

**Теоретические основы  
контроля и анализа  
функционирования  
систем  
автоматического  
управления**

**СКИФ**



**Авиационный колледж ДГТУ**

**Лекционный курс**

**Автор**

**Смирнов Ю.А.**

Ростов-на-Дону,  
2019

## Аннотация

В учебном пособии представлены основы автоматического регулирования и управления, системы управления летательных аппаратов и оборудования, технические средства автоматизации производства.



## Автор

**Смирнов Юрий Александрович –**

**к.т.н., доцент, преподаватель 1 категории АК ДГТУ**

Сфера научных интересов – Вычислительная техника и автоматика

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ №1 .....	4
<b>ТЕМА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ САУ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ»</b>	<b>4</b>
ЛЕКЦИЯ №2 .....	34
<b>ТЕМА «ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ» .....</b>	<b>34</b>
ЛЕКЦИЯ №3 .....	55
<b>ТЕМА «АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ» .....</b>	<b>55</b>
ЛЕКЦИЯ №4 .....	81
<b>ТЕМА «МЕТОДЫ СИНТЕЗА РОБАСТНЫХ И АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ» .....</b>	<b>81</b>
ЛЕКЦИЯ №5 .....	111
<b>ТЕМА «СОВРЕМЕННЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ» ..</b>	<b>111</b>
ЛЕКЦИЯ №6 .....	143
<b>ТЕМА «НЕЙРОСЕТЕВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ» .....</b>	<b>144</b>
ЛЕКЦИЯ №7 .....	167
<b>ТЕМА «МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ» .....</b>	<b>167</b>

## ЛЕКЦИЯ №1

### ТЕМА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ САУ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ»

#### 1. Общая характеристика задач управления системами с распределенными параметрами.

Ввиду значительной специфики методов математического описания, построения и расчета систем автоматического управления объектами с распределенными параметрами (ОРП) и недостаточным их освещением в учебной литературе в настоящей теме отдельно рассматриваются эти вопросы в конспективном изложении.

Поскольку на практике любой технический объект управления имеет вполне определенные геометрические размеры, то функция, характеризующая его состояние, вообще говоря, изменяется в пределах пространственной области, занимаемой объектом, и, следовательно, зависит не только от времени  $t$ , но и от вектора  $x$  пространственных координат, являясь функцией  $Q(x, t)$  по меньшей мере двух аргументов (если  $x$  - скалярная переменная).

Подобные системы, состояние которых описывается функциями нескольких аргументов, зависящими как от времени, так и от пространственных координат, получили название **систем с распределенными параметрами** (СРП), или, короче, **распределенных систем**.

Задачи управления СРП оказываются качественно более сложными по сравнению с системами с сосредоточенными параметрами (ССП) ввиду целого ряда принципиальных особенностей. Укажем некоторые из них:

1. Состояние СРП, определяемое функцией нескольких переменных, описывается соответственно дифференциальными уравнениями не обыкновенных, а в частных производных (содержащими производные функции состояния как во времени, так и по пространственным координатам), интегральными уравнениями, а также «гибрид-

ными» системами уравнений различной природы, включая в качестве дополнительных соотношений и обыкновенные дифференциальные уравнения. Это обстоятельство приводит к математическим моделям СРП, качественно отличающимся от типичных представлений, используемых в ССП.

2. По сравнению с ССП принципиально расширяется класс управляющих воздействий, прежде всего за счет возможности включения в их число пространственно-временных управлений, описываемых, подобно управляемому состоянию СРП, функциями нескольких аргументов - времени и пространственных координат.

3. Задача реализации систем управления объектами с распределенными параметрами резко усложняется по сравнению с ССП как за счет необходимости осуществления пространственно-распределенного контроля состояния объекта в целях наблюдения за результатами процесса управления и использования соответствующих сигналов обратных связей, так и за счет необходимости построения регуляторов с пространственно-распределенными управляющими воздействиями.

## **2. Базовые уравнения и стандартные формы объектов с распределенными параметрами (ОРП)**

Типовое линейное дифференциальное уравнение второго порядка

в частных производных, моделирующее поведение функции состояния  $Q(x,t)$  пространственно одномерного объекта с распределенными параметрами, описывает в первом приближении широкий круг самых разнообразных физических явлений и может рассматриваться в качестве базовой модели ОРП достаточно общего вида.

После приведения к канонической форме записи, не содержащей смешанных производных, это уравнение может быть представлено в виде

$$A(x,t)\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + A_1(x,t)\frac{\partial Q}{\partial t} = C(x,t)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + B_1(x,t)\frac{\partial Q}{\partial x} + C_1(x,t)Q + f(x,t,u(x,t)); x_0 < x < x_1, t > 0 \quad (1)$$

с заданными коэффициентами  $A, A_1, C, B_1$  и функцией  $f$ .

Для получения единственного решения уравнение (8.1) необходимо дополнить начальными условиями, которые здесь, подобно случаю описания ССП обыкновенными дифференциальными уравнениями, принимают вид

$$Q(x,0) = Q_0^{(0)}(x); \quad \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} = Q_0^{(1)}(x); \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (2)$$

с заданными функциями  $Q_0^{(0)}(x)$  и  $Q_0^{(1)}(x)$ .

Условие (2) необходимо, но не достаточно для выделения единственного решения уравнения (1), что является принципиальной особенностью СРП по сравнению с ССП.

Полная система дополнительных соотношений, как правило, должна содержать еще граничные условия для  $Q(x,t)$ , которые, характеризуя взаимодействие  $Q(x,t)$ , с внешней средой, должны выполняться для  $t > 0$  в граничных точках  $x = x_0$  и  $x = x_1$  отрезка  $[x_0, x_1]$  изменения пространственной переменной и задаются в типовой форме

$$\alpha(x_0,t)Q(x_0,t) + \beta(x_0,t)\frac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x} = g_0(t, u_0(t)), t > 0; \quad (3)$$

$$\alpha(x_1,t)Q(x_1,t) + \beta(x_1,t)\frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} = g_1(t, u_1(t)), t > 0. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  - заданные коэффициенты, а  $g_0$  и  $g_1$  - заданные функции своих аргументов.

Граничные условия (3), (4) называются однородными или неоднородными, если  $g(t) = 0$  или  $g \neq 0$  соответственно.

Задача (1)-(4) при  $\alpha > 0, \beta = 0$ ;  $\alpha = 0, \beta > 0$  и  $\alpha > 0, \beta > 0$  называется соответственно первой, второй и третьей (смешанной) краевыми задачами.

Как следует из (1)-(4), поведение управляемого выхода объекта, в качестве которого здесь рассматривается пространственно распределенная функция  $Q(x, t)$ , описывающая состояние ОРП, однозначно определяется при фиксированном начальном состоянии  $Q_0(x) = (Q_0^0(x), Q_0^1(x))$  входными воздействиями  $f, g_0, g_1$ . В свою очередь в роли этих входных воздействий могут фигурировать целиком или частично (например, в виде аддитивных слагаемых) соответствующие управления  $u(x, t), u_0(t), u_1(t)$ . Наряду с управляющими, в роли входов объекта могут рассматриваться и возмущающие воздействия.

Управляющие воздействия  $u(x, t)$ , формально включаемые в уравнение объекта (1) в составе функции  $f$  (в частности, при  $f(x, t, u(x, t)) = u(x, t)$ ) и реализуемые обычно за счет внутренних источников энергии или вещества, можно назвать внутренними управлениями, а управляющие воздействия  $u_0(t), u_1(t)$  в составе функций  $g_0, g_1$  фигурирующие в граничных условиях (3), (4) и характеризующие целенаправленное влияние на  $Q(x, t)$ , организуемое со стороны окружающей среды на границе пространственной области, занимаемой объектом, - граничными управлениями (управлениями по граничным условиям).

Граничные управления  $u_0(t), u_1(t)$  для одномерного объекта (1)-(4), сконцентрированные в точках  $x_0$  и  $x_1$  на границах отрезка  $[x_0, x_1] \in x$  представляют собой сосредоточенные воздействия, изменяющиеся только во времени  $t$ .

Внутренние управления  $u(x,t)$  в любом случае могут представлять собой как независимые от пространственных координат управления, которые мы опять будем называть сосредоточенными, так и пространственно-временные воздействия, в зависимости от постановки конкретной задачи. С точки зрения физического содержания, инженерной интерпретации и практической реализации внутренние и граничные управления обычно существенно отличаются друг от друга.

Примеры [3,13,14,18, 22, 23].

Рассмотрим некоторые характерные частные случаи. При  $A = 1$ ;  $C = v^2$ ;  $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ ;  $f(x,t,u(x,t)) = 0$ , получаемое из (1) уравнение

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}; v^2 = \text{const} > 0, x \in (x_0, x_1), t > 0, \quad (5)$$

называемое волновым уравнением, моделирует процессы распространения свободных колебаний, например, процессы распространения со скоростью звука  $v$  пульсаций расхода газа в длинном трубопроводе.

Распределение напряжения и тока вдоль длинной электрической линии описывается телеграфным уравнением

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial Q}{\partial t} + b_2 Q; b_1, b_2 = \text{const} > 0, x \in (x_0, x_1), t > 0, \quad (6)$$

где в данном случае  $v$  является скоростью распространения электромагнитной волны вдоль линии. В частном случае

для длинных электрических линий без потерь при  $b_1 = b_2 = 0$  уравнение (6) сводится к волновому уравнению (5). При  $b_2 = 0, b_1 \neq 0$  уравнение (6) моделирует процессы механических колебаний в сопротивляющейся среде.

Уравнением теплопроводности математической физики

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t)); a = \text{const} > 0, x \in (x_0, x_1), t > 0, \quad (7)$$

описываются, например, в первом приближении температурные поля процессов нестационарной теплопроводности, нестационарные электромагнитные поля, поля концентраций в процессах нестационарной диффузии, тепломассопереноса и др.

В частном случае  $A = C = 0$  в (1) мы получаем уравнение первого порядка, в первом приближении описывающее (одним или системой таких уравнений) поведение целого класса подвижных ОРП, к которым можно отнести процессы нагрева металла в агрегатах непрерывного действия, теплообменные процессы в движущихся средах, процессы передачи жидкостей и газа по длинным трубопроводам, тепломассообменные процессы в химических реакторах, распространение электромагнитных волн в длинных электрических линиях и т. п.

В простейшем случае это уравнение принимает вид

$$b \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + bV \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + Q(x, t) = Q_i(x, t); b = \text{const}, 0 < x < 1, t > 0, \quad (8)$$

где  $Q_i$  – внешнее воздействие на объект;  $V$  – скорость перемещения объекта.

### **Стандартные формы, стандартизирующие функции, функции Грина**

#### **ивход-выходные соотношения ОРП [4, 5, 10, 15, 18, 23]**

Описание ОРП в общей форме краевой задачи (1)-(4) порождает множество различных возможных вариантов ее постановок для

различных начальных состояний и воздействий  $g(x, t)$  по граничным условиям в (3) и (4). Оказывается, что можно подобрать такую функцию  $w(x, t)$  вместо  $f(x, t)$  в (1), которая «компенсирует» эффект влияния на выходную величину ненулевых начальных и неоднородных граничных условий, обеспечивая равенство решений  $Q(x, t)$  исходной системы (1)-(4) и задачи с нулевыми начальными и однородными граничными условиями. Такая задача называется при этом стандартной формой задачи (1)-(4), а функция  $w(x, t)$  – стандартизирующей функцией этой задачи.

Ограничимся далее типовым случаем описания ОРП линейной одномерной моделью (1)-(4) с постоянными коэффициентами  $A, A_1, \alpha(x_0, t) = \alpha_0; \beta(x_0, t) = \beta_0; \alpha_1(x_1, t) = \alpha_1; \beta_1(x_1, t) = \beta_1$  и не зависящими от времени коэффициентами  $C, B_1 \in C_1$  (стационарный ОРП).

Соответствующая стандартная форма выглядит следующим образом:

$$A \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = C(x) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + B_1(x) \frac{\partial Q}{\partial x} + C_1(x) Q + w(x, t); x_0 < x < x_1, t > 0,$$

$$Q(x, 0) = 0; \frac{\partial Q(x, 0)}{\partial t} = 0; x_0 \leq x \leq x_1; \quad (9)$$

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0;$$

$$\alpha_1 Q(x_1, t) + \beta \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0.$$

Ее решение принимает предельно простой вид

$$Q(x, t) = \int_0^t \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi, t - \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (10)$$

Здесь  $G(x, \xi, t - \tau)$  – функция Грина рассматриваемой системы с распределенными параметрами, которая в соответствии с выражением (10) с исчерпывающей полнотой описывает собственные свойства ОРП, не зависящие от

характера входных воздействий, и является его основной фундаментальной характеристикой.

Функция Грина  $G(x, \xi_0, t - \tau_0)$  описывает реакцию управляемой распределенной системы (9) с нулевыми начальными и неоднородными граничными условиями в любой точке  $x \in [x_0, x_1]$  и любой момент времени  $t \geq 0$  на точечное импульсное воздействие  $w(x, t)$  вида дельта-функции, приложенное в произвольной, но фиксированной точке  $\xi_0 \in [x_0, x_1]$  в момент времени  $t = \tau_0 \geq 0$ .

В общем вход-выходном соотношении (10) функция Грина  $G(x, \xi, t - \tau)$  представляет собой реакцию объекта в точке  $x$  в момент времени  $t$  при нулевых начальных и однородных граничных условиях на импульсное воздействие, приложенное в каждой точке  $\xi \in [x_0, x_1]$  в каждый момент времени  $\tau \in [0, t]$ , и может быть найдена известными методами [4, 5, 13, 15, 23].

Аргументы  $\xi$  и  $\tau$  функции естественно назвать входными аргументами, или аргументами входа, а аргументы  $x$  и  $t$  – соответственно выходными аргументами, или аргументами выхода.

В зависимости от заданных коэффициентов и функций  $f, Q_0^{(0)}(x), Q_0^{(1)}(x), g_0, g_1$  в (1) – (4) стандартизирующая функция в (10) определяется выражением

$$w(\xi, \tau) = (A_1 \delta(\tau) + A \delta'(\tau)) Q_0^{(0)}(\xi) + A \delta(\tau) Q_0^1(\xi) + (w_1(\xi, \tau) - w_0(\xi, \tau)) + f(\xi, \tau, u(\xi, \tau)), \quad (11)$$

где функции  $w(\xi, \tau), w(\xi, \tau)$  находятся по формулам

$$w_i(\xi, \tau) = \frac{C(\xi)}{\beta_i} \delta(\xi - x_i) g_i(\tau, u_i(\tau)), \quad i = 0, 1, \beta_i > 0, \quad (12)$$

или

$$w_i(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha_i} [B_1(\xi) \delta(\xi - x_i) + C(\xi) \delta'(\xi - x_i)] g_i(\tau, u_i(\tau)), \quad i = 0, 1, \beta_i = 0. \quad (13)$$

В (11) – (13)  $\delta(\tau), \delta'(\tau) \delta(\xi - x_i), \delta'(\xi - x_i)$  – временные и пространственные дельта-функции и их производные, сосредоточенные в точках  $\tau = 0 \delta \xi = x_i$ .

**Пример [18].** Рассмотрим в качестве ОРП процесс нагрева неподвижного массивного тела, описываемый в первом приближении уравнением теплопроводности вида (7):

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c\gamma} F(x,t); 0 < x < R, t > 0 \quad (14)$$

с начальными и граничными условиями

$$\theta(x,0) = \theta_0(x); 0 \leq x \leq R; \quad (15)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta(R,t)}{\partial x} = q(t); t > 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x} = 0; t > 0. \quad (17)$$

Здесь  $a = \frac{\lambda}{c\gamma} = \text{const}$  – коэффициент температуропроводности;  $c, \gamma, \lambda$  – теплофизические параметры нагреваемого материала, соответственно теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности.

В качестве выхода объекта фигурирует нестационарное температурное поле  $\theta(x,t)$ , а в роли внешних входных воздействий выступают удельная мощность внутреннего тепловыделения  $F(x,t)$ , плотность теплового потока  $q(t)$  на поверхности  $x=R$  нагреваемого тела и начальное распределение температур  $\theta_0(x)$ . Каждое из этих воздействий может рассматриваться в качестве управления (соответственно внутреннего или граничного) или неуправляемого внешнего фактора (возмущения).

Функция Грина задачи (14) – (17) может быть получена в характерной форме разложения в бесконечный ряд [4, 5, 10, 18]:

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi n \xi}{R}\right) \cdot \exp\left[-\frac{a \pi^2 n^2}{R^2} (t - \tau)\right] \right\}. \quad (18)$$

В условиях

$$A = B_1 = C_1 = 0; \alpha_0 = \alpha_1 = 0; A_1 = 1; C = a; \beta_0 = \beta_1 = \lambda;$$

$$x_0 = 0; x_1 = R; g_0(\tau, u_0(\tau)) = 0; g_1(\tau, u_1(\tau)) = g(\tau);$$

$$f(\xi, \tau, u(\xi, \tau)) = \frac{1}{c\gamma} F(\xi, \tau)$$

в (1), (9) стандартизирующая функция (11) принимает следующий вид:

$$w(\xi, \tau) = \theta_0(\xi) \delta(\tau) + \frac{1}{c\gamma} q(\tau) \delta(\xi - R) + \frac{1}{c\gamma} F(\xi, \tau). \quad (19)$$

#### Типовые распределенные блоки [4, 5, 10, 18]

Типовой объект управления с распределенными параметрами, описываемый линейными уравнениями (9), с входным воздействием  $w(x, t)$  и выходом  $Q(x, t)$  можно рассматривать в качестве частного варианта скалярного распределенного блока, под которым понимается устройство любой природы с выделенными в его структуре входным и выходным скалярными распределенными сигналами.

В практических задачах чаще всего приходится иметь дело с различными характерными частными случаями представления стандартизирующих функций (11)-(13) при изучении свойств распределенных блоков относительно каждого в отдельности из типичных реализуемых внешних воздействий на объект.

Один из наиболее распространенных на практике вариантов такого представления в (9), (10) сводится к виду

$$w(\xi, \tau) = \varphi(\xi) v(\tau) \quad (20)$$

с сосредоточенными внешними воздействиями  $v(\tau)$  и фиксированными законами  $\varphi(\xi)$  пространственного распределения входного сигнала.

Подстановка равенства (20) в (10) приводит к следующему соотношению, связывающему выход объекта с управлением  $v(\tau)$ :

$$Q(x, t) = \int_0^t S(x, t - \tau) v(\tau) d\tau = S(x, t) * v(t), \quad (21)$$

где

$$S(x, t - \tau) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi, t - \tau) \varphi(\xi) d\xi = G(x, \xi, t - \tau) \otimes \varphi(\xi), \quad (22)$$

и символами  $*$  и  $\otimes$  обозначены, соответственно, операция свертки по временной переменной (интегрирования по времени произведения  $S(x, t - \tau) v(\tau)$ ) и операции (22) пространственного интегрирования произведения  $G(x, \xi, t - \tau) \varphi(\xi)$ , называемая пространственной композицией.

Выражение (8.21) для оценки реакции объекта в каждой фиксированной точке  $x$  отрезка  $[x_0, x_1]$  по существу ничем не отличается от соотношения между входом  $w(t)$  и выходом  $Q(t)$  линейной сосредоточенной системы с соответствующей импульсной переходной функцией (функцией Грина)  $G(t)$ .

Вся специфика пространственной распределенности сказывается здесь только в выражениях для функций Грина  $S(x, t - \tau)$  в (22), зависящих от пространственной координаты как от параметра. Распределенные блоки вида (21) с сосредоточенным входом и распределенным выходом называются переходными x-блоками.

К типовым распределенным блокам можно отнести также «обратный» вариант с распределенным входным воздействием  $w(\xi, \tau)$  и сосредоточенным скалярным или векторным выходом, в качестве которого рассматриваются значения функции состояния  $Q(x_k^{**}, t)$  в

одной  $x_1^{**}$  или в нескольких фиксированных точках  $x_k^{**} \in [x_0, x_1], k = \overline{1, m}$ .

Подобный блок, описываемый в рассматриваемом случае по-прежнему для задачи (9) основным соотношением (10), но для фиксированных значений  $x = x_k^{**}$ , называется переходным  $\xi$ -блоком.

На практике очень часто встречаются распределенные блоки с сосредоточенными входами и выходами, моделирующие поведение функции состояния объекта  $Q(x_k^{**}, t)$  в фиксированных точках  $x_k^{**} \in [x_0, x_1], k = \overline{1, m}$ , при сосредоточенном управлении  $v(\tau)$  в (20).

Будем называть такие блоки  $x^\xi$ -блоками, поскольку они обладают свойствами как  $x^-$ , так и  $\xi$ -блоков по сосредоточенному характеру сигналов соответственно на входе и на выходе блока. Указанные свойства, как известно, характеризуют объекты с сосредоточенными параметрами, однако  $x^\xi$ -блок принципиально отличается от них видом своей функции Грина.

### Пример [18].

Объект (14)-(17) с функцией Грина (18) при сосредоточенном граничном управлении  $q(t)$  в условиях  $\theta_0(x) = 0, F(x, t) = 0$ , когда стандартизирующая функция (19) принимает вид (20):

$$w(\xi, \tau) = \frac{1}{c\gamma} \delta(\xi - R) q(\tau), \quad (23)$$

представляет собой согласно (21)-(23)  $x$ -блок:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{c\gamma} \int_0^t G(x, R, t - \tau) q(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Другие примеры и анализ свойств типовых  $x^-$ -блоков приведены в [18].

**Передаточные функции ОРП [4, 5, 10, 18]**

Обычные правила применения преобразования Лапласа для функций состояния  $Q(t)$  сосредоточенных систем полностью переносятся на распределенные функции состояния  $Q(x,t)$ , где в этом случае пространственная переменная  $x$  просто выступает в роли «постороннего» параметра.

Известное правило операционного исчисления, согласно которому изображение  $L_t$  по переменной  $t$  свертки функций равно произведению изображений этих функций, приводит основное вход-выходное соотношение (10) к виду следующей пространственной композиции:

$$\mathcal{Q}(x, p) = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{G}(x, \xi, p) \mathcal{W}(\xi, p) d\xi = \mathcal{G}(x, \xi, p) \otimes \mathcal{W}(\xi, p), \quad (25)$$

где  $\mathcal{Q}(x, p)$ ,  $\mathcal{G}(x, \xi, p)$  и  $\mathcal{W}(\xi, p)$  – соответственно изображения выхода объекта  $Q(x,t)$ , функции Грина  $G(x, \xi, t)$  и стандартизирующей функции  $w(\xi, \tau)$ , а  $p$  – комплексная переменная преобразования Лапласа.

По аналогии с сосредоточенной системой изображение функции Грина называется передаточной функцией  $W(x, \xi, p)$  объекта с распределенными параметрами (распределенного блока) (9):

$$W(x, \xi, p) = \mathcal{G}(x, \xi, p). \quad (26)$$

Указанная аналогия по существу заключается здесь лишь в том, что передаточная функция как для сосредоточенной, так и для распределенной системы является изображением ее импульсной переходной функции.

В то же время принципиальная специфика распределенной системы заключается в том, что вместо обычного произведения передаточной функции и изображения входа здесь используется операция пространственной композиции (25) для получения изображения функции состояния объекта.

Лишь изображение выходной величины  $\mathcal{G}(x, p)$   $x$ -блока представляется согласно соотношениям (21), (22) для каждого фиксированного значения пространственной координаты  $x$  обычным произведением

$$\mathcal{G}(x, p) = W_x(x, p) \mathcal{V}(p) \quad (27)$$

передаточной функции и изображения входного воздействия, подобно сосредоточенным системам, если ввести здесь определение  $W_x(x, p)$  передаточной функции  $x$ -блока согласно соотношению

$$W_x(x, p) = \mathcal{S}(x, p) = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{G}(x, \xi, p) \varphi(\xi) d\xi = \int_{x_0}^{x_1} W(x, \xi, p) \varphi(\xi) d\xi \quad (28)$$

Следовательно, вся специфика по сравнению с сосредоточенными системами в данном частном случае сводится лишь к самим выражениям для  $W_x(x, p)$ , которые не зависят от пространственной переменной входа и должны учитывать параметрическую зависимость от выходного пространственного аргумента.

Выражения для передаточных функций большого числа типовых распределенных блоков приведены в [4, 5, 15].

#### Соединения распределенных блоков [4, 5, 10, 18]

Способы получения передаточных функций различных соединений распределенных блоков отличаются значительной спецификой по сравнению с сосредоточенными системами. Лишь на  $x^\xi$ -блоки полностью распространяются все соответствующие правила, установленные для ССП.

Параллельное и последовательное соединение распределенных блоков

Передаточная функция  $W(x, \xi, p)$  параллельно соединенных распределенных блоков по аналогии с подобной операцией в стационарных

системах с сосредоточенными параметрами определяется в виде суммы их передаточных функций.

Передаточная функция  $W(x, \xi, p)$  последовательного соединения двух распределенных блоков определяется в форме пространственной композиции передаточных функций  $W_1(x, \xi, p)$  и  $W_2(x, \xi, p)$  составляющих блоков, взятых в порядке, обратном по отношению к порядку их следования в схеме данного соединения:

$$W(x, \xi, p) = \int_{x_0}^{x_1} W_2(x, \eta, p) W_1(\eta, \xi, p) d\eta = W_2(x, \eta, p) \otimes W_1(\eta, \xi, p) \quad (29)$$

Это означает адекватную некоммутативность последовательного соединения, в котором нельзя менять местами соединяемые блоки.

Данные выводы легко распространяются на любое число последовательно соединенных блоков.

Переходные блоки для последовательного соединения распределенных и сосредоточенных звеньев

При описании взаимодействия ОРП с сосредоточенным регулятором должны быть использованы специальные переходные блоки, согласующие входные и выходные сигналы объекта и регулятора различной пространственной размерности.

Такие блоки, во-первых, моделируют на своем выходе сигнал с датчика обратной связи, помещенного в точке  $x = a^* \in [x_0, x_1]$ , при подаче на их вход распределенной функции состояния объекта  $Q(x, t)$  ( $\xi$ -блок) и, во-вторых, описывают управляющее воздействие на ОРП в фиксированной точке  $x = b^* \in [x_0, x_1]$ , формируемое по выходному сигналу сосредоточенного регулятора ( $x$ -блок) (рис. 1).

В первом случае входной распределенный сигнал  $Q(x, p)$   $\xi$ -блока преобразуется в сосредоточенный  $Q(a^*, p)$  на его выходе, и тогда его

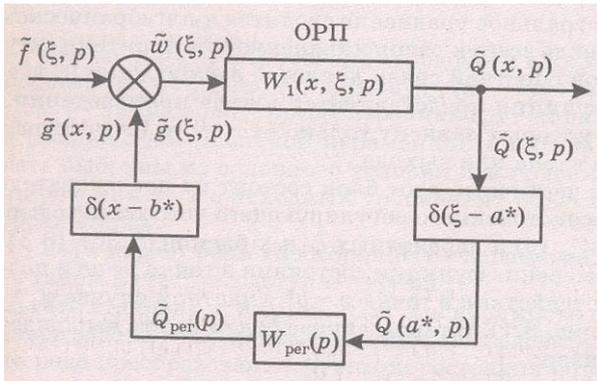


Рис.. 1. Структурная схема замкнутой системы управления ОРП с сосредоточенным регулятором

передаточная функция  $W_{\xi}(\xi, p)$  описывается с помощью пространственной  $\delta$ -функции, сосредоточенной в точке  $\xi = a^*$  [4, 10, 18]:

$$W_{\xi}(\xi, p) = \delta(\xi - a^*) \quad (30)$$

Во втором случае входной сигнал  $\mathcal{Q}_{\text{ддд}}(p)$  выхода сосредоточенного регулятора преобразуется в выходной сигнал  $\mathcal{g}(x, p)$ , формируемый в заданной точке  $x = b^*$  в некотором  $x$ -блоке с передаточной функцией  $W_x(x, p)$ , которая может быть представлена в виде

$$W_x(x, p) = \psi_1(x)\delta(x - b^*) + \psi_2(x)\delta'(x - b^*) \quad (31)$$

с известными коэффициентами  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , определяемыми выражениями (11) – (13) для стандартизирующей функции. Распространенный вариант  $\psi_1 = 1, \psi_2 = 0$  показан на рис. 1.

Переходные  $\xi$ - и  $x$ -блоки вида (30), (31) по определению являются статическими, так как их передаточные функции не зависят от переменной  $p$ .

Распределенные блоки, охваченные обратной связью

Задача определения передаточной функции  $W(x, \xi, p)$  распределенного блока  $W_1(x, \xi, p)$ , охваченного обратной связью  $W_2(x, \xi, p)$ , оказывается в общем случае очень сложной и сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма

второго рода, которое, вообще говоря, не может быть получено в явном виде [4, 10, 15, 18].

Однако в целом ряде частных, но практически важных случаев данное интегральное уравнение сводится к алгебраическому. Это относится прежде всего к распространенной на практике ситуации, при которой блок обратной связи является вырожденным, т. е. его передаточная функция представляется в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного из пространственных аргументов входа или выхода.

Пусть, в частности, этот блок состоит из последовательно соединенных сосредоточенного регулирующего устройства с передаточной функцией  $W_{\delta\delta\delta}(p)$  и переходных  $\xi$ - и  $x$ -блоков (30), (31), моделирующих измерение функции состояния в точке  $x = a^*$  и подачу управляющего воздействия в точке  $x = b^*$  в частном случае  $\psi_1 = 1, \psi_2 = 0$  в (31) (см. рис. 1). В таком случае будем иметь вырожденный блок обратной связи:

$$W_2(x, \xi, p) = \delta(x - b^*) W_{\delta\delta\delta}(p) \delta(\xi - a^*), \quad (32)$$

что позволяет получить формулу для вычисления  $W(x, \xi, p)$  [4, 10, 18]:

$$W(x, \xi, p) = W_1(x, \xi, p) + \frac{W_{\delta\delta\delta}(p) W_1(x, b^*, p) W_1(a^*, \xi, p)}{1 - W_{\delta\delta\delta}(p) W_1(a^*, b^*, p)}, \quad (33)$$

полностью совпадающую с соответствующим результатом для сосредоточенной системы при  $x = a^*, \xi = b^*$ , т.е. для  $x\xi$ -блока  $W_1(a^*, b^*, p)$ .

### 3. Точные методы определения характеристик и приближенное моделирование ОРП.

В этих целях на практике широко используются различные виды интегральных преобразований функции состояния ОРП, главный смысл применения которых заключается в замене операций дифференцирования в исходных уравнениях объекта на соответствующие алгебраические операции.

Если при этом для исключения производных по времени используется, как и для ССП, преобразование Лапласа

$$\bar{Q}(x, p) = \int_0^{\infty} Q(x, t) e^{-pt} dt \quad (34)$$

в целях осуществления подобной операции с пространственными производными применяются конечные интегральные преобразования на ограниченном отрезке  $[x_0, x_1]$  вида [3, 10, 13, 15]:

$$\bar{Q}(\mu, t) = \int_{x_0}^{x_1} Q(x, t) \varphi(\mu, x) r(x) dx \quad (35)$$

Здесь  $x$  – переменная преобразования (подобно  $t$  (34));  $\varphi(\mu, x)$  – ядро преобразования (подобно  $e^{-pt}$  в (34)),  $r(x)$  – весовая функция, отрезок  $[x_0, x_1]$  – промежуток преобразования и  $\mu$  – параметр преобразования (подобно комплексной переменной  $P$  в (34)), которые должны быть выбраны из основного условия исключения операций дифференцирования по  $x$  в исходных уравнениях объекта при переходе к изображениям.

Если в (34)  $x$  играет роль «постороннего» параметра, то в (35), наоборот, в таком качестве выступает время  $t$ .

В результате становится возможным, в зависимости от конкретного характера задачи и целей исследования, последовательно применять такого рода преобразования функции состояния объекта  $Q(x, t)$  по времени и пространственным аргументам или любое одно из них, и таким образом трансформировать исходную модель к виду алгебраических или дифференциальных уравнений относительно соответствующих изображений по какой-либо одной или части переменных в пространственно-временной области определения  $Q(x, t)$ .

Применение операционного исчисления для построения моделей объектов с распределенными параметрами [14,15,18,19]

Применение преобразования Лапласа вида (34) к функциям состояния  $Q(x, t)$  распределенной системы, где пространственная переменная

формально выступает лишь в роли некоторого дополнительного параметра, производится по обычным правилам операционного исчисления.

Поскольку выход ОРП совпадает с его функцией Грина при импульсном пространственно-временном воздействии  $w(x, t)$  на его входе, то в соответствии с выражением (26), применение преобразования Лапласа к стандартной форме (9) при таком виде стандартизирующей функции  $w(x, t)$  приводит к следующей краевой задаче для отыскания передаточной функции ОРП [15, 18]:

$$\begin{aligned} (Ap^2 + A_1p)W(x, \xi, p) = C(x) \frac{d^2W(x, \xi, p)}{dx^2} + \\ + B_1(x) \frac{dW(x, \xi, p)}{dx} + C_1(x)W(x, \xi, p) + \delta(x - \xi); \end{aligned} \quad (36)$$

$$\tilde{A}_0W = \alpha_0W(x_0, \xi, p) + \beta_0 \frac{dW(x_0, \xi, p)}{dx} = 0; \quad (37)$$

$$\tilde{A}_1W = \alpha_1W(x_1, \xi, p) + \beta_1 \frac{dW(x_1, \xi, p)}{dx} = 0 \quad (38)$$

Ее решение (получаемое, например, классическим методом вариации произвольных постоянных) имеет следующий вид:

$$W(x, \xi, p) = \begin{cases} -\frac{1}{\sigma\Delta(p)} \varphi_1(p, \xi) \varphi_2(p, x) r(\xi), & x_0 \leq \xi \leq x, \\ -\frac{1}{\sigma\Delta(p)} \varphi_1(p, x) \varphi_2(p, \xi) r(\xi), & x \leq \xi \leq x_1. \end{cases} \quad (39)$$

$$r(x) = \frac{1}{C(x)} r(x) [MM'_1 - M'M_1];$$

Здесь

$$\varphi_1(p, x) = (\tilde{A}_0M_1)M - (\tilde{A}_0M)M_1;$$

$$\varphi_2(p, x) = (\tilde{A}_1M_1)M - (\tilde{A}_1M)M_1; \quad (40)$$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (\tilde{A}_0M) & (\tilde{A}_0M_1) \\ (\tilde{A}_1M) & (\tilde{A}_1M_1) \end{vmatrix};$$

$M(p, x)$  и  $M_1(p, x)$  – любые два линейно независимых решения однородного уравнения второго порядка, образуемого при отсутствии в правой

части (36) дельта-функции  $\delta(x-\xi)$  (штрихом в (40) обозначены производные от  $M$  и  $M_1$  по  $x$ );  $\tilde{A}_0$  и  $\tilde{A}_1$  – линейные операторы вида (37), (38).

На практике вычисления значительно облегчаются наличием обширных справочных данных с заранее найденными функциями  $\varphi_1(p, x)$ ,  $\varphi_2(p, x)$ ,  $r(x)$ ,  $\Delta(p)$  и числами  $\sigma$  для широкого класса типовых моделей ОРП вида (36) – (38) [4,5,15].

Для объектов, описываемых уравнениями (36) первого порядка при  $C(x) = 0$  с единственным нулевым граничным условием  $W(x_0, \xi, p) = 0$ , задача значительно упрощается и при произвольных кусочно-непрерывных зависимостях  $B_1(x) \neq 0$  и  $C_1(x)$  в соответствии с известной формой представления общего решения уравнения первого порядка, будем иметь [18]

$$W(x, \xi, p) = -\frac{1(x-\xi)}{B_1(\xi)} \exp \left[ -\int_{x_0}^x \frac{C_1(\eta) - Ap^2 - A_1p}{B_1(\eta)} d\eta + \int_{x_0}^{\xi} \frac{C(\eta) - Ap^2 - A_1p}{B_1(\eta)} d\eta \right], \quad (41)$$

где  $1(x-\xi) = 1$  для всех  $x > \xi$  и  $1(x-\xi) = 0$ , если  $x < \xi$ .

Для случая сосредоточенного граничного управления  $u_1(\tau)$  в составе стандартизирующей функции вида (20) при  $v(\tau) = u_1(\tau)$  передаточная функция соответствующего  $x$ -блока определяется на основании (28) и (39) следующими выражениями [18]:

$$W_x(x, p) = \frac{\mathcal{O}(x, p)}{\mathcal{H}(p)} = -\frac{C(x_1)}{\beta_1 \sigma \Delta(p)} \varphi_1(p, x) \varphi_2(p, x_1) r(x_1), \quad (42)$$

Если  $\beta_1 > 0$ , и

$$W_x(x, p) = \frac{\mathcal{O}(x, p)}{\mathcal{H}(p)} = -\frac{1}{\alpha_1 \sigma \Delta(p)} \varphi_1(p, x) \times \\ \times \left[ B_1(x_1) \varphi_2(p, x_1) r(x_1) - \varphi_2'(p, x_1) C(x_1) r(x_1) - \varphi_2(p, x_1) (C(x_1) r'(x_1) + C'(x_1) r(x_1)) \right] \text{если } \beta_1 = 0. \quad (43)$$

Аналогичный вид имеют передаточные функции по граничному управлению  $u_0(\tau)$  [18].

При сосредоточенном внутреннем управлении  $\mathcal{W}(p) = \mathcal{W}(p)$  с фиксированным характером  $\varphi(\xi) = f_1(\xi)$  его пространственного распределения выражение для  $W_x(x, p)$  приобретает вид [18]

$$W_x(x, p) = -\frac{1}{\sigma\Delta(p)} \left[ \varphi_2(p, x) \int_{x_0}^x \varphi_1(p, \xi) r(\xi) f_1(\xi) d\xi \right]. \quad (44)$$

Как следует из (39) – (44), вид искоемых передаточных функций ОРП определяется в первую очередь решениями дифференциального уравнения (36) с краевыми условиями (37), (38), вследствие чего характер зависимости этих передаточных функций от комплексной переменной  $p$  резко усложняется по сравнению с сосредоточенными системами, для которых они представляются решениями простейших алгебраических уравнений и имеют поэтому элементарную дробно-рациональную структуру.

Тем не менее, возможность определения точных выражений для передаточных функций в замкнутой форме является несомненным преимуществом метода преобразования Лапласа применительно к рассматриваемым объектам. Даже если эти выражения оказываются слишком сложными и «трудноанализируемыми» для непосредственного применения в целях моделирования систем управления с распределенными параметрами, они, в частности, могут быть использованы в качестве эталонов для оценки точности приближения в частотной области с помощью более простых и удобных аппроксимаций.

#### Примеры [4,14,18].

1. Для объекта (14) – (17), описываемого уравнением теплопроводности, передаточная функция (39) может быть получена в следующем виде:

$$W(x, \xi, p) = \begin{cases} \frac{1}{h_0(p)} h_1(p, \xi) h_2(p, x), & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{1}{h_0(p)} h_1(p, x) h_2(p, \xi), & x \leq \xi \leq R; \end{cases} \quad (45)$$

$$h_0(p) = a\sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}} R; \quad h_1(p, x) = ch\sqrt{\frac{p}{a}} x;$$

$$h_2(p, x) = ch\sqrt{\frac{p}{a}} (R - x)$$

где

(46)

При сосредоточенном управлении  $\vartheta_1(p) = \vartheta(p)$  по величине теплового потока на границе  $x=R$  передаточная функция  $W_x(x, p)$  соответствующего распределенного  $x$ -блока от этого входа к температурному распределению  $\vartheta(x, p)$  на его выходе находится согласно (42) по значительно более простой формуле:

$$W_x(x, p) = \frac{\vartheta(x, p)}{\vartheta(p)} = \frac{ch\sqrt{\frac{p}{a}}x}{\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}sh\sqrt{\frac{p}{a}}R} = \frac{ch\sqrt{T_x p}}{\sqrt{T_0 p}sh\sqrt{T_R p}}, \quad (47)$$

$$T_0 = \frac{\lambda^2}{a}; \quad T_x = \frac{x^2}{a}; \quad T_R = \frac{R^2}{a}.$$

Если в условиях третьей краевой задачи на границе  $x=R$

$$\lambda \frac{\partial \theta(R, t)}{\partial x} + \alpha \theta(R, t) = \alpha \theta_i(t) \quad (48)$$

в роли сосредоточенного управления  $\vartheta_1(p) = \vartheta_i(p)$  выступает температура печи  $\vartheta_i(p)$ , в которой нагревается изделие, то передаточная функция (47) видоизменяется следующим образом:

$$W_x(x, p) = \frac{\vartheta(x, p)}{\vartheta_i(p)} = \frac{ch\sqrt{T_x p}}{ch\sqrt{T_R p} + \frac{\lambda}{\alpha R} \sqrt{T_R p} \cdot sh\sqrt{T_R p}}. \quad (49)$$

Выражения для передаточных функций ОРП часто существенно упрощаются в случаях, когда область изменения пространственной переменной можно считать полуограниченной, полагая, например, что  $x_0 \leq x < x_1$ , где  $x_1 \rightarrow \infty$ .

Если, в частности, в таких условиях для рассматриваемого ОРП в качестве сосредоточенных управлений на границе  $x_0=0$  рассматривается тепловой поток  $\vartheta(p)$ , температура печи  $\vartheta_i(p)$  или температура на самой границе  $\vartheta(0, p)$  соответственно в условиях второй, третьей или первой

краевой задачи, то передаточные функции объекта по указанным воздействиям имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 W_x(x, p) &= \frac{\vartheta(x, p)}{\vartheta(p)} = \frac{\exp(-\sqrt{T_x p})}{\sqrt{T_0 p}}, \\
 W_x(x, p) &= \frac{\vartheta(x, p)}{\vartheta_i(p)} = \frac{\exp(-\sqrt{T_x p})}{\sqrt{\frac{T_0}{\alpha^2} p + 1}}, \\
 W_x(x, p) &= \frac{\vartheta(x, p)}{\vartheta(0, p)} \exp(-\sqrt{T_x p}).
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

В структуре этих  $x$ -блоков можно выделить в качестве «элементарных» полуинтегрирующее звено, полуаперидическое звено и звено полузапаздывания (затухания) с передаточными функциями соответственно

$$\begin{aligned}
 W_{\dot{E}}(p) &= \frac{1}{\sqrt{T_0 p}}; \\
 W_{\dot{A}}(p) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} p + 1}}; \\
 W_{\zeta}(p) &= \exp(-\sqrt{T_x p})
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

отличающимися от типовых (интегрирующего  $W_{\dot{E}}(p) = \frac{1}{T_0 p}$ , аперидического  $W_{\dot{A}}(p) = \frac{1}{T_{01} p + 1}$  и запаздывающего  $W_{\zeta}(p) = \exp(-\tau p)$ ) звеньев только тем, что в роли аргумента их передаточных функций фигурирует  $\sqrt{p}$  вместо  $p$ .

Анализ характеристик звеньев (50) приведен в [14].

