F(1,0,1) = 1$;
8) $F(1,0,0) = F(0,0,0) = F(1,0,1) = 1$;
9) $F(0,0,0) = F(0,1,0) = F(1,0,0) = F(0,1,1) = 1$;
10) $F(0,1,1) = F(0,1,0) = F(0,0,1) = 1$, а остальные значения функции равны 0.

IV. Упростить РКС:

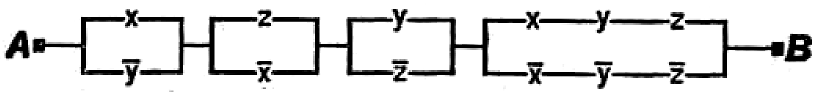
1)



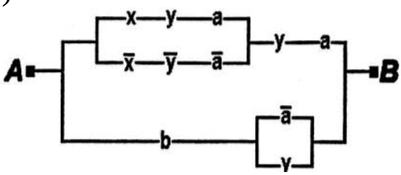
2)



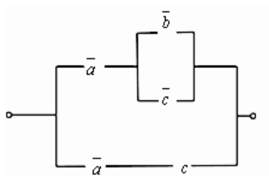
3)



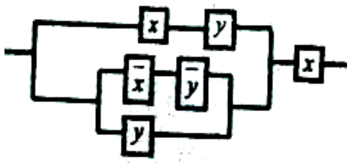
4)



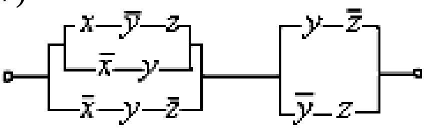
5)



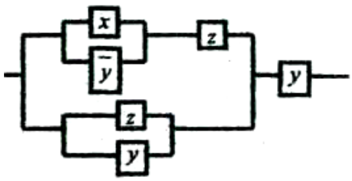
6)



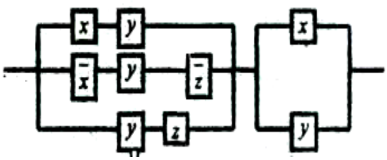
7)



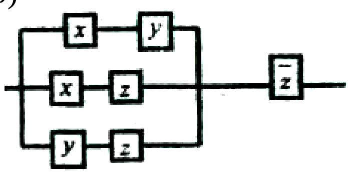
8)



9)

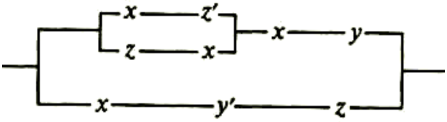


10)

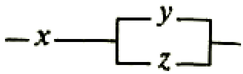


V. Проверить равносильность схем ($x' \equiv \bar{x}$):

1)

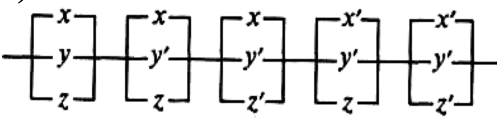


и

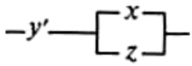


;

2)

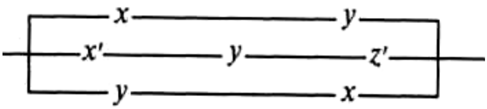


и

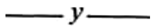


;

3)

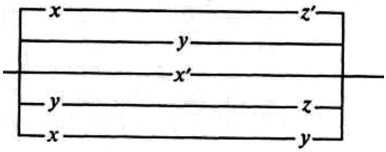


и

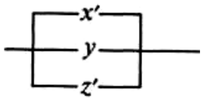


;

4)

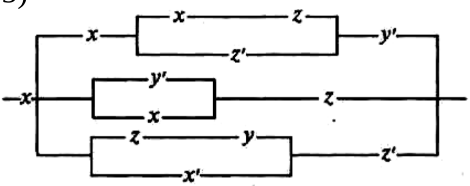


и

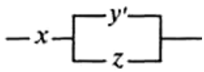


;

5)