### 1. Волновое уравнение

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + u(t) \delta'(x - x^*), 0 < x < l, x^* \in [0, l], t > 0
 \tag{52}$$

с начальными и граничными условиями

$$Q(x,0) = Q_0^{(0)}(x); \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} = Q_0^{(1)}; 0 \leq x \leq l; \quad (53)$$

$$Q(0,t) = g_0(t); \quad Q(l,t) = 0; t > 0, \quad (54)$$

моделирует процесс гашения пульсаций расхода газа  $Q(x,t)$  в газопроводе с управляемым гасителем колебаний, создающим в точке  $x^*$  его подключения к газопроводу дополнительный объемный расход газа  $u(t)$  [3,4]. Передаточная функция ОРП по этому каналу воздействия на основании (44) приводится к следующему виду [4]:

$$W_x(x,p) = \frac{\mathcal{Q}(x,p)}{\mathcal{U}(p)} = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} \frac{p}{c_0} x^*}{\operatorname{sh} \frac{p}{c_0} l} \operatorname{sh} \frac{p}{c_0} (l-x), & 0 \leq x^* < x, \\ \frac{\operatorname{sh} \frac{p}{c_0} x}{\operatorname{sh} \frac{p}{c_0} l} \operatorname{ch} \frac{p}{c_0} (l-x^*), & x < x^* \leq l. \end{cases} \quad (55)$$

При сосредоточенном воздействии по расходу газа на входе в газопровод, включаемом в граничное условие (54) при  $x=0$ , получим, подобно (43), для передаточной функции  $x$ -блока от входа  $\mathcal{U}(p)$  к выходу  $\mathcal{Q}(x,p)$  [18]:

$$W_x(x,p) = \frac{\mathcal{Q}(x,p)}{\mathcal{U}(p)} = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{p}{c_0} l} \operatorname{sh} \frac{p}{c_0} (l-x) \quad (56)$$

Существенной особенностью передаточных функций рассматриваемого объекта по сравнению с предыдущим примером является их представление в форме трансцендентных функций, аргументом которых является сама комплексная переменная  $p$ , вместо  $\sqrt{p}$  в выражениях для передаточных функций (45) – (47), (49) – (51).

2. Рассмотрим ОРП первого порядка вида (8):

$$b \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} + bV \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} + \theta_i(x,t); 0 < x < l, t > 0, \quad (57)$$

$$\theta(x,t) = \theta_0(x), 0 \leq x \leq l; \theta(0,t) = \theta^0(t), t > 0, \quad (58)$$

моделирующий процесс нагрева партии заготовок, перемещающихся с постоянной скоростью  $V$  в печи непрерывного действия.

Передаточная функция такого объекта от стандартизирующего входа к распределению температуры  $\Theta(x,p)$  на выходе непосредственно определяется выражением (41) при  $A = 0; A_1 = b; B_1 = -bV; C_1 = -1; x_0 = 0$ :

$$W(x,\xi,p) = \frac{1}{bV} \cdot 1(x-\xi) \exp\left(-\frac{bp+1}{bV}(x-\xi)\right). \quad (59)$$

При сосредоточенном управлении по температуре  $\Theta_i(p)$  печного пространства, равномерно распределенной по длине печи, передаточная функция  $x$ -блока, моделирующего свойства объекта по такому входу, представляет собой пространственную композицию (28) при  $\varphi(\xi) = 1$  и, следовательно, здесь с учетом (59)

$$\begin{aligned} W_x(x,p) &= \frac{\Theta(x,p)}{\Theta_i(p)} = \int_0^l W(x,\xi,p) d\xi = \\ &= \frac{1}{bV} \int_0^x \exp\left[-\frac{bp+1}{bV}(x-\xi)\right] d\xi = \frac{1}{bp+1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{x}{bV}\right) \exp\left(-\frac{x}{V}p\right) \right]. \end{aligned}$$

### 3. Анализ и синтез САУ ОРП

Синтез САУ ОРП так же, как и для ССП, производится по заданной математической модели объекта управления на основании предъявленных к САУ требований.

#### Управляемость ОРП [3,4,10,16,19,25]

Постановка задачи управления имеет смысл лишь для управляемых объектов. ОРП называется управляемым, если найдется реализуемое управляющее воздействие, переводящее объект из заданного начального состояния  $Q(x,0)$  в некоторое допустимое конечное состояние  $Q^*(x) = Q(x,T)$  за конечное время  $t = T$ .

В общем случае проблема управляемости для точных моделей ОРП оказывается очень сложной [3,4,25]. Иногда проще установить условия неуправляемости объекта, которые реализуются применительно к ОРП гораздо чаще, чем в ССП [16,25]. При приближенном модальном описании ОРП могут быть использованы известные матричные критерии полной управляемости ССП [1,19,25].

Практически всегда встречающиеся ограничения на управляющие воздействия приводят здесь к дополнительным требованиям. В частности, в целях обеспечения управляемости следует избегать совпадения точек приложения пространственно локализованных управлений с нулями собственных функций объекта [19,25].

#### **Наблюдаемость распределенных систем [4,9,19,25]**

Построение САУ ОРП возможно только при неполном измерении пространственно распределенной функции состояния объекта с помощью конечного числа датчиков обратной связи. В результате возникает проблема наблюдаемости, заключающаяся, во-первых, в установлении возможности восстановления управляемого выхода  $Q(x,t)$  по результату его неполного измерения и, во-вторых, в разработке способов построения устройств (наблюдателей), реализующих такую возможность, если она существует. При приближенном модальном описании ОРП могут быть использованы известные матричные критерии наблюдаемости в ССП [1,19,25]. Можно показать, что для обеспечения условий наблюдаемости ОРП точки измерения его состояния не должны являться нулями собственных функций объекта [19,25]. Удовлетворительные оценки состояния ОРП можно получать с помощью асимптотических наблюдателей Луенбергера [1,9,25].

#### **Анализ и синтез САУ ОРП с сосредоточенными входными воздействиями и управляемыми величинами [8,14,19,21,25]**

Если объект управления представляет собой распределенный  $x\xi$  – блок, то он отличается в структурном отношении от подобных объектов с сосредоточенными параметрами (ОСП) лишь характером вход-выходных соотношений, в частности трансцендентными выражениями для передаточных функций. Использование обычных сосредоточенных регуляторов приводит к таким же структурам САУ, как и для ОСП, на которые распространяются известные алгебраические правила определения

операторов связи между входами и выходами различных соединений динамических звеньев в форме передаточных функций, а также известные закономерности структурных преобразований.

На системы с  $x^{\xi}$ -блоками, имеющими мероморфные передаточные функции разомкнутого контура и ограниченную полосу пропускания частот, распространяется частотный критерий устойчивости Найквиста для линейных ССП [8,21,25]. На этом основании на САР ОРП с сосредоточенными управлениями и регулируемыми величинами распространяются без существенных усложнений классические частотные методы анализа и синтеза САР ОСП [8,14,21,25].

Существенное повышение качественных показателей САР ОРП часто достигается на практике путем построения систем комбинированного регулирования, а также многоконтурных систем с использованием дополнительных обратных связей по выходу объекта в некоторых «промежуточных» точках пространственной области [14,25]. При использовании приближенных моделей ОРП в форме некоторого ОСП для построения САР без каких-либо изменений применяются методы синтеза САР ОСП. Примеры анализа и синтеза САР распределенных  $x^{\xi}$ -блоков приведены в [8,14,21,25].

Анализ и синтез САР ОРП с распределенными управляемыми величинами [12,15,19,25]

При необходимости управления распределенным выходом ОРП  $Q(x,t)$  во всей пространственной области его определения приходится строить САР м использованием сигналов обратных связей непосредственно по текущему состоянию  $Q(x,t)$  объекта, которые могут быть реализованы только с помощью соответствующих наблюдателей. При этом на основании известной теоремы разделения задачу построения САР можно разделить на независимые задачи синтеза регулятора с обратными связями непосредственно по переменным состояния объекта и проектирования асимптотического наблюдателя с требуемыми динамическими свойствами [1,25].

Можно показать [12,15,19,25], что задача синтеза САР распределенного выхода ОРП сводится к построению независимых друг от друга контуров регулирования учитываемых временных мод объекта  $\bar{Q}_n(\mu_n, t), n = \overline{1, N}$ .

«Элементарный» объект управления каждого из таких контуров имеет простейшую передаточную функцию (73) с единичным коэффициентом передачи применительно к типовым ОРП, и соответствующая индивидуальная система управления  $n$ -ой модой строится методами теории ССП по стандартной схеме «объект-регулятор» с обратной связью по  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$  и задающим воздействием  $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t)$  для желаемого поведения  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ . Как правило, здесь удастся использовать стандартные П- или ПИ-регуляторы.

Для более сложных ОРП, представляющих собой, например, некоторое соединение типовых блоков вида (9), аналогичный подход приводит к более сложным трансцендентным передаточным функциям «элементарных» объектов типа  $x^\xi$ -распределенных блоков в независимых контурах регулирования [12,25].

В таких случаях синтез индивидуальных регуляторов сводится к задаче, рассмотренной в разделе «Анализ и синтез САР ОРП с сосредоточенными входными воздействиями и управляемыми величинами». Количество регулируемых мод должно определяться из условий обеспечения требуемой точности отработки САР задающего воздействия  $Q^*(x, t)$  на входе системы. Реализуемые распределенные управления на входе ОРП синтезируются по выходам регуляторов  $\bar{w}_n(\mu_n, t), n = \overline{1, N}$  путем их взвешенного суммирования с собственными функциями по типу выражения (63). Здесь  $\bar{w}_n(\mu_n, t)$  – временные моды стандартизирующей функции. Сигналы обратной связи по  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$  могут быть получены с помощью специального анализатора, представляющего собой совокупность интеграторов (35) сигналов  $Q(x, t)$  на выходе наблюдателя состояния объекта [12,19,25]. Примеры синтеза САР ОРП с распределенным выходом приведены в [12,19,25].

Оптимальное управление [3,6,9,14-17,19,20,23]

Для решения задач отыскания оптимальных по выбранным критериям оптимизации пространственно-временных управляющих воздействий для ОРП (задачи программного оптимального управления) может быть использован аппарат принципа максимума Понтрягина [6,16] (применительно к модальному описанию ОРП (66) – (67) либо специальные его модификации [6,20,23] применительно к описанию ОРП интегральными соотношениями типа (10) или уравнениями в частных производных вида (1) –(4).

Применение указанных необходимых условий экстремума позволяет, как вправило, найти искомые управления лишь с точностью до ряда параметров, которые должны быть определены на последующем этапе путем решения краевой задачи по достижению допустимых конечных состояний объекта. Здесь могут быть использованы различные приближенные [3,6,10.14] или алгоритмические точные [17] методы. В целях синтеза замкнутых систем оптимального управления ОРП может быть использован метод динамического программирования [9,20]. Примеры решения задач оптимального управления ОРП приведены в [3,6,9,16,17,19,20,23]. При приближенном представлении ОРП в форме некоторой модели ОРП на задачи оптимального управления распределенными объектами полностью распространяются методы теории оптимизации систем с сосредоточенными параметрами.

Список литературы

1. **Андреев Ю.Н.** Управление конечномерными объектами. - М.: Наука, 1976. - 424 с.
2. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А.А. Воронова и И.А. Огурка. - М.: Наука, 1984. - 344 с.
3. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1975. - 568 с.
4. **Бутковский А.Г.** Структурная теория распределенных систем. - М.: Наука, 1977. - 320 с.
5. **Бутковский А.Г.** Характеристики систем с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1979. - 224 с.
6. **Бутковский А.Г., Малый СЛ., Андреев Ю.Н.** Оптимальное управление нагревом металла. - М.: Металлургия, 1972. - 439 с.

7. **Васильева ЛБ., Бутузов В.Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990. - 208 с.
8. **Воронов Ал.** Основы теории автоматического управления: Особые линейные и нелинейные системы. - М.: Энергоиздат, 1981. - 303 с.
9. **Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.** Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. - М.: Машиностроение, 1986. - 214 с.  
**Ю.Дидук ГЛ., Золотое О.И., Пустыльников Л.М.** Специальные разделы теории автоматического регулирования и управления (теория СРП): Учебное пособие/ Предисловие А.Г. Бутковского. - СПб.: СЗТУ, 2000. - 172 с.
11. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. - М.: Мир, 1986. - 318 с.
12. **Коваль ВЛ.** Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. - Саратов: СГТУ, 1997. - 192 с.
13. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Наука, 1970. - 710 с.
14. **Маковский ВЛ.** Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. - М.: Металлургия, 1971. - 384 с.
15. **Мартыненко НЛ., Пустыльников Л.М.** Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1986. - 303 с.
16. **Рапопорт Эл.** Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. - М.: Металлургия, 1993. - 277 с.
17. **Рапопорт Эл.** Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. - М.: Наука, 2000. - 336 с.
18. **Рапопорт Эл.** Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами/ Предисловие А.Г. Бутковского. - М.: Высшая школа, 2003. - 299 с.
19. **Рей У.** Методы управления технологическими процессами. - М.: Мир, 1983. - 368 с.
20. **Сиразетдинов Т.К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1977. - 463 с.

- 21.Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1967. - 679 с.
- 22.Тихонов А.Н., Самарский АП. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 736 с.
- 23.Фельдбаум АА., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. - М.: Наука, 1971. - 744 с.
- 24.Чермак И., Петерка В., Заворка И. Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии. - М.: Мир, 1972. - 623 с.
- 25.Рапопорт ЭЛ. Анализ и синтез автоматического управления с распределенными параметрами. - М.: Высшая школа, 2005. - 292 с.

## ЛЕКЦИЯ №2

### ТЕМА «ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ»

#### 1. Определение, особенности и общая характеристика оптимальных систем

Оптимальной называется наилучшая в некотором технико-экономическом смысле система. Основной ее особенностью является наличие двух целей управления, которые эти системы решают автоматически.

1. **Основная цель управления** - поддержание управляемой величины на заданном значении и устранение возникающих отклонений этой величины.

2. **Цель оптимизации** - обеспечение наилучшего качества управления, определяемое по достижению экстремума некоторого технико-экономического показателя, называемого критерием оптимальности (КО).

Оптимальные системы разделяют в зависимости от вида КО на два класса: оптимальные в статике системы и оптимальные в динамике системы.

У оптимальных в статике систем КО является функцией параметров или управляющих воздействий. Этот критерий имеет экстремум в статическом режиме работы системы, причем статическая характеристика, выражающая зависимость КО от управляющих воздействий оптимизации, может непредвиденным образом смещаться под действием возмущений. Оптимальная система должна этот экстремум находить и поддерживать. Такие системы применимы, если возмущения, смещающие указанную характеристику, изменяются сравнительно медленно по сравнению с длительностью переходных процессов в системе. Тогда система будет успевать отслеживать экстремум практически в статическом режиме. Такие условия обычно выполняются на верхней ступени иерархии управления.

Оптимальные в динамике системы отличаются тем, что их критерий оптимальности представляет собой функционал, т. е. функцию от функций времени. Это значит, что, задав функции времени, от которых данный функционал зависит, получим числовое значение функционала. Эти системы могут применяться при сравнительно быстро меняющихся внешних воздействиях, не выходящих, однако, за допустимые пределы. Поэтому они используются на нижних уровнях управления.

Критерии оптимальности оптимальных в динамике систем

Обычно эти функционалы имеют вид определенных интегралов по времени

$$J = \int_0^T f_0(x(t), u(t), t)$$

где  $x(t), u(t)$  – векторы состояния и управления данной системы;  $T$  – длительность процесса (в частности, может быть  $T = \infty$ ).

В зависимости от подынтегральной функции  $f_0$  эти критерии имеют следующие основные виды.

1. Линейные функционалы, у которых  $f_0$  – линейная функция переменных:

- критерий максимального быстродействия при  $f_0 \equiv 1$ , т.е.

$$J = \int_0^T dt = T,$$

который равен длительности процесса, а соответствующие системы называют оптимальными по быстродействию;

$$I_{1n} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot t^n dt$$

- линейные интегральные оценки ;
- критерий максимальной производительности

$$J = \int_0^T \frac{dq(t)}{dt} dt = q(T) - q(0),$$

где  $q(t)$  – количество произведенной продукции.

2. Квадратичные функционалы, у которых  $f_0$  – квадратичная форма от входящих в нее переменных:

- квадратичные интегральные оценки качества переходного процесса

$$I_{2n} = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^n \tau_i^{2i} \cdot (x^{(i)})^2 dt ;$$

- критерий энергозатрат на управление, у которого  $f_0(u) = cu^2(t)$ ,

где  $u$  – управляющее воздействие, а  $u^2$  – мощность, затрачиваемая на управление;

- обобщенный квадратичный критерий, равный сумме двух предшествующих, взятых с некоторыми весовыми коэффициентами. Он компромиссно характеризует качество переходного процесса и энергозатраты на него, т.е.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt,$$

где  $Q$  и  $R$  – положительно определенные квадратные матрицы.

Функционалы, не содержащие интегралов:

- критерий минимакса, при оптимизации по которому надо обеспечить минимальное значение максимума модуля (нормы) вектора отклонения управляемого процесса от его эталонного закона изменения, т.е.

$$J = \max_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - x_y(t)\|$$

Простейшим примером этого критерия для скалярного случая является известное максимальное перерегулирование переходного процесса;

- функция от конечного состояния

$$J = \varphi(x(T)),$$

которая является функционалом потому, что конечное состояние объекта  $x(T)$  является функцией от управляющего воздействия  $u(t)$ . Этот критерий оптимальности может применяться в сумме с одним из рассмотренных выше критериев, имеющих вид определенного интеграла.

Выбор того или иного критерия оптимальности для конкретного объекта или системы производится на основании соответствующего изучения работы объекта и предъявляемых к нему требований технико-экономического характера. Этот вопрос не может быть решен в рамках только теории автоматического управления. В зависимости от физического смысла критерия оптимальности его требуется либо минимизировать, либо максимизировать. В первом случае он выражает потери, во втором случае – технико-экономическую выгоду. Формально, поменяв знак перед функционалом, можно задачу по максимизации свести к задаче по минимизации.

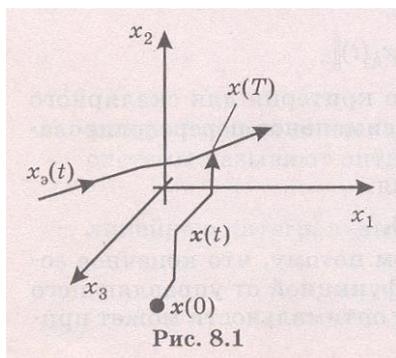
### **Краевые условия и ограничения для оптимальных в динамике систем**

Основная цель управления в таких системах обычно формулируется как задача перевода изображающей точки из некоторого начального состояния  $x(0)$  в некоторое конечное  $x(T)$  состояние. Начальное состояние принято называть левым концом оптимальной траектории, а конечное - правым. Вместе взятые эти данные и образуют краевые условия. Задачи управления могут отличаться видом краевых условий.

**1. Задача с закрепленными концами траектории** имеет место, когда  $x(0)$  и  $x(T)$  фиксированные точки пространства.

2. **Задача с подвижными концами траектории** получается, когда  $x(0)$  и  $x(T)$  принадлежат некоторым известным линиям или поверхностям пространства.

3. **Задача со свободными концами траектории** возникает, когда указанные точки занимают произвольные положения. На практике встречаются и **смешанные задачи**, например,  $x(0)$  – фиксирован, а  $x(T)$  подвижен. Такая задача будет иметь место, если объект из заданного фиксированного состояния должен «догнать» некоторую эталонную траекторию (рис. 8.1).



Ограничениями называются дополнительные условия, которым должны удовлетворять управляющие воздействия и управляемые величины. Встречаются два вида ограничений.

1. **Безусловные (естественные) ограничения**, которые выполняются в силу физических законов для процессов в объекте управления (ОУ). Эти ограничения показывают, что некоторые величины и их функции не могут выйти за границы, определяемые равенствами или неравенствами. Например, уравнение двигателя постоянного тока (ДПТ):

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = ku$$

ограничение на скорость асинхронного двигателя  $\Omega < \Omega_c$ , где  $\Omega_c$  – синхронная скорость.

2. **Условные (искусственные) ограничения**, выражающие такие требования к величинам или функциям от них, согласно которым они не должны превосходить границ, определенных равенствами или неравенствами по условиям долговечной и безопасной эксплуатации объектов. Например, ограничение на питающее напряжение  $|u| \leq U_m$ , ограничения на допустимую скорость, ускорение и т. п.

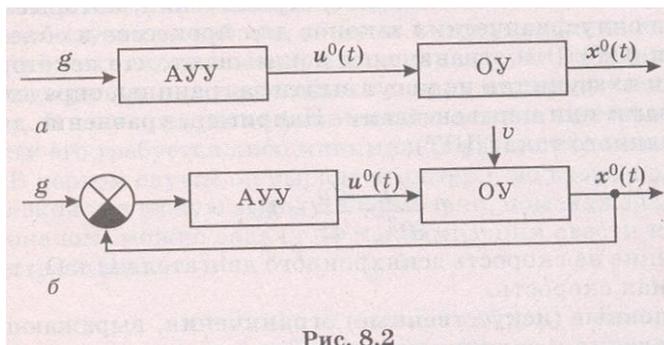
Для обеспечения условных ограничений необходимо принимать меры схемного или программного характера при реализации соответствующего управляющего устройства.

Ограничения, независимо от их вида, выражаемые равенствами, называются классическими, а неравенствами - неклассическими.

Общая постановка задачи оптимального автоматического управления

При заданных ограничениях на управляющие воздействия  $u \in \Omega(u)$ , управляемые величины  $x \in \tilde{A}(x)$ , а также заданных уравнениях объекта управления  $\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$ , критерии оптимальности  $J = J(x, u, t)$  и краевых условиях  $x(0)$  и  $x(T)$ , необходимо определить оптимальное управление  $u^0(t)$  и оптимальную траекторию  $x^0(t)$  или оптимальный алгоритм управления  $u^0 = u(x, t)$ , обеспечивающие экстремум заданного критерия оптимальности.

Решение первой задачи приводит к разомкнутой САУ (рис. 8.2, а), решение второй – к замкнутой САУ (рис. 8.2, б), в которых АУУ – автоматическое управляющее устройство.



Для решения задач оптимального управления применяются следующие методы оптимизации: Эйлера-Лагранжа, динамического программирования Р.Беллмана, принцип максимума Л.С. Понтрягина.

## 2. Задачи на безусловный и на условный экстремум функционала. Метод Эйлера-Лагранжа. Изопериметрическая задача

Эту задачу отличает отсутствие всяких ограничений, что является недостатком, так как отсутствие ограничений обычно лишает задачу практического смысла. Итак, задан минимизируемый функционал

$$J = \int_0^T F(x, \dot{x}) dt$$

Подынтегральная функция  $F$  в нем дифференцируема как по  $x$ , так и по  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

Требуется найти экстремаль  $x^0(t)$ , которая минимизирует данный функционал при заданных краевых условиях  $x(0), x(T)$  и известном значении времени  $T$ .

Идея вывода расчетного уравнения использует предположение о том, что к экстремали добавляется дополнительная функция  $\eta(t)$  с весовым коэффициентом  $\alpha$ . В результате аргумент функционала получает вариацию и будет равен:

$$x(t) = x^0(t) + \alpha \eta(t),$$

где  $\eta(t)$  – дифференцируемая функция с нулевыми краевыми значениями, т.е.  $\eta(0) = \eta(T) = 0$  (рис. 8.3).

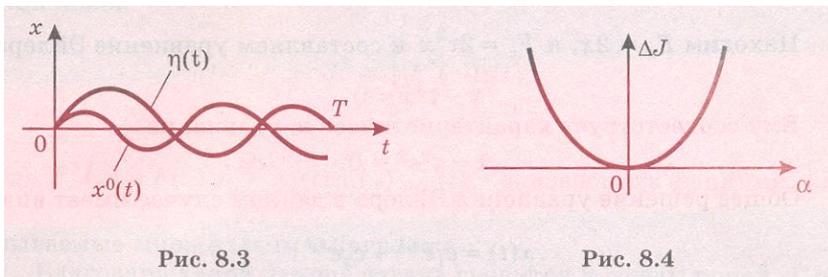


Рис. 8.3

Рис. 8.4

Соответственно функционал получает положительное приращение (вариацию), являющееся функцией коэффициента  $\alpha$ :

$$\Delta J(\alpha) = J(x(t)) - J(x^0(t)) > 0$$

Эта функция имеет экстремум – минимум при  $\alpha = 0$  (рис. 8.4). Исследуя эту функцию на экстремум, Эйлер получил следующее дифференциальное уравнение для нахождения экстремалей:

$$\frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right] = 0$$

$$F_x - \frac{dF_x}{dt} = 0$$

Компактная условная запись этого уравнения имеет вид:  $F_x - \frac{dF_x}{dt} = 0$ , где индексы обозначают производные по  $x$  и  $\dot{x}$ . Уравнение Эйлера в общем случае является нелинейным уравнением второго порядка, общее решение которого содержит две постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий.

В задаче на безусловный экстремум может быть задан функционал, зависящий от нескольких функций и их первых производных:

$$J = \int_0^T F(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n) dt$$

В этом случае необходимо решить систему уравнений Эйлера:

$$F_{x_i} - \frac{dF_{\dot{x}_i}}{dt} = 0 \quad (i = \overline{1, n})$$

В более общем случае функционал может зависеть и от производных высших порядков. В этом случае вместо уравнений Эйлера составляют и решают уравнения Эйлера-Пуассона:

$$\sum_{i=0}^{n_k} (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i F_{x_k^{(i)}}}{dt^i} = 0 \quad (k = \overline{1, m})$$

где  $k$  – порядковый номер функции;  $n_k$  – порядок старшей производной от  $x_k$ ;  $m$  – число функций.

### Задача на условный экстремум. Метод Эйлера-Лагранжа

Помимо минимизируемого функционала

$$J = \int_0^T F(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_n, \dot{x}_n) dt$$

подынтегральная функция которого зависит от нескольких функций и их первых производных по времени, задано произвольное число классических ограничений:

$$\varphi_j(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n) = 0, \quad (j = \overline{1, m})$$

Требуется найти  $n$  экстремалей  $x_i^0(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) при заданных краевых условиях.

Метод решения этой задачи требует формирования нового функционала

$$J^* = \int_0^T F^*(...) dt$$

где  $F^*(...) = F(...) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \varphi_j(...)$ ,  $\lambda_j(t)$  – неизвестные функции, называемые множителями Лагранжа.

Благодаря такой замене задача сводится к предыдущей. При этом уравнения Эйлера должны быть составлены как для искомым экстремалей, так и для множителей Лагранжа:

$$F_{x_i}^* - \frac{dF_{\dot{x}_i}^*}{dt} = 0, \quad (i = \overline{1, n}); \quad (8.1)$$

$$F_{\lambda_j}^* - \frac{dF_{\dot{\lambda}_j}^*}{dt} = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (8.2)$$

Но  $F_{\dot{\lambda}_j}^* = 0$ , а  $F_{\lambda_j}^* = \varphi_j$ , т.е. уравнения (8.2) совпадают с уравнениями ограничений.

Поэтому может быть выполнено совместное решение системы уравнений Эйлера (8.1) и заданных ограничений. Исключая время из уравнений экстремалей, можно найти алгоритм управления оптимального автоматического регулятора.

### Изопериметрическая задача

Здесь наряду с ограничениями, принятыми в предыдущих задачах, имеется определенный интеграл по времени:

$$\int_0^T f(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n) dt = Q = \text{const}$$

Для того чтобы эту задачу свести к предыдущей, вводим дополнительную переменную, определяемую интегральным уравнением

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t f(...) dt$$

Для новой переменной справедливы краевые условия:

$$x_{n+1}(0) = 0, \quad x_{n+1}(T) = Q$$

Затем, дифференцируя по времени интегральное уравнение для новой переменной, получим  $\dot{x}_{n+1} = f(...)$ , или в стандартной форме записи ограничений:

$$\varphi_{m+1} = x_{n+1} - f(\dots) = 0$$

Подынтегральная функция нового функционала

$$F^*(\dots) = F(\dots) + \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j(t) \varphi_j(\dots)$$

Уравнение Эйлера для новой переменной примет вид:

$$F_{x_{n+1}}^* - \frac{dF_{\dot{x}_{n+1}}^*}{dt} = 0$$

где  $F_{\dot{x}_{n+1}}^* = \lambda_{m+1}$ ,  $F_{x_{n+1}}^* = 0$  и даст результат  $\lambda_{m+1} = \text{const}$

В этом и состоит особенность интегрального ограничения: множители Лагранжа для интегральных ограничений постоянны. В остальном решение аналогично, т.е. уравнения Эйлера для искомого экстремала решаются совместно с уравнениями всех ограничений.

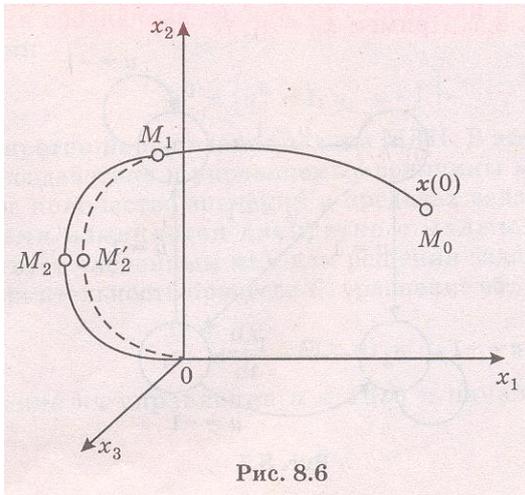
При этом новую переменную  $x_{n+1}$  можно не вводить, считая  $\varphi_{m+1} = f(\dots)$ .

Данная задача при одном интегральном ограничении получила название изопериметрической задачи, так как исторически в этой задаче требовалось найти уравнение линии постоянного периметра, которая совместно с отрезком прямой, соединяющим данные точки, ограничивала бы максимальную площадь на плоскости, Такой линией является дуга окружности.

### 3. Принцип оптимальности. Метод динамического программирования

В основу метода динамического программирования положен принцип оптимальности. Согласно ему любой конечный отрезок оптимальной траектории (от произвольной промежуточной точки до одной и той же конечной точки процесса) является сам по себе оптимальной траекторией для своих краевых условий.

Для доказательства предположим, что при движении по оптимальной траектории  $M_0M_1M_2O$  (рис. 8.6) достигается минимум заданного критерия оптимальности.



Докажем, что конечный отрезок  $M_1M_2O$  является оптимальной траекторией для своих краевых условий. Допустим, что это не так, и минимум критерия оптимальности достигается при движении по траектории  $M_1M_2'O$ . Но тогда и при движении из точки  $M_0$  меньшее значение критерия будет получено на траектории  $M_0M_1M_2'O$ , что противоречит первоначальному предположению и заставляет отвергнуть сделанное допущение.

Метод динамического программирования позволяет решать задачитрех видов: дискретную, дискретно-непрерывную и непрерывную.

**1. Дискретная задача.** Она отличается дискретностью всех величин (времени, управляющих воздействий, управляемых величин). К числу исходных данных относятся:

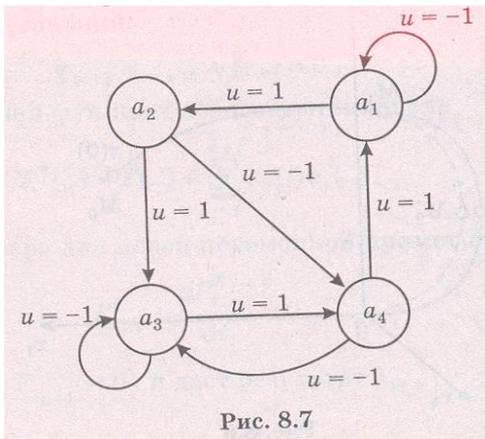
- а) состояния выхода объекта управления;
- б) значения управляющих воздействий;
- в) алгоритм перехода из предыдущего состояния в последующее:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}),$$

где  $k$  – номер шага,  $k = \overline{1, N}$ , причем эти переходы задаются таблицей или диаграммой переходов;

- г) начальное состояние  $x_0$  и число шагов процесса  $N$ ;
- д) критерий оптимальности  $J$ , зависящий от состояний и управлений в оптимальном процессе.

Пусть для примера выходная величина объекта может иметь четыре состояния:  $x = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ . Управляющее воздействие может иметь два значения:  $u = \{-1, 1\}$ . Диаграмма переходов показана на рис. 8.7.

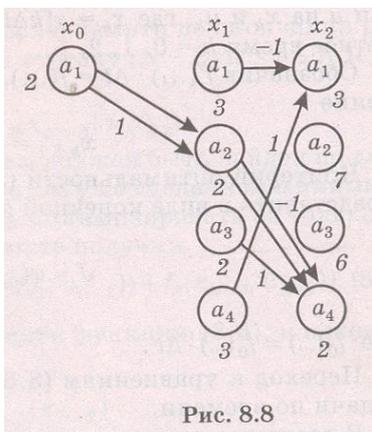


Примем  $x_0 = a_1$ ,  $N = 2$ . Критерий оптимальности управления объектом примем в виде функции конечного состояния объекта  $J = \varphi(x_N)$ , которая задана таблично (табл. 8.1) и должна быть минимизирована.

Таблица 8.1

$x_N$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$J$	3	7	6	2

Для решения задачи около каждого конечного состояния  $x_2$  на диаграмме оптимальных переходов (рис. 8.8) записываем в соответствии с таблицей значения критерия оптимальности  $J$ .



Затем рассматриваются все возможные переходы из каждого предыдущего состояния  $x_1$  в последующие  $x_2$ . Из них выбираются только те, которые оптимальны в смысле минимума  $J$ . Эти переходы отмечаются стрелками, около которых ставятся соответствующие значения управления, а около предшествующего состояния указывается значение  $J$ . После этого находится аналогично оптимальный переход из начального

состояния  $x_0$  в  $x_1$ . Оптимальная траектория обозначена двойными стрелками и получается при управлении

$$u^0 = \{u_0^0 = 1, u_1^0 = -1\}.$$

**2. Дискретно-непрерывная задача МДП.** В этой задаче управляющее воздействие и управляемые величины могут иметь бесчисленное количество значений в пределах заданных ограничений. Время изменяется дискретно с малым шагом  $\Delta t$ , что соответствует численным методам решения задач на ЭВМ. Задана продолжительность процесса  $T$ , уравнение объекта управления

$$\frac{dx}{dt} = f'(x, u), \quad (8.4)$$

ограничение на управление  $u \in \Omega(u)$  и начальное состояние  $x(0) = x_0$ .

Задан в виде функционала минимизируемый критерий оптимальности

$$J = \varphi(x(T)) + \int_0^T f_0'(x, u) dt. \quad (8.5)$$

Требуется найти оптимальное управление  $u^0(t)$  и траекторию  $x^0(t)$ .

Прежде всего, от дифференциального уравнения (8.4) переходим к разностному уравнению, заменяя  $dx$  на  $x_{k+1} - x_k$ ,  $dt$  на  $\Delta t$ ,  $x$  и  $u$  на  $x_k$  и  $u_k$ , где  $x_k = x[k\Delta t]$ ,  $u_k = u[k\Delta t]$ , относительное дискретное время  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Обозначив  $f'(\dots) \cdot \Delta t = f(\dots)$ , получим из (8.4) разностное уравнение

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k). \quad (8.6)$$

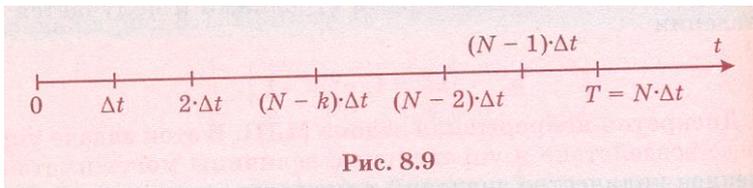
Критерий оптимальности (8.5) вместо интеграла необходимо представить в виде конечной суммы

$$J = \varphi(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x_k, u_k), \quad (8.7)$$

где  $f_0(\dots) = f_0'(\dots) \cdot \Delta t$ .

Переход к уравнениям (8.6) и (8.7) означает дискретизацию задачи по времени.

В соответствии с принципом оптимальности последовательно оптимизируем конечные отрезки процесса, начинающиеся от конечной точки  $t = T$  и постепенно увеличивающиеся на  $\Delta t$  (рис. 8.9).



Первым рассматриваем отрезок

$$(N-1)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$$

На этом отрезке из всего функционала (8.7) минимизируется частичная сумма

$$J_{N-1} = \varphi(x_{N-1} + f(x_{N-1}, u_{N-1})) + f_0(x_{N-1}, u_{N-1})$$

за счет изменения управления  $u_{N-1}$  с учетом ограничений, где  $x_N$  заменено согласно (8.6). В результате минимизации получаем следующую функцию от состояния  $x_{N-1}$ :

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in \Omega} J_{N-1} \quad (8.8)$$

Данную зависимость необходимо запомнить до получения аналогичной функции на следующем шаге расчета. Кроме (8.8), определится и оптимальное управление

$$u_{N-1}^0 = u_{N-1}(x_{N-1}) \quad (8.9)$$

Функция (8.9) должна храниться в памяти до окончания расчета процесса. Затем переходим к отрезку  $(N-2)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$ , на котором минимизируется

$$J_{N-2} = J_{N-1} + f_0(x_{N-2}, u_{N-2})$$

Минимум этой частичной суммы должен быть найден по двум переменным  $u_{N-2}$  и  $u_{N-1}$ , но с учетом уже сделанной минимизации по  $u_{N-1}$  в виде (8.8) остается минимизировать ее только по одному аргументу  $u_{N-2}$ . В результате получим

$$S_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2} \in \Omega} [S_{N-1}(x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2})) + f_0(x_{N-2}, u_{N-2})] \quad (8.10)$$

Функция (8.10) заменяет в памяти функцию (8.8), и находится оптимальное управление

$$u_{N-2}^0 = u_{N-2}(x_{N-2})$$

Аналогично на отрезке  $(N-k)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$  находим

$$S_{N-k}(x_{N-k}) = \min_{u_{N-k}} [S_{N-k+1}(x_{N-k} + f(x_{N-k}, u_{N-k})) + f_0(x_{N-k}, u_{N-k})]$$

$$u_{N-k}^0 = u_{N-k}(x_{N-k}).$$

Наконец для всего процесса  $0 \leq t \leq N\Delta t$  находим

$$S_0(x_0) = \min_{u_0 \in \Omega} J,$$

$$u_0^0 = u_0(x_0). \quad (8.11)$$

Таким образом, получен алгоритм расчета по рекуррентным формулам, который и называется динамическим программированием. При его применении по формуле (8.11)

находим оптимальное управление  $u_0^0$ , затем по уравнению объекта (8.6) находим состояние объекта  $x_1$ , далее находим  $u_1^0$  и т. д., вплоть до  $u_{N-1}^0$ .

**3. Непрерывная задача.** Задано уравнение объекта управления

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t),$$

$$\text{где } x = [x_1, \dots, x_n]^T, u = [u_1, \dots, u_m]^T, f = [f_1, \dots, f_n]^T$$

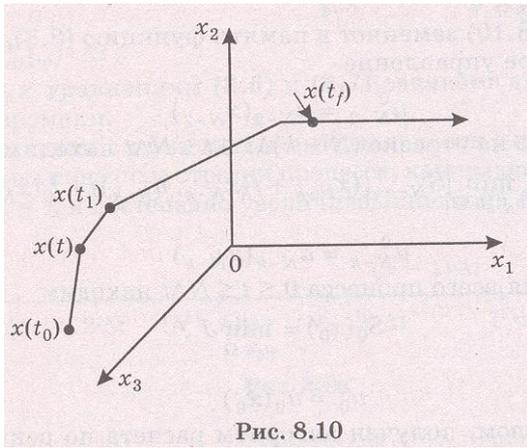
и краевые условия:  $x(t_0)$  – закрепленный левый конец траектории;  $x(t_f)$  – подвижный правый конец.

Задано ограничение на управление  $u \in \Omega(u)$  и минимизируемый функционал общего вида (функционал Больца):

$$J = \varphi(x(t_f), u(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt.$$

Найти оптимальное управление  $u^0(t)$  траекторию  $x^0(t)$  или закон оптимального управления  $u^0(x, t)$ .

Для вывода уравнения Беллмана рассмотрим две точки на искомой оптимальной траектории  $x(t)$  и  $x(t_1)$  (рис. 8.10), причем  $t_1 = t + \Delta t$  – малое



приращение времени. Введем обозначение

$$S(x(t_0), t_0) = \min_{u \in \Omega} J,$$

которое указывает на то, минимум критерия оптимальности управления объекта управления зависит только от начального состояния и начального момента времени процесса. Применяя принцип оптимальности, можно выразить минимальное значение функционала для конечных отрезков траектории, начинающихся в точках  $x(t)$  и  $x(t_1)$ :

$$S(x(t), t) = \min_{u \in \Omega} \left[ \varphi(x(t_f), u(t_f)) + \int_t^{t_1} f_0(\dots) dt + \int_{t_1}^{t_f} f_0(\dots) dt \right],$$

$$S(x(t_1), t_1) = \min_{u \in \Omega} \left[ \varphi(x(t_f), u(t_f)) + \int_{t_1}^{t_f} f_0(\dots) dt \right].$$

Сравнение этих равенств позволяет выразить первый минимум через второй:

$$S(x(t), t) = \min_{u \in \Omega} \left[ \int_t^{t_1} f_0(\dots) dt + S(x(t_1), t_1) \right].$$

Входящий в это равенство интеграл можно заменить произведением его подынтегральной функции на  $\Delta t$  (вследствие малости последнего). Кроме того, входящую в левую часть, как независимую от управления, можно ввести под знак минимума для того, чтобы получить приращение функции  $S$ , называемой функцией Беллмана. После этого придем к следующему результату:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) \Delta t + \Delta S(x(t), t) \right] = 0.$$

Поделим почленно равенство на  $\Delta t$  и, устремив  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + \frac{d}{dt} S(x(t), t) \right] = 0 \quad (8.12)$$

Считая функцию Беллмана  $S$  непрерывной и дифференцируемой функцией всех своих аргументов, выразим производную  $\frac{dS}{dt}$  как производную сложной функции, причем производную  $\frac{\partial S}{\partial t}$ , как независящую от управления  $u$ , перенесем в правую часть равенства:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] = - \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}$$

Заменив входящие сюда производные переменных состояния на соответствующие функции из уравнений объекта управления, получим уравнение Беллмана в общем виде:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t) \right] = - \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \quad (8.13)$$

Применяется и другая запись уравнения Беллмана с использованием скалярного произведения, в которое входит градиент функции  $S$ :

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + (\text{grad } S(x, t), f(x, u, t)) \right] = - \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \quad (8.14)$$

В частном случае, когда объект стационарен и подынтегральная функция функционала  $f_0$  не зависит от времени, искомая функция Беллмана  $S$  также не будет

явно зависеть от времени. Следовательно,  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$  и уравнение Беллмана упрощается, что соответствует так называемой задаче Лагранжа:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 0 \quad (8.15)$$

Для задачи максимального быстродействия  $f_0 \equiv 0$ , и уравнение Беллмана (8.15) приобретает вид:

$$\min_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, u)}{\partial x_i} f_i(x, u) = -1 \quad (8.16)$$

Из уравнения Беллмана должна быть найдена функция Беллмана  $S$  и оптимальное управление, что на практике выполняется в следующем порядке при оптимизации обобщенного квадратичного функционала.

1. В соответствии с исходными данными выбираем то или иное уравнение Беллмана (8.13) – (8.16).

2. Минимизируем по управляющему воздействию  $u$  левую часть уравнения Беллмана, выражая при этом искомое оптимальное управление через производные неизвестной функции  $S$ .

3. Подставляем в уравнение Беллмана найденное выражение для оптимального управления. При этом знак  $\min$  опускается.

4. Решаем полученное уравнение относительно функции Беллмана  $S$ . Решение ищется в виде положительно определенной квадратичной формы  $S = x^T C x$ . После подстановки выражения для функции  $S$  в уравнение Беллмана элементы симметричной матрицы  $C$  могут быть найдены приравнением к 0 всех коэффициентов квадратичной формы, образовавших левую часть уравнения Беллмана.

5. Подставляем функцию Беллмана, как функцию переменных состояния, в выражение для оптимального управления, найденного в п. 2. В результате получим оптимальный алгоритм управления. Соответствующая система устойчива, так как удовлетворяет требованиям прямого метода Ляпунова. Действительно, приняв функцию Беллмана за функцию Ляпунова, т.е. считая  $S = V$ , получаем  $\dot{V} \leq 0$  согласно (8.12) при положительной определенности  $f_0(x, u, t)$ .

**4. Принцип максимума и порядок его применения. Теорема об  $n$  интервалах. Синтез оптимального по быстродействию регулятора и оптимальные по быстродействию процессы**

### Принцип максимума

Это метод расчета оптимальных процессов и систем, который выражает необходимое условие оптимальности. Рассмотрим упрощенный вывод принципа максимума.

Задано уравнение управляемого объекта в векторно-матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

где  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ .

Ограничение наложено на скалярное управляющее воздействие  $|u| \leq U_m$ .

Задан минимизируемый функционал:

$$J = \int_0^T f_0(x, u) dt.$$

Необходимо найти оптимальное управление  $u^0(t)$  и траекторию  $x^0(t)$ . Порядок решения поставленной задачи следующий.

1. Вводим дополнительную переменную состояния

$$x_0(t) = \int_0^t f_0(x, u) dt,$$

конечное значение которой  $x(T) = J$ , т.е. равно критерию оптимальности. Эта переменная вместе с другими характеризует объект управления и образует обобщенный вектор состояния  $x^0 = [x_0, x_1, \dots, x_n]^T$ .

Дифференцируя по  $t$  выражение для новой переменной найдем уравнение в

нормальной форме  $\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u)$ . Добавив это уравнение в систему заданных уравнений объекта управления, получим систему обобщенных уравнений:

$$\frac{d\hat{x}^0}{dt} = \hat{f}(x, u), \quad (8.17)$$

где  $\hat{f} = [f_0, f_1, \dots, f_n]^T$ .

2. Производим игольчатую вариацию управляющего воздействия относительно искомого оптимального закона его изменения (рис. 8.12),

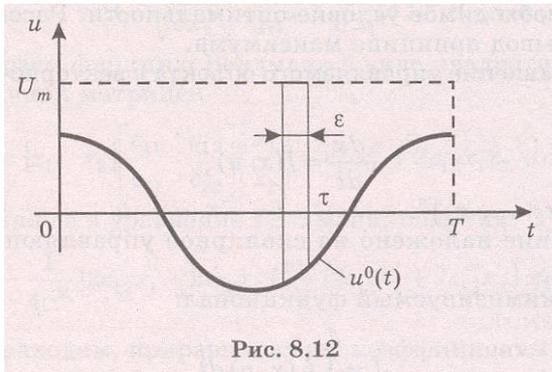


Рис. 8.12

при которой это воздействие скачком изменяется до предельного значения и затем обратно в течение бесконечно малого отрезка времени  $\varepsilon$ .

Площадь игольчатой вариации бесконечно мала, поэтому она вызывает бесконечно малые отклонения (вариации) переменных состояния:

$$\delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^0(t),$$

где  $\tau \leq t \leq T$ .

В частности, вариация

$$\delta x_0(T) = \delta J > 0, \quad (8.18)$$

так как система оптимальна по минимуму критерия оптимальности.

3. Выразим вариацию траектории в момент времени  $\tau$  как произведение ее скорости на длительность вариации, т.е.

$$\delta \dot{x}(\tau) = \left( \frac{d\dot{x}(\tau)}{dt} - \frac{d\dot{x}^0(\tau)}{dt} \right)_{t=\tau} = \varepsilon$$

В последнем равенстве заменим скорости на соответствующие функции, взятые из (8.17):

$$\delta \dot{x}(\tau) = \left[ \tilde{f}(\dot{x}(\tau), u(\tau)) - \tilde{f}(\dot{x}^0(\tau), u^0(\tau)) \right] \varepsilon. \quad (8.19)$$

4. Определим вариацию критерия оптимальности в момент  $t = \tau$  по формуле скалярного произведения:

$$\delta J = -\langle \delta \dot{x}(\tau), \tilde{\psi}(\tau) \rangle, \quad (8.20)$$

где  $\tilde{\psi}(\tau)$  – вспомогательная вектор-функция, подлежащая определению и имеющая смысл градиента изменения критерия оптимальности при изменении переменных состояния.

5. Подставляя (8.19) в (8.20) и с учетом знака вариации  $\delta J$  получим неравенство для  $0 \leq \tau \leq T$ :

$$\left\langle \hat{f}(\hat{x}^0(t), u^0(t)), \hat{\psi}(\tau) \right\rangle - \left\langle \hat{f}(\hat{x}(t), u(t)), \hat{\psi}(\tau) \right\rangle > 0 \quad (8.21)$$

6. Обозначаем функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H = \left\langle \hat{f}(\hat{x}(t), u(t)), \hat{\psi}(t) \right\rangle = \sum_{i=0}^n f_i(\hat{x}(t), u(t)) \cdot \psi_i(t) \quad (8.22)$$

Сравнение (8.22) и (8.21) позволяет сформулировать принцип максимума.

Для оптимального управления объектом необходимо, чтобы гамильтониан  $H$  имел максимальное (наибольшее) значение в любой момент процесса управления.

Если оптимальное управление находится внутри допустимой области, то гамильтониан  $H$  достигает максимума. Если же управление  $u^0(t)$  меняется по границам этой области, то  $H$  достигает своего наибольшего значения (супремума). (моя ред: применить право/лево-сторонний объемный фрактал действия – для получения границ области оптимальности по вращательному принципу инерции).

7. Для нахождения вспомогательных функций получены следующие уравнения:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (8.23)$$

Для функций  $\psi_i$  в соответствии с (8.20) и (8.21) получаются следующие граничные условия:

$$\psi_0(t) = -1, \quad \psi_i(T) = 0, \quad (i = \overline{1, n})$$

Так как гамильтониан  $H$  от  $x_0$  не зависит, то из (8.23) имеем  $\frac{d\psi_0(t)}{dt} = 0$ , а, следовательно,  $\psi_0(t) = -1 = \text{const}$ .

### Порядок практического применения принципа максимума

1. Располагая заданным функционалом и уравнениями объекта, составляем гамильтониан  $H$  по формуле (8.22). Причем, если подынтегральная функция  $f_0$  от управления  $u$  не зависит, то соответствующее слагаемое можно в гамильтониан не

включать, так как это не повлияет на решение задачи. Это справедливо, в частности, для критерия максимального быстродействия, когда  $f_0 = 1$ .

2. Исследуем гамильтониан  $H$  на максимум по управлению  $u$ , т.е. решаем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

уравнение

Отсюда находим в общем виде оптимальное управление через переменные  $x_0$  и  $\dot{\psi}$ . Если это уравнение приводит к нулевым значениям, хотя бы для одной функции  $\psi_i$  (тривиальное решение), то это считается неприемлемым и означает, что оптимальное управление изменяется по границам допустимой области. Соответственно гамильтониан  $H$  имеет не максимум, а наибольшее значение (супремум). В этом случае оптимальный закон управления находится из выражения для  $H$  в классе знаковых функций с учетом ограничений на управление.

3. Найденный оптимальный алгоритм управления подставляют в уравнения (8.16) и (8.23), и они решаются совместно. При этом решении возникает сложность с определением постоянных интегрирования, удовлетворяющих граничным условиям. Поэтому обычно ограничиваются решением качественного характера, при котором определяется лишь характер изменения оптимального управления. Дальнейшее применение метода припасовывания позволяет получить точное решение количественного характера.

**Пример** (см. [1]).

**Теорема об  $n$  интервалах**

## ЛЕКЦИЯ №3

### ТЕМА «АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ»

**1. Определение, основные особенности и классификация адаптивных САУ.**

**Функциональные схемы и примеры СНС**

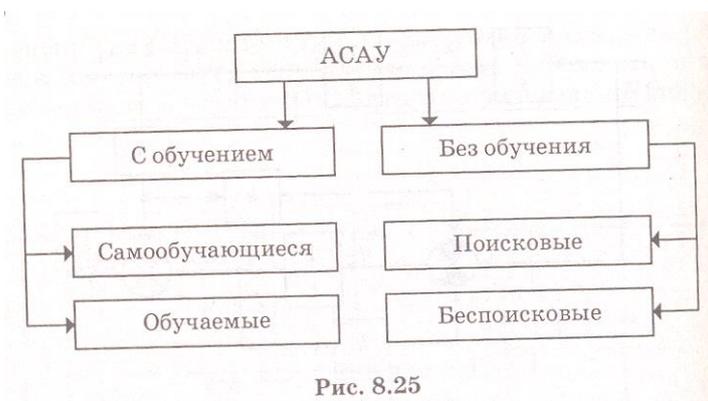
Адаптивной называется такая система автоматического управления, которая обладает способностью автоматического приспособ-

собления к изменяющимся в широких пределах характеристикам объекта управления и внешних воздействий.

Основной особенностью адаптивных систем является наличие у них двух целей управления:

1. Основная цель, которая заключается в поддержании управляемой величины на заданном значении.
2. Цель адаптации, которая состоит в автоматическом поддержании качества управления на требуемом уровне.

Классификация адаптивных систем автоматического управления (АСАУ) отображена на рис. 8.25.



Обучением называют автоматический процесс накопления опыта и совершенствования алгоритма адаптации в процессе работы системы. Самообучение построено по принципу выработки условных рефлексов у живых организмов. В обучаемых системах присутствует на первой стадии человек-оператор и обучаемая ЭВМ, снабженная соответствующей программой обучения. На этой стадии человек-оператор принимает решения по управлению объектом, и соответствующая информация поступает на ЭВМ.

После достаточно продолжительной совместной работы ЭВМ может принимать решения самостоятельно.

Системы без обучения называются самонастраивающимися системами (СНС). В СНС цель адаптации заключается в поддержании некоторого технико-экономического показателя, характеризующего качество управления и называемого критерием самонастройки, на экстремальном или заданном значении. Этот критерий является функцией управляющих воздействий адаптации.

Если критерий самонастройки должен поддерживаться на экстремальном значении, то СНС является в то же время оптимальной в статике (см. п. 8.1). У такой СНС критерий оптимальности совпадает с критерием самонастройки.

В поисковой СНС экстремальное значение критерия самонастройки обеспечивается путем автоматического поиска экстремума соответствующей статической характеристики, который может непредвиденно смещаться. Автоматический поиск экстремума заключается в последовательном выполнении трех операций:

- пробное воздействие на объект;
- определение результатов этого воздействия;
- рабочее воздействие на объект по результатам пробного воздействия, направленное на достижение экстремума критерия самонастройки.

В частном случае пробное и рабочее воздействия могут быть совмещены.

В беспоисковых системах критерий самонастройки может поддерживаться как на заданном, так и на экстремальном значении, но поиск экстремума не применяется. В первом случае используются известные принципы регулирования по отклонению или возмущению. Во втором случае применяются аналитическое определение скорости и направления управляющих воздействий с целью достижения экстремума критерия самонастройки. Беспоисковые системы более совершенны в смысле быстроты и точности адаптации, чем поисковые, но для их проектирования требуется больший объем априорной информации об объекте управления.

### **Функциональные схемы и примеры самонастраивающихся систем**

Укрупненно СНС можно рассматривать состоящей из объекта адаптации и адаптивного управляющего устройства. В роли объекта адаптации (ОА) выступает некоторая САР, замкнутая или разомкнутая, состоящая из автоматического регулятора АР и объекта регулирования ОР (рис. 8.26).

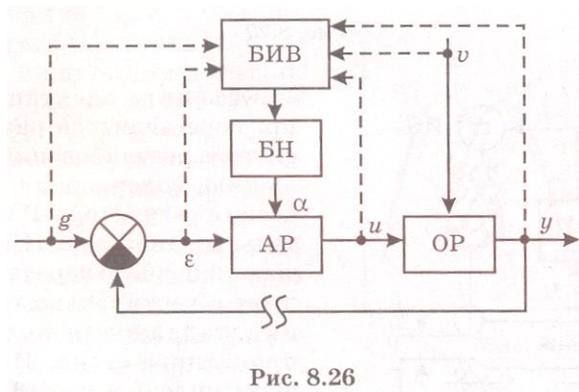


Рис. 8.26

Причем характеристики ОР, а также внешних воздействий  $g$  и  $v$  подвержены изменениям в процессе работы, что и требует адаптации (самонастройки) за счет изменения параметров  $\alpha$  автоматического регулятора. Самонастройку осуществляют два основных блока адаптивного управляющего устройства: блок измерений и вычислений БИВ (анализатор) и блок настройки БН (синтезатор). БИВ выполняет следующие функции, используя поступающую на него информацию, условно показанную штриховыми линиями:

- снятие статических и динамических характеристик объектов адаптации и регулирования;
- снятие статистических характеристик случайных воздействий  $g(t)$  и  $v(t)$ ;
- измерение критерия самонастройки, его производных и отклонения от экстремума;
- измерение отклонения выходных величин объекта адаптации и его эталонной модели.

В поисковых СНС функции блока настройки выполняет автоматический оптимизатор АО (рис. 8.27), причем вся система в целом называется системой автоматической оптимизации (CAO).

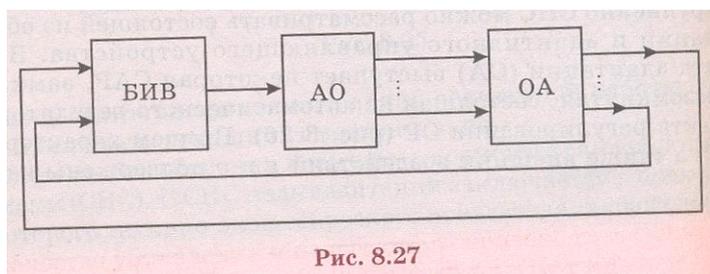


Рис. 8.27

В качестве примера поисковой CAO можно привести адаптивную систему управления толщиной проката (рис. 8.28).

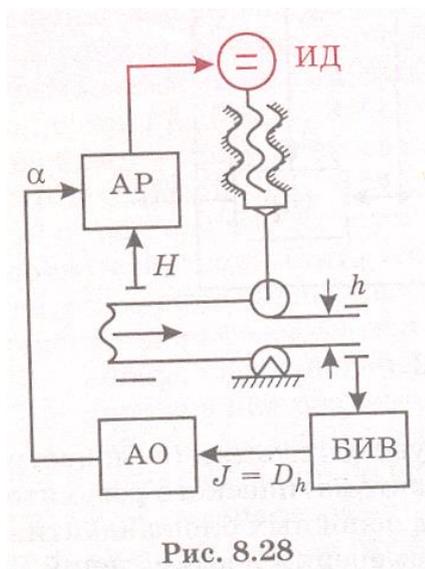


Рис. 8.28

Объектом адаптации в этом примере является разомкнутая система регулирования по возмущению, содержащая автоматический регулятор АР и исполнительный двигатель ИД, который через винтовую передачу перемещает в вертикальном направлении подвижный валок клетки прокатного стана. Именно это промышленное устройство является объектом регулирования, а регулируемой величиной здесь следует считать толщину  $h$  стальной полосы на выходе. Основным возмущением является толщина полосы  $H$  на входе, причем разомкнутая система регулирования по возмущению использует ее как входную величину.

В состав адаптивного управляющего устройства данной СНС входят блоки БИВ и АО. Анализатор БИВ измеряет толщину проката на выходе и вычисляет ее дисперсию  $D_h$  как критерий самонастройки. Автоматический оптимизатор, воспринимая эту информацию, осуществляет поиск минимума статической характеристики  $D_h(\alpha)$  при непредвиденных смещениях этой характеристики путем изменения параметра  $\alpha$  настройки автоматического регулятора АР (рис. 8.29).

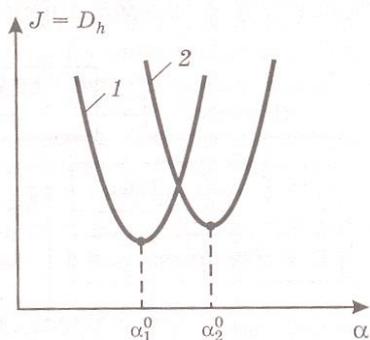


Рис. 8.29

В частном случае в поисковой СНС в качестве объекта адаптации может выступать сам объект регулирования. Такой объект должен иметь статическую

характеристику с максимумом или минимумом, который необходимо поддерживать с помощью адаптивного автоматического управления. Указанная характеристика смещается непредвиденным образом, что и требует адаптации. Такие системы получили название систем экстремального регулирования (СЭР), а входящие в них автоматические оптимизаторы называют экстремальными регуляторами. Примерами объектов регулирования с экстремальной характеристикой (рис. 8.30)

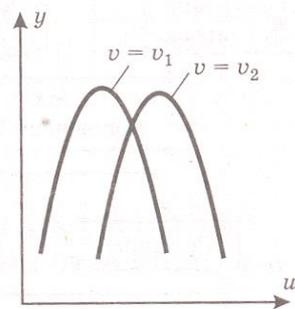


Рис. 8.30

являются:

- топочное устройство, в которое подаются для горения газ и воздух; в этом случае  $y$  — температура;  $u$  — расход газа;  $v$  — расход воздуха (возмущение);
- параллельный колебательный контур  $LC$ , в этом случае  $y$  — напряжение на контуре (регулируемая величина);  $u$  — емкость конденсатора;  $v$  — частота переменного тока;
- радиолокационная станция сопровождения цели, у которой выходная величина  $y$  — отраженный от цели сигнал;  $v$  — перемещение цели;  $u$  — перемещение антенны;
- бурильная установка, у которой  $y$  — вертикальная скорость проходки;  $u$  — осевое давление на бур;  $v$  — твердость породы.

## 1. Общая характеристика методов поиска экстремума

Классификация методов поиска экстремума критерия самонастройки, применяемых в поисковых СНС, представлена на рис. 8.31.

**Прямые** методы предполагают задание различных значений управляющих воздействий адаптации в виде соответствующих числовых множеств, последующее измерение значения критерия самонастройки, запоминание полученного значения, если оно ближе к экстремуму, чем все предыдущие (при поиске максимума — наибольшего). Сочетание значений управляющих воздействий может задаваться детерминированно (по законам спирали, строчной развертки и др.) или случайно.



Рис. 8.31

Причем для улучшения работы могут чаще задаваться те из них, при которых нахождение экстремума более вероятно. Прямые методы позволяют найти глобальный экстремум, в чем состоит их преимущество. Такой поиск обычно производится на модели объекта, а результаты переносятся на реальный объект.

Градиентные методы требуют вычисления компонент градиента функции или ее отклонения от экстремума. Градиентом  $J$  называется вектор в пространстве входных величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , компонентами которого являются частные производные от функции по входным величинам и который показывает направление наибольшего

возрастания функции:

$$\text{grad } J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial x_i} x_{i0}, \text{ где } x_{i0} -$$

орт (единичный вектор) по оси  $x_i$ .

В градиентных методах надо решать последовательно две задачи: определение компонент градиента или отклонения от экстремума и организацию движения к экстремуму на основе полученной информации.

**Методы определения компонент градиента и отклонения от экстремума**

**1. Метод синхронного детектирования.** Рассмотрим поиск максимума статической характеристики одномерного безынерционного объекта (рис. 8.32).

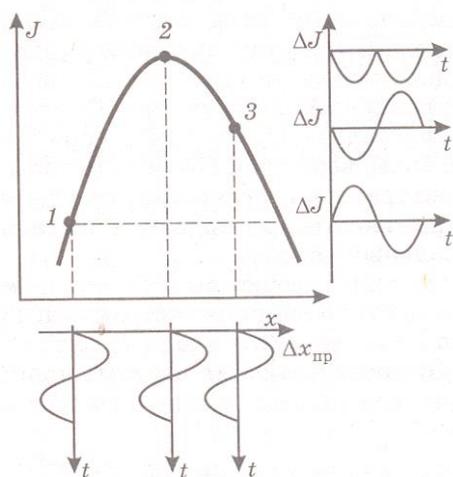


Рис. 8.32

На вход объекта помимо медленно меняющегося рабочего изменения  $x$  подается также пробное воздействие  $\Delta x_{\text{пр}}(t)$ . Это пробное воздействие должно быть периодическим, например, синусоидальным. Реакция объекта на пробное воздействие, т. е. соответствующее изменение критерия самонастройки  $\Delta J(t)$ , будет зависеть от того, где находится точка на характеристике. Если точка занимает положение 1, т. е. до максимума, то колебания  $\Delta J(t)$  совпадают по фазе с колебаниями  $\Delta x_{\text{пр}}(t)$ .

Если точка в третьем положении, т. е. после максимума, то указанные колебания в противофазе. Амплитуда колебаний в точках 1 и 3 тем больше, чем больше крутизна характеристики, пропорциональная

модулю производной  $\frac{dJ}{dx}$ . В точке экстремума 2 колебания имеют удвоенную частоту по сравнению с частотой колебаний  $\Delta x_{i\delta}$ . Если подать  $\Delta J(t)$  на синхронный детектор (фазовый дискриминатор), то на выходе получится сигнал, пропорциональный  $\frac{dJ}{dx}$ .

**2. Метод приращений.** Этот метод обеспечивает приближенное определение компонент градиента как отношений соответствующих

малых приращений  $\frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{\Delta J_{i\delta}}{\Delta x_{i\delta}}$ . Для реверса достаточно определять только приращение  $\Delta J_{i\delta}$ , которое при изменении своего знака укажет на переход через экстремум.

**3. Метод запоминания экстремума.** При приближении к экстремуму происходит слежение за изменяющимся значением критерия самонастройки. После прохождения экстремума критерия самонастройки запоминается его экстремальное значение. Кроме того, при этом измеряется и текущее значение критерия самонастройки, благодаря чему возможно определение отклонения его от экстремума.

**4. Метод производной по времени.** По этому методу определя-

ется производная  $\frac{dJ}{dt}$ , которая при прохождении экстремума всегда меняет свой знак (с плюса на минус, если экстремум – максимум), что и дает информацию об отклонении  $J$  от экстремума.

Два последних метода используются для одномерных объектов, т. е. с одним входом.

Методы организации движения к экстремуму

**1. Непрерывные методы** отличаются непрерывным изменением входных величин объекта со скоростями, пропорциональными соответствующим

компонентам градиента, т. е. по закону  $\frac{dx_i}{dt} = c \frac{\partial J}{\partial x_i}$ . Причем коэффициент пропорциональности  $c > 0$  при поиске максимума и  $c < 0$  при поиске минимума.

В зависимости от траектории поиска в пространстве входных величин непрерывные методы делятся на несколько видов, которые рассмотрим для двумерного объекта со статической характеристикой  $J(x_1, x_2)$  (рис. 8.33), которую можно заменить семейством линий  $J = \text{const}$  в плоскости  $x_1, x_2$  (рис. 8.34).

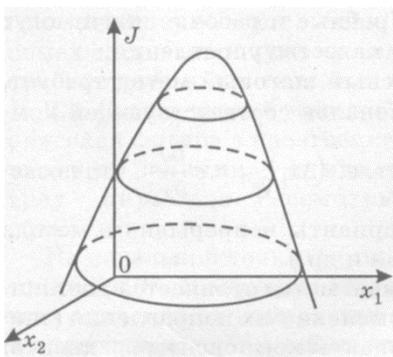


Рис. 8.33

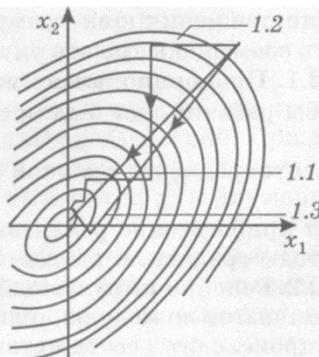


Рис. 8.34

**1.1. Метод градиента требует одновременного изменения всех входных величин по указанному выше закону. При этом вектор скорости, направленный по касательной к траектории движения в плоскости  $x_1, x_2$  будет в любой момент времени равнонаправлен с вектором градиента, направленным по нормали к линии равного уровня  $J = \text{const}$ . Такая траектория называется траекторией стекания (траектория 1.1 на рис. 8.34) и приводит к экстремуму, где все компоненты и вектор градиента обратятся в ноль. При сложной поверхности  $J(x_1, x_2)$  траектория стекания может быть извилистой и длинной, что нежелательно.**

**1.2. Метод Гаусса—Зейделя предполагает поочередное изменение входных величин до достижения соответствующих частных экстремумов. При этом траектория на плоскости  $x_1, x_2$  имеет вид ломаной, состоящей из взаимно перпендикулярных отрезков, каждый из которых параллелен одной из осей координат и заканчивается в точке касания с одной из линий равного уровня (траектория 1.2 на рис. 8.34).**

**1.3.Метод** крутого восхождения (при поиске максимума) и наискорейшего спуска (при минимуме) требует определения вектора градиента в начальной точке, движения по этому направлению до достижения частного экстремума и т. д. В результате этот метод, как модификация метода Гаусса-Зейделя, быстрее приводит к экстремуму (траектория 1.3на рис. 8.34).

2. Шаговые методы предусматривают дискретное во времени изменение входных величин. Изменение, производимое в некоторый момент времени, называется шагом. Шаги осуществляются почти мгновенно, они сравнительно невелики и могут быть пробными и рабочими. Пробные шаги служат для нахождения компонент градиента методом приращений, а рабочие - для организации движения к экстремуму. Пробные и рабочие шаги могут быть совмещены, но это ухудшает качество управления.

2.1.Пропорционально-импульсный шаговый метод требует чтобы рабочий шаг был пропорционален соответствующей компоненте

градиента в данной точке, т. е.  $(\Delta x_i)_{\text{раб}} = \tilde{n} \frac{\partial \hat{I}}{\partial x_i}$ , что позволяет приближенно реализовать варианты непрерывного метода (методы градиента, Гаусса-Зейделя и др.).

2.2. Релейно-импульсный шаговый методотличается постоянством шагов по модулю, и лишь изменения их направления (знака) происходят в соответствии со знаком компоненты градиента:

$$(\Delta x_i)_{\text{раб}} = \tilde{n} \text{sign} \frac{\partial J}{\partial x_i} .$$

Этот метод проще в технической реализации, но менее точен. Он приводит к автоколебаниям около экстремума. Для построенного на рис. 8.35 графика пробные и рабочие шаги совмещены, а объект предполагается безынерционным и одномерным.

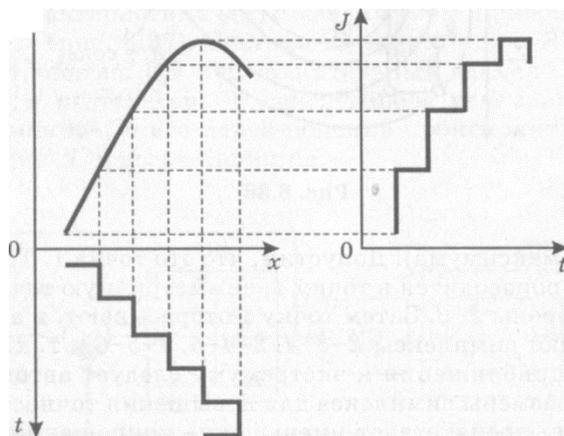


Рис. 8.35

Достоинство шаговых методов - ослабление влияния инерционности объекта и помех. При инерционном объекте период следования шагов должен быть не меньше длительности переходного процесса в объекте. Уменьшение влияние высокочастотных помех достигается путем усреднения (интегрирования) критерия самонастройки на некотором отрезке времени.

**2.3. Симплексный метод.** Симплекс - это простейшая геометрическая фигура в пространстве входных воздействий. При двух входных величинах симплексом является треугольник, при трех - пирамида. Рассмотрим данный метод для двумерного объекта.

Из начальной точки **1**(рис. 8.36) осуществляются два шага в точки **2** и **3**, образующие вершины треугольника - симплекса.

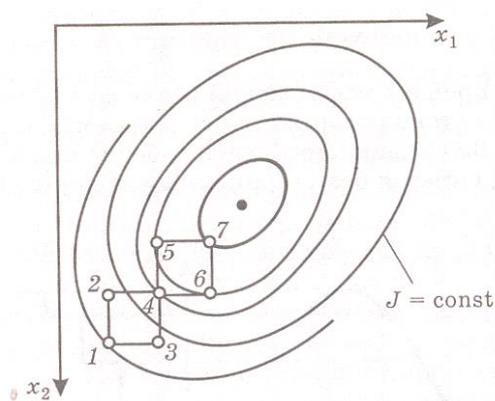


Рис. 8.36

Во всех этих точках измеряется значение критерия самонастройки и определяется, в какой из них это значение будет минимально (при поиске максимума). Допустим, что это точка **1**. Тогда следующий шаг производится в точку **4**, симметричную точке **1**, относительно стороны **2-3**. Затем точку **1** отбрасывают, и аналогично рассматривают симплексы **2-3-4**, **2-4-5**, **4-5-6** и т. д.

По мере приближения к экстремуму следует автоматически уменьшать размеры симплекса для повышения точности поиска. Однако этому препятствует уменьшение приращений критерия самонастройки.

**3. Релейный метод** задает постоянную по модулю скорость изменения входного воздействия (применяется исполнительный механизм постоянной скорости). Изменение знака скорости (реверс) происходит при изменении знака градиента, т. е. по закону

$$\frac{dx}{dt} = c \operatorname{sign} \frac{dJ}{dx}.$$

Этот простейший, но грубый метод приводит автоколебаниям и используется для одномерных объектов в сочетании с методами запоминания экстремума и производной по времени (см. п. 8.20).

## 2. Схемы поисковых и беспоисковых самонастраивающихся систем

### 3.1. Поисковая СНС с запоминанием экстремума

Примем, что объект регулирования (ОР) такой СНС имеет статическую характеристику  $y(x)$  с максимумом и инерционное звено на выходе (рис. 8.37).

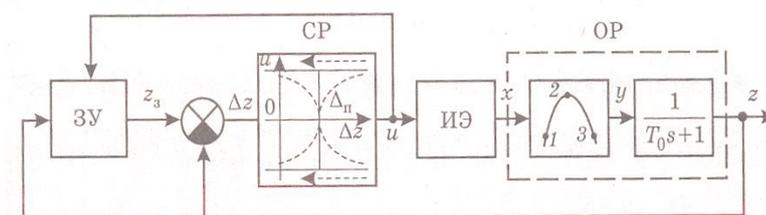


Рис. 8.37

Система содержит также ЗУ - запоминающее устройство; ИЭ - исполнительный элемент постоянной скорости, т. е. интегратор; СР - сигнум-реле (реле знака). Это реле двухпозиционное, и его переключение происходит при пороге

срабатывания  $\Delta_i$  и возрастания  $\Delta z$ . При уменьшении  $\Delta z$  состояние реле не меняется (показано стрелками).

Допустим, что в момент времени  $t=0$  безынерционный объект ( $T_0 = 0, z = y$ ) находится в состоянии **1** (рис. 8.38), его входная величина  $x$  и

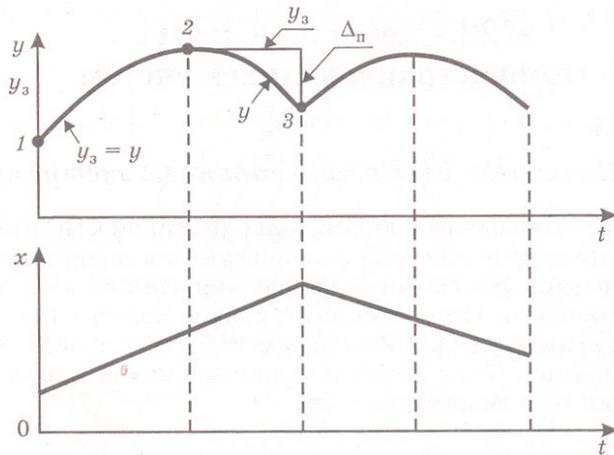


Рис. 8.38

выходная  $y$  увеличиваются. ЗУ на отрезке **1-2** отслеживает это изменение, т. е.  $y_3 = y$ . При прохождении экстремума на участке **2-3** значение переменной  $y$  уменьшается, ЗУ при этом запоминает достигнутое в точке **2** максимальное значение  $y_{3,a}$  в сумматоре определяется отклонение  $\Delta y$  от экстремума. При  $\Delta y = \Delta_i$  СР переключается, производя при этом одновременно две операции: 1) реверс ИЭ, после чего переменная  $x$  перейдет к уменьшению, а переменная  $y$  - к увеличению; 2) сброс запомненного значения в ЗУ и установление в нем текущего значения переменной  $y$  в точке 3. Затем процесс повторяется периодически, и в системе устанавливаются автоколебания.

Рассмотрим, какое влияние на процесс поиска оказывает инерционность

объекта. Уравнение объекта  $T_0 \frac{dz}{dt} + z = y$  преобразуем к виду  $\frac{dz}{dt} = \frac{y - z}{T_0}$ . Деля это

уравнение на уравнение исполнительного элемента  $\frac{dx}{dt} = \pm U_m$ , получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий в плоскости  $x, z$ . Решив его, можно построить фазовую траекторию и проанализировать процессы (рис. 8.39).

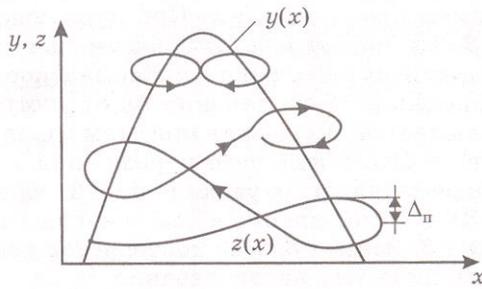


Рис. 8.39

Анализ показывает, что согласно дифференциальному уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{y-z}{T_0 U_m}$$

крутизна фазовой траектории  $z(x)$  пропорциональна разности  $y-z$ .

Поэтому в точках пересечения фазовых траекторий со статической

характеристикой объекта регулирования  $y(x)$  производные  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dt}$  равны 0, а выходная величина объекта  $z$  достигает экстремума (максимума или минимума).

Фазовая траектория  $z(x)$  благодаря реверсам изменения входа переходит с одной ветви статической характеристики на другую до установления автоколебаний, имеющих на указанной плоскости вид символа  $\infty$ . Построенная картина процесса показывает, что выход объекта  $z$  не достигает экстремального значения статической характеристики, отчего точность поддержания экстремума снижается.

#### а. Поисковая СНС с синхронным детектированием

На функциональной схеме СНС (рис. 8.40) приняты обозначения: ОА – многомерный объект адаптации; БИВ – анализатор, который вычисляет значение критерия самонастройки  $J$  и подает его на синхронные детекторы, состоящие из множительных звеньев  $M_1 - M_n$  и фильтров низкой частоты  $\hat{O}I_{\times 1} - \hat{O}I_{\times n}$ ;  $\tilde{A}_1 - \tilde{A}_n$  – генераторы, создающие пробные периодические колебания разных частот и подающие их как на множительные звенья  $M_1 - M_n$ , так и на усилители  $\hat{O}_1 - \hat{O}_2$  через сумматоры.

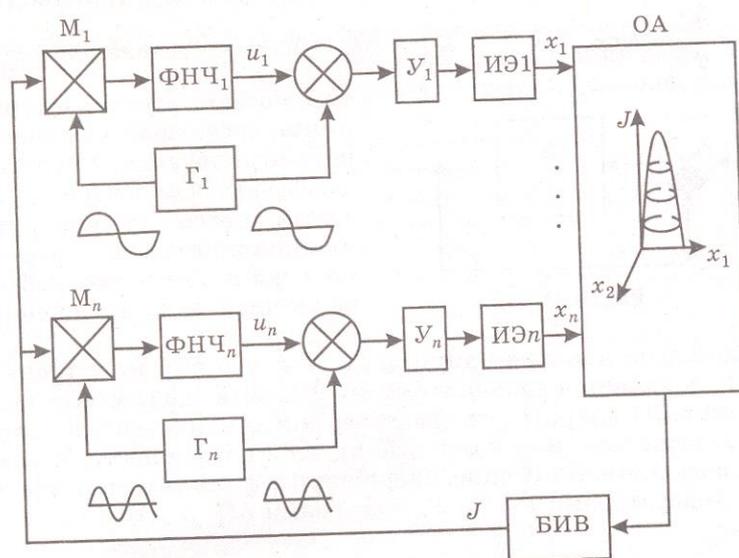


Рис. 8.40

Благодаря подаче этих колебаний на усилители создаются пробные составляющие во входных сигналах объекта  $x_1 \dots x_n$ . Проходя через объект, пробные колебания создают колебания  $\Delta J(t)$  критерия самонастройки, а в множительных звеньях происходит перемножение пробных колебаний и реакции объекта на них. Для исключения взаимных помех пробные колебания должны быть ортогональны, т.е.  $\overline{\Delta x_1 \dots \Delta x_i} = 0 \ (i = \overline{2, n})$ .

При этом образуются постоянные составляющие  $u_1 \dots u_n$ , пропорциональные соответствующим компонентам градиента, а переменные составляющие отфильтровываются фильтрами  $\hat{O}I \times_1 - \hat{O}I \times_n$ .

Покажем для одномерного объекта, что данная поисковая система эквивалентна простейшей САР первого порядка. Примем уравнение статической характеристики  $J = \alpha(x_{\hat{y}} - x)^2$ , где  $x_{\hat{y}}$  — значение входной величины, соответствующее максимуму при  $\alpha < 0$ .

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{dJ}{dx} =$$

При непрерывном движении к экстремуму производная  $= K(x_{\hat{y}} - x)$ , где  $K = -2\alpha c > 0$ . Этому уравнению движения соответствует структурная схема, состоящая из охваченного отрицательной обратной связью инвертора (рис. 8.41).

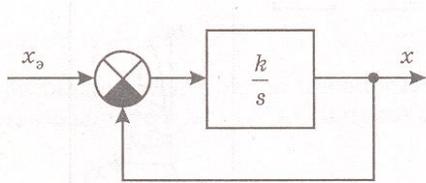


Рис. 8.41

Такая система эквивалентна инерционному звену первого порядка и обеспечивает быстрое и плавное приближение к экстремуму.

Недостаток данного принципа в том, что при инерционном объекте появляется дополнительный фазовый сдвиг между колебаниями  $\Delta J(t)$  и  $\Delta x_{i \delta}(t)$ , что дает погрешность в определении компонент градиента. Для компенсации этой погрешности надо использовать соответствующие инерционные фильтры, включенные между генераторами  $\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_n$  и звеньями  $M_1 \dots M_n$ .

### 3.3. Поисковая шаговая пропорционально-импульсная система

Если объект экстремального управления двумерный, то для поиска экстремума может применяться двухканальный автоматический оптимизатор (рис. 8.42).

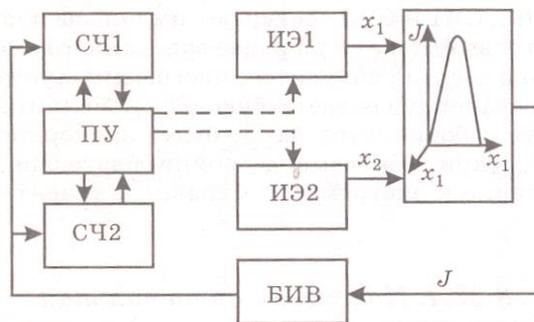


Рис. 8.42

В состав его входят: программное устройство ПУ, исполнительные элементы ИЭ1, ИЭ2 постоянной скорости, реверсивные счетчики импульсов СЧ1, СЧ2.

Рассмотрим принцип действия системы, пользуясь известным представлением характеристики объекта адаптации на плоскости  $x_1, x_2$  в виде линий равных значений критериев самонастройки  $J$  (рис. 8.43).

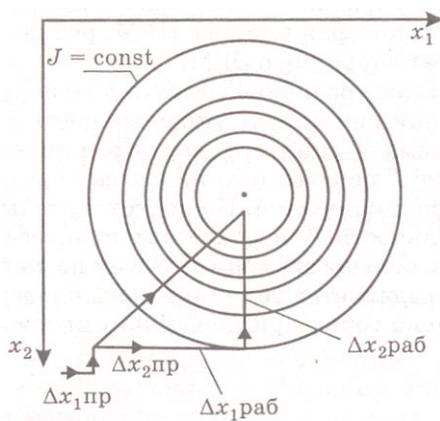


Рис. 8.43

Работа системы носит периодический характер. По командам от ПУ в начале каждого периода ИЭ1 и ИЭ2 поочередно совершают небольшие пробные шаги  $\Delta x_{i\delta}$ , постоянные по модулю и направлению. После каждого такого шага соответствующие изменения критерия самонастройки  $\Delta J_{i\delta 1}$  и  $\Delta J_{i\delta 2}$ , преобразованные в числа импульсов, записываются в счетчики СЧ1 и СЧ2 с учетом знака этих приращений. Затем по команде программного устройства включаются исполнительные элементы ИЭ1 и ИЭ2 на совершение рабочих шагов с постоянной скоростью в направлении, зависящем от знака изменения критерия. Одновременно с этим с ПУ на счетчики СЧ1 и СЧ2 поступают импульсы постоянной частоты, которые вычитаются из ранее записанного числа импульсов. Как только счетчик обнулится, программное устройство дает команду на остановку соответствующего исполнительного элемента. В итоге рабочие шаги  $\Delta x_{i\text{раб}}$  будут пропорциональны изменениям  $\Delta J_{i\delta i}$  критерия самонастройки, благодаря чему совершается движение к экстремуму, близкое к траектории метода градиента.

### 3.4. Поисковая оптимальная по быстродействию двухкальная система

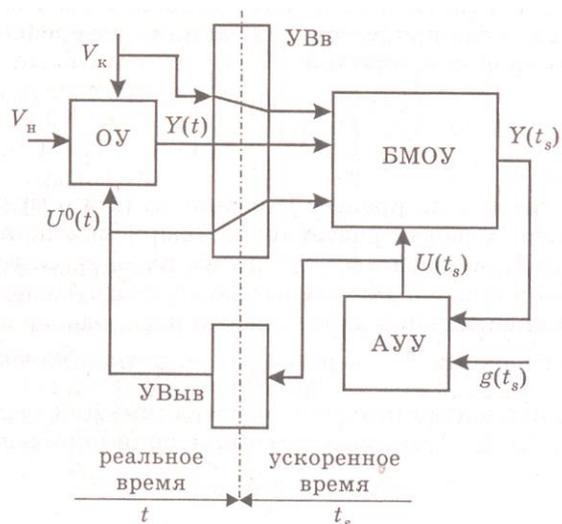


Рис. 8.44

На рис. 8.44 приняты следующие обозначения:  $V_i$  – возмущение неконтролируемое;  $V_\epsilon$  – возмущение контролируемое; УВв, УВыв – устройства ввода и вывода; БМОУ – быстрая модель объекта управления; АУУ – автоматическое устройство адаптивного оптимального управления.

Быстрая модель может быть реализована на АВМ, которая вместе с ЦВМ, реализующей устройство АУУ, образуют гибридную ЭВМ.

Известно линейное уравнение объекта  $n$ -го порядка, для которого при ограничении на модуль управляющего воздействия  $u(t)$  выполняется теорема об  $n$  интервалах. Критерием оптимальности является время  $T$  переходного процесса перевода объекта из состояния  $y(0)$  в состояние  $y(\infty)$ . На подготовительной стадии определяется длительность  $T_0$  переходного процесса в объекте, которая значительно больше времени  $T$ . Затем по допустимой ошибке управления определяется величина шага интегрирования  $\Delta t$  и максимальное

число точек при численном интегрировании процесса  $M = \frac{T_0}{\Delta t}$ .

Алгоритм адаптивного оптимального управления – это прямой поиск методом итераций (последовательных приближений), осуществляемый на быстрой модели нестационарного объекта. Число итераций определяется сходимостью и заранее неизвестно. Каждая итерация характеризуется максимально возможной длительностью переходного процесса  $T_i$ , которая разделена на  $m > n$  неделимых отрезков – квантов.