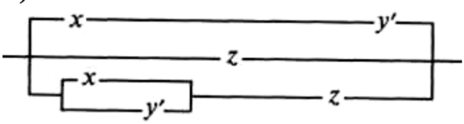


и

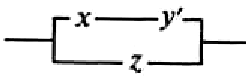


;

6)

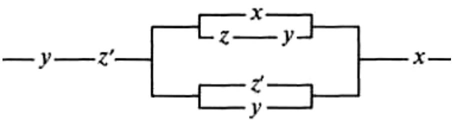


и



;

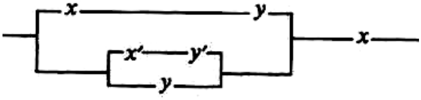
7)



и

;

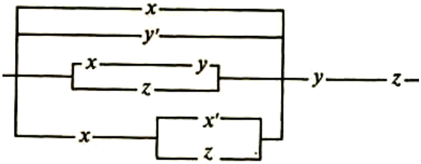
8)



и

;

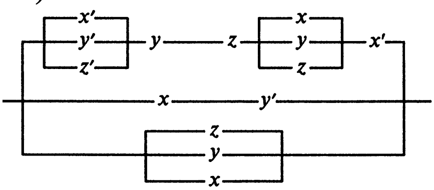
9)



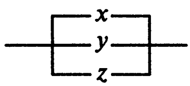
и

;

10)



и



.

4.7. Приложения алгебры высказываний. Решение логических задач с помощью алгебры логики

Условие логической задачи с помощью соответствующих обозначений записывают в виде формулы АВ. После равносильных преобразований формулы получают ответ на все вопросы задачи.

1) После обсуждения состава участников предполагаемой экспедиции было решено, что должны выполняться два условия:

а) Если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский; б) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин.

Требуется:

1) ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую принятое решение в символической форме;

2) для полученной формулы найти возможно более

простую равносильную формулу;

3) пользуясь найденной более простой формулой, дать новую и более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников экспедиции.

2) В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1. Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев - 7-ой».
2. Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев - 8-ой».
3. Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин - 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

3) Пять школьников из пятя различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:

Иванов: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев - из Новозыбкова».

Сидоров: «Я приехал из Клинцов, а Петров - из Трубчевска».

Петров: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев - из Дятькова».

Дмитриев: «Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов -из Жуковки».

Ефимов: «Я приехал из Жуковки, а Иванов живет вДятьково»

Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое ложно?

4) Семья, состоящая из отца A, матери B и трех дочерей C, D, E купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

1. Когда отец A смотрит передачу, то мать B делает то же.

2 Дочери D и E, обе или одна из них, смотрят передачу.

3. Из двух членов семьи - мать B и дочь C – смотрят передачу одна и только одна.

4. Дочери C и D или обе смотрят, или обе не смотрят.

5. Если дочь E смотрит передачу, то отец A и дочь D делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

5) На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ - «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

6) Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1. Если первый сдал, то и второй сдал.

2. Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.

3. Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.

4. Если четвертый сдал, то и первый сдал.

7) Четыре студентки, имена которых начинаются буквами A, E, C, P посещают институт по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

1. Понедельник – день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.

2. C и P не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.

3. Если C выйдет в среду или P – в четверг, то E согласится побывать на занятиях в пятницу.

4. Если A не пойдет в ВУЗ в четверг, то E позволит се-

бе сходить туда в среду.

5. Если А или Р будут в институте в среду, то С сможет пойти в пятницу.

6. Если Р в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то А придется сходить в институт во вторник, а С – в четверг.

8) Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял когонибудь во лжи.

1. Клод утверждал, что Жак лжет.

2. Жак обвинял во лжи Дика.

3. Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

4.8. Доказательство формул ИВ

I. Проверить доказуемость следующих формул:

1) $\dfrac{\vdash a \to b, \vdash \overline{b}}{\vdash \overline{a}}$;

2) $\dfrac{\vdash a \to b, \vdash b \to c, \vdash \overline{c}}{\vdash \overline{a}}$;

3) $\dfrac{\vdash a \to b, \vdash b \to c, \vdash a}{\vdash b}$;

II. Выяснить, имеет ли место следующее утверждение:

1) $\dfrac{\vdash a \to (b \to c), \vdash (a \to b) \to c}{\vdash b \to c}$;

2) $\dfrac{\vdash a \to (b \to c), \vdash (a \to b) \to c}{\vdash a \to c}$?

III. Доказать, что выводимы формулы:

1) $\vdash \overline{\overline{a}} \to a$;

2) $\vdash a \to \overline{\overline{a}}$.

IV. Показать, что имеет место следующая выводимость (т.дедукции):

1) $\vdash (f \to g) \to ((\overline{f} \to g) \to g)$;

2) $\vdash (f \to g) \to ((f \to \overline{g}) \to \overline{f})$.

V. Доказать, что

1) $\Gamma = \{A, \overline{\overline{A}} \to B\} \vdash B$;

2) $\Gamma = \{A \to B, C \to A, C\} \vdash B$;

3) $\Gamma = \{A \to B\} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$;

4) $\Gamma = \{A \to B, \overline{B}\} \vdash \overline{A}$.

VI. Показать доказуемость формулы, используя обобщенную теорему дедукции:

1) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

2) $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$.

VII. Построить вывод формул:

1) $\vdash (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$;

2) $\vdash (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$;

3) $\vdash (A \to B) \to (A \to (B \to C)) \to (A \to C)$;

4) $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$;

5) $\vdash (A \to B) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$

6) $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (C \to D) \to A \to D)$;

7) $\vdash (A \to \overline{\overline{B}}) \to (A \to B)$;

8) $\vdash (\overline{\overline{A}} \to B) \to (A \to B)$;

9) $\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

VIII. Доказать производные правила вывода:

1) $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash A \to B}$;

2) $\dfrac{\vdash A \to \overline{A}}{\vdash \overline{A}}$;

3) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{A} \to B}{\vdash B}$;

4) $\dfrac{\vdash B}{\vdash A \to B}$;

5) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$;

6) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash A \to \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$;

7) $\dfrac{\vdash A, \ \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \to B}}$;

8) $\dfrac{\vdash \overline{A} \to A}{\vdash A}$.

4.9. Понятие предиката. Логические и кванторные операции над предикатами

I. Пусть даны предикаты: $P(x)$ – x – *четное число* **и** $Q(x)$ – x *кратно* 3, **определенные на множестве** N. **Найти области истинности предикатов:**

1) $P(x) \wedge Q(x)$;
2) $P(x) \vee Q(x)$;

3) $\overline{P(x)}$;

4) $P(x) \to Q(x)$.

II. Пусть даны предикаты $P(x)$:"$x^2 - 4 = 0$" **и** $Q(x)$:"$3x - 2 < 17$". **Найдите области истинности этих предикатов, если их область определения есть:**

1) R;

2) N.

III. Найдите область истинности и область определения предикатов:

1) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0$;

2) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} < 0$;

3) $\sqrt{x^2 - 1} = -3$;

4) $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \geq 0; \\ 2x^2 + x - 30 < 0 \end{cases}$

IV. Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов:

1) $\overline{(x > 2)} \wedge (x < y)$;

2) $(x \geq 3) \to (y < 5)$;

3) $((x > 2) \wedge (y \geq 1)) \wedge ((x < -1) \vee (y < -2))$;

4) $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$;

5) $(x \geq 0) \sim (y \leq 0)$;

6) $(x^2 + y^2 = 1) \vee (y < 0)$;

7) $(x > 0) \vee (x + y = 3)$;

8) $(x \leq y) \vee (|x| \leq 1)$;

9) $((x > 2) \vee (y > 1)) \wedge ((x < -1) \vee (y < -2))$;

10) $(|x| > 2) \to (|x| < 3)$;

11) $(x \geq 0) \to (y \leq 0)$;

12) $(x^2 + y^2 > 1) \sim (xy < 0)$.

V. На множестве $M = \{1,2,3,\ldots,20\}$ **заданы предикаты:**

A(x): «x не делится на 5»;
B(x): «x – четное число»;
C(x): «x – число простое»;
Д(x): «x – кратно 3».

Найдите области истинности следующих предикатов:

1) $A(x) \wedge B(x)$;
2) $\overline{B(x)} \wedge D(x)$;
3) $D(x) \to \overline{C(x)}$;
4) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$;
5) $C(x) \vee D(x)$;
6) $C(x) \to A(x)$;
7) $(A(x) \wedge D(x)) \to \overline{C(x)}$;
8) $\overline{B(x)} \wedge \overline{D(x)}$;
9) $\overline{B(x)} \vee D(x)$;
10) $(A(x) \wedge C(x)) \to \overline{D(x)}$;
11) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;
12) $A(x) \to B(x)$.

VI. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов *M* совпадает с *R*:

1) $\exists x(x+5=x+3)$;
2) $\exists x(x^2+x-\frac{1}{2}=0)$;
3) $\forall x(x^2+x+1>0)$;
4) $\forall x(x^2-5x+6\geq 0)$;
5) $\forall x((x\in\{3,5\})\to(x^2-6x+8<0))$;
6) $\exists x((x^2-5x+6\geq 0)\wedge(x^2-2x+1>0))$;
7) $\exists x((x^2-5x+6\geq 0)\wedge(x^2-6x+8\leq 0))$;

8) $\forall x((x^2-6x+8\ge 0)\wedge(x^2-6x+8<0))$;

9) $\exists x((x\in\{2,5\})\to(x^2-6x+8=0))$;

10) $\exists x((x^2-6x+8\ge 0)\wedge(x^2-6x+8<0))$;

11) $\forall x((x^2-2x+3>0)\vee(x+5>0))$;

12) $\exists x((x^2-3x+2=0)\to(x^2-x<0))$;

13) $\forall x((x^2-3x+2=0)\wedge(x^2-x<0))$;

14) $\forall x((x^2-3x+2\le 0)\to(x^2-x\ge 0))$.

4.10. Понятие формулы АП. Равносильные формулы АП

I. Найти отрицание следующих формул:

1) $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$;
2) $\exists x(P(x)\vee Q(x))$;
3) $\forall x\exists y(R(x;y)\to L(x;y))$;
4) $\forall x(A(x)\to\forall yB(y))$;
5) $\forall x(A(x)\to B(x))\wedge\exists x(S(x)\wedge\overline{R(x)})$;
6) $\exists x(R(x)\sim Q(x))$;
7) $\exists x(A(x)\wedge B(x)\wedge C(x))$;
8) $\forall x(A(x)\vee\exists yB(y))$;
9) $\forall x\exists y\forall z(P(x,y,z)\to Q(x,y,z))$;
10) $\forall x(A(x)\to B(x))\wedge\exists x(\overline{A(x)}\wedge B(x))$.

II. Докажите следующие равносильности:

1) $\exists x(A(x)\vee B(x))\equiv\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$;
2) $\forall xA(x)\equiv\overline{\exists x\overline{A(x)}}$;
3) $\forall x(A(x)\to B(y))\equiv\exists xA(x)\to B(y)$;
4) $\exists x(c\to A(x))\equiv c\to\exists xA(x)$;
5) $c\wedge\forall xA(x)\equiv\forall x(c\wedge A(x))$;
6) $\exists x(A(x)\to c)\equiv\forall xA(x)\to c$;
7) $\exists xA(x)\equiv\overline{\forall x\overline{A(x)}}$;

8) $c \vee \forall x A(x) \equiv \forall x(c \vee A(x))$.