На каждой итерации исследуются  $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$  вариантов управления для одного знака первого интервала. Каждый вариант содержит  $n$  интервалов управления  $u = \pm U_m$  и состоит не более чем из  $m$  квантов. Каждый интервал управления содержит целое число квантов. Например, при  $n=2$  и  $m=4$  число вариантов  $C_4^2 = 6$ , эти варианты имеют по два интервала, содержащих 1 и 1, 1 и 2, 2 и 1, 2 и 2, 1 и 3, 3 и 1 квантов соответственно.

Один квант состоит из целого числа шагов интегрирования  $\Delta t$ , причем  $M \gg m$ , что дает большую экономию машинного времени для расчета оптимального управления при варьировании длительности интервалов по квантам, а не по шагам.

Оптимальный вариант на каждой итерации выбирается после расчета переходных процессов всех вариантов на БМОУ по минимуму критерия самонастройки

$$J = \int_0^{T_i} |y_{ij}(t) - y(\infty)| dt,$$

где  $y_{ij}(t)$  – переходный процесс  $j$ -го варианта  $i$ -й итерации.

Этот критерий характеризует точность приближения к заданному значению. При равенстве этих показателей лучшим считается вариант с минимальной длительностью переходного процесса  $T_{ij}$ .

Оценка максимальной длительности переходного процесса на следующей итерации  $T_{i+1} = \min_j T_{ij}$ , т.е. равна длительности оптимального варианта предыдущей итерации. Для первой итерации  $T_1 = T_0$ . Когда будет выполнен критерий окончания процесса поиска

$$T_i - T_{i+1} \leq \Delta t,$$

найденное оптимальное управление в реальном времени переносится на объект управления ОУ, причем для повышения точности за время переходного процесса итерационные процессы поиска осуществляются многократно.

### 3.5. Бесписковая адаптивная система, использующая функцию Ляпунова

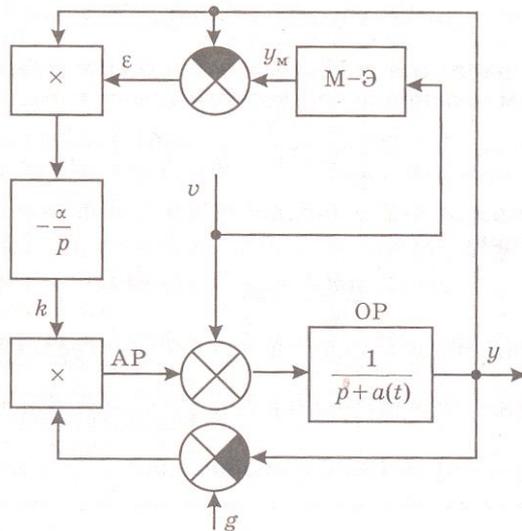


Рис. 8.45

Объектом адаптации в этой системе является замкнутая САР, состоящая из объекта регулирования ОР и автоматического регулятора АР (8.45). ОР – это инерционное нестационарное звено, у которого непредвиденным образом изменяется коэффициент самовыравнивания  $a(t)$ . АР – пропорциональный регулятор с переменным коэффициентом  $k$ , реализованный на множительном звене.

В системе применена эталонная модель М-Э, которая по возмущающему воздействию  $v$  имеет передаточную функцию:

$$\hat{O}_i(p) = \frac{1}{p+b}. \quad (8.50)$$

Покажем, что благодаря самонастройке изменение коэффициента  $a(t)$  можно парировать соответствующим изменением коэффициента  $k(t)$ . Для этого найдем передаточную функцию САР по возмущению

$$\hat{O}_v(p) = \frac{1}{p+a(t)+k(t)}. \quad (8.51)$$

Сравнение выражений (8.50) и (8.51) показывает, что САР при  $a(t)+k(t)=b$  будет эквивалентна модели-эталону.

Для синтеза контура самонастройки получим дифференциальные уравнения для сигнального (координатного) рассогласования

$$\varepsilon = y_1 - y \quad (8.52)$$

и параметрического рассогласования

$$z(t) = b - a(t) - k(t). \quad (8.53)$$

Из (8.50) и (8.51) можно получить дифференциальные уравнения эталонной модели М-Э и САР:

$$\frac{dy_1}{dt} = v - by_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = v - (a(t) + k(t))y.$$

Вычтя из уравнения М-Э уравнение САР с учетом (8.52) и (8.53), получим уравнение для координатного рассогласования

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -b\varepsilon - zy. \quad (8.54)$$

Примем непрерывный закон настройки коэффициента  $k(t)$  согласно уравнению

$$\frac{dk(t)}{dt} = \psi\varepsilon, \quad (8.55)$$

где  $\psi$  – функция, подлежащая определению по условию устойчивости.

Предположим, что  $a(t)$  изменяется сравнительно медленно. Тогда,

дифференцируя (8.53), производной  $\frac{da}{dt}$  можно пренебречь:

$$\frac{dz}{dt} \equiv -\frac{dk}{dt}. \quad (8.56)$$

Из (8.55) и (8.56) получим дифференциальное уравнение для параметрического рассогласования:

$$\frac{dz}{dt} = -\psi\varepsilon. \quad (8.57)$$

Уравнения (8.54) и (8.57) используем для дальнейшего синтеза системы по прямому методу Ляпунова. В качестве критерия самонастройки берем функцию Ляпунова:

$$J = \alpha\varepsilon^2 + z^2. \quad (8.58)$$

Функция (8.58) удовлетворяет требованию положительной определенности при  $\alpha > 0$  и имеет равный нулю минимум в начале координат, который и следует достичь при адаптации.

Согласно прямому методу Ляпунова для обеспечения устойчивости в указанной точке экстремума надо найти и обеспечить отрицательную определенность производной  $\frac{dJ}{dt}$ .

Продифференцировав (8.58) как сложную функцию, в силу (8.54) и (8.57) получим:

$$\frac{dJ}{dt} = 2\alpha\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + 2z \frac{dz}{dt} = -2\alpha b\varepsilon^2 - 2z\varepsilon(\alpha y + \psi).$$

Отсюда видно, что отрицательная определенность будет при  $\psi = -\alpha y$ . (8.59)

Уравнения (8.55) и (8.59) определяют алгоритм контура адаптации, что отражено на структурной схеме системы (см. рис. 8.45).

### 3.6. Бесписковая адаптивная система, использующая функцию чувствительности

Функциональная схема системы приведена на рис. 8.46. Здесь СНМ – самонастраивающаяся модель объекта регулирования ОР;  $\beta$  – его переменный параметр;  $\alpha$  – настраиваемый параметр автоматического регулятора АР. В качестве критерия самонастройки принята функция  $J = \varepsilon^2$ , где  $\varepsilon = y_1 - y$  – ошибка регулирования.

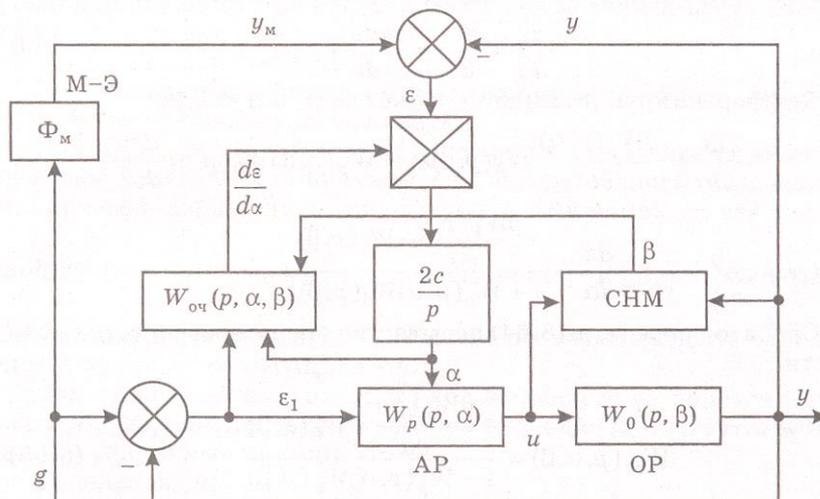


Рис. 8.46

Для самонастройки принят непрерывный закон изменения параметра  $\alpha$  по методу градиента:

$$\frac{d\alpha}{dt} = c \frac{dJ}{d\alpha}. \quad (8.60)$$

Входящую в (8.60) компоненту градиента найдем, дифференцируя  $J$  как сложную функцию:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{dJ}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 2\varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\alpha}, \quad (8.61)$$

где  $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$  – функция чувствительности ошибки  $\varepsilon$  к параметру  $\alpha$ .

Ее можно найти из уравнения САР, которая является объектом адаптации:

$$y = W_p(p, \alpha) W_0(p, \beta) \varepsilon_1, \quad (8.62)$$

где  $\varepsilon_1 = g - y$  – рассогласование.

Поскольку  $g$  и  $y_1$  от параметра  $\alpha$  не зависят, то, дифференцируя равенства для  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon$  по параметру  $\alpha$ , получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{d\varepsilon_1}{d\alpha} = -\frac{dy}{d\alpha}. \quad (8.63)$$

Дифференцируя (8.62) по  $\alpha$ , с учетом (8.63) найдем

$$-\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{\partial W_p(p, \alpha)}{\partial \alpha} W_0(p, \beta) \varepsilon_1 + W_p(p, \alpha) W_0(p, \beta) \frac{d\varepsilon}{d\alpha}.$$

$$\text{Отсюда } \frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{-\frac{\partial W_p(p, \alpha)}{\partial \alpha} W_0(p, \beta)}{1 + W_p(p, \alpha) W_0(p, \beta)} \varepsilon_1. \quad (8.64)$$

Оператор перед  $\varepsilon_1$  в (8.64) называют оператором чувствительности

$$W_{\dot{\varepsilon}_1}(p, \alpha, \beta) = \frac{-\frac{\partial W_p(p, \alpha)}{\partial \alpha} W_0(p, \beta)}{1 + W_p(p, \alpha) W_0(p, \beta)} \quad (8.65)$$

и позволяет определить функцию чувствительности по рассогласованию  $\varepsilon_1$ .

Подставив (8.64) в (8.61), а затем (8.61) в (8.60), получим с учетом (8.65) искомый алгоритм адаптации

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2c\varepsilon W_{\dot{\varepsilon}_1}(p, \alpha, \beta) \varepsilon_1,$$

по которому и составлена структурная схема на рис. 8.46.

#### 4. Модели в адаптивных системах

Из рассмотренных выше примеров видно, что в СНС используются два вида моделей: модель-эталон системы и самонастраивающаяся модель (СНМ) объекта управления.

Первая модель определяет желаемые (эталонные) свойства системы регулирования как объекта адаптации.

Самонастраивающиеся модели объектов управления могут выполнять функции следующих устройств:

- 1) датчика динамических характеристик объекта управления, его параметров;
- 2) корректирующего устройства, используемого, например, в качестве упредителя Смита;
- 3) имитатора объекта, который может использоваться, например, в тренажерах.

При построении СНМ объекта управления надо решить две задачи:

1. Синтез модели объекта;
2. Синтез автоматического управляющего устройства, которое будет эту модель настраивать.

Для решения первой задачи искомая характеристика объекта (весовая, передаточная функция и др.) представляется в виде суммы ортогональных функций, взятых с переменными весовыми коэффициентами  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , в

частности,  $W_{\hat{1}0}(s) = \sum_{i=1}^n c_i W_i(s)$ . Ортогональность функций  $W_i(s)$  обеспечит

независимость изменения указанных коэффициентов.

Для синтеза автоматического управляющего устройства, производящего адаптацию синтезатора (модели ОУ), могут применяться различные принципы:

- поисковый;
- беспойсковый замкнутый;
- беспойсковый разомкнутый.

Поисковая самонастраивающаяся модель (рис. 8.47) включает в себя:

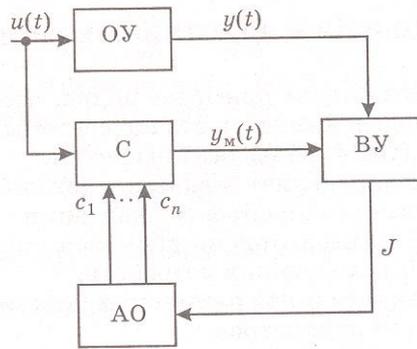


Рис. 8.47

С – синтезатор; ВУ – вычислительное устройство; АО – автоматический оптимизатор, который настраивает коэффициенты синтезатора так, чтобы критерий самонастройки  $J$  достигал своего минимума. Причем критерий  $J$  должен характеризовать отклонение выходного сигнала  $y(t)$  объекта управления ОУ от выходного сигнала синтезатора  $y_1(t)$ .

Беспоисковая замкнутая СНМ объекта управления (рис. 8.48) содержит

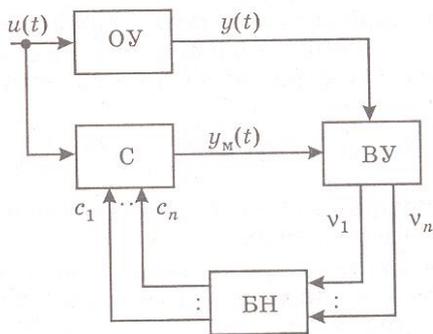


Рис. 8.48

вычислительное устройство ВУ, которое вычисляет отклонения  $v_1, v_2, \dots, v_n$  соответствующих коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , от их требуемых значений. Эти отклонения поступают на блок настройки БН, состоящий из  $n$  интегральных регуляторов, которые изменяют коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_n$  до получения нулевых отклонений.

Беспоисковая разомкнутая СНМ (рис. 8.49) имеет в своей основе ВУ. Оно

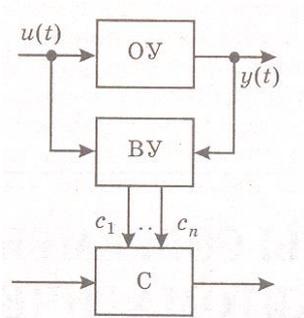


Рис. 8.49

по входному и выходному сигналам объекта управления ОУ определяет в результате параметрической идентификации коэффициенты синтезатора С, причем последний можно использовать как имитатор или корректирующее устройство.

## ЛЕКЦИЯ №4

### ТЕМА «МЕТОДЫ СИНТЕЗА РОБАСТНЫХ И АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ»

#### 1. Синтез робастных систем во временной и частотных областях

Методы анализа и синтеза систем управления, рассмотренные выше, предполагали полную определенность параметров системы. Однако реальные физические объекты и условия, в которых они функционируют, не могут быть учтены абсолютно точно. Очень часто они подвергаются различным возмущениям и изменяются непредвиденным образом. Неопределенность характеристик объекта не позволяет обеспечить оптимальные свойства системы управления и может привести к потере устойчивости. Системы автоматического управления, обеспечивающие требуемое качество функционирования, несмотря на существенную неопределенность характеристик объекта управления, называются робастными.

Проектирование систем с робастными свойствами - одна из наиболее важных проблем теории управления. Решению задач оптимизации в условиях наличия внешних и внутренних неопределенностей уделяют большое внимание отечественные и зарубежные исследователи. Методы для решения задач робастного управления в частотной области основаны на оптимизации в пространствах Харди [1] - пространстве функционалов типа нормы  $H_2$  и  $H_\infty$ .

Ключевым моментом синтеза робастных регуляторов во временной области методами интервального анализа является решение матричных уравнений типа Лурье-Риккати, полученных на основе условий устойчивости неопределенных систем с различного рода функциями Ляпунова.

### Робастная линейно-квадратичная оптимизация

Исследуем чувствительность квадратичного функционала в системах с ограниченной неопределенностью параметров. Задача синтеза управлений, гарантирующих двухсторонние оценки функционала качества, решается на основе достаточных условий оптимальности непрерывных процессов, которые с использованием интервальных функций Ляпунова обобщены для систем с параметрическими возмущениями.

Методика синтеза робастного управления может быть основана на решении функционального уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана с интервальной функцией Ляпунова. Задача определения параметров регулятора с заданными свойствами в конечном итоге сводится к решению двух алгебраических уравнений Риккати с коэффициентами, которые соответствуют граничным значениям параметров исследуемой системы автоматического управления.

### Постановка задачи робастной линейно-квадратичной оптимизации

Рассматривается параметрически возмущенная система, модель которой представляется дифференциальным уравнением с вещественными интервальными коэффициентами

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u, \quad x(0) = x_0, \quad (10.1)$$

где  $\mathcal{A} = (\mathcal{a}_{i,j})_1^n = [\underline{A}; \bar{A}] \in IR^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} = (\mathcal{b}_{ij})_1^{n,m} = [\underline{B}; \bar{B}] \in IR^{n \times m}$  – интервальные матрицы;  $\underline{A} = (a_{i,j})_1^n$ ,  $\underline{B} = (b_{i,j})_1^{n,m}$  – их нижние границы;  $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})_1^n$ ,  $\bar{B} = (\bar{b}_{i,j})_1^{n,m}$  – верхние границы;  $x \in R^n, u \in R^m$  – векторы состояния и управления соответственно.

Под интервальной системой (10.1) понимается множество линейных систем с вещественными матричными коэффициентами  $A$  и  $B$ , принимающими произвольные значения из диапазонов  $[A; \bar{A}]$  и  $[B; \bar{B}]$ .

Цель управления состоит в минимизации функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0, \quad (10.2)$$

при динамических ограничениях (10.1). Значения функционала (10.2), найденные вдоль траекторий замкнутой системы, при всех  $A \in \mathcal{A}$  и  $B \in \mathcal{B}$  должны удовлетворять двухстороннему неравенству  $\underline{J} \leq J \leq \bar{J}$  или принадлежать заданному интервалу  $J \in [\underline{J}; \bar{J}]$ .

### Синтез робастного управления

Для решения задачи динамической оптимизации (10.1), (10.2) воспользуемся достаточным условием оптимальности непрерывных процессов. В соответствии с этим условием для оптимальности допустимого процесса  $\{x^*(t), u^*(t)\}$  достаточно существование функций  $v(t, x)$ , обладающей следующими свойствами:

- 1) функция  $v(t, x)$  - допускает бесконечно малый высший предел;
- 2) функция  $v(t, x)$  - удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана  $\partial v / \partial t = \psi(t, \partial v / \partial x, x)$ .

При синтезе управлений, обеспечивающих устойчивость и заданный уровень качества систем с ограниченной неопределенностью параметров, могут использоваться два подхода, широко распространенные в интервальном анализе. Первый подход связан с рассмотрением интервальных математических объектов (матриц, функций, уравнений и т. д.) как множеств, состоящих из соответствующих «точечных» объектов (объектов с вещественными коэффициентами). При этом необходимые действия выполняются над точечными объектами с последующим объединением результатов.

Данный подход используется на первой стадии синтеза - этапе выделения множества стабилизирующих регуляторов. Вторая стадия синтеза — определение параметров робастного регулятора - связана с решением интервального матричного уравнения. На этой стадии подход, связанный с рассмотрением интервального объекта как множества точечных объектов, требует решения континуума алгебраических уравнений Риккати с вещественными коэффициентами. Для преодоления возникающих на этом пути трудностей задача нахождения поточечного или объединенного множества решений интервального уравнения трансформируется в задачу определения аппроксимирующего множества решений, которая в традиционных рамках интервального исчисления решается с помощью построения двухсторонних неравенств.

Обобщение достаточных условий оптимальности для систем с ограниченной неопределенностью параметров основано на замене функции Ляпунова  $v(x)$  ее естественным интервальным расширением  $\mathcal{V}(x) = [\underline{v}(x); \bar{v}(x)]$  - интервальной функцией Ляпунова. Обозначим  $\mu(x, t)$  воронку интегральных линий с вершиной в точке  $(x, t)$ , определяемую множеством отрезков  $x_{t,A}$  решений  $x(t, x_0, A, u(x))$  системы (10.1), которые соответствуют различным значениям параметров и удовлетворяют условию

$$\mu(x, t) = \{x_{t,A} \mid \mathcal{V}(x_{t,A}) \leq \mathcal{V}(x_0, A), \quad t_0 < t < T\}.$$

Введем скалярно-оптимизационную функцию  $R(x)$  множества  $\mu(x, t)$ , устанавливающую соответствие между множеством  $\mu(x, t)$  и точками числовой оси

$R_+^1$ :

$$R(x) = \sup \{ \mathcal{V}(x) \mid x_{t,A} \in \mu(x, t) \}.$$

Скалярно-оптимизационная функция  $R(x)$  определяет наибольшее значение производной  $\mathcal{V}(x)$  на ограниченном множестве интегральных воронок,

вдоль которых интервальная функция Ляпунова  $\mathcal{V}(x)$  убывает. Функция  $R(x)$  может рассматриваться как обобщение понятия производной положительно определенной функции для систем с интервальными коэффициентами.

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(t, x, u) = R(x) + x^T Qx + u^T Ru \quad (10.3)$$

и в качестве функции Ляпунова возьмем интервальную квадратичную форму

$$\mathcal{V}(x) = [\underline{v}(x); \bar{v}(x)] = x^T \mathcal{P}x = [x^T \underline{P}x; x^T \bar{P}x]. \quad (10.4)$$

Здесь  $\mathcal{V}(x)$  – естественное интервальное расширение вещественной квадратичной формы. Тогда функциональное уравнение Беллмана примет вид:

$$\min_u \{R(x) + x^T Qx + u^T Ru\} \stackrel{def}{=} \min_u \{\psi(t, x, u)\} = 0.$$

С учетом вида интервальной функции Ляпунова  $\mathcal{V}(x)$  (10.4) и скалярно-оптимизационной функции  $R(x)$  функция (10.3) равна

$$\begin{aligned} \psi(t, x, u) &= \sup \left\{ \left\langle \partial \mathcal{V}(x) / \partial x, (\bar{A}x + \bar{B}u) \right\rangle \mid x \in \mu(x, t) \right\} + x^T Qx + u^T Ru = \\ &= \sup \left\{ 2(\bar{P}x)^T (\bar{A}x + \bar{B}u) \mid x \in \mu(x, t) \right\} + x^T Qx + u^T Ru. \end{aligned}$$

Используя условие стационарности функции  $\psi(t, x, u)$  по  $u$   $\partial \psi(t, x, u) / \partial u \equiv 0$ , находим искомое управление:

$$\mathcal{U} = -R^{-1} \bar{B}^T \bar{P}x \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \left\{ u \in R^m \mid u = -R^{-1} B^T Px, B \in \mathcal{B}, P \in \mathcal{P} \right\}. \quad (10.5)$$

Соотношение (10.5) выделяет множество регуляторов, обеспечивающих устойчивость интервальной подсистемы (10.1).

Чтобы управление (10.5) было оптимальным по отношению к функционалу (10.2), матрицу  $\bar{P}$  необходимо определить из условия тождественного равенства

нулю функции  $\psi(t, x, u)$ , которая при выбранной квадратичной форме  $\mathcal{V}(x)$  и синтезированном управлении определяется соотношением

$$\begin{aligned} \psi(t, x, u) &= \sup \left\{ 2 \left( P^0 \right)^T \left( Ax - BR^{-1} B^T P^0 \right) \mid x \in \mu(x, t) \right\} + x^T Q x + x^T P BR^{-1} B^T x = \\ &= \sup \left\{ x^T \left( A^T P^0 + P^0 A - P^0 B R^{-1} B^T P^0 + Q \right) x \mid x \in \mu(x, t) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы функция  $\psi(t, x, u)$  была тождественно равна нулю, матрица  $P^0$  должна являться решением интервального матричного уравнения

$$P^0 A + A^T P^0 - P^0 B R^{-1} B^T P^0 + Q = 0, \quad P^0 = P^0 R^{-1} B^T, \quad (10.6)$$

которое эквивалентно множеству матричных уравнений с вещественными коэффициентами

$$\left\{ PA + A^T P - PDP + Q = 0, \quad A \in \mathcal{A}; B \in \mathcal{B} \right\},$$

а под решением  $P^0$  интервального матричного уравнения (10.6) понимается следующее.

**Определение 10.1.1.** Объединенным множеством решений интервального матричного уравнения (10.6) называется множество

$$P^0 = \left\{ P \in R^{n \times n} \mid PA + A^T P - PDP + Q = 0, \quad A \in \mathcal{A}; B \in \mathcal{B} \right\}, \quad (10.7)$$

включающее решения «точечных» матричных уравнений Риккати

$$PA + A^T P - PDP + Q = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}; \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Из множества стабилизирующих регуляторов (10.5) целесообразно выбрать регулятор вида

$$u = -(K_0 \pm \delta K)x,$$

где  $K_0 = \text{med}K = (K + \bar{K})/2$  – медиана интервального матричного коэффициента обратной связи  $K^0 = R^{-1} B^T P^0$ ;  $\delta K \in \delta K^0$  – вариации параметров регулятора (

$\delta K^{\%} = [-0,5; +0,5] \text{wid} K^{\%}$  – вариации матричного коэффициента обратной связи;  $\text{wid} K^{\%} = \bar{K} - K$  – ширина интервальной матрицы  $K^{\%}$ ).

Данный регулятор следует трактовать как номинальный регулятор с допуском, при этом  $\delta K^{\%}$  – максимально допустимый разброс параметров номинального регулятора, при котором гарантируются устойчивость и качество замкнутой системы, а  $\delta K$  – технически реализуемый допуск на параметры регулятора.

В соответствии с рассмотренной методикой параметры робастного регулятора, определяются при решении интервального матричного уравнения Риккати. Процедура решения интервального матричного уравнения сводится к решению двух «граничных» уравнений Риккати с вещественными коэффициентами, которые соответствуют предельным значениям параметров управляемого объекта.

### Методы робастного управления в частотной области

При конструировании робастных регуляторов в частотной области исходная задача сводится к решению проблемы **Н-оптимизации**: минимизации  $H_2(\infty)$ -нормы передаточной функции от внешнего входа к выходу путем выбора регулятора из множества допустимых (стабилизирующих) регуляторов. Методы Н-теории управления существенно разработаны как в теоретическом, так и практическом плане. Полученные фундаментальные результаты позволили разработать теорию, близкую линейно-квадратичной гауссовой теории.

**Робастная стабилизация.** Пусть объект управления задан в операторном виде

$$y(s) = G(s)u(s) + w(s), \quad (10.18)$$

где  $w(s)$  – вектор неконтролируемых возмущений, или динамическая неопределенность, причем  $\|w(s)\|_{\infty} \leq C_w < \infty$ ;  $y(s)$  – вектор состояний;  $u(s)$  –

вектор управления;  $s$  – переменная преобразования Лапласа;  $G(s) – n \times n –$   
 матрица передаточных функций  $g_{i,j}(s), i, j = \overline{1, n};$   
 $w(s), u(s), y(s) \in R^n; \|w(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} |w(j\omega)|$  – норма функции  $w(s)$  в  
 пространстве Харди  $H_{\infty}$ .

Пусть передаточная матрица системы известна неточно и представляется в виде

$$G(s) = G_0(s) + \Delta(s), \quad (10.19)$$

где  $G_0(s)$  – передаточная функция некоторой «опорной» системы, известная точно, а  $\Delta(s)$  характеризует внутреннюю неопределенность модели системы.

Решение задачи робастной стабилизации в системе (10.18) с неструктурированными неопределенностями формулируется в следующем утверждении.

**Утверждение 10.1.1.** Регулятор  $K = K(s) \in RL_{\infty}$  стабилизирует любой объект с матричной передаточной функцией  $G(s)$  (10.19) с неопределенностью, характеризуемой множеством  $D_{\varepsilon}$ :

$$\Delta(s) \in D_{\varepsilon}^{\Delta} = \left\{ \Delta: \|\Delta(s)\|_{\infty} \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \right\}, \quad \eta(G(s)) = \eta(\Delta(s)) \quad (10.20)$$

и является  $D_{\varepsilon}$  – робастным стабилизатором, если и только если:

- 1)  $K(s)$  стабилизирует опорный объект  $G_0(s)$ ;
- 2) Величина  $\|G(s)\|_{\infty} < \varepsilon^{-1}$ ,

где  $\varepsilon$  – заданный уровень неопределенности;  $\eta(G)$  – количество неустойчивых полюсов матрицы  $G \in RL_{\infty}$ ,  $RL_{\infty}$  – пространство Лебега правильных функций, не имеющих полюсов на мнимой оси.

$D_{\varepsilon}$  – робастный стабилизатор задается соотношениями:

$$K(s) = (Y_{22} - M_{22}Q)(X_{22} - N_{22}Q)^{-1} = (\mathcal{Y}_{22}^0 - Q\mathcal{M}_{22}^0)(\mathcal{X}_{22}^0 - Q\mathcal{N}_{22}^0), \quad (10.21)$$

где  $M_{22}, N_{22}, \mathcal{M}_{22}^0, \mathcal{N}_{22}^0, X_{22}, \mathcal{X}_{22}^0, Y_{22}, \mathcal{Y}_{22}^0$  – результат взаимно-простой факторизации матрицы опорного объекта;  $Q \in RL^\infty$  – произвольная матричная функция.

Вопрос о существовании непустого множества робастных стабилизаторов (10.21) (как должны соотноситься номинальный объект и  $s$  – возмущения, чтобы существовали робастные регуляторы) решается следующим образом.

**Утверждение 10.1.2.** Множество робастных на классе  $D_\varepsilon$  стабилизаторов не пусто, если и только если:

$$\inf_{Q \in RL^\infty} \|T_1 - T_2QT_3\| < \varepsilon^{-1},$$

$$\text{где } T_1 = P_{11}^\Delta + P_{12}^\Delta Y_{22} M_{22} P_{21}^\Delta, \quad T_2 = P_{12}^\Delta M_{22}, \quad T_3 = \mathcal{M}_{22}^0 P_{21}^\Delta.$$

**Робастная оптимизация.** Пусть описание системы задано моделью пространства состояния

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad (10.22, \text{ а})$$

$$z = Cx + Du, \quad (10.22, \text{ б})$$

где  $x$  – вектор состояния;  $w$  – вектор возмущений;  $u$  – вектор управлений;  $z$  – вектор полного выхода;  $A, B_1, B_2, C, D$  – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Будем считать, что в (10.22, б) матрицы  $C$  и  $D$  имеют вид:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда выходной вектор  $z = \begin{bmatrix} C_1 x \\ D_1 u \end{bmatrix}$  формируется из двух компонент:

$z_x = C_1 x$  – интерпретируемой как характеристика точности и  $z_u = D_1 u$  – как

характеристика затрат на управление, так что  $|z|^2 = |z_x|^2 + |D_1 u|^2$ . Полагая  $D_1 = \varepsilon E$  ( $E$  – единичная матрица), получим  $|z|^2 = x^T C_1^T C_1 x + \varepsilon^2 |u|^2$ , где  $\varepsilon$  – именуется штрафом за управление.

При полных наблюдениях (все компоненты вектора  $x$  доступны для измерения) оптимальная обратная связь становится статической, т.е. оператор  $K(s) = K$ :

$$U(s) = -K(s)X(s). \quad (10.23)$$

Передаточная функция «возмущение-выход»  $P_{wz}(s)$  в зависимости от передаточной функции обратной связи  $K(s)$  имеет вид

$$P_{wz}(s) = \left[ E + (sE - A)^{-1} B_2 K(s) \right]^{-1} (sE - A)^{-1} B_1.$$

**Синтез  $H_2$ - оптимальной обратной связи**, обеспечивающей наименьшее значение  $H_2$ -нормы передаточной функции  $P_{wz}(s)$ :

$$\|P_{wz}(s)\|_2 = \left[ \frac{1}{2} \int_0^\infty \text{tr} \{ P_{wz}^T(-i\omega) P_{wz}(i\omega) \} d\omega \right].$$

$H_2$  – норма характеризует подавление импульсных или белошумных возмущений.

Оптимальная обратная связь (10.23), найденная из условия минимизации функционала качества  $J_2(\varepsilon) = K(s) \left\| P_{wz}(s) \right\|_2$  имеет вид

$$K = \frac{1}{\varepsilon} B_2^T X_2(\varepsilon). \quad (10.24)$$

где  $X_2(\varepsilon)$  – неотрицательное определенное решение матричного квадратичного уравнения

$$XA + A^T X - \frac{1}{\varepsilon^2} XB_2 B_2^T X + C_1^T C_1 = 0,$$

а значение функционала качества

$$J_2(\varepsilon) = \left[ \text{tr} \left\{ B_2^T X_2(\varepsilon) B_1 \right\}^{1/2} \right].$$

**Синтез  $H_\infty$  – оптимальной обратной связи**, обеспечивающей наименьшее значение  $H_\infty$  – нормы передаточной функции  $P_{wz}(s)$ , определенной равенством

$$\|P_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max} \{P_{wz}(i\omega)\},$$

где  $\sigma_{\max} \{P_{wz}(i\omega)\}$  – наибольшее сингулярное число матрицы;

$P_{wz}(i\omega)$  –  $H_\infty$  – норма определяет подавление гармонических возмущений с произвольной частотой.

Оптимальную обратную связь (10.23) в этом случае находят из условия минимизации функционала качества

$$J_\infty(\varepsilon) = \inf_{K(s)} \|P_{wz}(s)\|_\infty$$

и она определяется выражением

$$K = \frac{1}{\varepsilon} B_2^T X_\infty(\varepsilon), \quad (10.25)$$

где  $X_\infty(\varepsilon)$  – неотрицательно определенное решение матричного квадратичного уравнения

$$XA + A^T X + X \left[ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - \frac{1}{\varepsilon^2} B_2 B_2^T \right] X + C_1^T C_1 = 0$$

с наименьшим возможным значением  $\gamma_\infty(\varepsilon)$ , для которого существует это решение, а матрица  $A = \frac{1}{\varepsilon} B_2 B_2^T X_\infty(\varepsilon)$  устойчива. Значение минимизируемого функционала равно найденному значению  $\gamma_\infty(\varepsilon)$ .

Условием существования оптимальных робастных регуляторов (10.24), (10.25) является стабилизируемость пары  $(A, B_2)$  и детектируемость пары  $(C_1^T, A)$  системы (10.22).

Для системы

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_1 w + B_2 u; \\ z = C_1 X + D_{12} u; \\ y = C_2 X + D_{21} u, \end{cases} \quad (10.26)$$

где  $z$  – выход системы,  $y$  – измеряемые координаты выхода ( $\dim y < \dim z$ ), оптимальный регулятор основного контура вида

$$u = -K_\infty \hat{X} \quad (10.27)$$

должен быть дополнен наблюдателем для получения оценок  $\hat{x}$  вектора  $x$  по измеряемым выходам  $y$ . Наблюдатель задается дифференциальным уравнением

$$\dot{\hat{X}} = A_\infty \hat{X} + z_\infty L_\infty y. \quad (10.28)$$

Коэффициент  $K_\infty$  основного контура и матрицы  $A_\infty, L_\infty, z_\infty$  наблюдателя находят по следующему алгоритму.

1. Вычисление матриц:

$$R_1 = B_1 B_1^T, R_2 = B_2 B_2^T, Q = C_1^T C_1.$$

2. Вычисление решения  $\bar{P} > 0$  уравнения

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A - \bar{P} R_2 \bar{P} + Q = 0.$$

3. Вычисление матрицы:

$$\bar{A} = A - R_2 \bar{P}.$$

4. Определение решения  $\bar{Y}_1$  уравнения

$$\bar{A}\bar{Y} + \bar{Y}\bar{A} + E = 0.$$

5. Вычисление величины  $\varepsilon_1$  по соотношению

$$\bar{\varepsilon}_1^{-1} = 4\|R_1\|\|\bar{X}\|\|\bar{y}\|(1 + \|R_2\|\|\bar{X}\|\|\bar{y}\|),$$

где  $\bar{X} = \bar{P}$ ,  $\bar{y} = \bar{Y}_1$ ,  $\|\cdot\|$  – спектральная норма матрицы.

6. Определение решения  $X_1 > 0$  уравнения

$$A^T X + XA + X[\varepsilon_1^* R_1 - R_2]X + Q = 0, \quad \varepsilon_1^* < \varepsilon_1.$$

7. Задание равенств  $A = A^T$ ,  $R_1 = C_1^T C_1$ ,  $R_2 = C_2^T C_2$ ,  $Q = B_1 B_1^T$  и переход к п. 2– 6 вычислений, обозначив результат п.5 переменной  $\bar{\varepsilon}$ , а п.6 – переменной  $X_2$ .

8. Вычисление наибольшего собственного числа матрицы  $X_1 X_2$ , обозначение его  $\bar{\gamma}^2$ .

$$9. \text{ Вычисление } \gamma = \max \left\{ (\varepsilon_1^*)^{-1/2}, (\varepsilon_2^*)^{-1/2}, \bar{\gamma} \right\}.$$

10. Вычисление  $K_\infty = B_2^T X_1$  – параметров регулятора основного контура,  $L_\infty = X_2 C_2^T$  – регулятора наблюдателя,

$$A_\infty = A + \gamma^2 B_1 B_1^T X_1 - B_2 K_\infty - Z_\infty L_\infty C_2,$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^2 X_2 X_1^{-1})^{-1}.$$

Условиями существования робастного оптимального регулятора является стабилизируемость пар матриц  $(A, B_1)$ ,  $(A, B_2)$ ,  $(A^T, C_1^T)$ ,  $(A^T, C_2^T)$  и вид матриц

$$D_{12}^T \{C_1 D_{12}\} = \{0E\}, \quad D_{21} \{B_1^T D_{21}^T\} = \{0E\}.$$

В замкнутой системе гарантируется качество процесса управления не хуже, чем  $J_\infty < \gamma$ .

Методы  $H_2$  и  $H_\infty$  – оптимального управления обеспечивают робастную устойчивость по отношению к внешним возмущениям, параметрическим возмущениям объекта управления, неструктурированным шумам измерений, неконтролируемой динамике при реальном действии каждого из перечисленных возмущений.

### 1. Идентификация линейных по параметрам статических и динамических объектов и систем

Оценка параметров моделей объектов управления по наблюдениям за их функционированием называется параметрической идентификацией. Идентификация выполняется для классов математических моделей объектов, критериев адекватности моделей объектов и алгоритмов вычисления оценок параметров.

#### Основные классы моделей идентифицируемых объектов управления

Рассмотрим следующие классы моделей:

##### 1) Статические модели в виде алгебраических соотношений

$$y_t = a^T x_t + \xi, \quad (10.29)$$

где  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in R^n$ ;  $x_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm})^T \in R^n$  – векторы параметров входа и выхода объекта.

##### 2) Динамические непрерывные модели «вход-выход»

$$a_n(p)y(t) = b_m(p)u(t) + \xi(t), \quad (10.30)$$

где  $a_n(p), b_m(p)$  – полиномы  $n$ -го и  $m$ -го порядков от оператора дифференцирования  $p \stackrel{\Delta}{=} d/dt$ ;  $u(t) \in R^1$  и  $y(t) \in R^1$  – входной и выходной сигналы объекта.

##### 3) Динамические непрерывные модели, представленные интегралом свертки:

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) u(t - \tau) d\tau + \xi(t), \quad (10.31)$$

где  $w(t)$  – импульсная переходная функция объекта;  $u(t), y(t) \in R^1$  – входной и выходной сигналы объекта.

#### 4) Динамические дискретные модели в форме «вход-выход»

$$a_n(\nabla) y_t = b_m(\nabla) u_t + \xi_t, \quad (10.32)$$

где  $a_n(\nabla)$  и  $b_m(\nabla)$  – полиномы  $n$ -го и  $m$ -го порядков от оператора сдвига по времени назад  $\nabla$ ;  $u_t \in R^1$ ,  $y_t \in R^1$  – входной и выходной сигналы объекта.

Случайные помехи в моделях (10.29) – (10.32) имеют следующие статистические свойства  $M[\xi_t] = 0$ ,  $D[\xi_t] = M[\xi_t^2] = \sigma_\xi^2$ .

### Идентификация статических и дискретных динамических моделей

Для оценивания параметров (10.29) рассмотрим  $N$  измерений входных и выходных сигналов. В результате можно записать

$$Y = Xa + \xi,$$

где  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  – вектор  $N$  измерений выходного сигнала;  $X \in R^{N \times n}$  – матрица входных воздействий;  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  – вектор шумов.

Оценки параметров  $\hat{a}$  минимизируют функционал невязок:

$$J = (Y - Xa)^T (Y - Xa) / 2.$$

Из необходимого условия:  $\partial J / \partial a = X^T (Y - X\hat{a}) = 0$  следует

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (10.33, a)$$

где  $\hat{a}$  – оценка метода наименьших квадратов (МНК) в форме

$$\hat{a} = \hat{a}_N = \left( \sum_{l=1}^N x_l x_l^T \right)^{-1} \sum_{l=1}^N x_l y_l. \quad (10.33, б)$$

Здесь  $x_t$  – вектор измерения выходных сигналов объекта в  $t$ –й момент времени. Алгоритму МНК (10.33, б) можно придать рекуррентный вид:

$$a_{t+1} = a_t + \Delta_{t+1}.$$

Введем следующие обозначения для квадратных ( $n \times n$ ) матриц:

$$\tilde{A}_{t+1} = \left[ \sum_{l=1}^{t+1} x_l x_l^T \right]^{-1}, \quad \tilde{A}_t = \left[ \sum_{l=1}^t x_l x_l^T \right]^{-1}.$$

Принимая во внимание (10.33, б), можно записать два равенства:

$$\tilde{A}_{t+1}^{-1} a_{t+1} = \sum_{l=1}^{t+1} x_l y_l, \quad \tilde{A}_t^{-1} a_t = \sum_{l=1}^t x_l y_l,$$

из которых следует  $\tilde{A}_{t+1}^{-1} a_{t+1} = \tilde{A}_t^{-1} a_t + x_{t+1} y_{t+1}$ , но так как  $\tilde{A}_t^{-1} = \tilde{A}_{t+1}^{-1} - x_{t+1} x_{t+1}^T$ , то

$$\tilde{A}_{t+1}^{-1} a_{t+1} = \left( \tilde{A}_{t+1}^{-1} - x_{t+1} x_{t+1}^T \right) a_t + x_{t+1} y_{t+1}.$$

В результате процедура (10.33, б) примет вид:

$$a_{t+1} = a_t + \tilde{A}_{t+1} x_{t+1} \left( y_{t+1} - x_{t+1}^T a_t \right), \quad (10.34)$$

где матрица  $\tilde{A}_{t+1}$  вычисляется с помощью леммы об обращении матриц:

$$\tilde{A}_{t+1} = \tilde{A}_t - \left( \tilde{A}_t x_{t+1} x_{t+1}^T \tilde{A}_t x_{t+1} \right) \left( 1 + x_{t+1}^T \tilde{A}_t x_{t+1} \right)^{-1}.$$

Рассмотрим алгоритм идентификации параметров (10.32) для нескольких вариантов задания полиномов  $a_n(\nabla)$  и  $b_m(\nabla)$ . Пусть  $a_n(\nabla) = 1 - \sum_{l=1}^n a_l \nabla^l$  и

$b_m(\nabla) = 0$ , причем корни полинома  $a_n(\nabla)$  лежат в единичном круге. В этом случае модель (10.32) имеет вид:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_n y_{t-n} + \xi_t \quad (10.35)$$

и называется моделью авторегрессии. Запишем ее в векторной форме:

$$y_t = a^T x_t + \xi_t,$$

где  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^n$ ,  $x_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n})^T$ , которая совпадает с моделью (10.29).