III. Доказать, что:

1) $\exists x \forall y(F(x) \wedge G(y)) \equiv \forall y \exists x(F(x) \wedge G(y))$;

2) $\exists x \forall y(F(x) \vee G(y)) \equiv \forall y \exists x(F(x) \vee G(y))$

IV. Доказать, что $F(x) \not\equiv G(x)$, если:

1) $\begin{matrix} F(x) \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)), \\ G(x) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \end{matrix}$;

2) $\begin{matrix} F(x) \equiv \forall x(P(x) \vee Q(x)), \\ G(x) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \end{matrix}$.

4.11. Общезначимость и выполнимость формул АП. Предваренная нормальная форма (ПНФ)

I. Доказать, что формулы являются общезначимыми:

1) $\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$;

2) $\overline{\exists x \exists y((F(x) \rightarrow F(y)) \wedge (F(x) \rightarrow \overline{F(y)}) \wedge F(x))}$;

3) $\forall x(P(x) \wedge (r \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \bar{r})$;

4) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$;

5) $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$;

6) $\forall x(q \rightarrow P(x)) \sim (q \rightarrow \forall x P(x))$;

7) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$;

8) $\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \sim (\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$.

II. Для следующих формул АП найдите равносильную им приведенную форму:

1) $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$;

2) $\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(y) \rightarrow \forall z R(z)})$;

3) $(\exists x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y))) \rightarrow R(z)$;

4) $\exists x(\forall y P(y) \rightarrow Q(x)) \wedge \overline{\forall y \exists x(Q(x) \rightarrow P(y))}$;

5) $\overline{\forall x P(x) \vee \exists x(Q(x) \rightarrow R(x))}$;

6) $\overline{\forall x P(x) \to \exists y Q(y)}$;

7) $\overline{\forall x \exists y (P(x) \to P(y)) \wedge (P(y) \to P(x))}$;

8) $\overline{\exists y (P(y) \sim \forall x Q(x))}$;

9) $\overline{\forall x \exists y \forall z (P(x,y,z) \to \exists t (Q(x,t) \wedge Q(y,t) \wedge Q(z,t)))}$

.

III. Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме (ПНФ):

1) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists y Q(y))$;

2) $\forall x (Q(x,y) \vee (\exists x Q(x,x) \to \forall z (R(t,z) \to \exists x Q(x,x))))$

;

3) $\forall y (Q(y,z) \to \exists x R(x,t,z))$;

4) $P(y) \to \overline{\forall x Q(x,y)} \to P(y)$;

5) $\exists x R(x,y,z) \to \overline{\forall x Q(x,y)}$;

6) $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x,y)}$;

7) $\overline{\forall x (A(y) \sim \exists x A(x))}$;

8) $\overline{\forall x (A(x) \to \exists y B(y))}$;

9) $\exists x \forall y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y)$;

10) $\overline{\forall x \exists y P(x,y)} \vee \exists x \forall y Q(x,y)$.

4.12. Применение алгебры предикатов в математике

I. Для каждого условия выяснить, является ли оно необходимым и достаточным для того, чтобы выполнялось неравенство: $x^2 - 2x - 8 \le 0$

1) $x = 0$;

2) $x \ge -3$;

3) $x > -2$;

4) $x \ge -1, x \le 3$;

5) $x \ge -1$ и $x < 10$;

6) $-2 \le x \le 10$.

II. Определите, является ли один из следующих

предикатов, заданных на множестве действительных чисел, следствием другого:

1) «$|x| < 3$», «$x^2 - 3x + 2 = 0$»;
2) «$x^4 = 16$», «$x^2 = -2$»;
3) «$x - 1 > 0$», «$(x-2)(x+5) = 0$»;
4) «$\sin x = 3$», «$x^2 + 5 = 0$»;
5) «$\lg x \leq 1$», «$1 \leq x \leq 10$».

III. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо, но недостаточно» или «достаточно, но не необходимо» или «не необходимо и не достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное утверждение:

1) Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольным …, чтобы длины его диагоналей были равны.
2) Для того, чтобы $x^2 - 5x + 6 = 0$ …, чтобы $x = 3$.
3) Для того, чтобы сумма четного числа натуральных чисел была четным числом, …, чтобы каждое слагаемое было четным.
4) Для того, чтобы окружность можно было вписать в четырехугольник, …, чтобы суммы длин противоположных сторон были равны.
5) Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, …, чтобы она была ограниченной.

IV. Папа сказал детям: «Если мы с мамой поедем летом в дом отдыха, то вы все поедете в детский лагерь».в школе детей спросили, куда они поедут летом. Петя ответил: «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха». Галя сказала: «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь». «Нет, не так, - вмешался Коля. – Если мы не поедем в лагерь, то кто-то из родителей не поедет в дом отдыха».

Чей ответ равносилен тому, что сказали родители?

Вопросы к зачету и экзамену

1. Простые и составные высказывания. Высказывательные переменные. Основные логические связки. Логические операции над высказываниями.
2. Формулы и их логические возможности. Равносильные формулы. Теорема об отношении ≡.
3. Тавтологии и противоречия. Таблицы истинности. Теорема о тавтологии. Законы логики.
4. Алгебра Буля. Булевы функции.
5. Теоремы о двойственных формулах.
6. Полные системы связок (определение, свойства, теорема о связке «отрицания»).
7. Описание п.с.с. Теоремы о множествах, являющихся и не являющихся полными системами связок.
8. Одноэлементные п. с. с., теорема.
9. Построение формул по заданным таблицам истинности.
10. Применение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам.
11. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Теорема о элементарной дизъюнкции (конъюнкции).
12. Критерий тождественной истинности (ложности) формулы.
13. С. Д. Н. Ф. и С. К. Н. Ф. формы.
14. Проблема разрешимости формул АВ.
15. Свойство операции сравнимости по модулю два.
16. Полиномы Жегалкина. Монотонные функции.
17. Формальные и содержательные аксиоматические теории. Принцип построения формальных аксиоматических теорий. Язык ИВ. Аксиомы и правила вывода ИВ.
18. Доказуемость и выводимость из гипотез. Теорема о теоремах ИВ.
19. Свойства выводимости из гипотез. Вывод формулы

$A \to A$.

20. Теорема дедукции.
21. Правило силлогизма и правило исключения промежуточной посылки, закон перестановки посылок.
22. Закон противоречивой посылки, закон контрапозиции. Обобщенное правило противоречивой посылки.
23. Полнота ИВ относительно АВ.
24. Непротиворечивость и разрешимость ИВ.
25. Высказывательные формы. Определение, логические возможности и таблица истинности предиката. Способы задания предиката, предикатные переменные, область истинности предиката.
26. Логические и кванторные операции над предикатами.
27. Области истинности предикатов. Теорема об области истинности отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции.
28. Определение формулы алгебры предикатов. Классификация формул. Проблема разрешимости формул АП.
29. Кванторы как обобщение логических операций.
30. Независимость формул от связанных переменных. Вынесение отрицания за кванторы.
31. Вынесение кванторов за операции конъюнкции и дизъюнкции.
32. Перестановка кванторов.
33. Приведенная форма для формул алгебры высказываний. Теорема.
34. Предваренная нормальная форма. Теорема.
35. Прямые и обратные теоремы, метод доказательства «от противного».
36. Необходимые и достаточные условия, теорема.
37. Правильные и неправильные рассуждения. Критерий правильности рассуждений. Правила вывода.
38. Математические теории 1-го рода, основные понятия, принцип построения, примеры.