Оценку вектора параметров  $a$  на основе  $N$  измерений получим путем минимизации функционала  $J = (Y - Xa)^T (Y - Xa) / 2$ , где  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$  – вектор выходных сигналов объекта;  $X \in R^{N \times n}$  – матрица со строками  $x_i, i = \overline{1, N}$ . Используя обозначения, введенные в (10.34), алгоритм оценивания параметров модели (10.35) запишем в виде

$$a_{t+1} = a_t + K_{t+1} (y_{t+1} - x_{t+1}^T a_t), \quad a_0 = 0;$$

$$K_{t+1} = \tilde{A}_t x_{t+1} / (1 + x_{t+1}^T \tilde{A}_t x_{t+1});$$

$$\tilde{A}_{t+1} = \tilde{A}_t - K_{t+1} x_{t+1}^T \tilde{A}_t, \quad \tilde{A}_0 = \alpha E, \quad \alpha \gg 1.$$

Если  $a_n(\nabla) = 1$ ,  $b_m(\nabla) = \sum_{l=1}^m b_l \nabla^l$ , то модель (10.31) имеет вид:

$$y_t = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + \dots + b_m u_{t-m} + \xi_t \quad (10.36)$$

и называется моделью авторегрессии со скользящим средним

$$y_t = a^T z_t + \xi_t, \quad (10.37)$$

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)^T$ ,  $z_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-n}, u_t, \dots, u_{t-m})^T$ , причем последние векторы – вектор параметров и вектор последовательных измерений выходных и входных сигналов. Оценки МНК для (10.37) имеют вид

$$a_{t+1} = a_t + K_{t+1} \left( y_{t+1} - z_{t+1}^T a_t \right), \quad (10.38)$$

$$K_{t+1} = \tilde{A}_t z_{t+1} / \left( 1 + z_{t+1}^T \tilde{A}_t z_{t+1} \right), \quad (10.39)$$

$$\tilde{A}_{t+1} = \tilde{A}_t - K_{t+1} z_{t+1}^T \tilde{A}_t.$$

Если в (10.37) шум  $\xi_t$  не белый, то оценки не являются несмещенными. Для устранения смещения шум  $\xi_t$  можно представить как процесс авторегрессии

$$\xi_t = \sum_{l=1}^n c_l \xi_{t-l} + e_t,$$

где  $e_t$  – белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_e^2$ ;  $c_s(\nabla)$  – полином  $s$ -го порядка от оператора сдвига. В результате модель (10.37) можно записать в виде

$$y_t = b_m(\nabla) u_t + \xi_t, \quad (10.40)$$

$$\xi_t = c_s(\nabla) \xi_t + e_t. \quad (10.41)$$

Из (10.41) следует, что

$$e_t = [1 - c_s(\nabla)] \xi_t,$$

где  $[1 - c_s(\nabla)]$  – передаточная функция отбеливающего фильтра для  $\xi_t$ . Действуя оператором  $[1 - c_s(\nabla)]$  на (10.40), получим модель авторегрессии со скользящим средним

$$y_t = c_s(\nabla) y_t + [1 - c_s(\nabla)] b_m(\nabla) u_t + e_t. \quad (10.42)$$

Обозначив  $[1 - c_s(\nabla)] b_m(\nabla) = \sum_{l=1}^{\Delta s+m+1} \alpha_l \nabla^l$ , преобразуем модель (10.42) к

следующему виду:

$$y_t = \sum_{l=1}^s c_l y_{t-l} + \sum_{l=1}^{s+m+1} \alpha_l u_{t-l} + e_t.$$

Последнее равенство можно переписать в эквивалентной векторной форме:

$$y_t = a^T z_t + e_t. \quad (10.43)$$

Так как шум в (10.43) белый, то для получения несмещенных оценок параметра  $\hat{a}$  можно использовать соотношения (10.38), (10.39).

### Идентификация непрерывных моделей

Рассмотрим алгоритм идентификации параметров линейной модели объекта управления. Перейдем от операторной формы записи модели объекта в эквивалентной дифференциальной форме типа «вход-выход»:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y - b_{n-1}u^{(n-1)} - \dots - b_0u = 0.$$

Выберем настраиваемую в процессе идентификации модель объекта в виде:

$$\varepsilon(t) = y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_0y - \beta_{n-1}u^{(n-1)} - \dots - \beta_0u,$$

где  $\alpha_i, \beta_j, i = \overline{1, n}; j = \overline{0, n-1}$  – параметры, минимизирующие критерий

$J = J(\alpha, \beta) = \varepsilon^2(t)/2$  изменением  $\alpha_i, \beta_j$ , согласно градиентным законам настройки

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -k \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_i} = -k\varepsilon(t)y^{(i)}, \quad \frac{d\beta_j}{dt} = -k \frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \beta_j} = -k\varepsilon(t)u^{(j)}. \quad (10.44)$$

Такие градиентные законы настройки параметров обеспечивают сходимость по параметрам:  $\alpha_i \hat{=} \alpha_i^* \quad \beta_j \hat{=} \beta_j^*$ .

Если выбрать квадратичную по параметрам функцию Ляпунова в виде

$$V = V(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [(\alpha_i - a_i)^2 + (\beta_i - b_i)^2]$$

и вычислить ее полную производную по  $t$  в силу уравнений (10.44), то можно получить

$$\dot{V} = \sum_{i=0}^{n-1} [(\alpha_i - a_i) \frac{d\alpha_i}{dt} - (\beta_i - b_i) \frac{d\beta_i}{dt}] = ke \sum_{i=0}^{n-1} [(\alpha_i - a_i)y^{(i)} - (\beta_i - b_i)u^{(i)}] = -k\varepsilon^2.$$

Знакоотрицательность  $V(\alpha, \beta)$  обеспечивает сходимость по параметрам.

### Алгоритм идентификации импульсной переходной функции

В силу уравнения (10.33) взаимная корреляционная функция «вход-выход» имеет вид:

$$r_{uy}(\tau) = M[u(t-\tau)y(t)] = \int_0^{\infty} M[u(t-\tau)u(t-\theta)]W(\theta)d\theta + M[\xi(t)u(t-\theta)], \quad (10.45)$$

где  $\xi(t)$  и  $u(t)$  удовлетворяют следующему соотношению для математических ожиданий:

$$M[\xi(t)u(t-\theta)] = M[u(t-\theta)]M[\xi_t] = 0.$$

Обозначив автокорреляционную функцию входного сигнала  $r_{uu}(\tau) = M[u(t-\tau)u(t-\theta)]$ , запишем (10.45) в форме уравнения Винера-Хопфа:

$$r_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} r_{uu}(\tau-\theta)W(\theta)d\theta. \quad (10.46)$$

Если входной сигнал объекта – белый шум  $r_{uu}(t-\tau) = \sigma_u^2 \delta(t-\tau)$ , где  $\sigma_u^2 = M[u^2(t)]$ ,  $\delta(t-\tau)$  –  $\delta$ -функция Дирака, то  $r_{uy}(\tau) = \sigma_u^2 W(\tau)$ . Для устойчивого объекта  $W(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , поэтому без внесения значительных погрешностей бесконечный верхний предел в (10.31) можно заменить конечным  $T$ . Производя измерения выходного и входного сигналов объекта с интервалом  $\Delta$ , запишем следующие оценки корреляционных функций:

$$r_{uu}(k\Delta) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u(l\Delta)u((l+k)\Delta),$$

$$r_{uy}(k\Delta) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} u(l\Delta)y((l+k)\Delta),$$

где  $N = T/\Delta$  – число интервалов измерений.

Значения  $W(\tau)$  определим в моменты  $\tau = k\Delta$ . Вычислив интеграл в (10.43) по методу левых прямоугольников, получим

$$r_{uy}(k\Delta) = \Delta \sum_{l=1}^N W(i\Delta) r_{uu}((k-i)\Delta).$$

Введя обозначения векторов

$$r = (r_{uy}(0), r_{uy}(\Delta), \dots, r_{uy}(N\Delta))^T,$$

$$W = (W(0), W(\Delta), \dots, W(N\Delta))^T$$

и матрицы

$$R = \begin{bmatrix} r_{uu}(0) & r_{uu}(-\Delta) & \dots & r_{uu}(-N\Delta) \\ r_{uu}(\Delta) & r_{uu}(0) & \dots & r_{uu}(-(N-1)\Delta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{uu}(N\Delta) & r_{uu}((N-1)\Delta) & \dots & r_{uu}(0) \end{bmatrix},$$

запишем уравнение (10.43) в виде

$$r = \Delta RW. \quad (10.47)$$

Вектор оценок  $\hat{W} = \Delta^{-1}R^{-1}r$ , и в силу симметричности  $R$  для решения (10.47) можно использовать факторизацию (алгоритм Холесского).

## 2. Синтез адаптивных систем методом рекуррентных неравенств целевых

Рассмотрим скалярный динамический дискретный объект управления, описываемый уравнениями «вход-выход»

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_r y_{t-r} = b_1 u_{t-1} + \dots + b_r u_{t-r} + v_t, \quad y_t, u_t \in R^1, \quad (10.48)$$

где  $b_1 \neq 0$ , т.е. запаздывание в управлении минимально:  $s = 1$ .

Возмещение  $v_t$  в (10.48) – ограничено по модулю  $|v_t| \leq 1$ , а в остальном возмущение является произвольным. Управления  $u_t$  допустимые, т.е. представлены вектором:  $u_{t-1}, \dots, u_0, y_{t-1}, \dots, y_0$  и  $t$ . Цель управления состоит в минимизации функционала:

$$J(u_0^\infty) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{v_0^\infty \in V} |y_t|.$$

На первом этапе решения задачи рассмотрим синтез регулятора основного контура при условии, что коэффициенты  $a_j, b_j$  уравнения объекта известны. Тогда решение задачи синтеза регулятора основного контура очевидно: целевое условие регулятора основного контура (РОК) состоит в том, чтобы оптимальное управление следовало из требования, при котором уравнение (10.48) приняло вид  $y_t = v_t$ , т.е. оптимальным является регулятор:

$$u_t = b_1^{-1} [-b_2 u_{t-2} - \dots - b_r u_{t-r} + a_1 y_{t-1} + \dots + a_r y_{t-r}]. \quad (10.49)$$

Таким образом, при полной информации регулятор определен, и можно перейти к задаче адаптивного управления.

### Постановка задачи

Определим понятие варианта для данной задачи. Поскольку регулятор основного контура определен с точностью до неизвестных параметров, то множество  $\{\xi\} = \{\xi^n, \xi^b\}$ , т.е. вариант определен множеством неизвестных параметров  $\{\xi^n\} = [a_j, b_i]$  и возмущением  $v_t = v_t(\xi^b)$ . Пусть  $\{\xi\}$  – множество всех  $\xi$ , таких, что  $\xi^n$  принимает любые значения, а  $v_t = v_t(\xi^b): |v_t| \leq c$ . Целевое условие регулятора контура адаптации (РКА):

$$|y_{t+1}| \leq c_y, \quad (10.50)$$

которое обеспечивается подстройкой параметров, причем будем считать, что  $c_y > c$ . В противном случае не существует адаптивного управления, и вообще никакого управления, обеспечивающего целевое условие.

Вид оптимального управления (10.49) подсказывает выбор следующего сенсора  $\sigma_t$ , определяющего структуру управления так, что

$$\begin{aligned} u_t &= (\sigma_t, \tau^0), \quad \sigma_t = \text{col}(u_{t-1}, \dots, u_{t-r-1}, y_t, \dots, y_{t-r-1}), \\ \tau^0 &= \text{col}(-b_2, \dots, -b_r, a_1, \dots, a_r) \end{aligned} \quad (10.51)$$

Далее можно перейти к рассмотрению синтеза регулятора контура адаптации.

### Синтез адаптивного регулятора

Адаптивное управление будем искать в виде (10.51), заменяя неизвестный вектор  $\tau^0$  вектором подстраиваемых параметров  $\tau_t$ , изменяемых с целью выполнения на каждом шаге управления целевого условия (10.50).

Перейдем к построению регулятора целевого назначения. Рассмотрим прогнозируемое значение

$$y_{t+1} = b_1 \left[ u_t - (\sigma_t, \tau^0) \right] + v_{t+1}, \quad (10.52)$$

представляющее собой уравнение (10.47), записанное в новых обозначениях. Подставим (10.52) в целевое условие типа неравенств (10.50):

$$\left| b_1 \left[ (\sigma_t, \tau) - (\sigma_t, \tau^0) \right] + v_{t+1} \right| \leq c_y. \quad (10.53)$$

Соотношение (10.53) представляет собой линейное алгебраическое неравенство относительно подстраиваемых параметров  $\tau$ . Алгоритм его решения должен быть построен так, чтобы существовал такой момент  $t_* = t(\xi)$ , при котором для всех  $t > t_*$  все неравенства (10.53) были выполнены. Это означает адаптивность системы в некотором классе. Искомый алгоритм имеет вид ( $|b_1| < c_b$ )

:

$$\tau_{t+1} = \begin{cases} \tau_t, & [y_{t+1}] \leq c_y, \\ \tau_t - (1 - \rho) c_b^{-1} \text{sign} b_1 \sigma_t \|\sigma_t\|^2, & [y_{t+1}] > c_y \end{cases} \quad (10.54)$$

и совпадает с известным алгоритмом «Полоска». Число ошибок алгоритма (т.е. число моментов нарушения целевого условия) можно оценить соотношением

$$r^0 \leq \left\{ \left| \tau_0 - \tau^0 \right| c_b (c_y c)^{-1} c_\sigma \right\}^2, \quad \rho = c c_y^{-1}. \quad (10.55)$$

где  $\tau_0$  и  $\tau^0$  – начальное и оптимальное значение параметров.

Регуляторы данного класса обеспечивают решение задачи функциональной идентификации, при которой целевые условия выполнены, а оценки параметров могут существенно отличаться от их реальных значений.

#### 4. Анализ грубости методами функционального анализа и развития методов синтеза адаптивных систем

##### Анализ грубости методами функционального анализа

Исследование грубости объектов или систем управления является одной из задач адаптивного управления. Исследование грубости актуально в связи с неадекватностью математических моделей, используемых при синтезе.

Проблема грубости исторически восходит к А.А. Андронову. Определенное распространение анализ грубости методами функционального анализа получили наряду с методами исследования интервальной устойчивости полиномов по Л.В. Харитонову, некорректности решений, интервальной устойчивости оптимальных систем, с проблемой синтеза регуляторов в пространстве Харди. Методы функционального анализа позволяют оценить допустимые изменения параметров объектов и систем управления в пространстве с нормой  $\|X_t\| = \max_{i=1, \dots, n} |X_t^i|$  в  $R^n$ , где нормы векторов и нормы операторов согласованы.

**Задача 1.** Пусть объект управления описывается параметрически возмущенными уравнениями:

$$X_{t+1} = HX_t + \Delta HX_t,$$

где  $\Delta H$  – матрица возмущений параметров.

Требуется получить оценки нормы для матрицы возмущений параметров в нормированном пространстве состояний. Оценка нормы вектора правой части строится на основе следующих соотношений:

$$\|X_{t+1}\| = \|HX_t + \Delta HX_t\| \leq \|H + \Delta H\| \|X_t\|,$$

связывающих нормы образов и прообразов линейных операторов, достаточных условий сходимости:  $\|H + \Delta H\| < 1$ , которые определяют ограничение на величину параметрического матричного возмущения так, что  $\|H + \Delta H\| < 1$ . Тогда ограничения на величину нормы параметрического возмущения матрицы объекта или системы примут следующий вид:

$$\|\Delta H\| < 1 - \|H\|, \quad \|H\| < 1.$$

**Задача 2.** Пусть система управления описывается разностными уравнениями

$$X_{t+1} = HX_t + FCX_t.$$

Требуется получить оценку на величину нормы вектора параметров обратной связи, при которой выполнены достаточные условия устойчивости в нормированном пространстве состояний.

Оценка нормы правой части имеет вид

$$\|X_{t+1}\| = \|HX_t + FCX_t\| \leq \|H + FC\| \|X_t\| \leq (\|H\| + \|F\| \|C\|) \|X_t\|,$$

а достаточные условия сходимости (сжатия)

$$\|H\| + \|F\| \|C\| < 1$$

определяют ограничения на параметры обратной связи в виде следующего неравенства:

$$\|C\| < (1 - \|H\|) / \|F\|, \quad \|H\| < 1.$$

**Задача 3.** Пусть система описывается уравнениями

$$X_{t+1} = (H + \Delta H)X_t + FCX_t.$$

Требуется сформулировать ограничение на допустимое возмущение по параметрам объекта управления в виде ограничений на норму матрицы возмущений.

Ограничение на норму матричного параметрического возмущения имеет вид

$$\|\Delta H\| < (1 - \|H\|) \|F\| \|C\|.$$

Последнее соотношение следует из оценки нормы возмущенного оператора замкнутой системы и достаточного условия устойчивости.

**Задача 4** (об оценках-ограничениях на собственные числа). Пусть система управления описывается уравнениями

$$X_{t+1} = (H + \Delta H) X_t + FCX_t.$$

Требуется сформулировать оценки на собственные числа матрицы объекта управления, исходя из достаточных условий устойчивости замкнутой системы управления.

Для получения необходимой оценки требуется рассмотреть достаточные условия рассматриваемой системы при условии приведения матрицы системы к форме Жордана. В результате можно установить следующее неравенство:

$$\|\Delta J\| < 1 - \|J\| - \|F\| \|C\| \|S\|,$$

ограничивающее норму приращения матрицы Жордана, где  $J$  и  $\Delta J$  – жорданова форма и ее приращения такие, что имеет место равенство  $H = SJS^{-1}$ , причем собственные числа матрицы объекта вещественные, т.е. принадлежат  $R^{-1}$ .

#### Анализ развития методов синтеза адаптивных систем

Развитие и применение теории адаптивного управления происходит эволюционным путем на основе совершенствования существующих систем, которые образуют основной контур управления. В связи с этим адаптивное управление строится на основе регуляторов основного контура (РОК) и регуляторов контура адаптации (РКА).

В настоящее время существует достаточно широкий арсенал методов синтеза основного контура управления, которые в сочетании с рассмотренными методами синтеза контура адаптации определяют системные варианты подходов к синтезу адаптивных систем. Для синтеза РОК можно использовать широко известные методы модального управления, локально оптимального управления, оптимального управления, которые являются преимущественно линейными. При этом задачей контура адаптации является идентификация параметров объекта управления в реальном времени. Для подстройки параметров - для синтеза РКА - могут использоваться различные методы, к числу которых относятся метод рекуррентных целевых неравенств, метод стохастической аппроксимации, метод скоростного градиента и др. На основе этого можно дать системную характеристику возможных типов адаптивных систем управления (табл. 10.1), характеризующую возможные варианты построения адаптивных систем.

Таблица 10.1

Контур адаптации	Основной контур			
	Модальные регуляторы	Локально-оптимальные регуляторы	Оптимальные регуляторы	Регуляторы, синтезируемые методами математического программирования
Метод рекуррентных целевых неравенств		РОК и РКА, функциональная идентификация		
Метод стохастической аппроксимации	РОК и РКА, сходимость по параметрам			
Метод скоростного градиента		РОК и РКА, устойчивость замкнутых систем		

В табл. 10.1 отмечены типы адаптивных систем, которые к настоящему времени разработаны на достаточно фундаментальной основе, поскольку для ряда вариантов алгоритмов адаптации получены условия функциональной или параметрической «идентифицируемости» объектов управления. Для разработки методов синтеза адаптивных регуляторов других типов необходимо использование

оригинальных подходов к решению проблемы синтеза, которые анализируются далее.

Необходимо остановиться на системной технологии доказательства сходимости итерационных процессов адаптации. Рассматривается алгоритмический аспект доказательства сходимости с акцентом на системность подхода к построению доказательства в следующей постановке. Пусть имеется совокупность итерационных (рекуррентных) процессов, соответствующих:

- 1) Процедурам численного решения детерминированных разностных уравнений или эволюционным уравнениям в дискретном времени.
- 2) Детерминированным процедурам численной оптимизации.
- 3) Стохастическим процедурам оптимизации (метод стохастической аппроксимации).
- 4) Стохастическим процедурам адаптивного управления.

Требуется сформулировать системную технологию доказательства сходимости перечисленных выше итерационных процессов, выделив варианты исследования сходимости и общие характерные черты, позволяющие расширить классы подходов к анализу сходимости. Другими словами, необходимо осуществить системный синтез возможных подходов к исследованию сходимости, дополняющих известные процедуры. Для решения задачи можно построить системную матрицу возможных вариантов исследования сходимости в пространстве задачи - методы анализа сходимости, которая имеет вид, приведенный в табл. 10.2, в которой указаны тип устойчивости или характер результата.

Таблица 10.2

Метод Задача	Функций Ляпунова	Стационарности производной	Рядов	Скалярных рекуррентных неравенств
Устойчивость разностных схем и эволюционных уравнений	Достаточные условия			
Устойчивость детерминирован- ных процедур оптимизации	Достаточные условия	Ограничения на параметры		
Устойчивость стохастических процедур оптимизации			Ограничения на параметры	
Устойчивость стохастических процедур адаптации				Ограничения на параметры

Для задачи 1 формулируются основные этапы получения результата: формирование уравнения стационарных состояний, введение функции Ляпунова типа нормы или квадратичной формы, вычисление первой разности функции Ляпунова, преобразование, приводящее к результату.

Для задачи 2, решаемой на основе «квазистационарности первой разности», требует введения первой разности, ее преобразования представлением оценки первой разности через производные, применения условия Липшица, для вывода условий существования минимизирующей последовательности функционалов.

Для задачи 3, состоящей в формулировке условий сходимости случайных величин в среднеквадратичном смысле и по вероятности, решение включает следующие этапы доказательства: формирование уравнения отклонения текущей переменной от истинного значения, вычисление второго момента, суммирование семейства разностей последующих и предыдущих значений случайных вспомогательных величин, применение условий сходимости полученного ряда, из которых следуют ограничения на параметры рекуррентной процедуры уточнения оценок.

Для задачи 4 (задачи синтеза процедуры оценки параметров адаптивной системы методом стохастической аппроксимации) решение находится из уравнений отклонений параметров от истинных значений, формируется стохастическая функция Ляпунова, которая имеет смысл второго центрального момента параметров. Преобразование функции Ляпунова выполняется «в силу»

уравнений подстройки параметров и динамики уравнений объекта. Использование условного математического ожидания ошибки по параметрам (стохастической функции Ляпунова) позволяет определить условия сходимости, которые формулируются на основе специальных условий (условий для мартингалов, условий типа Чжуна, Буркхольдера, Дермана, Сакса и др.).

Перечисленные подходы составляют базу системной технологии доказательства сходимости широкого класса итерационных процессов, позволяющей получать новые результаты в области теории сходимости на основе применения ранее не использованных подходов, которые определены системной матрицей. Используя рассмотренный набор вариантов построения адаптивных систем, можно синтезировать широкий класс регуляторов для достижения целей адаптивного управления.

## ЛЕКЦИЯ №5

### ТЕМА «СОВРЕМЕННЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

#### 1. Основные проблемы современной теории автоматического управления

В классической теории автоматического управления (ТАУ) задачи оптимизации и адаптации ставились в основном применительно к управлению «в малом». Это означает, что оптимальная программа изменения режимов технологического процесса, выраженная в задающих воздействиях регуляторов, считалась известной, определенной на стадии проектирования. Задача управления заключалась в выполнении этой программы, стабилизации программного движения. При этом допускались лишь малые отклонения от заданного движения, и переходные процессы «в малом» оптимизировались по тем или иным критериям.

В конце 50-х - начале 60-х гг. XX столетия появились работы Л.С. Понтрягина (принцип максимума), Р. Беллмана (динамическое программирование), Р. Калмана (оптимальная фильтрация, управляемость и наблюдаемость), которые заложили основы современной теории автоматического управления, общепринятого определения понятия которой пока не существует. Некоторым характерным признаком современной теории автоматического управления считают также описание процессов в пространстве состояний, развитие теории адаптивного управления, т. е. управления при неполной априорной информации.

Наиболее точно современную теорию автоматического управления можно отделить от классической ТАУ, учитывая требования научно-технического прогресса, современной и перспективной автоматизации.

Важнейшим из таких требований является оптимальное использование всех располагаемых ресурсов (энергетических, информационных, вычислительных) для достижения главной обобщенной конечной цели при соблюдении ограничений. Например, запуск или выход на новый режим работы машины, агрегата, станции с минимальными затратами, достижение заданной в 3-мерном пространстве навигационной точки в заданное время с заданным курсом при минимальном расходе топлива. В связи с этим, оптимизация «в большом», осуществляемая в реальном времени в процессе управления, становится центральной проблемой

современной теории автоматического управления. Эта фундаментальная проблема порождает ряд крупных проблем, задач и методов их решения. Прежде всего, указанная оптимизация требует полного использования имеющейся априорной информации в виде математической модели управляемого процесса или объекта. Использование таких моделей не только на стадии проектирования, но и в процессе функционирования систем, является одной из характерных черт современной теории автоматического управления.

Оптимальное управление возможно лишь при оптимальной обработке информации. Поэтому теория оптимального (и субоптимального) оценивания (фильтрации) динамических процессов является составной частью современной теории автоматического управления. Особо важной является параметрическая идентификация (оценивание параметров и характеристик по экспериментальным данным), выполняемая в реальном масштабе времени в эксплуатационных режимах ОУ.

Центральной частью современной теории автоматического управления является, собственно, теория оптимального или субоптимального управления «в большом» детерминированными или стохастическими нелинейными процессами. Подлинная оптимизация автоматического управления в условиях неполной априорной информации возможна только в процессе функционирования системы в текущей обстановке и возникшей ситуации. Следовательно, современная теория автоматического управления должна рассматривать адаптивное оптимальное (субоптимальное) управление «в большом». Кроме того, современная теория автоматического управления должна рассматривать методы резервирования и структурного обеспечения надежности (особенно принципы автоматической реконфигурации системы при отказах).

### **3. Адаптивная оптимальная САУ на базе самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией**

Функциональная схема такой САУ (рис. 9.1) содержит следующие элементы:

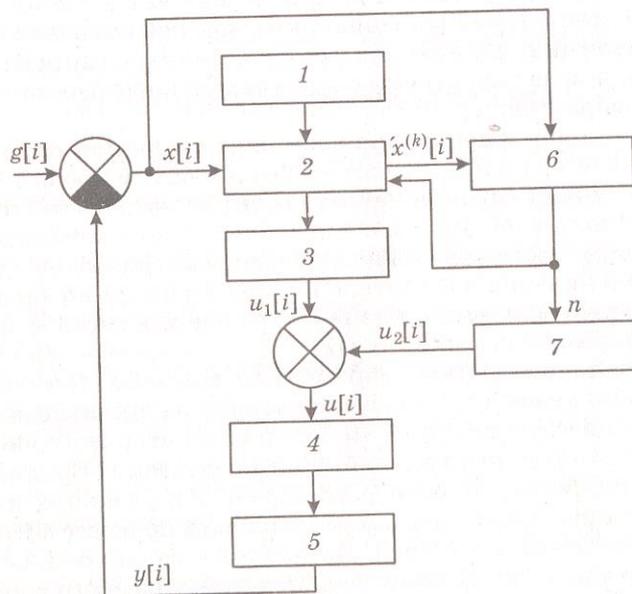


Рис. 9.1

- 1) блок памяти;
- 2) блок оценивания;
- 3,7) исполнительные блоки;
- 4) экстраполятор нулевого порядка (ЦАП);
- 5) обобщенный объект управления;
- 6) блок автоматического поиска порядка математической модели (ММ) объекта.

По принципу функционирования эта САУ относится к системам с дискретным временем циклического типа. Входной величиной самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией служит сигнал рассогласования  $x(t)$  между задающим воздействием  $g(t)$  и выходной величиной  $y(t)$  объекта. Этот сигнал измеряется на каждом шаге, т.е. при  $t = iT$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

В оперативной памяти 1 в табличном виде хранятся параметры, определенные на стадии проектирования: значения элементов матриц наблюдателей объекта с полиномиальной математической моделью различного порядка, оптимальные значения априорного времени экстраполяции и др.

В блоке оценивания 2 реализованы параллельно работающие рекуррентные циклические наблюдатели всех выбранных порядков  $n = 2, 3, \dots, n_m$ .

Полиномиальная математическая модель обобщенного регулируемого объекта эквивалентна цепочке последовательно соединенных интегрирующих звеньев, и блок 2 вырабатывает оценки векторов состояния этих цепочек для всех значений  $n$ . Соответственно каждый рекуррентный циклический наблюдатель строится по каскадной схеме, т. е. состоит из цепочки последовательно соединенных наблюдателей  $H_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) производных (рис. 9.2, а), причем последние реализованы на базе фильтра Калмана-Бьюси второго порядка (рис. 9.2, б), у которого

$$\hat{O}_1(s) = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{k_1 + k_2 s}{s^2 + k_2 s + k_1}, \quad \hat{O}_2(s) = \frac{\dot{x}_2}{x} = \frac{k_1 s}{s^2 + k_2 s + k_1}.$$

Помеха  $v(t)$  типа «белый шум» подавляется благодаря инерционности фильтра Калмана-Бьюси: первые оценки производных  $\dot{x}_1^{(k)}$  содержат «шум», а их вторые оценки  $\dot{x}_2^{(k)}$  – сглаженные, практически без «шума». Оценивание каждой последующей производной начинается после того, как завершится оцени-

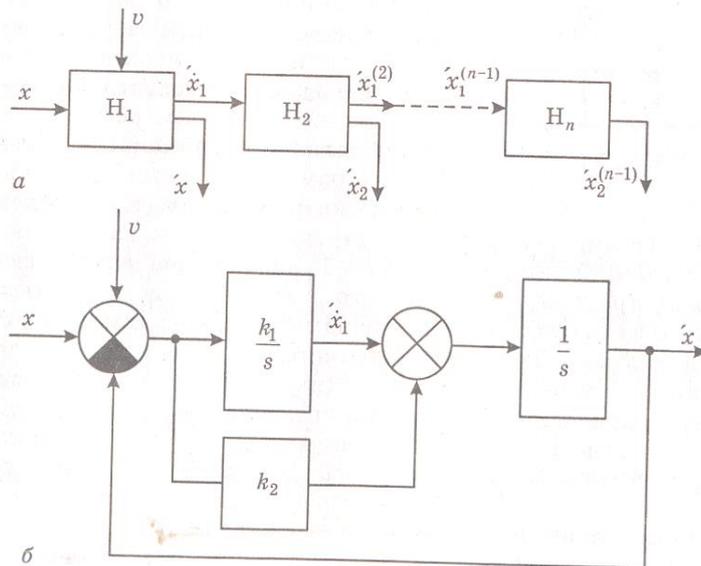


Рис. 9.2

вание предыдущей (рекуррентный алгоритм). Так, например, после того как  $\dot{x} \approx x$  и соответственно  $\dot{x}_2 \approx x$ , начинается оценивание  $\dot{x}_1^{(2)}$  и завершается при  $\dot{x}_2 = \dot{x}$ , в результате чего получается  $\dot{x}_1^{(2)} = \ddot{x}$  и т.д.

Для каждого фильтра Калмана-Бьюси коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  меняются во времени в соответствии с передаточной функцией так, чтобы на начальном этапе происходило оценивание наблюдаемой (входной) величины, а затем - оценивание ее первой производной по времени (рис. 9.3).

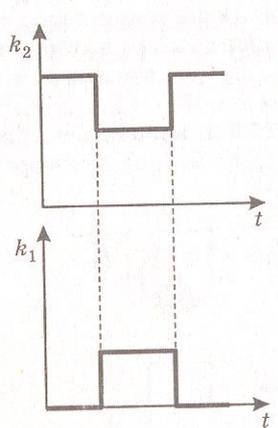


Рис. 9.3

В блок 6 посылаются оценки  $\{x, \dot{x}, \dots, x_2^{(n-1)}\}$  для всех  $n$ , измеренные практически в один и тот же момент времени  $t$  благодаря малой затрате времени на оценивание (на порядок меньше периода наиболее высокочастотной составляющей движения объекта регулирования) и значительной инерционности объекта. По векторам оценок в этом блоке выполняется экстраполяция (т. е. предсказание, прогнозирование изменения) сигнала рассогласования  $x_y(\tau)$  на скользящий интервал  $t \leq \tau \leq t + T_y$  для всех значений  $n$ , где  $T_y$  – время экстраполяции. Кроме того, в этот же блок поступают значения рассогласования  $x(\tau)$  и запоминаются на том же скользящем интервале. Далее осуществляется целочисленный поиск по  $n$  минимума усредненной нормы (например, квадрата) разности между фактическим и априорно предсказанным значением сигнала рассогласования. Это значение  $n$  считается оптимальным и по цепи местной ОС посылается в блок 2, а затем из этого блока в исполнительный блок 3. Кроме того, при этом происходит апостериорная оптимизация времени экстраполяции.

В исполнительном блоке 3 рассчитывается оптимальное управление  $u_1$  объектом на основе минимизации функционала обобщенной работы. В блоке 7 определяется дополнительное управление  $u_2$ , компенсирующее неопределенности объекта. Управляющее воздействие  $u = u_1 + u_2$  после

экстраполятора нулевого порядка имеет вид кусочно-постоянной функции на интервалах  $iT \leq t \leq (i+1)T$ , определяемой через рассогласование и оценки его производных. При этом могут быть реализованы астатизмы высокого порядка ( $\nu > 8$ ), которые считались недостижимыми в эпоху аналоговой техники. Обобщенный объект 5, кроме ОР, включает в себя усилители, приводы, измерительные преобразователи. На рис. 9.4 дана иллюстрация работы САУ и самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией для ОР второго порядка.

Итак, данная САУ впервые позволяет реализовать адаптивное управление при неизвестной априори структуре ОР благодаря высокому уровню структурной и параметрической адаптации, которая обеспечивается, прежде всего, за счет применения наблюдателей в виде фильтра Калмана-Бьюси, устройств экстраполяции и поиска порядка математической модели.

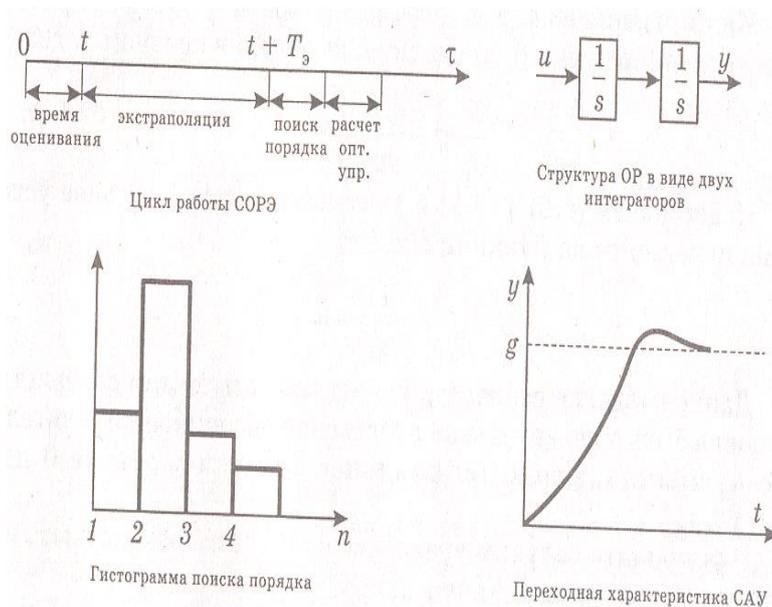


Рис. 9.4

Как было указано, в этой САУ для оптимизации используется функционал обобщенной работы - неклассический функционал с аддитивными затратами как на синтезируемое управление  $u$ , так и управление  $u^0$  в оптимальной системе:

$$J = S(x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} Q[x(t), t] dt + \int_{t_1}^{t_2} U[u(t), t] dt + \int_{t_1}^{t_2} U^*[u^0(t), t] dt.$$

ОУ задан уравнениями с линейно входящими управлениями:

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u, \quad t \in [t_1, t_2].$$

При аналитическом конструировании необходим синтез алгоритма оптимального управления  $u^0 = u^0(x, t)$  на стадии проектирования, что наталкивается на существенные трудности. Более прост поиск  $u^0(t)$  САУ с прогнозирующей моделью в процессе работы системы.

Уравнение Беллмана для данной задачи имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_u \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \cdot (f + \varphi u) + Q + U + U^* \right] = 0. \quad (9.1)$$

Минимизация по  $u$ , т.е. дифференцирование по  $u$  и приравнивание производной к 0, приводит к решению в неявном виде:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \cdot \varphi + \frac{\partial U}{\partial u} = 0. \quad (9.2)$$

Подставляя (9.2) в (9.1) и учитывая дополнительное условие, налагаемое на функции  $U$  и  $U^*$ :

$$U + U^* - \frac{\partial U^*}{\partial u^0} \cdot u \geq 0.$$

Данное условие означает, что левая часть этого неравенства должна быть положительно-определенной функцией относительно  $u$ , принимающей минимальное значение, равное 0 при  $u = u^0$ .

В результате получим уравнение в частных производных, называемое уравнением Ляпунова:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f = -Q. \quad (9.3)$$

Привлекая для решения этого уравнения метод характеристик, можно показать, что искомое решение строится на интегральных кривых,

удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям свободного движения объекта ( $u \equiv 0$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t), & (9.4) \\ \dot{p}(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^T & (9.5) \end{cases}$$

где  $p = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T$  – вектор частных производных функции Беллмана  $S$  по компонентам вектора состояния.

Уравнение (9.5) может быть также получено из (9.3) непосредственным дифференцированием по  $x$ : и изменением порядка дифференцирования.

Кроме того, при вычислении функции  $S(x, t)$  на свободной траектории ( $u \equiv 0$ ) из (9.3) вытекает уравнение

$$\dot{S}(t) = -Q(x, t). \quad (9.6)$$

Уравнения (9.4), (9.5) и (9.6) составляют основу алгоритмов оптимизации с прогнозирующей моделью. Суть этих алгоритмов сводится к тому, что на основе интегрирования этих уравнений строится решение уравнения (9.3) и тем самым решается оптимизационная задача. Упрощение состоит в том, что не требуется поиска структуры функции  $S(x, t)$  во всей области ее определения, а требуется лишь вычисление ее значений в некоторой окрестности текущего состояния,

достаточной для вычисления градиента  $\frac{\partial S}{\partial x}$ , который затем используется в (9.2)

для вычисления  $u^0(t)$ .

#### 4. Синергетические оптимальные САУ

Название «синергетика» произошло от греческого «синергос» - «вместе действующий» и обозначает общенаучное направление, изучающее совместные

действия нелинейных динамических систем различной природы. Базовые положения синергетической теории заключаются в следующем:

1. В синергетических системах в процессе самоорганизации происходит уменьшение числа степеней Свободы, т. е. управляемая декомпозиция фазового пространства, путем выделения лишь нескольких координат, к которым подстраиваются остальные. Именно эти так называемые макропеременные  $\psi_i(x_1, \dots, x_n)$  и определяют основные особенности динамики системы, открывая возможность построения упрощенных агрегированных моделей.

2. Следствием этого процесса самоорганизации является образование в фазовом пространстве так называемых аттракторов -инвариантных многообразий  $\psi_i = 0$ , к которым притягиваются траектории системы.

3. Каждый аттрактор имеет свою область притяжения в фазовом пространстве, отделенную границей от других областей. Причем направленная самоорганизация обеспечивает выход на желаемый аттрактор за счет соответствующего выбора алгоритма изменения управляющих воздействий как функций координат системы.

Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов состоит из следующих этапов:

1. Постановка задачи. Объект управления (ОУ) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где  $x \in R^{n \times 1}$  – вектор состояния.

Требуется найти закон управления  $u^0(x)$ , который обеспечивает перевод изображающей точки из произвольного начального состояния сначала в окрестность инвариантного многообразия  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , а затем дальнейшее устойчивое асимптотическое движение вдоль этого многообразия в желаемое состояние, в частности, в начало координат.

Примером решения подобной задачи может служить известная оптимальная по быстрдействию система второго порядка, в которой  $\psi(x_1, x_2) = 0$  — уравнение

линии переключения, с которой изображающая точка должна сначала сблизиться, а затем двигаться вдоль нее к началу координат.

2. Выбор агрегированных макропеременных, т. е. функций  $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Эти функции могут строиться различными способами, и их поиск является главной задачей проектирования. Этот поиск пока в большей мере носит эвристический характер.

3. Нахождение закона оптимального управления производится без решения оптимизационной задачи. Изменение макропеременной считается оптимальным, если минимизируется так называемый сопровождающий оптимизирующий функционал, имеющий, в частности, вид улучшенной квадратичной оценки:

$$J_{20} = \int_0^{\infty} [\psi^2(t) + T^2 \dot{\varphi}^2(t)] dt.$$

Как известно, минимум такому функционалу доставляет асимптотически стремящаяся к 0 экспонента, являющаяся общим решением так называемого функционального уравнения:

$$T\dot{\varphi}(t) + \psi(t) = 0.$$

Затем определяют производную от макропеременной по времени, как от сложной функции в силу уравнений объекта. Эту производную и саму макропеременную подставляют в функциональное уравнение и находят отсюда искомый закон оптимального управления. Сопровождающий оптимизирующий функционал с учетом  $\varphi(x)$  и позволяет также найти критерий качества, по которому оптимизируется синтезируемая система.

Он содержит высокие степени координат, что существенно улучшает важные показатели качества в отношении быстродействия, перерегулирования, демпфирования колебаний и др. Особенно эти достоинства проявляются в областях значительных отклонений изображающей точки от заданного состояния.

Пример. Заданы уравнения движения самолета в вертикальной плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u, \end{cases}$$

где  $x_1$  – угол атаки;  $u$  – отклонение руля высоты.

1-й вариант:

1.1. Агрегированную макропеременную выберем линейной

$$\psi(x_1, x_2) = \beta_1 x_1 + x_2.$$

1.2. Находим производную от нее по времени с учетом уравнений ОУ:

$$\dot{\psi} = \beta_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \beta_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u.$$

1.3. Подставляя  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  в функциональное уравнение, находим закон оптимального управления:

$$u^0 = -\frac{1}{a_3} \left( a_1 + \frac{\beta_1}{T} \right) x_1 - \frac{1}{a_3} \left( a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T} \right) x_2.$$

1.4. Подставляя этот закон в уравнения объекта, получим уравнения замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\beta_1}{T} x_1 - \left( \beta_1 + \frac{1}{T} \right) x_2, \end{cases}$$

условия устойчивости которой  $\beta_1 > 0$  и  $T > 0$ . Совместное решение приводит к одному уравнению:

$$\frac{T}{\beta_1} \dot{x}_2 + \left( T + \frac{1}{\beta_1} \right) x_2 + x_1 = 0,$$

которое при  $\xi = \frac{1 + \beta_1 T}{2\sqrt{\beta_1 T}} \geq 1$  эквивалентно апериодическому звену второго порядка

с особой точкой типа «устойчивый узел» (рис. 9.5).

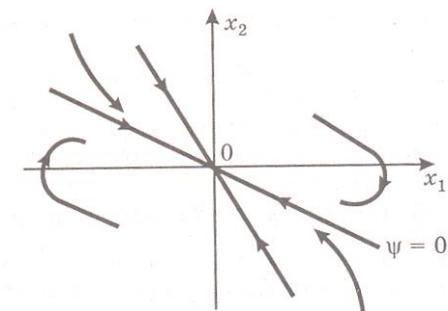


Рис. 9.5

Многообразие  $\psi = 0$ , т.е.  $x_2 = -\beta_1 x_1$ , является прямолинейной фазовой траекторией, стремящейся к началу координат.

2-й вариант:

Если применить нелинейную макропеременную

$$\psi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^3 + x_2,$$

то аналогично определим нелинейный закон оптимального управления:

$$u^0 = -\frac{1}{a_3} \left[ \left( a_1 + \frac{\beta_1}{T} \right) x_1 - \left( a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T} \right) x_2 - \frac{\beta_2}{T} x_1^3 - 3\beta_2 x_1^2 x_2 \right].$$

Из уравнения многообразия  $\psi = 0$  найдем  $x_2$  и, подставив в первое уравнение ОУ, получим нелинейное дифференциальное уравнение движения САУ вдоль многообразия  $\psi = 0$  к началу координат (рис. 9.6):

$$\dot{x}_1 = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_1^3.$$

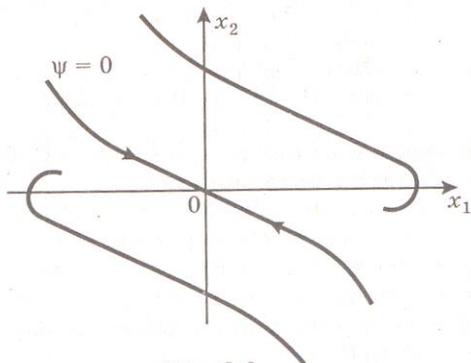


Рис. 9.6

## 5. Интеллектуальные САУ

Создание систем, ориентируемых для работы в условиях неполноты или нечеткости исходной информации, неопределенности внешних возмущений и среды функционирования, требует привлечения нетрадиционных подходов к управлению с использованием методов и технологий искусственного интеллекта. Такие системы, названные интеллектуальными системами управления, образуют совершенно новый класс. Это понятие возникло в начале 80-х гг. XX в.

В качестве базовых выделяются 4 интеллектуальные технологии:

- технология экспертных систем, ориентированная на обработку знаний с явной формой представления в виде продукционных правил;
- технология нечеткой логики, ориентированная на обработку логико-лингвистических моделей представления знаний с помощью продукционных правил и размытых множеств;
- технология нейросетевых структур с неявной формой представления знаний, скрытых в архитектуре сети, параметрах нейронов и связей;
- технология ассоциативной памяти, ориентированная на обработку знаний с неявной формой представления в виде гиперповерхности в многомерном пространстве признаков.

Отсюда, в частности, видно, что основной отличительной чертой интеллектуальных систем автоматического управления является возможность системной обработки знаний, под которыми понимается проверенный практикой результат познания деятельности, верное ее отражение в мышлении человека. Знания позволяют отнести сложившуюся ситуацию к некоторому классу, для которого требуемое управление считается известным согласно теории ситуационного управления Д.А. Поспелова и его научной школы. Одна из передовых тенденций в области обработки знаний состоит в интеграции различных интеллектуальных технологий для сочетания их преимуществ.

Организация интеллектуальных систем автоматического управления производится по следующим пяти принципам:

- наличие тесного информационного взаимодействия интеллектуальной системы автоматического управления с реальным внешним миром при использовании информационных каналов связи;
- наличие прогнозов изменения внешнего мира и собственного поведения системы;
- многоуровневый характер иерархической структуры в соответствии с правилом: повышение интеллектуальности и снижение требований к точности по мере повышения ранга иерархии;
- сохранение функционирования при разрыве связей от высших уровней иерархии;
- повышение интеллектуальности и совершенствование собственного поведения.

### Основы фазы-управления

#### Базовые понятия фазы-логики

Fuzzy-logic переводится как нечеткая логика. К базовым, или первичным, понятиям относятся «нечеткое множество» и «лингвистическая переменная». Нечетким множеством  $M$  называется подмножество  $x$  множества  $X$ , которое характеризуется непрерывной функцией принадлежности (ФП)  $\mu_M(x)$ , могущей принимать любые значения между 0 и 1, что можно истолковать, как «значение  $x$  может быть в данном множестве с вероятностью  $\mu_M(x)$ ». Множество  $M$  может быть записано как совокупность пар значений  $x$  и  $\mu_M(x)$ , т. е. в виде:

$$M = \{(x, \mu_M(x)); x \in X\}.$$

Лингвистической переменной называют такую переменную, которая задана на количественной шкале базисной переменной  $x$  и принимает значения в виде слов и словосочетаний. Отдельное лингвистическое значение (терм) задается с

помощью одной функции принадлежности, т. е. каждому терму соответствует нечеткое множество.

В теории фазы-управления для лингвистического описания выходной переменной ОУ  $x$  и сигнала ошибки  $\varepsilon$  наиболее часто применяют следующий универсальный набор из семи термов с треугольными и трапециевидными функциями принадлежности (рис. 9.7), образованных с помощью слов «отрицательный» (negative), «положительный» (positive), «большой» (big), «средний» (middle), «маленький» (small) и «приблизительно ноль» (zero): negative big (NB), negative middle (NM), positive small (PS), negative small (NS), zero (ZE), positive middle (PM), positive big (PB).

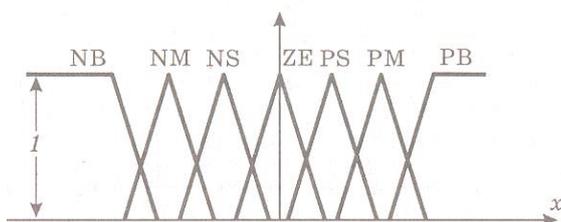


Рис. 9.7

Процедура определения значения функции принадлежности  $\mu_M(x_i)$ , соответствующего конкретному значению  $x_i$  переменной  $x$ , называется фазификацией.

Операции с нечеткими множествами

Известные в алгебре логики логические операции «И», «ИЛИ», «НЕ», производимые с логическими переменными, могут быть применены и для нечетких множеств. При этом вместо функций истинности логических переменных, которые могут иметь значения 0 и 1, используются функции принадлежности нечетных множеств:

- операция конъюнкции («И») производится с помощью оператора минимизации:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

и соответствующее ей нечеткое множество  $C$  называется фази-пересечением двух нечетких множеств  $A$  и  $B$ :

$$C = A \cap B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}.$$

На рис. 9.8 построена функция принадлежности фази-пересечения множеств  $ZE$  и  $N$ ;

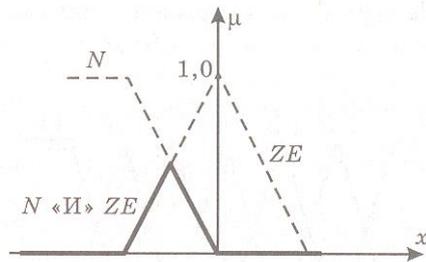


Рис. 9.8

- операция дизъюнкции («ИЛИ») производится с помощью оператора максимизации:

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

и соответствующее ей нечеткое множество  $C$  называется фази-объединением нечетких множеств  $A$  и  $B$ :

$$C = A \cup B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}.$$

На рис. 9.9 построена функция принадлежности фази-объединения множеств  $ZE$  и  $P$ .

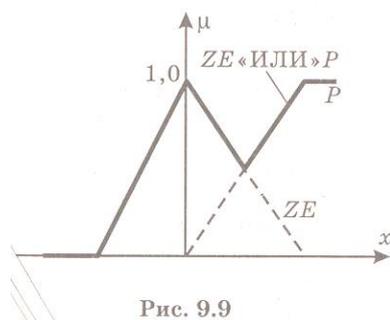


Рис. 9.9

Применительно к задаче управления будем дальше считать, что  $x$  - ошибка регулирования,  $u$  - управляющее воздействие.

Главной операцией фазы-логики является процедура нечеткого вывода, основанная на операции импликации (связывание). Эта операция заключается в соединении двух нечетких множеств  $A$  и  $B$  в правило «ЕСЛИ  $A$  ТО  $B$ » или  $A \rightarrow B$ , где  $A$  - посылка, а  $B$  - заключение, причем множества  $A$  и  $B$  определены на разных базисных множествах  $x \in X$  и  $y \in Y$  соответственно.

Множество, соответствующее правилу «ЕСЛИ - ТО», образуется из числовых пар  $(x, y)$ , которые относятся к новому базисному множеству, называемому декартовым произведением  $P$  множеств  $A$  и  $B$ :

$$P = A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}.$$

Взаимосвязь между множествами  $A$  и  $B$  описывается с помощью так называемого отношения  $R$ . Оно представляет собой подмножество декартова произведения и образуется по определенному правилу (предписанию)  $R_{xy}$  из элементов  $A$  и  $B$ :

$$R = \{[(x, y), \mu_R(x, y)]; (x, y) \in A \times B\},$$

где  $\mu_R(x, y)$  - функция принадлежности пар  $(x, y)$  из декартова произведения  $A \times B$  к подмножеству, образованному по правилу  $R_{xy}$ .

Эту функцию принадлежности можно определить как функцию принадлежности фазы-пересечения двух нечетких множеств  $A$  и  $B$ , т. е. с помощью процедуры минимизации (рис. 9.10):

$$\mu_R(x, y) = \min_{A \times B} \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Отсюда можно определить функцию принадлежности  $\mu_{B_i}(y)$  при фиксированном значении  $x = x_i$ :

$$\mu_{B_i}(y) = \mu_R(x_i, y) = \min_{y \in B} \{\mu_A(x_i), \mu_B(y)\}.$$

Эта формула выражает правило замены (modus ponens), соответствующее основному правилу логического вывода: вероятность заключения  $B$  не может

превышать вероятность посылки А. Ее применение дает усеченную функцию принадлежности в виде трапеции 1 (рис. 9.11).

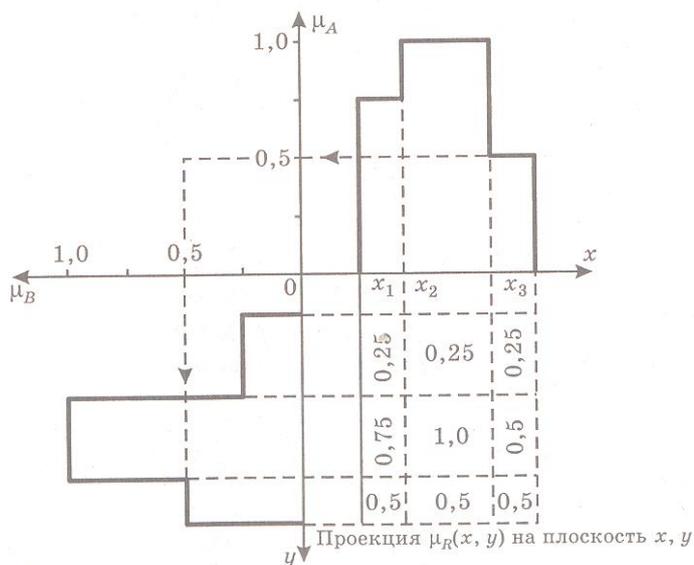


Рис. 9.10

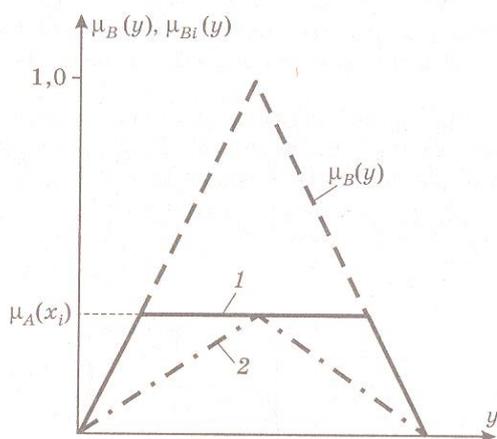


Рис. 9.11

Другой метод нахождения функции принадлежности правила «ЕСЛИ-ТО» основан на формуле произведения

$$\mu_{B_i}(y) = \mu_A(x_i) \cdot \mu_B(y),$$

которая приводит к треугольной функции принадлежности 2 (см. рис. 9.11).

Нечеткое множество А может представлять собой не одно множество, а пересечение («И») или объединение («ИЛИ») нескольких множеств.

Затем производится операция агрегирования (композиции) нескольких правил «ЕСЛИ-ТО», связанных союзом «ИЛИ». Агрегирование осуществляется путем максимизации функций принадлежности всех объединяемых правил, т. е. результирующая функция принадлежности нечеткого множества  $B_{ip}$  величины  $y$  при  $x = x_i$ :

$$\mu_{B_{ip}}(y) = \max_j \left\{ \mu_{B_{ij}}(y) \right\} = \max_j \left\{ \min \left[ \mu_{A_j}(x_i), \mu_{B_j}(y) \right] \right\},$$

где  $j$  - номер правила,  $j = 1, \dots, n$ ;  $\mu_A(x_i)$  - значение ФП посылки  $A$   $j$ -го правила при  $x = x_i$ ;  $\mu_{B_j}(y)$  - ФП заключения  $B$   $j$ -го правила;  $\mu_{B_{ij}}(y)$  – усеченная ФП заключения  $B$   $j$ -го правила, ограниченная сверху на уровне  $\mu_{A_j}(x_i)$ .

Объединенная процедура импликации и агрегирования нескольких таких правил, связанных союзом «ИЛИ», называется инференцией и составляет основу метода Мамдани. Для того чтобы по полученной таким образом результирующей функции принадлежности найти конкретные значения  $y$ , применяют процедуру дефазификации. При дефазификации используется метод центра тяжести, согласно которому результирующее значение управляющего воздействия находят как абсциссу «центра тяжести» площади, расположенной под графиком функции принадлежности  $\mu_{B_{ip}}(y)$  по формуле средневзвешенного значения:

$$y_{pi} = \frac{\int y \cdot \mu_{B_{ip}}(y) dy}{\int \mu_{B_{ip}}(y) dy}.$$

По алгоритму Сугено значение управления определяется как средневзвешенная величина при управлении объектом с вектором состояния  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ :

$$y_{pi} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij} \mu_{A_{ij}}}{\sum_{j=1}^n \mu_{A_{ij}}},$$

где заключение (управляющее воздействие) для  $j$ -го правила при алгоритме первого порядка определяется формулой

$$y_{ij} = C_{0j} + C_{1j}x_{1i} + \dots + C_{mj}x_{mi},$$

т. е. вычисляется как линейная функция  $i$ -й комбинации значений входных величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ;  $C_{0j}, C_{1j}, \dots, C_{mj}$  - постоянные коэффициенты, устанавливаемые экспертами,  $\mu_{A_{ij}}$  - значение функции принадлежности посылки  $j$ -го правила, соответствующее значениям  $x_{ki}$ ,  $k = 1, \dots, m, i = 1, 2, 3, \dots$ .

Объединение составных частей посылок осуществляется так же, как и в методе Мамдани, т. е. с помощью процедур минимизации и максимизации соответствующих функций принадлежности.

По алгоритму Сугено нулевого порядка:

$$y_j = C_{0j} + C_{1j} + \dots + C_{mj} = \text{const},$$

где  $C_{0j}, \dots, C_{mj}$  - четкие значения управляющего воздействия для всех входов, заданные при формулировке исходных лингвистических данных.

### **Реализация основных процедур фазы-логики для нечеткого алгоритма автоматического регулирования**

Пусть для примера входными переменными являются ошибка регулирования  $x_1$  и ее первая производная по времени  $x_2$ . Их базисные множества разделены на 3 нечетких множества N, ZE, P, характеризуемых тремя функциями принадлежности, а алгоритм нечеткого управления содержит 2 правила:

Правило 1. Если  $x_1 = \text{ZE}$  И  $x_2 = \text{ZE}$ , ТО  $y = \text{ZE}$ ;

Правило 2. Если  $x_1 = \text{N}$  ИЛИ  $x_2 = \text{P}$ , ТО  $y = \text{P}$ .

Первое правило означает, что если ошибка и ее производная близки к 0, то к 0 близко и управляющее воздействие.

Второе правило означает, что если ошибка отрицательна (управляемая величина меньше), а ее скорость положительна, то и управляющее воздействие положительно, что должно быть направлено на быстрое устранение ошибки.

При фазификации (рис. 9.12) определяются значения функций принадлежности для нечетких множеств входных воздействий ZE, N, P. В частности, при  $x_1 = -0,15$  и  $x_2 = 0,35$  получим:

$$\mu_{ZE}(x_1) = 0,7, \quad \mu_{ZE}(x_2) = 0,3,$$

$$\mu_N(x_1) = 0,3, \quad \mu_P(x_2) = 0,7.$$

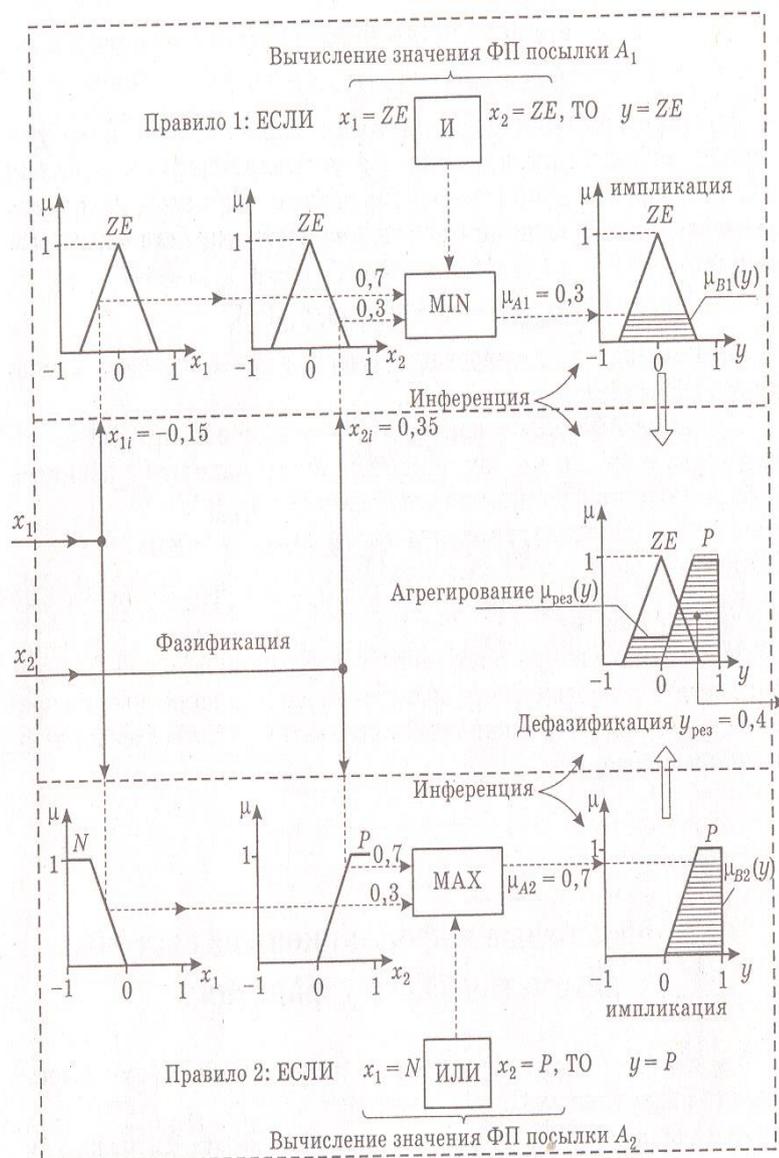


Рис. 9.12

При импликации вначале определяются значения ФП  $\mu_{A_i}(x_1, x_2)$  посылок вышеуказанных правил типа «Если А, ТО В», причем при реализации логической операции И в послылке А производится минимизация, а при реализации ИЛИ - максимизация:

$$\mu_{A1}(x_1, x_2) = \min\{\mu_{ZE}(x_1), \mu_{ZE}(x_2)\} = 0,3,$$

$$\mu_{A2}(x_1, x_2) = \max\{\mu_N(x_1), \mu_P(x_2)\} = 0,7.$$

Затем при импликации находят трапецеидальные функции принадлежности  $\mu_{B1}(y)$  и  $\mu_{B2}(y)$  нечетких множеств управляющего воздействия  $y$  как результат «усечения» заданных функций принадлежности множеств  $\mu_{ZE}(y)$  и  $\mu_P(y)$  соответственно:

$$\mu_{B1}(y) = \min(\mu_{ZE}(y), \mu_{A1}(x_1, x_2)),$$

$$\max \mu_{B1}(y) = \mu_{A1}(x_1, x_2) = 0,3,$$

$$\mu_{B2}(y) = \min(\mu_P(y), \mu_{A2}(x_1, x_2)),$$

$$\max \mu_{B2}(y) = \mu_{A2}(x_1, x_2) = 0,7.$$

При агрегировании производится объединение найденных усеченных функций принадлежности управляющего воздействия для двух правил путем их максимизации. При этом находится результирующая функция принадлежности управляющего воздействия:

$$\mu_{\text{д\`а\`с}}(y) = \max\{\mu_{B1}(y), \mu_{B2}(y)\}.$$

Импликация и агрегирование вместе взятые образуют процедуру инференции.

При дефазификации, как заключительной операции нечеткого управления, по методу центра тяжести находится абсцисса центра тяжести функции принадлежности  $\mu_{\text{д\`а\`с}}(y)$ :

$$\mu_{\text{д\`ац}}(x_1, x_2) = y_{\text{д\`ац}}(\mu_{\text{д\`ац}}(y)).$$

В данном примере  $y_{\text{д\`ац}}(-0,15, 0,35) = 0,4$ , что и подается на объект управления.

Затем эти операции повторяются с большой частотой, т. е. работа нечеткого логического регулятора носит дискретный по времени характер, и его можно рассматривать как импульсный цифровой регулятор.

#### Экспертные информационные системы автоматического управления

Эти системы могут строиться по различным схемам, известным для адаптивных САУ. В схеме рис. 9.13 коррекция значений коэффициентов регулятора осуществляется экспертной системой ЭС на основе информации об изменении параметров ОУ, полученной в результате проведения параметрической идентификации, которая основана на представлении ОУ в виде линейной модели или нелинейного звена (модель Гаммерштейна).

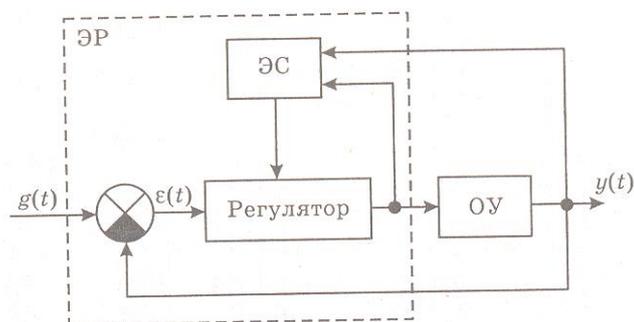


Рис. 9.13

Если эти модели неприменимы, то эта схема будет неэффективна. Кроме того, для систем с высокой степенью нелинейности может потребоваться очень большое число членов ряда, аппроксимирующего нелинейность (для нелинейного элемента типа «зона нечувствительности и ограничение» - более 10), что снижает быстродействие.

Наиболее эффективной в этом случае является схема рис. 9.14, использующая принцип параметрической ООС, второй метод Ляпунова и эталонную модель.

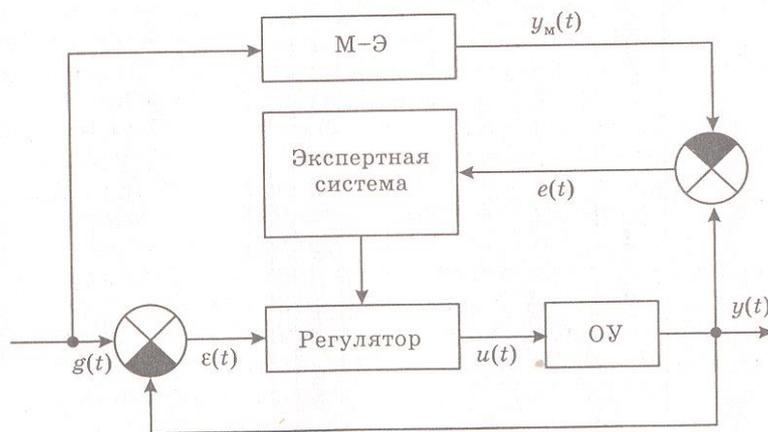


Рис. 9.14

В качестве регулятора в основном контуре обеих САУ обычно используется линейный ПИД-регулятор.

В общем случае под экспертной системой понимается интеллектуальная программа, способная делать логические выводы на основании знаний в конкретной предметной области и обеспечивающая решение определенных задач. Работа экспертного регулятора ЭР (см. рис. 9.13) условно может быть разбита на 3 этапа в соответствии с архитектурой, показанной на рис. 9.15.

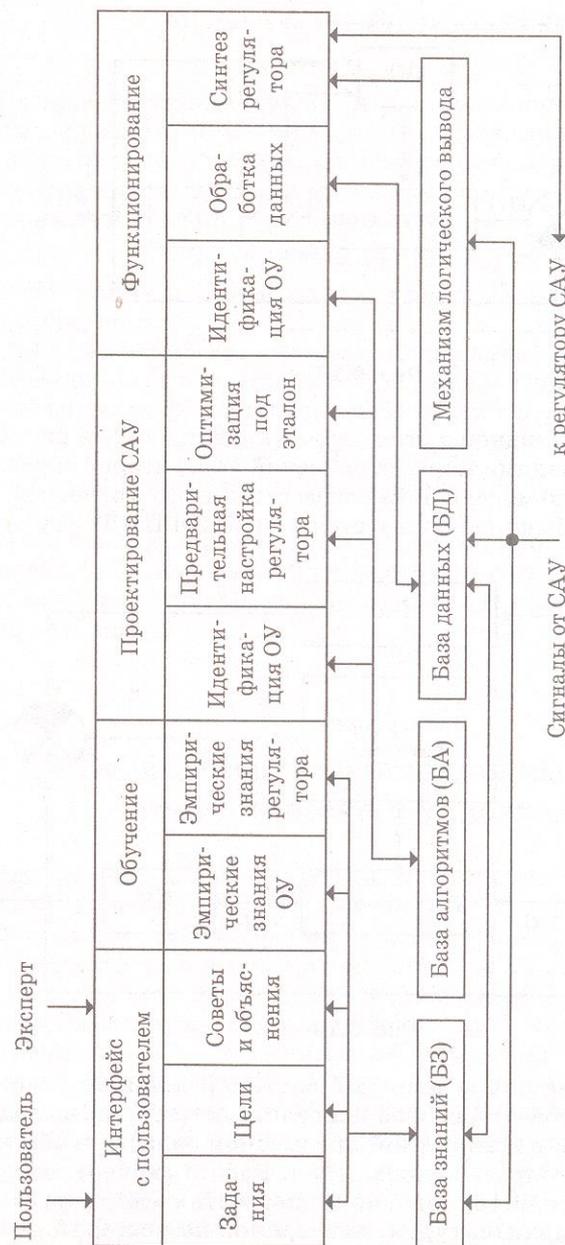


Рис. 9.15

На первом этапе решаются задачи проектирования САУ:

- выбор структуры модели ОУ;
- определение параметров ОУ нерекуррентным методом идентификации;
- выбор закона управления;
- предварительная настройка параметров закона управления;
- окончательный синтез параметров закона управления по заданному пользователем критерию качества, в результате чего в пространстве качества определяется «рабочая точка».

На втором этапе решается задача обучения при изменении параметров в окрестности «рабочей точки». Здесь формируются текущие эмпирические знания о динамических свойствах САУ в виде качественной зависимости между изменением параметров модели объекта и регулятора, с одной стороны, и параметрами критерия качества, с другой.

На третьем этапе происходит непрерывное слежение за протекающими процессами и решаются задачи активной самодиагностики:

- обработка измерений с датчиков;
- оценка измерений параметров САУ как аналитическими методами, так и на основе эмпирических знаний об ОУ;
- коррекция параметров регулятора и ее оценка;
- изменение закона управления (в случае необходимости).

Основной проблемой при создании любой экспертной системы является разработка базы знаний в достаточно узкой и конкретной предметной области, которая может быть решена в 2 этапа:

- формализация и структурирование экспертных знаний о предметной области (ТАУ);
- формализация представлений этих знаний с помощью моделей искусственного интеллекта.

База алгоритмов содержит правила идентификации, позволяющие осуществить получение или уточнение по экспериментальным данным математической модели системы, выраженной посредством того или иного математического аппарата.

### **Формирование теоретических знаний об идентификации**

Наибольшее распространение при параметрической идентификации линейных ОУ получили следующие рекуррентные методы:

- ошибки предсказания (Гаусса-Ньютона, градиентный и др.);
- наименьших квадратов;
- инструментальных переменных;
- модулирующих функций.

При дискретизации по времени модель ОУ представляет собой дискретную передаточную функцию

$$W_{\text{д}}(q) = \frac{B(q)}{A(q)},$$

где  $q = z^{-1}$  – оператор сдвига назад,

$$A(q) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i q^i, \quad B(q) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i q^i.$$

Рассмотрим эти методы с точки зрения возможности формирования знаний для базы знаний экспертного регулятора.

При идентификации методом ошибки предсказания определяется оценка параметров модели за N итераций

$$\hat{\theta}_N = \arg \min V \quad \hat{\theta}_N = \arg \min V_N(\theta),$$

где вектор параметров  $\theta^T = [a_1, \dots, a_{n_a}; b_1, \dots, b_{n_b}]$ ,

норма ошибки предсказания  $V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N L(\varepsilon(k, \theta))$ .

Ошибка предсказания  $\varepsilon(k, \theta)$  - разность между выходным сигналом и его прогнозом на основе модели в  $k$  –й момент времени, функция L от которой должна быть четной. Например, методу наименьших квадратов соответствует выбор

$$L(\varepsilon) = 0,5\varepsilon^2.$$

При таком выборе  $L(\varepsilon)$  оценка  $\hat{\theta}_N$  может быть найдена аналитически через регрессионный вектор  $\varphi(t)$ , зависящий от входного  $u(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов.

При идентификации методом инструментальных переменных оценка  $\hat{\theta}_N$  также определяется аналитически через  $\varphi(t)$  и инструментальные переменные (инструменты):

$$\xi[k] = [-y(k-1, \theta), \dots, -y(k-n_a, \theta), u(k-1), \dots, u(k-n_b)]^T.$$

На основе рассмотрения этих методов можно сформулировать следующие ключевые правила базы знаний экспертного регулятора.

**Правило 1.** Если идентифицируется объект управления, и ошибка (точнее, функция  $L(\varepsilon)$ ) предсказания зависит от прошлых данных, то использовать метод инструментальных переменных, иначе использовать метод наименьших квадратов.

**Правило 2.** Если выбрать метод инструментальных переменных, то инструменты вычислить на основе оценки параметров модели методом наименьших квадратов и определить параметры объекта управления методом инструментальных переменных.

**Правило 3.** Если точность идентификации недостаточна, то использовать метод ошибки предсказания, иначе идентификацию закончить и перейти к процедуре дискретизации по времени.

Интервал дискретизации должен обеспечивать минимизацию потерь информации при переходе от непрерывного времени к дискретному. Однако предположение о повышении точности оценки модели с увеличением частоты выборки в общем случае неверно, так как может привести к большим погрешностям оценок постоянных времени и коэффициентов демпфирования. Метод модулирующих функций не требует перехода от непрерывного времени к дискретному, так как для определения указанных выше параметров объекта управления происходит вычисление площадей под кривыми, образованными перемножением переходной функции на специально формируемые функции в виде затухающих экспонент. После вычисления площадей составляется и решается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта управления.

Так как класс входных сигналов при использовании метода модулирующих функций ограничен ступенчатыми функциями, то он применим только для предварительной идентификации.

При идентификации нелинейного объекта управления или разомкнутой системы автоматического управления обычно встречается последовательное соединение статического нелинейного элемента (как правило, типа «зона нечувствительности» и «ограничение») и линейной части (так называемая модель Гаммерштейна), что видно на рис. 9.16. Нелинейность для идентификации представляется в виде полинома

$$f(u) = a_1u + a_2u^2 + \dots + a_mu^m$$

где  $a_i$  - коэффициенты, подлежащие определению.

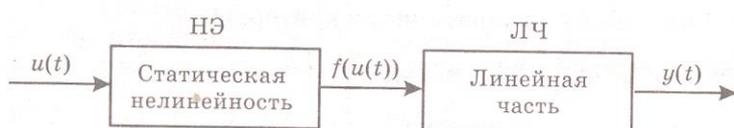


Рис. 9.16

Наиболее эффективным способом для этого является принцип покомпонентной минимизации, который и следует заложить в базу знаний экспертного регулятора. Он заключается в поочередном спуске по определенным группам параметров при фиксированных остальных неизвестных. При этом покомпонентно оцениваются параметры нелинейного элемента и линейной части. На вход целесообразно подавать сигнал  $u(t)$  из  $n$  синусоид с различными частотами:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n iA_{0n} \sin(\omega_i t).$$

Опорную амплитуду следует определить по эмпирическому правилу, согласно которому суммарная амплитуда  $u(t)$  должна превосходить величину  $a + b$  примерно в 10 раз (рис. 9.17).

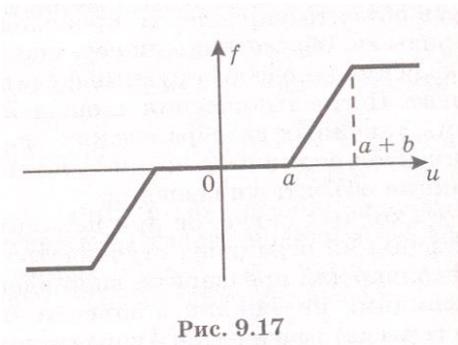


Рис. 9.17

### **Системы автоматического управления с ассоциативной памятью**

Ассоциация - явление, когда одно представление вызывает по сходству, смежности или противоположности другое.

Ассоциативная память - это устройство хранения информации, которое позволяет восстанавливать и выдавать информацию на основе ассоциации, т. е. по заданному сочетанию признаков, свойственных искомой информации. Эта информация имеет приближенный характер.

Ассоциативная память может быть пирамидальной, матричной и самоорганизующейся.

Пирамидальная (иерархическая) ассоциативная память проводит классификацию входного вектора по некоторому признаку, относя его к одной из классификационных групп. Затем в этой группе вектор классифицируется по другому признаку, и этот процесс повторяется до полного совпадения всех признаков с одной из классификационных групп.

Матричная ассоциативная память - это частный случай пирамидальной ассоциативной памяти, когда имеется только один уровень классификации.

Матричную ассоциативную память можно реализовать несколькими способами:

- программно на ЭВМ. При этом элементы входного вектора  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$  квантуются по уровню, затем из многомерного массива  $Z[m_1, m_2, \dots, m_N]$  по полученным значениям его компонент выбирается выходной вектор  $Y$  (рис. 9.30):
- на логических элементах;

- на однослойных нейросетях (персептронах);
- на нейросетях Хопфилда;
- в виде матричного дешифратора на диодах.

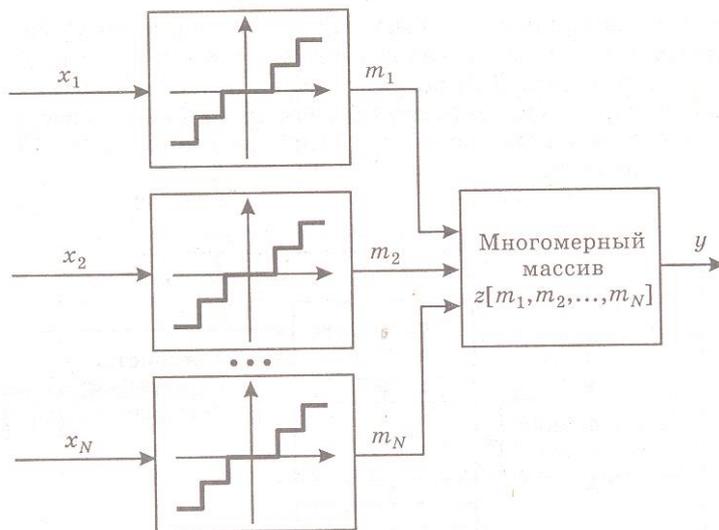


Рис. 9.30

Память на самоорганизующихся структурах реализует хранение информации в виде аттракторов, например, в осцилляторных нейросетях. В зависимости от входного вектора система выходит на один из них. Ассоциативная память этого вида динамическая, т. е. информация в ней сохраняется в течение некоторого времени.

Обучение памяти - это процесс формирования содержимого памяти в зависимости от входной информации. Управление этим процессом состоит в выработке сигнала разрешения или запрещения записи в память. Содержимое памяти может меняться всякий раз при поступлении на ее вход любого вектора или при поступлении на вход только тех векторов, на которые ранее память никогда не обучалась.

В системах управления ассоциативная память обучается на входной вектор, состоящий из двух частей. Первая часть содержит информацию с выходов регуляторов и датчиков обратных связей, а вторая — параметры регулятора или значения управляющих воздействий, обеспечивающих требуемые критерии качества. В режиме управления по первой части вектора восстанавливается вторая. Таким образом осуществляются оперативная идентификация и адаптация.

Интеллектуальные системы с ассоциативной памятью можно условно разделить на системы первого и второго рода в зависимости от того, работают ли они в условиях предсказуемой или непредсказуемой неопределенности

соответственно. Предсказуемая неопределенность имеет место в том случае, когда известна априорная информация о законе изменения управляемых координат в функции времени.

Функциональная схема САУ с ассоциативной памятью первого рода (рис. 9.31) состоит из традиционного контура управления и устройства подстройки регулятора, в которое входит:

- рецепторная система, осуществляющая нормировку, сжатие и первичный анализ входной информации (определение параметров ОУ);

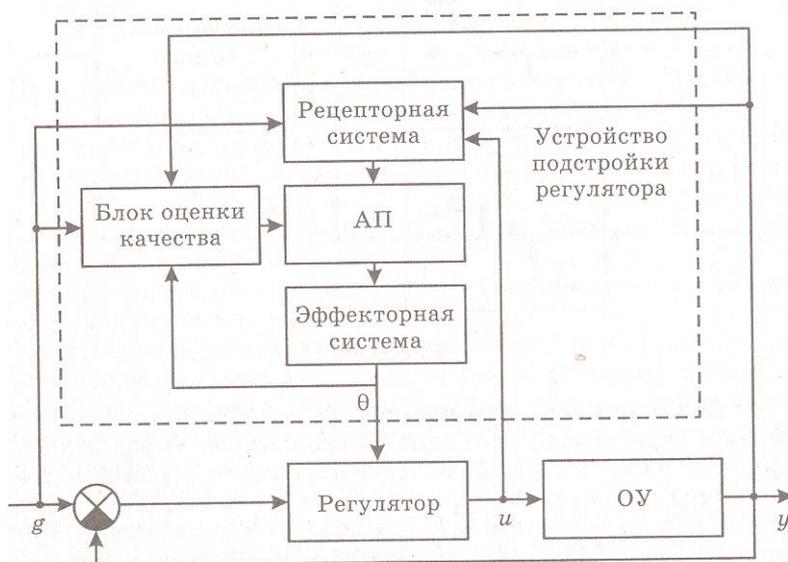


Рис. 9.31

- ассоциативная память (АП), классифицирующая состояние системы;
- эффекторная система, декодирующая информацию с выхода ассоциативной памяти и подстраивающая параметры регулятора в соответствии с информацией от нее. Кроме настройки параметров возможна аддитивная коррекция управляющего и задающего воздействий, причем эффекторная система может содержать эталонную модель системы;
- блок оценки качества, позволяющий реализовать самообучение ассоциативной памяти.

В САУ с ассоциативной памятью второго рода (рис. 9.32) рецепторная система, ассоциативная память и эффекторная система входят непосредственно в основной контур управления в качестве регулятора.



Рис. 9.32

В такой системе формирование знаний в ассоциативной памяти на этапе обучения осуществляется оператором. Ассоциативная память записывает набор входных векторов сигналов от датчиков и соответствующих им управляющих воздействий, выполненных оператором. После обучения ассоциативной памяти на всевозможные ситуации она заменяет человека. По входному вектору, содержащему информацию о состоянии ОУ и входном воздействии, ассоциативная память формирует управляющее воздействие на ОУ, обеспечивая адаптивную подстройку под изменение как структуры, так и параметров ОУ. Задача косвенного управления требует обучения на наиболее полный набор возможных состояний ОУ. При выполнении критерия качества соответствующий блок, классифицируя состояние объекта, дает разрешение на запись информации в ассоциативную память при обучении.

Преимущества САУ с ассоциативной памятью состоят в следующем:

- ассоциативная память аккумулирует не все возможные решения по управлению ОУ, а только основные, что сокращает необходимый объем памяти;
- ассоциативная память позволяет осуществить доступ к данным с высокой скоростью;
- САУ с ассоциативной памятью достаточно проводить классификацию состояния системы на качественном уровне, чтобы сформировать управления, соответствующие текущему состоянию системы и заданному критерию качества управления в реальном времени, даже для ОУ с быстроменяющимися параметрами и структурой.

## ЛЕКЦИЯ №6

## **ТЕМА «НЕЙРОСЕТЕВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**

### **1. Нейросетевые системы управления, классы искусственных нейронных сетей и базовый процессорный элемент (искусственный нейрон)**

Проектирование систем автоматизации и управления производственными процессами и техническими устройствами на основе типовых решений получило широкое, если не сказать преобладающее, распространение. При этом предполагается возможность адекватного описания регулируемых объектов классом линейных динамических моделей. Для простейших типовых моделей, ограниченных 2-м порядком дифференциальных уравнений с последовательно включенным звеном временного запаздывания, выполнение функций регулирования и управления возлагается на типовые промышленные ПИД-регуляторы и их модификации, вплоть до так называемых «нечетких» ПИД-регуляторов и ПИД-регуляторов, настраиваемых с помощью многослойных нейросетей, хотя применение ИНС в качестве механизма оптимизации для настройки параметров типовых законов регулирования может быть оправдано лишь тем, что это не противоречит исключительным возможностям обучаемых нейросетей. На использовании типовых решений, в том числе и типовых линейных законов регулирования, построена целая индустрия серийно выпускаемых типовых промышленных регуляторов или контроллеров. В сущности, типовые регуляторы являются одним из основных «прикладных продуктов» классической теории автоматического регулирования, в то время как ее более «продвинутые» разделы иллюстрируют лишь возможности построения подобных систем с их реализацией в частных случаях. Содержательный смысл понятия «типовой регулятор» определим обязательным наличием следующих компонент:

- типовой функциональный состав регулятора для класса типовых в каком-либо смысле объектов, в том числе функциональная структура, связи, алгоритмы, сервисные функции и т. п.;
- типовые информационные функции, в том числе число и состав сигналов вход/выход, преобразователей, устройств памяти, интерфейсов и т. п.;

- типовое техническое исполнение - элементная база, конструкция, автономность, тиражируемость;

Однако следует обратить внимание на то, что требование быть типовым, т. е. универсальным для возможно более широкого класса объектов, означает работоспособность и выполнение заданных технологических показателей качества систем управления независимо от индивидуальных особенностей динамики управляемых процессов. Другими словами, типовые регуляторы функционально должны быть и адаптивными, и робастными. Требование типизации ставит на повестку дня необходимость в такой научной теории систем регулирования, которая бы изначально опиралась на исходно нелинейную динамику управления и адекватные средства достижения. С этой точки зрения, например, адаптивные системы являются специальным классом существенно нелинейных систем управления, а для реализации адаптивного регулятора требуются обучающиеся нелинейные структуры.

Таковыми типовыми нелинейными и настраиваемыми структурами являются искусственные нейронные сети (ИНС). Основным типом ИНС в последующем изложении служит многослойная обучаемая нейронная сеть (МНС) с искусственными нейронами (ИН) или еще, базовыми процессорными элементами (БПЭ). Обоснованием для их применения в автоматических системах служат хорошо изученные их фундаментальные свойства.

Во-первых, сигналы в таких нейросетях, как и в системах автоматического управления, распространяются в прямом направлении.