Варианты контрольной работы для студентов ОЗО

В – 1	**В – 2**	**В – 3**	**В – 4**	**В – 5**	**В – 6**	**В – 7**	**В – 8**	**В- 9**	**В–10**
4.2. I 1)	**4.2. I** 2)	**4.2. I** 3)	**4.2. I** 4)	**4.2. I** 5)	**4.2. I** 6)	**4.2. I** 7)	**4.2. I** 8)	**4.2. I** 9)	**4.2. I** 10)
4.2.IX а) 1	**4.2.IX** а) 2	**4.2.IX** а) 3	**4.2.IX** а) 4	**4.2.IX** а) 5	**4.2.IX** б) 1	**4.2.IX** б) 2	**4.2.IX** б) 3	**4.2.IX** б) 4	**4.2.IX** б) 5
4.4. VII 1)	**4.4. VII** 2)	**4.4. VII** 3)	**4.4. VII** 4)	**4.4. VII** 5)	**4.4. VII** 6)	**4.4. VII** 7)	**4.4. VII** 8)	**4.4. VII** 9)	**4.4. VII** 10)
4.6. I 1)	**4.6. I** 2)	**4.6. I** 3)	**4.6. I** 4)	**4.6. I** 5)	**4.6. I** 6)	**4.6. I** 7)	**4.6. I** 8)	**4.6. I** 9)	**4.6. I** 10)
4.6. III. 1)	**4.6. III.** 2)	**4.6. III.** 3)	**4.6. III.** 4)	**4.6. III.** 5)	**4.6. III.** 6)	**4.6. III.** 7)	**4.6. III.** 8)	**4.6. III.** 9)	**4.6. III.** 10)
4.6. IV. 1)	**4.6. IV.** 2)	**4.6. IV.** 3)	**4.6. IV.** 4)	**4.6. IV.** 5)	**4.6. IV.** 6)	**4.6. IV.** 7)	**4.6. IV.** 8)	**4.6. IV.** 9)	**4.6. IV.** 10)
4.9. V. 1)	**4.9. V.** 2)	**4.9. V.** 3)	**4.9. V.** 4)	**4.9. V.** 5)	**4.9. V.** 6)	**4.9. V.** 7)	**4.9. V.** 8)	**4.9. V.** 9)	**4.9. V.** 10)
4.9. VI. 11)	**4.9. VI.** 12)	**4.9. VI.** 13)	**4.9. VI.** 14)	**4.9. VI.** 5)	**4.9. VI.** 6)	**4.9. VI.** 7)	**4.9. VI.** 8)	**4.9. VI.** 9)	**4.9. VI.** 10)
4.10. II. 1)	**4.10. II.** 6)	**4.10. II.** 3)	**4.10. II.** 4)	**4.10. II.** 5)	**4.10. II.** 1)	**4.10. II.** 6)	**4.10. II.** 3)	**4.10. II.** 4)	**4.10. II.** 5)
4.11. I. 1)	**4.11. I.** 2)	**4.11. I.** 3)	**4.11. I.** 4)	**4.11. I.** 5)	**4.11. I.** 6)	**4.11. I.** 7)	**4.11. I.** 8)	**4.11. I.** 1)	**4.11. I.** 2)
4.11. III. 1)	**4.11. III.** 2)	**4.11. III.** 3)	**4.11. III.** 4)	**4.11. III.** 5)	**4.11. III.** 6)	**4.11. III.** 7)	**4.11. III.** 8)	**4.11. III.** 9)	**4.11. III.** 10)
4.12. II. 1)	**4.12. II.** 2)	**4.12. II.** 3)	**4.12. II.** 4)	**4.12. II.** 5)	**4.12. II.** 1)	**4.12. II.** 2)	**4.12. II.** 3)	**4.12. II.** 4)	**4.12. II.** 5)
4.12. III. 1)	**4.12. III.** 2)	**4.12. III.** 3)	**4.12. III.** 4)	**4.12. III.** 5)	**4.12. III.** 1)	**4.12. III.** 2)	**4.12. III.** 3)	**4.12. III.** 4)	**4.12. III.** 5)

ЛИТЕРАТУРА

Битюцкий В.П., Папуловская Н.В. Математическая логика. Исчисления высказываний и предикатов. – Екатеринбург: УГТУ, 2005.

Гахман А.В., Спивак М.А., Розен В.В. Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та,1969.

Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972.

Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 2001.

Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2004.

Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: Академия, 2005.

Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975.

Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. – СПб.: Лань, 1998.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971.

Никольская И.Л. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1981.

Эдельман С.Л. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1975.