Во-вторых, ключевую роль в формировании необходимых нелинейных алгоритмов управления играют универсальные аппроксимационные свойства многослойных сетей. На основе обобщенной аппроксимационной теоремы Стоуна-Вейерштрасса сделан вывод о том, что с помощью нелинейных нейронных сетей можно сколь угодно точно равномерно приблизить любую непрерывную функцию многих переменных на любом замкнутом ограниченном множестве. Дополнительным стимулирующим фактором является высокая скорость аппроксимации в зависимости от  $n$  - числа нейронов сети. Погрешность аппроксимации составляет порядок  $O(1/n^2)$ .

В-третьих, обучение МНС придает адаптивные свойства нейросетевым системам управления. Эти свойства вызывают неизменный интерес, так как

порождают способность сети выполнять функции робастного адаптивного регулятора при фиксированных коэффициентах синаптических связей, т. е. уже после обучения на реальной конечной выборке экспериментальных данных нейронная сеть способна подстраиваться в реальных условиях по данным, несколько отличающихся от эталонных.

В-четвертых, способность нейронных сетей к параллельной обработке сигналов делает естественным их использование для управления многомерными объектами. Многослойная нейронная сеть представляет собой однородную вычислительную среду и как универсальный нелинейный аппроксиматор в контурах управления динамическим процессом выполняет функцию адаптивного регулятора состояния фазового пространства системы «объект + нейросеть + внешняя среда».

Искусственная нейронная сеть и, в частности, обучаемая многослойная нейронная сеть с нелинейными функциями активации осуществляет настраиваемое нелинейное преобразование многомерной информации. Динамика такого преобразования описывается векторными нелинейными дифференциальными уравнениями, общая размерность которых определяется произведением числа настраиваемых весовых коэффициентов синаптических связей и числа нейронов сети. Даже для малоразмерных (по числу нейронов в скрытых слоях) нейросетей, например, порядка 3-5 с числом настраиваемых коэффициентов 3, эквивалентная размерность динамической модели сети составляет значение 9-15. Очевидно, что нелинейной динамической структуре обучаемой нейросети соответствуют виртуальные пространства состояний высокой размерности. Вместе с нелинейным объектом настраиваемая многослойная нейронная сеть создает сложную и изменяемую в процессе обучения топологию нелинейного фазового пространства высокой размерности, что и является предпосылкой к организации открытых систем управления со сложным динамическим поведением многомерных нелинейных объектов.

Таким образом, МНС с обучением в реальном времени служит адекватным средством для формирования нелинейных изменяющихся во времени законов управления динамическими объектами, описываемыми исходно нелинейными дифференциальными уравнениями.

Классы искусственных нейронных сетей

Искусственные нейронные сети (ИНС), образуемые ассоциацией искусственных нейронов, являются весьма упрощенной аналогией биологических нервных сетей. При этом степень упрощения обусловлена несравнимыми уровнями связности нейронов и их числом. Нервная система человека имеет порядка  $10^{11}$  нейронов, объединенных в сеть с примерно  $10^{15}$  (!) передающими связями. В биологических нервных системах каждый нейрон обладает множеством качеств и функций, среди которых уникальной функцией являются прием, обработка и передача электрохимических сигналов по нервным волокнам, образующим коммуникационную систему мозга.

Искусственные нейросети отличаются своей архитектурой: структурой связей между нейронами (рис. 9.1), числом слоев, функцией активации нейронов, алгоритмом обучения. С этой точки зрения среди известных ИНС можно выделить статические, динамические сети и *fuzzy* - структуры; однослойные

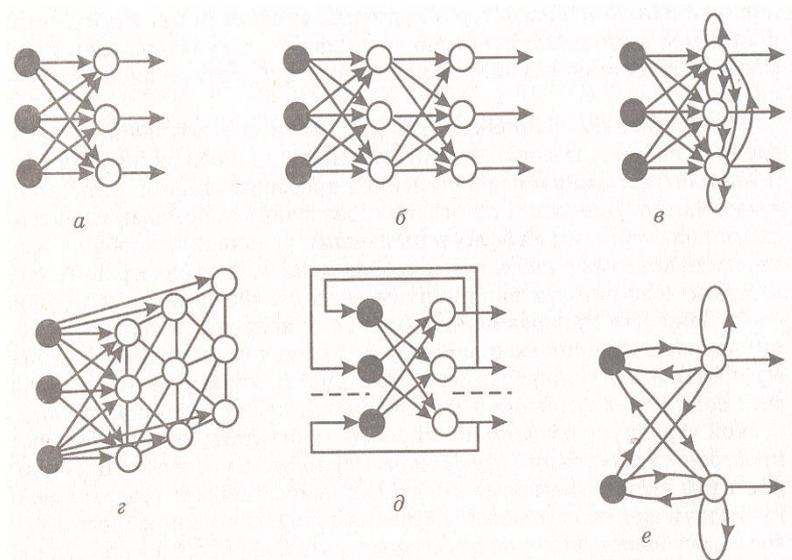


Рис. 9.1. Структуры наиболее распространенных ИНС:

а – однослойная сеть; б – многослойная сеть (перцептрон); в – сети с «боковыми соединениями»;

г – сети Кохонена; д – сети Хопфилда; е – АРТ-сети

или многослойные сети. Различия вычислительных процессов в сетях частично обусловлены способом взаимосвязи нейронов, поэтому выделяют следующие виды сетей:

- сети прямого распространения (feedforward) - сигнал по сети проходит только в одном направлении: от входа к выходу;
- сети с обратными связями (feedforward/feedback);
- сети с боковыми обратными связями (laterally connected);
- гибридные сети.

В целом по структуре связей ИНС могут быть сгруппированы в два класса: сети прямого распространения - без обратных связей в структуре и рекуррентные сети – с обратными связями. В первом классе сетей наиболее известными и чаще используемыми являются многослойные нейронные сети (многослойные перцептроны по Ф. Розенблатту), где искусственные нейроны расположены слоями.

Связь между слоями - однонаправленная и в общем случае выход каждого нейрона связан со всеми входами нейронов последующего слоя. Такие сети являются статическими, так как не имеют в своей структуре ни обратных связей, ни динамических элементов, а выход зависит от заданного множества на входе, начальных значений весовых коэффициентов и не зависит от предыдущих состояний сети. В отличие от статических сетей прямого распространения сети второго класса (рекуррентные) являются динамическими, так как из-за обратных связей состояние сети в каждый момент времени зависит от предшествующего состояния. Задачи, для решения которых используются искусственные нейронные сети, можно разделить на четыре категории:

А - распознавание и классификация/кластеризация, например распознавание символьной информации и речи, классификация электрокардиограмм, клеток крови и других видов информации; в задачах кластеризации осуществляются классификация образов и объединение близких образов в один кластер;

В - обработка изображений: текстовых, видео-, аэрофотосъемки;

С - системы идентификации и управления;

Д - обработка сигналов, в частности, такая широко распространенная задача, как аппроксимация функций при решении инженерных и научных задач моделирования.

**Базовый процессорный элемент (искусственный нейрон)**

Базовый процессорный элемент (БПЭ) осуществляет отображение  $R^n \rightarrow R^1$  в соответствии с соотношением для выхода  $q$  (рис. 9.2):

$$q = f\left(\sum_{j=1}^n w_j r_j + w_0 r_0\right) = f\left(\sum_{j=0}^n w_j r_j\right), \quad (9.1)$$

где  $r_0, r_1, \dots, r_n$  - входы БПЭ;  $w_0, w_1, \dots, w_n$  - весовые коэффициенты синаптических связей БПЭ.

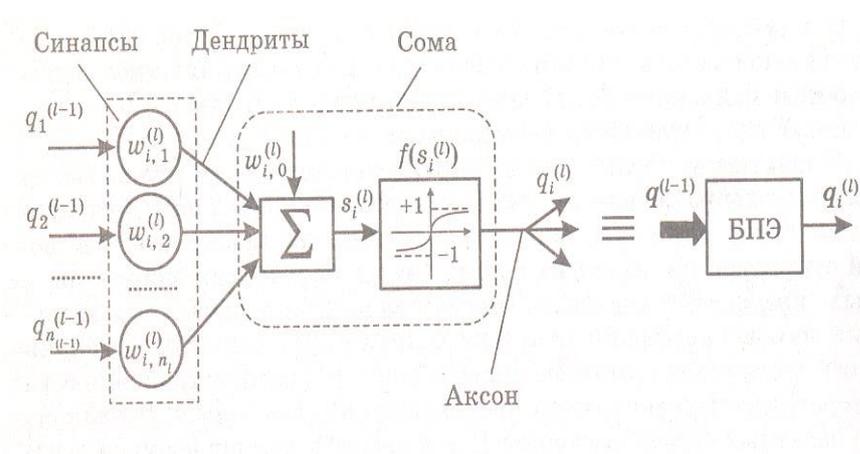


Рис. 9.2. Схема искусственного нейрона (базового процессорного элемента)

Вход  $r_0$  и коэффициент связи  $w_0$  вводят специально для инициализации сети; обычно  $r_0 = +1$ ; коэффициенты  $w_0$ , как и остальные  $w_j, j \in \overline{1, n}$  - настраиваемые в процессе обучения;  $f(\cdot)$  - «функция активации» - монотонная, непрерывно дифференцируемая на интервале либо  $(-1, +1)$ , либо  $(0, +1)$ . В искусственных нейронах наибольшее распространение (и по аналогии с биологическими нейронами) получили:

- 1) экспоненциальные или радиально-базисные функции (функции Гаусса):

$$f(x) = \exp(-x^2 / 2\sigma^2), \quad \sigma - \text{const};$$

2) функция гиперболического тангенса:

$$f(x) = \text{th}(x) = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x}); \quad f'(x) = (1 - f(x))(1 + f(x));$$

3) сигмоидные функции:

$$f(x) = 1 / (1 + e^{-x}); \quad f'(x) = f(x)(1 - f(x));$$

4) бинарные функции различного определения.

Среди простейших типов искусственных нейронов наиболее известна адалина Б. Уидроу, для которой функция  $f(x)$  – линейная, а выход определяется соотношением

$$q = \sum_{j=1}^n w_j r_j + w_0 \cdot 1; \quad w_j = \text{var}; \quad j = \overline{0, n}.$$

## 2. Статические однослойные и многослойные нейронные сети

Простейшая однослойная линейная ИНС состоит из  $K$  адалин (рис. 9.3),

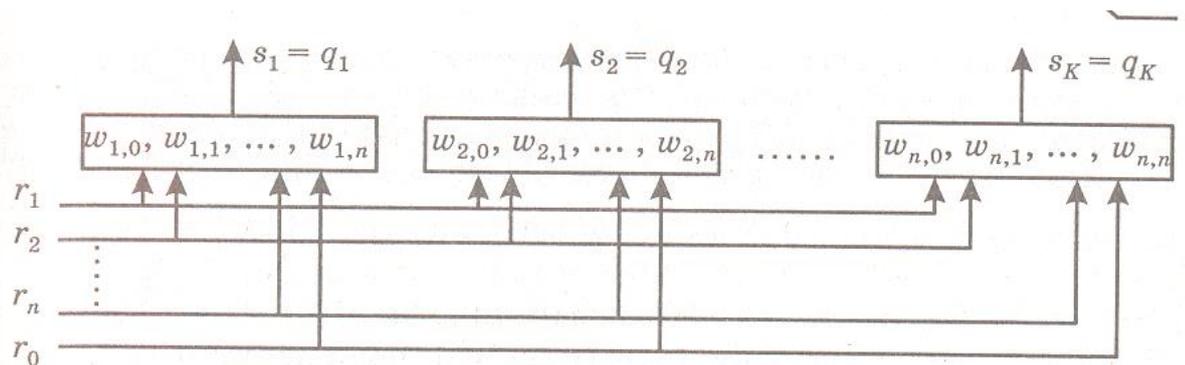


Рис. 9.3. Схематическое представление однослойной линейной ИНС

называется мадалина и имеет  $K$  выходов  $q_1, \dots, q_i, \dots, q_K$  и  $n+1$  входов  $r_0, r_1, \dots, r_j, \dots, r_n$  и может быть описана векторно-матричным соотношением:

$$\mathbf{q} = \mathbf{W}_1^{(K)} \mathbf{r}_1 + \mathbf{w}_0 \mathbf{r}_0 = \mathbf{W}^{(K)} \mathbf{r}. \quad (9.2)$$

В (9.2) обозначены: вектор выхода  $\mathbf{q} = \text{col}(q_1, \dots, q_i, \dots, q_K)$ ; вектор входа  $\mathbf{r}_1 = \text{col}(r_1, \dots, r_j, \dots, r_n)$ , а с учетом входа инициализации  $r_0$ , одинакового для всех адалин, вектор входа  $\mathbf{r}^T = (\mathbf{r}_1^T \mathbf{M}_b)$ . Матрица весовых коэффициентов  $\mathbf{W}^{(K)} = \|w_{ij}\|, i = \overline{1, K}, j = \overline{0, n}$ ; матрица  $\mathbf{W}_I^{(K)} = \|w_{ij}\|, i = \overline{1, K}, j = \overline{1, n}$ .

Таким образом, в матрице  $\mathbf{W}^{(K)}$  последний столбец есть вектор коэффициентов инициализирующих связей  $\mathbf{w}_0 = \text{col}(w_{1,0}, \dots, w_{K,0})$ . В соответствии с (9.2) линейная многослойная сеть типа мадалины осуществляет отображение  $\mathbf{r}_1 \in R_n$  в  $\mathbf{q} \in R$ .

### Статические многослойные нейронные сети

Структура статических многослойных нейронных сетей (МНС) изображена на рис. 9.4.

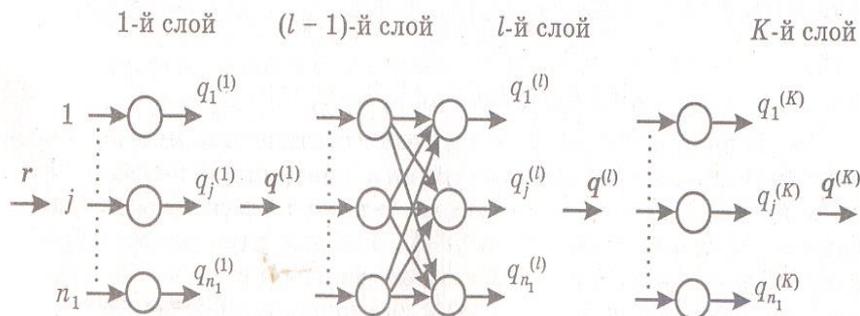


Рис. 9.4. Структурная схема статических МНС

В так называемых полносвязных гомогенных многослойных нейросетях выходы базовых элементов каждого слоя поступают на входы всех базовых элементов следующего слоя, а функция активации  $f(s)$  принимается одинаковой для всех БПЭ. Выходной слой многослойной сети выполняется в виде мадалины.

Входной слой является буферным для сигнала  $\mathbf{r}$ . Многослойная нейросеть может быть определена в символьной форме как  $N_{n_0, n_1, \dots, n_K}^K$ , где  $K$  – число слоев в сети;  $n_0$  – число входов сети;  $n_i$  ( $i = \overline{1, K-1}$ ) – число базовых элементов в  $i$ -х «скрытых» или промежуточных слоях;  $n_K$  – число базовых элементов в выходном  $K$ -ом слое и одновременно число выходов  $q_1, \dots, q_{n_K}$  многослойной нейросети. Промежуточный  $l$ -слой имеет  $n_l$  базовых процессорных элементов. Связи между базовыми элементами в слое отсутствуют. Выходы базовых элементов  $l$ -го слоя поступают на входы базовых элементов только следующего  $(l+1)$ -го слоя. Выход  $i$ -го элемента в  $i$ -м слое многослойной нейросети может быть определен также как и для любого базового элемента, в виде

$$q_i^{(l)} = f \left( \sum_{j=1}^{n_{l-1}} w_{i,j}^{(l)} q_j^{(l-1)} + w_{i,0}^{(l)} q_0^{(l-1)} \right) = f \left( s_i^{(l)} \right). \quad (9.3)$$

В векторной форме выход  $i$ -го слоя сети есть

$$\mathbf{q}_l^{(l)} = \mathbf{f} \left( \mathbf{W}_l^{(l)} \mathbf{q}_l^{(l-1)} + \mathbf{w}_0^{(l)} q_0^{(l-1)} \right), \quad (9.4)$$

где  $\mathbf{w}_0^{(l)} = \text{col} \left( w_{1,0}^{(l)}, \dots, w_{n_l,0}^{(l)} \right)$  – вектор весовых коэффициентов сигнала инициализации  $q_0^{(l-1)}$  в слое  $l$ , который для всех  $l = \overline{1, K}$  принимается, равным +1;  $\mathbf{q}_l^{(l)} = \text{col} \left( q_1^{(l)}, \dots, q_{n_l}^{(l)} \right)$ ,  $\mathbf{q}_l^{(l-1)} = \text{col} \left( q_1^{(l-1)}, \dots, q_{n_{l-1}}^{(l-1)} \right)$  – векторы выходов базовых процессорных элементов слоя  $l$  и выходов предыдущего  $(l-1)$ -го слоя, поступающих на входы базовых элементов слоя  $l$ . Для выходного  $K$ -го слоя имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_l^{(K)} &= \mathbf{W}_l^{(K)} \mathbf{q}_l^{(K-1)} + \mathbf{w}_0^{(K)}; \\ \mathbf{q}_l^{(K-1)} &= \mathbf{f} \left( \mathbf{W}_l^{(K-1)} \mathbf{q}_l^{(K-1)} + \mathbf{w}_0^{(K-1)} \right). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Соотношения (9.3) – (9.5) описывают статические многослойные нейросети с нелинейными функциями активации  $f(s)$  послойно. Функции  $s_i^{(l)}$  на  $i$ -ых выходах сумматоров базовых элементов слоя  $l$  называют дискриминантной функцией. В общем случае – это отрезок многомерного ряда Тейлора, и его наибольшая степень определяет порядок базовых элементов. Так соотношение (9.3) соответствует выходу элемента первого порядка, а вектор весовых коэффициентов соответствующего ряда Тейлора  $\mathbf{w}_i^{(l)} = \text{col}(w_{i,0}^{(l)}, \dots, w_{i,n_{l-1}}^{(l)})$  есть «память» базового процессорного элемента. Дискриминантная функция есть взвешенная сумма входов БПЭ с коэффициентами, равными значениям настраиваемых «весов»  $w_{i,j}^{(l)}$ . Дискриминантная функция разделяет входной вектор (паттерн входной активности) на классы – минимум на два класса в случае линейной сети с дискриминантной функцией первого порядка. В этом случае дискриминантная функция  $s_j = 0$  – дискриминантная линия, которая разделяет входное множество  $q_1^{(l-1)}, q_2^{(l-1)}, \dots, q_{n_{l-1}}^{(l-1)}$  на два подмножества:

$$q_j^{(l)} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_j > 0, \\ 0, & \text{если } s_j < 0. \end{cases}$$

Для элементов второго порядка дискриминантная функция определяется как

$$s_i^{(l)} = w_{i,0}^{(l)} + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} w_{i,j}^{(l)} q_j^{(l-1)} + \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \sum_{k=1}^j w_{j,k}^{(l)} q_k^{(l-1)} = \left( \mathbf{w}_i^{(l)} \right)^T \mathbf{q}_I^{(l-1)}, \quad (9.6)$$

где  $w_{i,0}^{(l)}, w_{i,j}^{(l)}, w_{j,k}^{(l)}$  ( $j = \overline{1, n_{l-1}}, k \leq j$ ) – компоненты вектора весовых коэффициентов  $i$ -го базового элемента в  $l$ -м слое сети, а вектор входа  $\mathbf{q}_I^{(l-1)}$  имеет вид

$$\mathbf{q}_I^{(l-1)} = \text{col} \left( 1, q_1^{(l-1)}, q_2^{(l-2)}, \dots, q_{n_{l-1}}^{(l-1)}, \left( q_1^{(l-1)} \right)^2, \left( q_2^{(l-1)} \right)^2, \dots, \left( q_{n_{l-1}}^{(l-1)} \right)^2 \right). \quad (9.7)$$

Из (9.6) и (9.7) следует, что в каждом  $l$ -м слое нейросети с элементами второго порядка наряду с линейным преобразованием выходов предшествующего слоя  $\mathbf{q}_I^{(l-1)}$  осуществляется билинейное преобразование этих же сигналов.

Нейронные сети с дискриминантными функциями высокого порядка позволяют разделять (классифицировать) входное множество на классы при помощи нелинейных разделяющих поверхностей. В частности, разделяющая поверхность  $s_i^{(l)} = 0$ , где  $s_i^{(l)}$  определяется соотношением (9.6), является разделяющей поверхностью второго порядка и получила название гиперквадратика.

БПЭ с дискриминантной функцией высокого порядка имеет существенно большее число «синаптических» связей и настраиваемых коэффициентов в составе вектора  $\mathbf{w}_i^{(l)}$  при одинаковом числе слоев и элементов в структурах многослойных нейросетей с базовыми элементами как первого, так и второго порядка. В последующем ограничимся обсуждением многослойных нейронных сетей с базовыми процессорными элементами первого порядка.

Определим связь между входом  $\mathbf{r}$  и выходом  $\mathbf{u} = \mathbf{q}^{(K)}$  нейросети с элементами первого порядка. Используя (9.4) и  $(n_l \times (n_{l-1} + 1))$  – матрицу весовых коэффициентов базовых элементов  $l$  – го слоя:

$$\mathbf{W}^{(l)} = \left[ \mathbf{w}_0^{(l)} \mathbf{M}_1^{(l)} \mathbf{M}_2^{(l)} \mathbf{M}_3^{(l)} \dots \mathbf{M}_{n_l}^{(l)} \right]^T = \left[ \left( \mathbf{w}_0^{(l)} \right)^T \mathbf{M} \left( \mathbf{w}_1^{(l)} \right)^T \right], \quad (9.8)$$

запишем в векторно-матричной форме выход  $l$  – го слоя:

$$\mathbf{q}_l^{(l)} = \mathbf{f} \left( \mathbf{w}_0^{(l)} q_0^{(l-1)} + \mathbf{W}_l^{(l)} \mathbf{q}_l^{(l-1)} \right) = \mathbf{f}^{(l)} \left( \mathbf{q}^{(l-1)} \right), \quad q_1^{(l)} = +1; l = \overline{1, K}. \quad (9.9)$$

В (9.9)  $\mathbf{f}^{(l)}$  определяет нелинейное преобразование каждой компоненты вектора  $\mathbf{q}^{(l-1)}$  так, как это определено соотношением (9.3).

Нелинейное рекуррентное уравнение, примененное последовательно для всех  $l = K, K - 1, \dots, 2, 1$ , позволяет установить связь между входом  $\mathbf{r}$  и выходом  $\mathbf{u} = \mathbf{q}^{(K)}$  сети в виде

$$\begin{aligned}
 u = q^{(K)} &= f^{(K)}(w_0^{(K)} + W_I^{(K)} f^{(K-1)}(w_1^{(K-1)} W_I^{(K-1)} f^{(K-2)} \times \\
 &\times (\dots w_0^{(l)} + W_I^{(l)} f^{(l-1)}(w_0^{(l-1)} W_I^{(l-1)} f^{(l-2)} \times \\
 &\times (\dots w_0^{(2)} + W_I^{(2)} f^{(1)}(w_0^{(1)} + w_1^{(1)} q^{(0)} \dots))) \dots)) = F(r).
 \end{aligned}
 \tag{9.10}$$

Из (9.10) следует, что многослойная нейросеть выполняет в силу своей структуры нелинейное преобразование  $F(r)$  входного вектора  $r$  в зависимости от векторов весовых коэффициентов  $w^{(l)}$  и нелинейных функций активации  $f^{(l)}$ .

### 3. Общая характеристика алгоритмов обучения искусственных нейросетей

Под обучением искусственной нейронной сети понимается процесс настройки весовых коэффициентов  $w_{i,j}$  ее базовых процессорных элементов, результатом чего является выполнение сетью конкретной задачи - распознавания, оптимизации, аппроксимации, управления. Достижение подобных целей формализуется критерием качества  $Q$ , минимальное значение  $\min_w Q = Q^*$  которого соответствует наилучшему решению поставленной задачи.

Многообразие алгоритмов обучения определяется функциональным назначением сети, ее архитектурой и избранной стратегией обучения. Различают три основные стратегии обучения: «с учителем», «без учителя» (т. е. с самообучением) и смешанную. В первом случае нейросеть настраивается по заданной обучающей выборке в соответствии с принятым правилом или алгоритмом. Во втором случае заранее не требуется знать правильный результат обучения и в процессе настройки весовых коэффициентов образуется внутренняя структура активированных базовых элементов, соответствующая предъявленному вектору входа сети. При смешанной стратегии обучения часть весовых коэффициентов  $w_{i,j}$  настраивается по заданной обучающей выборке, а другая - в соответствии с правилами обучения «без учителя».

Перечисленным стратегиям соответствуют конкретные алгоритмы обучения искусственных нейросетей. Каждый алгоритм ориентирован на конкретную архитектуру сети и применим для решения определенного типа задач. Так, одно- и многослойные сети обучаются по первой стратегии, и это применимо для решения

задач классификации, аппроксимации и управления. Самообучение используется в сетях Хопфилда, самоорганизующихся картах (сетях) Кохонена, сетях ART (adaptive resonance theory); смешанная стратегия обучения применяется в так называемых RBF-сетях с радиально-базисными функциями активации.

Общим для всех модификаций алгоритмов является их рекуррентный характер, а сами алгоритмы обучения представляют собой линейные или чаще нелинейные дифференциальные (или разностные) уравнения первого порядка, составленные по определенному правилу. Эти правила имеют эвристический характер, не всегда вытекающий из принципов функционирования бионейронов и нервной сети живого организма.

Наибольшее распространение получили следующие правила обучения искусственных нейросетей: правило Хебба;  $\delta$ -правило; обучение с «конкуренцией» или методом соревнования; ART-правило (обучение «без учителя»); «больцманово» обучение; генетические алгоритмы.

Правило Хебба - исторически первая предложенная концепция обучения нейросети «без учителя». В соответствии с ней весовые коэффициенты  $w_{i,j}$  синаптических связей увеличиваются, если активированы (возбуждены) оба базовых элемента - источник возбуждения и приемник сигнала возбуждения. Тем самым регулярно используемые входы и синаптические связи активируются за счет увеличения «своих» весовых коэффициентов в большей степени, чем остальные нейроны сети. Модель обучения Хебба дает объяснение способности нейросети к привыканию и обучению этой способности через повторение. Правило или алгоритм Хебба выражается как

$$w_{i,j}(k+1) = w_{i,j}(k) + \gamma q_j q_i,$$

где  $w_{i,j}(k)$  - значение весового коэффициента, изменяющегося от нейрона  $i$  к нейрону  $j$  до настройки;  $w_{i,j}(k+1)$  - то же, но после настройки;  $q_i, q_j$  — выходы нейронов  $i, j$  соответственно;  $\gamma > 0$  — коэффициент «усиления» алгоритма;  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Правило Хебба может быть применено для обучения простых сетей типа мадалины, рекуррентных сетей Хопфилда, оно положило начало процессу

«конструирования» множества подобных правил обучения нейросетей «без учителя» и, в частности, на этом пути был получен удачный алгоритм обучения «с конкуренцией» для сети Кохонена (правило Кохонена). Важной особенностью правила Хебба является то, что изменения синаптических весов  $w_{i,j}(k)$  зависят только от активности базовых элементов, связанных между собой данным синапсом.

$\delta$ -правило реализует стратегию обучения «с учителем», или супервизорного обучения. «Учитель» - это целевой, желаемый выход базового элемента типа перцептрона  $u^*$ , а  $q$  - реальный выход. Для настройки весовых коэффициентов базовых элементов используется ошибка обучения  $\delta = u^* - q$  в алгоритме градиентного спуска:

$$w_i(k+1) = w_i(k) - \gamma \delta r_i, \quad \gamma > 0,$$

где  $r_i$  - вход  $i$ -й синаптической связи базового элемента (см. рис. 9.2).

Обобщение  $\delta$ -правила на многослойные нейросети приводит к методу обратного распространения ошибки - методу ВР.

Обучение «конкуренцией» в отличие от правила Хебба, по которому могут возбуждаться одновременно множество базовых элементов выходного слоя, предусматривает «соревнование» этих элементов за право активации. Такая стратегия получила название «победитель берет все». После активации в процессе настройки изменяются лишь «победившие» элементы. Известно, что такая же стратегия обучения присуща биологическим нейронным сетям в отличие от обучения по  $\delta$ -правилу. Обучение «с конкуренцией» используется в ART-сетях, сетях Кохонена для решения задач классификации зрительных, звуковых образов, сжатия данных, кластеризации и категоризации внутри класса.

Рассмотрим базовый алгоритм обучения многослойных нейронных сетей, получивший преимущественное распространение при использовании искусственных нейросетей в задачах управления.

### 3.1. Метод и алгоритм обратного распространения ошибки

Метод обратного распространения ошибки - метод ВР разработан для обучения статических нелинейных многослойных нейросетей и использует технологию последовательной и послойной настройки базовых процессорных элементов, начиная с последнего, выходного слоя и заканчивая настройкой элементов первого слоя. «Урок» обучения искусственной нейросети может быть повторен необходимое число раз. Для настройки весовых коэффициентов базовых элементов применяется  $\delta$ -правило в его общей форме: в виде алгоритма градиентного спуска для минимизации критерия обучения  $Q(e_u)$ . Здесь  $e_u = u^* - u = u^* - q^{(K)}$  - вектор ошибки обучения сети относительно желаемого (эталонного) выхода  $u^*$  при нелинейном согласно (1.10) преобразовании входного вектора  $r$  в выходной вектор  $u = q^{(K)}$  последнего слоя  $K$ . Ошибка  $e_u$  явным образом зависит от коэффициентов  $w_{i,j}^{(K)}$  и может быть использована как аргумент функционала  $Q$  для настройки базовых элементов  $K$ -го слоя. Явной зависимости вектора  $e_u$  и функции  $Q(e_u)$  от весовых коэффициентов  $w_{i,j}^{(l)}$   $l = \overline{(1, K-1)}$  нет. Поэтому в случае использования критерия обучения  $Q(e_u)$  для настройки коэффициентов  $w_{i,j}^{(l)}$ , ошибка  $e_u$  в процедуре обучения многослойной нейросети пересчитывается последовательно в обобщенные ошибки  $\sigma^{(l)}$ , явно зависящие от значений  $w_{i,j}^{(l)}$ . Настройка коэффициентов  $w_{i,j}^{(l)}$  осуществляется по  $\delta$ -правилу, где используются обобщенные ошибки  $\sigma^{(l)}$ . Очевидно, что для слоя  $K$  ошибка  $\sigma^{(K)} = e_u(w^{(K)})$ . В методе ВР далее используется локальный квадратичный функционал  $Q(\sigma) = 0,5\sigma^T\sigma$ . Минимизация  $Q(\sigma)$  по настраиваемым весовым коэффициентам  $w_{i,j}^{(l)}$   $l = \overline{(1, K-1)}$  методом градиентного

спуска с пересчетом ошибки  $\sigma^{(K)} = e_u(w^{(K)})$  для слоя  $K$  в ошибку  $\sigma^{(l)} = e(w^{(l)})$  для слоев  $l = K-1, K-2, \dots, 1$  определяет суть ВР-технологии обучения многослойных нейросетей.

### 3.2. Алгоритм обучения нейронной сети в реальном времени

### Возможные подходы к синтезу алгоритма обучения

Функционирование обучаемых статических многослойных нейронных сетей происходит в два этапа. На этапе обучения в процессе настройки весовых коэффициентов базовых элементов на минимум критерия обучения  $Q(e(w, k))$  сеть для заданного входа  $r(k) (k = \overline{1, N})$  формирует аппроксимацию  $u(k)$  обучающей функции  $u^*(k)$  для тех же значений  $k = \overline{1, N}$ . На этапе фиксированного рабочего режима обученная сеть с постоянными весовыми коэффициентами при поступлении на ее входы функции  $r(k)$ , близкой к  $r(k)$  на этапе обучения, практически без ошибок восстанавливает функцию  $u(k)$  на выходах базовых элементов выходного слоя.

Для реализации этого свойства в нейросетях необходимо задание всей обучающей функции (множества) объемом  $N$ . В случае управления - это задание оптимального в каком-либо смысле управления  $u^*(k)$  на интервале времени управления  $k = \overline{1, N}$  для формирования ошибки обучения  $e_u(k) = u^*(k) - u(k)$ . Такой режим работы сети называют автономным (режим off-line).

Если же статическая нейронная сеть включается в систему управления динамическим объектом с заранее не известной оптимальной траекторией управления  $u^*(k)$  и  $k \rightarrow \infty$  и если в качестве ошибки обучения принимается ошибка управления, то необходимое условие обучения такой сети по методу ВР нарушается. Это объясняется тем, что ошибка обучения сети и она же ошибка управления (например, ошибка воспроизведения заданной функции  $r(k)$  на выходе инерционного объекта) является функцией, развертывающейся на интервале времени  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Использование в алгоритме ВР вместо ошибки

$e_u(k) (k = \overline{1, N})$  ошибки  $e_y(k) = f(r(k), y(k - v)) (k \rightarrow \infty \Rightarrow y(k))$  - выход объекта управления,  $v = 1, 2, k - 1$ ) приводит к неудовлетворительному качеству обучения. Для использования многослойной нейросети в реальном масштабе

времени необходимо ввести в нее динамику, учитывающую текущие значения измерительной информации.

В принципиальном плане можно выделить три подхода к обработке временной последовательности статическими многослойными нейросетями. Во-первых, об использовании для этой цели рекуррентных сетей, в частности сетей Хопфилда. Стандартная архитектура этой однослойной динамической по своей природе сети обладает аппроксимирующими свойствами, необходимыми для воспроизведения желаемых функций времени. Такая сеть может быть интерпретирована как распределенная система БПЭ, настройкой весовых коэффициентов которых формируется устойчивая совокупность активированных состояний - аттракторов. Тем самым формируется память нейросети при предъявлении на ее входы исходного множества сигналов.

Во-вторых, в структуру базовых процессорных элементов или нейронной сети можно ввести линейные динамические звенья  $W(p)$  или  $W(z^{-1})$ . Например, можно включить динамическое звено между выходом сумматора базовых элементов и входом нелинейного элемента, реализующего функцию активации  $f(s)$ . В схеме стандартного базового элемента, изображенного на рис. 9.4,  $W(p) = 1$ . В качестве непрерывных динамических звеньев  $W(p)$  можно использовать типовые звенья  $p^{-1}, (p+a)^{-1}, e^{-ap}$  и их соединения. Сеть, образованная из таких динамических элементов, также является динамической.

Другой способ состоит в применении одноступенчатых элементов задержки в структуре статической нейросети. Пример структуры такой динамической многослойной нейросети дан на рис. 9.6. Здесь статическая нейросеть выполняет нелинейное преобразование  $F(\mathbf{R}_N, \mathbf{U}_N, \mathbf{w}_i^{(l)})$  векторов:

$$\mathbf{R}_N(k-n+1) \text{col}[\mathbf{r}(k)\mathbf{M}(k-1)\mathbf{M}\mathbf{M}(k-n+1)],$$

$$\mathbf{U}_N(k-n+1) \text{col}[\mathbf{r}(k)\mathbf{M}(k-1)\mathbf{M}\mathbf{M}(k-n+1)]$$

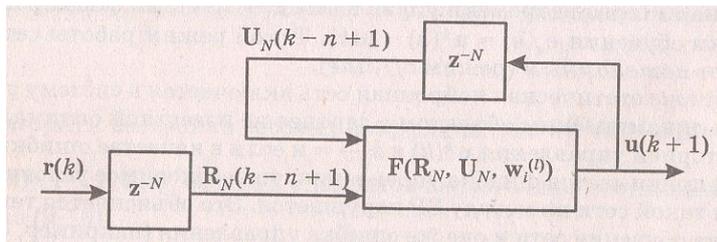


Рис. 9.6. Структура рекуррентной многослойной нейросети с элементами задержки

где символом  $N$  обозначен сдвиг во времени векторов  $\mathbf{r}(k)$  и  $\mathbf{u}(k)$  на  $0, 1, \dots, N-1$  периодов дискретизации  $\Delta t$  в блоках элементов задержки  $z^{-N}$ . Такая рекуррентная нейросеть реализует динамическую нелинейную модель многомерного объекта управления, описываемую нелинейным разностным уравнением  $n$ -го порядка:

$$\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(k-n+1); \mathbf{r}(k), \mathbf{r}(k-1), \mathbf{r}(k-n+1)]$$
, где векторная нелинейная функция  $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{F}(\cdot)$  формируется сетью в процессе обучения путем настройки весовых коэффициентов  $w_i^{(l)}$ .

В-третьих, динамика может быть введена в алгоритм обучения статической нейросети [1]. В этом случае аргумент функции обучения  $\mathcal{Q}(e(t))$  изменяется в силу уравнений объекта или его желаемой модели. Алгоритм обучения в некотором смысле играет роль «модулирующей» функции нелинейного статического преобразования входной функции  $\mathbf{r}(t)$ , выполняемого сетью.

Две особенности следует отметить у последнего подхода. Введение динамики в алгоритм обучения статической нейросети придает ей свойства динамической сети, но без использования обратных связей, как в сети Хопфилда или как в сетях с динамическими базовыми элементами. Процесс обучения по динамическому алгоритму позволяет объединить в один оба отмеченных ранее этапа функционирования статической нейросети, что существенно при использовании ее в качестве регулятора в системах управления. По этим причинам для решения практических задач управления предпочтителен третий подход, позволяющий обучать статические многослойные нейросети в режиме реального времени в трех модификациях: 1) с использованием уравнений состояния динамического объекта управления (или его явной модели); 2) с использованием в стандартном алгоритме ВР прогноза ошибки  $\mathcal{E}(t)$ ; 3) с использованием для

обучения нейронной сети агрегированных макропеременных, отображающих желаемые режимы работы системы управления. Так как нейронная сеть осуществляет настраиваемое нелинейное преобразование входных переменных в процессе обучения, то применение обучаемых МНС наиболее оправданно в задачах управления многомерных нелинейных объектов с изменяющейся во времени динамикой.

В последующем рассматривается последовательное соединение обучаемой многослойной нейронной сети и объекта управления (рис. 9.7).

Схему, приведенную на рис. 9.7, можно воспринимать как систему воспроизведения входной функции  $r(t)$  на выходе динамического объекта управления. В этом случае  $r(t)$  может быть эталонной траекторией для разомкнутой относительно ее входа системы управления. Одновременно  $r(t)$  будет и обучающей траекторией для нейросети. Обучение сети осуществляется путем настройки векторов весовых коэффициентов  $w_i^{(l)}$  нейронов в  $l$ -х слоях сети ( $l = \overline{1, N}$ ) с учетом условия минимума критерия обучения  $Q = \left( e \left( w_i^{(l)}, t \right) \right)$ . В результате с момента  $t_0$  формируется управляющий сигнал  $u(t)$ , при котором  $y(t) \xrightarrow{t_0 \rightarrow t_1} r(t)$ . Интервал  $(t_0, t_1)$  составляет цикл обучения сети и одновременно это интервал времени, за которое завершается переходный процесс в системе из обучаемой нейросети и динамического объекта.

Структура на рис. 9.7 известна как схема «инверсного обучения», или «инверсного адаптивного управления без введения жесткой обратной связи».

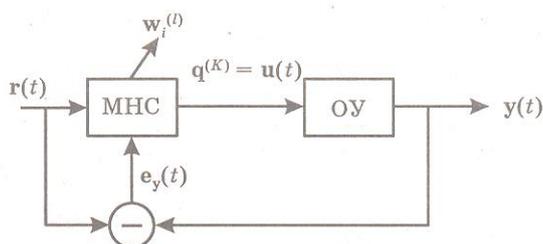


Рис. 9.7. Схема обобщенного настраиваемого объекта с МНС:

$r(t)$  – вектор входа обучаемой МНС;  $y(t)$  – вектор выхода ОУ;  $e_y(t) = r(t) - y(t)$  – ошибка обучения нейронной сети

При  $e_y(t) \equiv 0$ , т.е. когда  $y(t) \equiv r(t)$ , «идеальное» управляющее воздействие  $u^*(t) = A^{-1}r(t)$  ( $A$  – оператор ОУ). Нейросеть, обученная на достижение нулевой ошибки  $e_y(t)$ , ведет себя как инверсная модель объекта управления. Будем рассматривать это наиболее простое соединение сети с динамическим объектом как обобщенный настраиваемый объект (ОНО) в составе систем управления. Простейшей из них будет сам ОНО, воспроизводящий входной сигнал  $r(t)$  на выходе объекта управления и обладающий, в силу свойств нейросети, адаптивными свойствами.

### **Обучение многослойных нейронных сетей с использованием макропеременных состояния**

Обучаемая многослойная нейронная сеть с нелинейными функциями активации осуществляет настраиваемое нелинейное преобразование многомерной информации. Динамика такого преобразования описывается векторными нелинейными дифференциальными уравнениями, общая размерность которых определяется произведением числа настраиваемых весовых коэффициентов синаптических связей и числа нейронов сети. Даже для малоразмерных (по числу нейронов в скрытых слоях) нейросетей, например, порядка 3-5 с числом настраиваемых коэффициентов 3, эквивалентная размерность динамической модели сети составляет значение 9-15. Нелинейной динамической структуре обучаемой нейросети соответствуют виртуальные пространства состояний высокой размерности. Вместе с нелинейным объектом настраиваемая многослойная нейронная сеть создает сложную и изменяемую в процессе обучения топологию нелинейного фазового пространства высокой размерности, что и является предпосылкой к организации открытых систем управления со сложным динамическим поведением.

В соответствии с концепцией синергетического управления в таких системах существуют аттракторы и репеллеры, находящиеся в сложной нелинейной зависимости друг с другом [3]. Тогда цель адаптивного управления может быть поставлена, как такое обучение МНС, когда изображающая точка фазового пространства системы асимптотически переходит от начального аттрактора к следующему аттрактору более низкой размерности, вплоть до заданного целевого

аттрактора, которому соответствует желаемое техническое состояние объекта. Настраиваемая многослойная нейросеть выполняет функцию адаптивного регулятора состояния, реализуя процесс генерации обратной связи на многообразиях. Принципиальным является тот факт, что для настройки нейросети не обязательно задание параметризованной нелинейной модели. Для обучения сети используется макроинформация в виде агрегированных макропеременных или технологических инвариантов для данного класса объектов. Для формирования макропеременных (это одна из проблемных задач нейроуп-равления) используются измерения выходов объекта или векторов состояния - в более общем случае.

Аналитический синтез оптимального закона управления как прототип нейросетевой реализации целесообразно выполнять в соответствии с синергетической теорией управления - на основе метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов. (АКАР). Концепция подхода к синтезу нейросетевых систем адаптивного управления включает следующие положения:

1. Адаптивный закон управления формируется в классе изменяемых во времени нелинейных функций не только для классов нелинейных, но и для класса линейных объектов с изменяющимися во времени динамическими свойствами.

2. Размерность фазового пространства нелинейного адаптивного регулятора должна быть не меньше, а больше размерности расширенного фазового пространства нелинейного объекта и учитываемой динамики внешней среды его функционирования.

3. Формирование нелинейных адаптивных законов должно основываться, главным образом, на использовании текущей сигнальной информации, получаемой с датчиков на выходах объекта.

4. В качестве адаптивного регулятора следует выбирать структуру, потенциально способную производить полную реконструкцию достоверной модели динамической системы, либо изначально содержать в себе возможные решения для максимально широкого класса задач, либо сочетать решение обеих задач.

5. Техническая база для реализации адаптивных регуляторов - искусственные нейронные сети, в частности - нелинейные многослойные нейронные сети.

Базовые функциональные схемы адаптивных систем (рис. 9.9) не выходят за рамки двухуровневых структур адаптивных систем прямого действия. Но существенно различаются функции блоков такой системы. Блок, обозначенный как «Алгоритм ...», строится на основе информации о классе математических моделей реального нелинейного объекта управления и это - перестраиваемая часть адаптивного нейрорегулятора. Блок «Регулятор» должен обладать способностью реализовать функцию из класса и это - неизменяемая часть нейро-

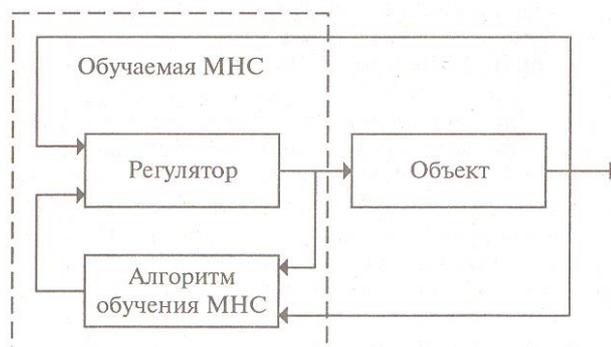


Рис. 9.9. Типовая функциональная схема нейросетевой системы управления регулятора для того класса нелинейных моделей объекта, для которых предназначен типовой адаптивный регулятор. Полезно провести параллель между типовыми ПИД-регуляторами и рассматриваемой структурой. В ПИД-регуляторе неизменяемая часть - это аналоговая или цифровая схема с нормированными сигналами вход/выход, формирующая компоненты ПИД-закона, а настраиваемая часть - параметры ПИД-закона под конкретный объект в классе типовых линейных моделей. В адаптивном нейрорегуляторе неизменяемая часть выполняется в виде настраиваемой МНС, потенциально «содержащей» множество нелинейных функций управления, а перестраиваемая часть формируется на основе типовой макроинформации о состоянии конкретного объекта в классе и типового алгоритма настройки весовых коэффициентов синаптических связей искусственных нейронов (или библиотеки типовых алгоритмов). Из предложенного подхода к построению типового адаптивного нейроконтроллера следует, что принципиальная возможность такого построения базируется на использовании трех типовых решений:

- типовой однородной вычислительной структуры регулятора Р на базе обучаемой многослойной нейронной сети;
- типовой информации о состоянии объекта в виде макропеременных - инвариантов фазового пространства объекта управления или системы в целом;
- типовых алгоритмов обучения нейросети.

Естественно, что другие типовые решения, о которых речь шла в начале раздела, также необходимо использовать в реализации нейрорегулятора.

Обобщенная функциональная структура нейросетевых систем управления

В общем виде уравнения состояния, описывающие функционирование системы управления с нейросетью соответствуют системе уравнений (9.42). Примем в качестве обобщенной ошибки  $\sigma$  левую часть функциональных уравнений семейства экстремалей (9.34) для сопровождающего функционала (9.33), минимизация которого приводит к совмещению в единый динамический процесс обучение МНС и формирование алгоритма управления объектом (9.27).

Обобщенная структурная схема НСУ изображена на рис.9.13.

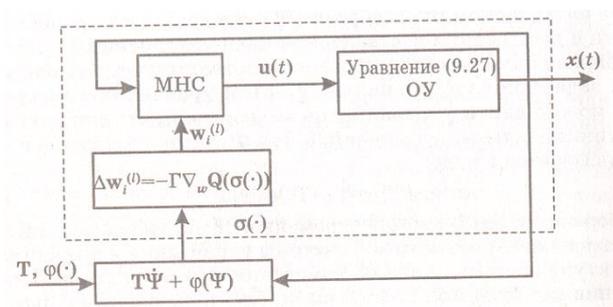


Рис. 9.13. Обобщенная функциональная схема нейросетевой системы управления

Система обладает следующими свойствами:

- обеспечивает предельный переход (9.36) для объекта (9.27);
- гарантирует оптимальное в смысле выбранного критерия (9.33) движение изображающей точки к многообразию  $\Psi = 0$ ;

- параметрическое управление системой (задание параметров  $T$  и вида функций  $\varphi$ ) дает возможность определять качество и форму переходных процессов;
- задание функциональных уравнений (9.34) в общем виде как устойчивого подсемейства экстремалей критерия (9.33) и использование в уравнениях (9.34) только измерительной информации обеспечивает независимость решения от конкретных параметров объекта и изменения его структуры, при условии, что данные изменения не противоречат физической реализуемости необходимого решения.

## ЛЕКЦИЯ №7

### ТЕМА «МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ»

#### 1. Прямые методы параметрической идентификации. Задача идентификации в условиях неопределенности

К прямым методам параметрической идентификации относят те методы, в которых неизвестные параметры дискретной во времени модели определяются на основе того или другого метода (обычно приближенного) решения системы уравнений, получаемых путем подстановки к оператору модели последовательностей значений входных и выходных величин реального объекта, полученных в дискретные моменты времени. Отыскиваемые параметры считаются постоянными на протяжении интервала идентификации (к которому относятся измеренные значения  $x, y$ ). Таким образом, при прямых методах идентификация выполняется в классе моделей типа

$$y(k) = F(x(k), a, k), \quad (1.3)$$

где  $F$  – оператор, структура которого полностью задана;  $a$  – вектор параметров;  $k$  – дискретное время.

Укажем, что оператор  $F$  может содержать неизвестные функции (например, ядра интегральных операторов или еще более мощные множества), в частности, НМ и функции, которые реализуют математические, логические и другие операции на этих множествах, в том числе правила «if-then-else»). Если учесть, что оператор  $F$  может быть оператором с «памятью» как в отношении к  $x$ , так в отношении к  $y$ , то он может быть эквивалентным векторному разностному нелинейному уравнению вида:

$$F_{\text{out}}(y[k], \dots, y[k-d], a, k) - F_{\text{in}}(x[k], \dots, x[k-r], a, k) = 0, \quad (1.4)$$

где  $F_{\text{out}}, F_{\text{in}}$  – векторные функции указанных векторных аргументов;  $d, r$  – неотрицательные числа ( $d, r > 0$ ).

Выражение (1.4) является довольно общим описанием разностной детерминированной модели идентифицированного объекта. Наибольший интерес представляют собой такие случаи:

- прямая идентификация статического объекта с линейными входными параметрами;
- метод сумм произведений;
- метод наименьших квадратов.

Традиционно рассматривают случай (1.3), который представляется как:

$$y[k] = a^{\delta} \varphi[x[k], k], \quad (1.5)$$

где  $a^{\delta}$  – вектор неизвестных постоянных параметров;  $y[k], x[k]$  – векторные выходные и входные сигналы модели;  $\varphi[x[k], k]$  – известная векторная базисная функция.

В скалярной форме

$$y[k] = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j[x[k], k]. \quad (1.6)$$

Известно [4], что самый простой, с формальной точки зрения, метод идентификации состоит в следующем. Предполагают, что в эксперименте

идентификации выполняется  $N$  измерений  $x$  и  $y$ , для моментов времени  $k = 1, \dots, N$ . В таком случае уравнение (1.6) для  $y$  принимает матричный вид:

$$y^N = \Phi_N a,$$

где  $y^N$  – вектор-столбец, который составлен из  $N$  скаляров

$$y^N = [y^1, y^2, \dots, y^N]^T; \Phi – матрица вида:$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 [x^{[1,1]}] & \dots & \Phi_N [x^{1,N}] \\ \mathbf{M} & \dots & \mathbf{M} \\ \Phi_1 [x^{[N,1]}] & \mathbf{L} & \Phi_N [x^{[N,N]}] \end{bmatrix}.$$

Если матрица  $\Phi$  не вырождена, то  $a$  имеет вид

$$a = \Phi^{-1} y^{[N]}.$$

Однако на практике такие алгоритмы прямой идентификации считаются в общем случае неработоспособными. Это связано с плохой обусловленностью матрицы  $\Phi$  и наличием случайных погрешностей измерений. Поэтому считается необходимым преобразовывать полученную систему уравнений в систему нормальных уравнений Гаусса с помощью специальных методов статистической обработки. Однако нормальные уравнения Гаусса также не гарантируют в общем случае хорошей обусловленности матрицы  $\Phi$ .

Метод сумм произведений разрешает повысить обусловленность матрицы  $\Phi$  и состоит в том, что уравнения (1.6) умножают на  $\psi_\mu(x[k], k)$ , и, обозначив эту величину через  $\psi_\mu[k]$ , выполняют операцию получения суммы по  $k$  от 1 до  $N$ . В этом случае получаем:

$$\sum_{k=1}^N y[k] \psi_\mu[k] = \sum_{k,i} \Phi_i[k] \psi_\mu[k] a_i.$$

Обычная матрица  $\sum_{k=1}^N \varphi_i[k] \psi_{\mu}[k]$  имеет размер  $N \times N$  и обусловлена лучше, чем матрица  $\Phi$  в (1.6). В случае невырожденности матрицы имеем решение:

$$a = \left[ \sum_{k=1}^N \varphi_i[k] \psi_{\mu}[k] \right]^{-1} \sum_{k=1}^N y[k] \psi_{\mu}[k].$$

В данном методе, кроме того, что полученная матрица не всегда имеет хорошую обусловленность, она также строго требует, чтобы число параметров совпадало с числом измерений, что на практике выполняется далеко не всегда.

Метод наименьших квадратов (МНК) не является критичным к количеству измерений, и в общем случае их количество может быть больше или меньше количества неизвестных параметров. Допускают, что объекты в этом случае можно описать уравнением вида (1.6) [4, 14, 20]; входная (в общем случае векторная) величина объекта измеряется точно для  $k = 1, \dots, L$ , а выходная величина со случайной погрешностью  $\eta[k]$ , значения которой в моменты времени « $k$ » являются независимыми. Идентификацию выполняют в терминах модели

$$y[k] = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x[k]) + \eta[k].$$

Согласно МНК наилучшая оценка отвечает выражению

$$\hat{a} = \underset{a}{\operatorname{argmin}} E \left\{ \left[ \sum_{k=1}^L [y[k] - a^T \varphi(x[k])] \right]^2 \right\},$$

где  $E$  – математическое ожидание на распределение величины  $\eta$ .

Раскрывая последнее выражение, записывая необходимые и достаточные условия минимума квадратичной функции и считая, что матрица

$$\left[ \sum_{k=1}^L \varphi_i(x[k]) \psi_{\mu}(x[k]) \right]$$

не является вырожденной, получаем, что

$$\hat{a} = \underset{a}{\operatorname{argmin}} E \left\{ \left[ \sum_{k=1}^L [y[k] - a^T \varphi(x[k])] \right]^2 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что последнее выражение для  $\hat{a}$  совпадает при  $L = N$  с выражением для  $\hat{a}$ , полученным методом сумм произведений.

Подводя итоги приведенного анализа прямых методов идентификации, можно утверждать следующее:

- Основным недостатком их применения является то, что матрица системы уравнений, решение которой позволяет получить параметры идентификации, в практическом большинстве случаев является вырожденной, что не позволяет получить точного решения СЛАУ с помощью общепринятых (методы Гаусса, Крамера, Зайделя) или итерационных методов (методы Якоби, МНК и др.).
- Существенно повысить эффективность прямых методов идентификации возможно путем разработки методов решения плохо обусловленных СЛАУ.

### Задача идентификации в условиях неопределенности

Задача идентификации в теоретико-множественной постановке для УН формулируется как поиск некоторого оператора  $F^m[x(t)]$  (пометка  $m$  означает «модельный»), который должен быть наилучшим в определенном смысле и определенным из ранее указанного класса операторов и отображать (аппроксимировать) оператор  $F[*]$  (оператор реального объекта) на указанных множествах сигналов. Тогда уравнение модели представится как

$$y(t) = F^m[x(t)],$$

где  $x(t), y(t)$  – входные и выходные сигналы объекта;

$y(t) = \{y_j(t)\}, j = 1, 2, \dots, J; x(t) = \{x_i(t)\}, i = 1, 2, \dots, I$  – некоторые множества, которые в общем случае могут быть нечеткими, т.е.

$y_j \stackrel{def}{=} \{y_j^p / \mu(y_j^p)\}$ ,  $p = 1, \dots, P$ ,  $\mu(y_j^p) \rightarrow [0, 1]$  – функция принадлежности (ФП), которая определяет в частном случае субъективную вероятность принадлежности  $y_j^p$  к  $y_j$ ; аналогично для входа  $x_i \stackrel{def}{=} \{x_i^p / \mu(x_i^p)\}$ ,  $p = 1, \dots, P$ ,  $\mu(x_i^p) \rightarrow [0, 1]$ . (см. рис. 1.3).

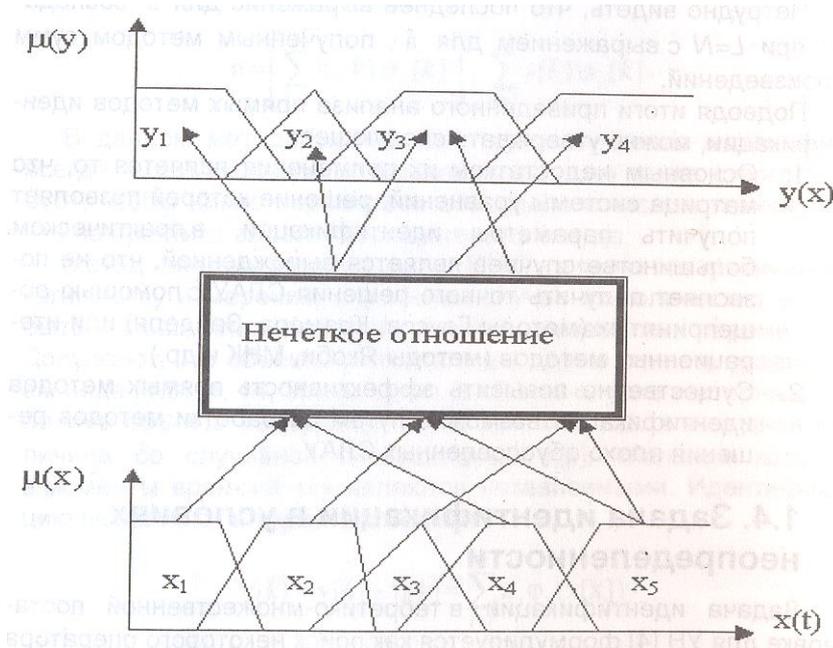


Рис. 1.3. Общая схема модели управления в условиях неопределенности

Одна из постановок задач определения оператора  $F^m[*]$  приводится в [8], где предложено выбирать такой оператор из интервала, который определен «возможностью» и «необходимостью». В этом случае, если данные «вход-выход» имеют вид

$$(X_j, Y_j) = (x_{j1}, \dots, x_{jn}; Y_j), j = 1, \dots, J,$$

где  $x_j$  –  $j$ -й входной вектор;  $Y_j$  – соответствующий интервал выхода, который имеет центр  $y_j$  и радиус  $e_j$ , т.е.

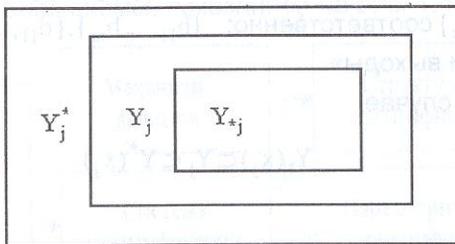
$$Y_j = (y_j, e_j),$$

то модели «возможности» и «необходимости» имеют соответственно вид:

$$\begin{cases} \forall j = 1, \dots, J; \\ Y^*(x_j) = A_0^* + A_1^* x_{j1} + \dots + A_n^* x_{jn}; \\ Y_*(x_j) = A_{*0} + A_{*1} x_{j1} + \dots + A_{*n} x_{jn}, \end{cases}$$

где  $A_i^*$  и  $A_{*i}$  – интервалы;  $A_i^* = (a_i^*, c_i^*)$ ,  $A_{*i} = (a_{*i}, c_{*i})$ .

Расчетный наблюдаемый интервал находится между «возможным» и «необходимым». Эти отношения могут быть отображенными в виде:



Применение идеологии НМ к задачам идентификации или в общем случае к задачам моделирования требует:

- Числовых значений переменных;
- Адекватного использования лингвистических переменных (ЛП);
- Описания простых отношений между переменными на уровне «if-then-else» нечетких правил;
- Формулирования комплекса отношений через алгоритмы нечеткого вывода.

Способность (возможность) принятия решения в нечеткой системе зависит от структуры базы знаний и механизма нечеткого вывода. Для многих случаев представления многомерной системы «вход-выход» может быть реализованным существованием «if-then-else» правил с переменными, которые играют роль предшественников и преемников (причина  $\rightarrow$  следствие) с  $m$ -предшественниками,  $n$ -преемниками и  $k$ -правилами (см. рис. 1.3).

Система правил, которые характеризуют объект, может быть, в частности, записана в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } u_1 \text{ is } b_{11} \text{ and } u_2 \text{ is } b_{12} \text{ and...and } u_r \text{ is } b_{1r} \\ \text{then } v_1 \text{ is } d_{11} \text{ and } v_2 \text{ is } d_{12} \text{ and...and } v_s \text{ is } d_{1s} \\ \text{also...also} \\ \text{if } u_1 \text{ is } b_{n1} \text{ and } u_2 \text{ is } b_{n2} \text{ and...and } u_r \text{ is } b_{nr} \\ \text{then } v_1 \text{ is } d_{n1} \text{ and } v_2 \text{ is } d_{n2} \text{ and...and } v_s \text{ is } d_{ns} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s$  – входные и выходные переменные; множества  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  и  $\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$  с  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  и  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  соответственно;  $\{b_{11}, \dots, b_{nr}\}, \{d_{11}, \dots, d_{ns}\}$  – значения ЛП «входы и выходы».

В общем случае

$$Y_*(x_j) \subseteq Y_j \subseteq Y^*(x_j)$$

или

$$\text{if } A_{*j} \subseteq A_i^* \text{ then } Y_*(x_j) \subseteq Y^*(A_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Множество правил, которые оперируют со значениями ЛП «вход-выход» являются аналогами систем уравнений, которые используют для представления линейных или нелинейных систем. Укажем, что множества правил могут быть не только аналогами системы уравнений, но могут быть собственно системами уравнений с НП [5,6]. Это открывает новые возможности решения задач управления в УН прямыми методами, которые связаны с необходимостью решения именно СЛАУ.

Как указано в постановке задачи, в работе «вход-выход» системы (модели) всегда представлены в виде НМ. Дополнительное утверждение об интервале существования оператора  $F[*]$  в границах «возможность-необходимость» накладывает дополнительные ограничения на выбор типа ФП. В [9] показано, что ФП, которая удовлетворяет операторному уравнению, должна иметь трапециевидный вид, но как расчетный можно принимать и треугольный вид, учитывая, что ФП треугольной формы создает более жесткие условия выбора  $F[*]$ .

$$\mu_{triangle}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < x_1, \\ 2(x - x_1)/(x_2 - x_1), & \text{if } x_1 \leq x \leq (x_1 + x_2)/2, \\ 0, & \text{if } x > x_2. \end{cases}$$

Концептуально система со многими выходами может рассматриваться как несколько групп независимых систем с одним выходом. Таким образом, общая структура многомерной нечеткой системы может быть представлена набором нечетких систем с одним выходом, т.е. системой с  $S$  выходами. Процедура нечеткой идентификации и моделирования может быть представлена в виде блок-схемы, показанной на рис. 1.4.

Здесь задача идентификации в УН ограничивается рассмотрением параметрической идентификации, в частности, определением параметров модели известной структуры, для которой система правил (1.3) представляется как

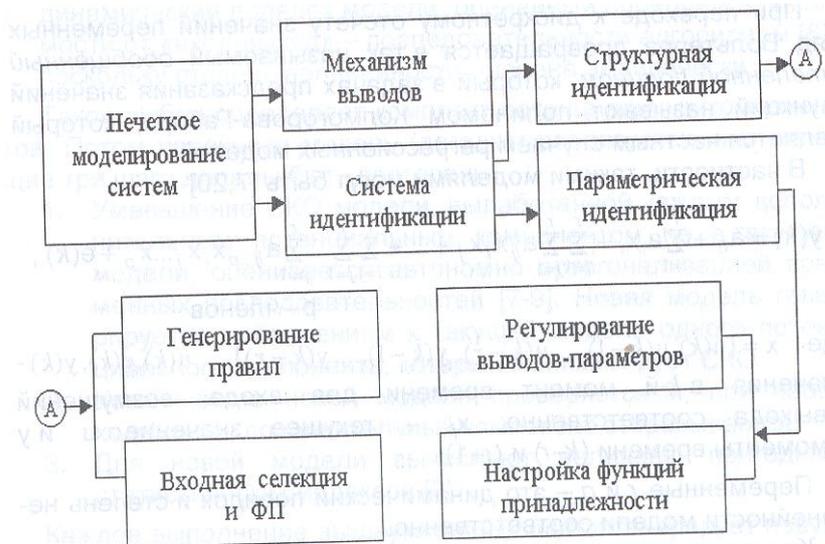


Рис. 1.4. Блок-схема моделирования нечетких систем

НСЛАУ и описана в векторном виде:

$$\mathcal{A}x = \mathcal{B}$$

где вход – коэффициенты матрицы  $\mathcal{A}$ , выход – правые части  $\mathcal{B}$ ;  $\mathcal{A} = \{a_{ij}^k\}$ ,

$$a_{ij}^k = \{a_{ij}^k / \mu(a_{ij}^k)\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\mu(a_{ij}^k) \rightarrow [0, 1]; \quad \mathcal{B} = \{b_i^k\}, \quad b_j^k = \{b_j^k / \mu(b_j^k)\}, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad \mu(b_j^k) \rightarrow [0, 1].$$

Проведенные исследования [1] подтверждают целесообразность такого подхода.

## **2. Теоретические особенности решения задач прогнозирования в нейросетевом логическом базисе**

В последнее время важные успехи в решении задач прогнозирования достигнуты за счет применения НС. Существуют стандартные алгоритмы [66, 67, 69, 70] решения задач прогнозирования в НС. Одним из недостатков, присущим существующим алгоритмам прогнозирования в НС, является то, что они работают, как правило, с «чистыми» данными, т. е. данными, представленными в виде чисел. Однако в реальных задачах данные должны рассматриваться в общем случае слабо структурированными или даже неструктурированными, т. е. такими, о которых известна их принадлежность к определенному типу. Например, данные могут быть заданными интервально  $x \in [x^{\max}, x^{\min}]$ , или в виде утверждений типа « $x$  = близко к 5 », т. е. в виде НП (или ЛП) и т. д. Укажем также, что, кроме слабой структурированности, математические модели таких задач или принципиально не могут быть получены, или их получение связано с неоправданными материально-техническими затратами. Причем такие задачи могут быть как в технических или организационно-технических системах, так и в системах сугубо организационного типа.

Для таких систем, по-видимому, единственно возможной математической моделью может быть «черный ящик» или при определенных ограничениях «серый ящик». НС в таких случаях являются практически единственным средством решения задач прогнозирования и идентификации.

Прогнозирование поведения сложных систем, как отмечалось ранее, составляет основу не только их эффективного функционирования, но в целом ряде случаев обеспечивает их безопасность и практическое выживание системы. Теоретически наиболее успешные прогнозы могут быть выполнены в том случае, если существует адекватная математическая модель объекта. Попытки применить нечеткую математику и нечеткую логику к построению (идентификации) математической модели не всегда оказываются успешными, так как априори

накладывается ограничение на структуру модели, например, рассмотрение ограничивается анализом некоторой полиномиальной модели. Хотя такие подходы в целом ряде случаев довольно удачны (например, метод группового учета аргументов (МГУА)), тем не менее, анализ общих ситуаций, безусловно необходим [20].

Наиболее распространенным подходом анализа при отсутствии адекватной математической модели является обработка временных (числовых) рядов  $x(1), x(2), \dots, x(t-1), x(t)$ , которые представляют собой информацию о поведении объекта в прошлом. Наличие временного ряда

$$x = \{x(k)\}, k = 1, 2, \dots, t, \quad (5.1)$$

дает возможность построить систему уравнений, воспроизводящую поведение объекта, или дать прогноз будущих значений  $\{x(t+1), x(t+2), \dots\}$ . Математическая статистика дала возможность построения статистических авторегрессионных моделей

$$x(i) = \{x(i-1), x(i-2), \dots, x(i-m)\}, i \geq m+1.$$

Если известна внешняя входная последовательность  $\{x(i)\}$  и необходимо ее модифицировать в другую последовательность  $\{y(i)\}$  (наблюдаемую), то, принимая, что система линейна, отношение между входом и выходом может быть представлено в виде:

$$y(i) = \sum_{k=1}^t b(k)x(i-k), i \geq k+1. \quad (5.2)$$

Это уравнение описывает классический конволюционный фильтр, новая последовательность  $y$  генерируется линейным фильтром с коэффициентами  $b_1, b_2, \dots, b_t$ . В статистике эти модели известны под названием модели скользящего среднего  $N$ -го порядка.

Авторегрессионная модель (AR) принимается в виде:

$$y(i) = \sum_{m=1}^M (a(m)y(i-m) + e(m)) = \hat{y}(m) + e(m),$$

где  $M$  – порядок авторегрессионной модели.

В зависимости от применения  $e(k)$  может представлять управляемый вход системы или шум. Если  $e(k)$  – белый шум, то авторегрессионные коэффициенты выходной последовательности могут быть выражены в терминах модельных коэффициентов.

Авторегрессионная модель со скользящим средним (ARMA(M,N)) может быть представлена в виде:

$$y(i) = \sum_{m=1}^M a(m)y(i-m) + \sum_{n=1}^N b(n)e(i-n).$$

Последующий анализ теоретических положений прогнозирования был связан с теоремой Такенса [61], которая, основываясь на принципах нелинейной динамики, позволила дать ответ на вопрос, почему авторегрессионные модели способны давать правильный прогноз. Кроме того, теорема Такенса позволила установить класс моделей, для которых применение авторегрессионных моделей наиболее эффективно.

Уравнение ARMA(M,N) – модели может быть представлено в виде:

$$y_t = ay_{t-1} + be_t,$$

где  $\mathbf{y}_t = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-(d-s)})$ ,  $\mathbf{e}_t = (e_t, e_{t-1}, \dots, e_{t-(d-s)})$ ,  
 $\mathbf{a}_t = (a_t, a_{t-1}, \dots, a_d)$ ,  $\mathbf{b}_t = (b_t, b_{t-1}, \dots, b_d)$ ,  $d$  – ёã.

Вектор лага  $d$  называется линией задержки. Имеется глубокая связь между вектором временного лага и текущей динамикой. Эта связь была установлена Такенсом, Рюэлем и др.

Нормальная смысловая трактовка теоремы Такенса состоит в следующем. Наука базируется на принципе повторяемости: в каждый определенный момент система проходит подобные условия - внутреннее и внешнее состояние системы. В связи

с этим можно ожидать поведение системы определенным образом. Предсказание эксплуатирует этот принцип: используя наблюдаемое поведение системы, можно предсказать ее будущее поведение, когда схожие условия появятся вновь. Линия временной задержки представляет историю эволюции систем. Даже если уравнения, описывающие систему, не известны, тем не менее, используется прогноз на обучение системы. Векторы замедления достаточной длины не представляют точно состояние последовательностей суперневозможных линейных систем – возврат (выход) таков, что векторы замедления могут покрыть всю геометрическую структуру нелинейной системы. Эти результаты адресуют главную проблему выведения заключений о поведении внутренних степеней свободы, когда функция состояния системы является измеренной.

Теорема Такенса предполагает, в принципе, нелинейную авторегрессию в форме:

$$y(t) = g[y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-T)],$$

которая моделирует серию точно (предполагается отсутствие шума). Рассматриваемые проблемы — поиск такой нелинейной авторегрессии. Имеется, по крайней мере, три возможности решения задачи:

- генетическое программирование;
- искусственные нейронные сети;
- локальные линейные модели.

Отметим также, что возможны комбинации указанных методов в, частности, т.н. гибридные схемы НС с генетическим поиском и др.

Локальные линейные модели базируются на том положении, что вектор состояния вначале принимают в виде:

$$\mathbf{Y} = (y_t, y_{t-2v}, y_{t-3v}, \dots, y_{t(d-1)v}).$$

Следующий шаг состоит в создании функционального отношения  $f_t$  между  $y(t)$  и некоторым будущим состоянием  $y(t+T)$ .

Очень эффективным путем аппроксимации  $f_t$  является локальная аппроксимация, использующая только ближайшие соседние состояния, чтобы выполнить предсказание. Чтобы предсказать  $y(t+T)$ ,  $k$  более похожих состояний  $y(t)$  должны быть вначале определены. Здесь эффективны  $k$  ближайших соседей точки  $y(t)$ , в  $d$ -мерном вложенном (погруженном) пространстве. Тогда выполняется локальная линейная интерполяция нулевого или первого порядка, рассматривая все  $k$ -точек соседей  $y(t)$  в ряду.

Если следовать изложенному ранее, поиск ближайших соседей в образце размерностью  $N$  точек в  $d$ -мерном пространстве, требуется  $O(N)$  вычислительных шагов. Можно сократить это количество до величины  $O(\log(N))$  частичным разделением данных, используя подобие дерева решений.

Хотя техника локального линейного моделирования используется для линейной модели на каждом отдельном шаге предсказания, результирующая модель может быть существенно нелинейной, так как каждая из этих линейных аппроксимаций выполняется для каждого отдельного соседа. В [64] на основании изложенного для решения задач прогнозирования предложен следующий алгоритм.

1. Общий временной ряд делится на тренировочную и тестовую последовательность.
2. Тренировочная последовательность используется для построения расщепляемого дерева на фазовом пространстве. Тренировочная последовательность функционирует как база данных прошлых наблюдений.
3. Для каждой новой точки  $y'(t)$  база данных отыскивает ближайших к этой точке соседей.
4. Координация времени замедления используется для того, чтобы построить локальную функцию так, что каждая соседняя точка во время  $t$  является соседней на следующем временном шаге  $(t+T)$ ,  $y(t) \rightarrow y(t+T)$ , где  $T$  обозначает горизонт прогноза.

5. Предсказание  $y'(t+T)$  во время  $y'(t)$  достигают за счет следующего усреднения: интерполяцией нулевого порядка

$$y(t+T) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \psi_j(t+T)$$

или линейной интерполяцией  $d$ -го порядка

$$y(t+T) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^d \alpha_n y(t - (j-1)\tau).$$

Рассмотренные модели прогнозирования не учитывают способов их реализации. Однако, как показывает практика, в последнее время наиболее перспективным подходом к построению прикладных систем прогнозирования являются многослойные НС персептронного типа. Практика также показала, что новых методов прогнозирования, ориентированных исключительно на НС, не предложено, однако факты, когда НС позволяют получить прогноз в практически безнадежных (с точки зрения стандартной математики) ситуациях, заставляет по-новому посмотреть на те условия и обстоятельства, которые сопутствуют реализации стандартных методов в НС.

Прежде всего, отметим, что детальный анализ теоремы Такенса показывает, что при ее использовании накладываются некоторые дополнительные ограничения, в частности, на вид функции  $\psi(y_{i-1}, \dots, y_{i-m})$ . Реально эта функция должна зависеть от меньшего числа параметров, т. е. определять отображение в себя некоторой  $n$ -мерной поверхности в  $m$ -мерном пространстве [61]. Это обстоятельство в полной мере «учитывается» персептроном, так как структура многослойных персептронов оказывается такой, что позволяет строить проекции малой размерности. Как известно, на одном слое НС вычисление «сигмоидной» функции от линейной комбинации входов представляется в виде

$$S(y) = \sum_{k=1}^m A_{jk} x_{i-k} + v_j.$$

Сами линейные комбинации входных величин можно рассматривать как компоненты проекций. В качестве  $S(y)$  используют функцию порогового типа (или с насыщением), которую приближенно можно рассматривать как кусочно-линейную, на «рабочем» участке  $\sigma(x) \equiv cx$ , а вне его  $\sigma(x) \equiv \pm 1$ . При помощи  $n$  членов рабочий интервал можно сдвигать, добиваясь того, чтобы для данного набора входных параметров значение  $y_j$  либо попадало внутрь его («компонента активна»), либо вне его («компонента пассивна»). Это позволяет принципиально активизировать только  $n$  необходимых компонент  $y_j$  и таким образом получить на нейронах промежуточного слоя необходимую проекцию. Следующий слой нейронов позволяет вычислить аналогичную функцию, которую рассматривают как линейную аппроксимацию искомой функции  $\psi$ .

Известны трудности построения обычных аппроксимаций функции  $\psi$ , которые не позволяют получить точность аппроксимации выше 10%. Но это обстоятельство касается «глобальной» предсказуемости, т. е. попытки восстановить полную динамическую систему, для сложной системы эта задача неразрешима. Однако существует возможность выполнять локальные прогнозы, что объясняется главным образом тем, что НС обладают способностью к построению проекций. Поэтому «предсказуемость в НС» понимают как предсказуемость в «проекции малой размерности».

Дальнейшее изложение этих предложений приводим в соответствии с [61]. Предположим, что в некоторой области  $G$   $n$ -мерного фазового пространства поведение сложной системы приближенно описывается маломодовой моделью с меньшей размерностью фазового пространства  $n_1$ , и  $n_1 < n$ . Тогда, если данная траектория в течение времени наблюдений достаточное число раз проходила через область  $G$ , то этого может быть достаточно, чтобы восстановить  $n_1$ -мерную систему, дающую возможность получить локальный прогноз. При таких условиях не возникает никаких противоречий с ограничениями методик прогноза. НС позволяет найти такую проекцию, правда, неизвестно по каким принципам.

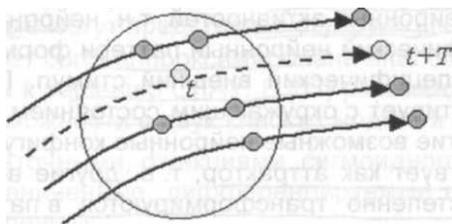


Рис.5.1. Предсказание с использованием ближайших соседей. Черные точки - ближайшие соседи белой точки, представляющей предсказание

Такие области  $G$  и соответствующие им маломодовые модели в [61] предложено называть руслами (рис. 5.1). При попадании траекторий в такое русло, в течение некоторого времени ее поведение становится предсказуемым и «квазималомодовым». Когда она покидает русло, ее поведение снова становится более сложным. Детерминированное маломодовое описание при этом становится невозможным, ситуация выглядит как частично случайная и непредсказуемая. Для качественного объяснения таких ситуаций предложен новый класс моделей - динамические системы с джокерами. Джокер представляет собой область в фазовом пространстве, где поведение детерминированной системы становится вероятностным. Могут быть ситуации, когда джокер «забросит» траекторию, практически в любую точку пространства, а затем в течение некоторого времени динамика системы снова становится маломодовой и детерминированной.

Отметим попутно, что в рамках теории «русел и джокеров» получает достаточно убедительное объяснение то, почему предсказание нечетких временных рядов (трубок) выполняется более точно, чем предсказание четких временных рядов. Во-первых, для нечеткого ряда вероятность попадания в «русло» значительно выше, чем для «четкого» ряда. Во-вторых, как показал А. Г. Ивахненко, предсказание суммы значений значительно точнее, чем сумма отдельных предсказаний. Процедура дефазификации нечеткого ряда выступает в роли такого «усилителя» точности прогноза.

Подобный подход анализируется в [62, 63]. Показано [63], что НС обладают способностью создавать нейронные аттракторы – особые виртуальные структуры, появляющиеся из коллективного состояния нейронных активностей, т.н. нейронных паттернов. Обычно специфический нейронный паттерн формируется сетью как ответ на специфический внешний стимул. Поскольку этот паттерн корректирует с

окружающим состоянием, он более стабилен, чем другие возможные нейронные конфигурации и, таким образом, действует как аттрактор, т. е. другие возможные конфигурации постепенно трансформируются в паттерно качественный аттрактор.

В [62] предложен путь решения задачи прогнозирования с использованием основных положений теории хаоса, в соответствии с [62] вектор-столбец прогнозируемой величины  $y$  можно представить как

$$y = y_{\text{л}} + y_{\text{нл}},$$

где  $y_{\text{л}}$  можно определить в виде:  $y_{\text{л}} = Xa'$ , где  $X$  - матрица критериев прогноза,  $X = \{x_{ij}\}, i = 1, m; j = 1, n (n > m)$ ,  $m$  - количество критериев,  $x_{ij}$  - значение  $j$ -го критерия в  $k$ -й момент времени,  $a'$  - параметры линейной функции. Линейная составляющая, в частности, может быть вычислена МНК, одним из методов безусловной минимизации или путем прямого решения матричного уравнения

$$a' = (X^T X)^{-1} X^T y, \quad (5.3)$$

причем решение этого уравнения, как было показано ранее, может быть выполнено нейросетевой моделью для практически любых видов уравнения, включая плохую обусловленность матрицы вплоть до определителя  $\det(X) = 0$ .

Следующей задачей после определения линейной компоненты является аппроксимация оставшейся нелинейной составляющей нелинейной функции

$$y_{\text{нл}} = \psi(X, a'') + \varepsilon,$$

где  $a''$  - искомые параметры нелинейной функции;  $\varepsilon$  - погрешность.

Не касаясь способов нахождения параметров  $a''$  и, таким образом, оценки возможности аппроксимации данной зависимости при помощи функции  $\psi$ , рассмотрим способы построения моделей, которые могут представить эту функцию. Отметим, что функция  $\psi$  может быть аппроксимирована аналогично (5.3) т. е., снова приходим к решению СЛАУ. В [63] рекомендуется рассматривать эти возможности в двух классах моделей на базе НС:

- НС с передаточными функциями сигмоидного типа (непрерывные, ограниченные, дифференцируемые во всем диапазоне определения);
- НС способная реализовывать некоторые модели, основанные на теории детерминированного хаоса.

Теория НС определила такие функции передачи, которые являются достаточно хорошими для аппроксимации практически любой нелинейной зависимости. Так, например, функция

$$y_t = 1 / \left( 1 + \exp \left( \frac{1}{1 + \exp \left( - \sum (a_1'' * y_{t-1}) \right)} + 1 / \left[ 1 + \exp \left( - \sum a_2'' * y_{t-1} \right) \right] \right) \right),$$

которая может быть реализована нейронной сетью с одним входным и выходным слоями и двумя скрытыми слоями, позволяет представить функцию  $y_t = 1 - c_1 y_{t-1} + c_2 y_{t-1}^2$  с точностью не ниже 5%. Эта функция получена в результате анализа некоторых хаотических систем. Таким образом, классы нейронных систем, реализующие функцию  $y_t$  в первом и втором случаях, практически идентичны и взаимозаменяемы. Однако области применения этих методов решения достаточно различны, прежде всего, в уровне погрешностей.

Модели детерминированного хаоса возникли, прежде всего, при объяснении поведения финансовых рынков. Исследования показали, что в рамках теории хаоса можно сконструировать целый ряд моделей, способных моделировать развитие событий на финансовых рынках. В частности, в этих моделях оказывается возможным детерминированное объяснение событий, которые в общем случае являются случайными и непредсказуемыми. На основе теории детерминированного хаоса можно получить улучшенные модели, описывающие влияние прошлого на настоящее.

Рассмотрим основные положения теории хаоса, используя методологию [63]. Детерминированный хаос - это нерегулярное или хаотическое движение, порожденное нелинейными системами, для которых динамические законы однозначно определяют эволюцию системы при известной предыстории. Отметим попутно, что НС являются универсальным средством представления оператора эволюции. В этом случае правила преобразования входов НС представляются системой нелинейных дифференциальных уравнений нейронной динамики вида:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = b_i(v_i) \left[ c_i(v_i) - \sum_{j=1}^n W_{ij} \varphi_j(v_j) \right],$$

где  $v_j(t)$  - состояние  $i$ -го нейрона в момент  $t$ ;  $b_j$  - усиление;  $W_{ij}$  - матрица весов;  $\varphi_j$  - сигмоидная функция активации нейрона.

Для динамических систем подобного типа теорема Козна-Гросберга гарантирует существование аттракторов [65], о которых упоминалось ранее. Аттракторы как области притяжения характеризуются локальным минимумом энергии, координаты которого соответствуют эталонному образу.

Преыдущее уравнение можно переписать в виде

$$v_i = \sum_{j=1}^n W_{ij} \varphi_j(v_j) - b_i v_i + c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $b_i$  - выступает в роли коэффициентов обратной связи;  $c_i$  - внешние воздействия на  $i$ -й нейрон.

Полученное уравнение описывает сети Хопфилда, которые используются для запоминания статических образов, представляющих точки аттракторов в фазовом пространстве НС.

Возвратимся к основным положениям теории хаоса. Показано, что настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства. Рассматривают т.н. диссипативные системы, в которых объем фазового пространства сокращается со временем. Теория детерминированного хаоса большое внимание уделяет проблеме перехода к хаосу через бифуркации. Данное свойство систем при переходе к хаосу рассматривается при помощи логистического отображения

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad (5.4)$$

где  $r$  - внешний параметр.

Переход к хаосу через бифуркации происходит таким образом, что число периодических точек отображения  $f_r(x_n)$ , к которым итерации сходятся, при определенных увеличивающихся значениях параметра  $r_n$  удваивается. При  $r = r_\infty$  число периодических точек становится бесконечным, за пределами этого (конечного) значения  $r$  поведение итерации для большинства  $r$  хаотично. Итерации логистического отображения при интегрировании уравнения (5.4) для разных значений имеет вид, показанный на (рис. 5.2).

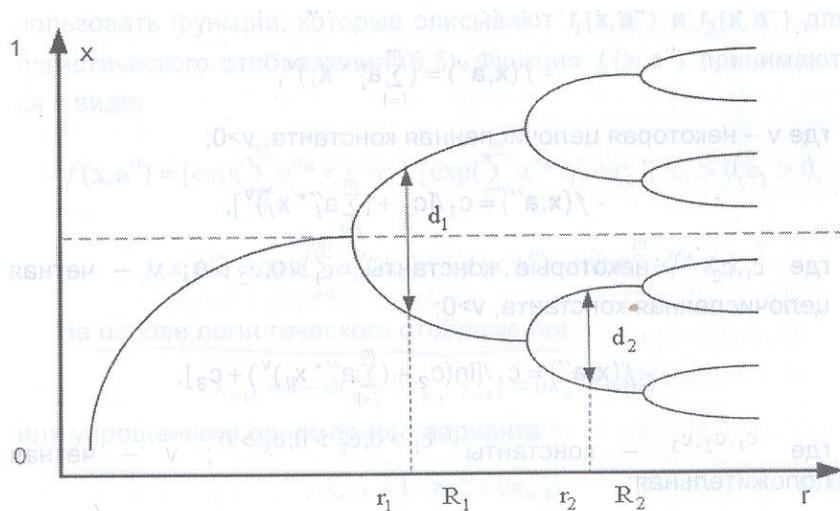


Рис. 5.2. Пример образования периодических точек

При  $1 < r < r_\infty$  имеет место бифуркационный режим, при  $r_\infty < r \leq 4$  имеет место хаотический режим, прерывающийся  $r$ -окнами, в которых последовательность  $\{f_r^n(x_0)\}$  вновь оказывается в пределе периодической, таким образом приходим к предельному циклу. Считают, что временные реализации реконструируемых систем представляют предельные множества другого типа, в простейшем случае - это предельный цикл.

Основной результат, который получен в рамках теории детерминированного хаоса, состоит в определении функций, которые используются для аппроксимации нелинейной части прогнозного уравнения.

Функции, полученные на основе логистического уравнения (5.3), в общем случае представляются в виде:

$$y_{n+1} = f(y_n, x, a'') = y_n * f_1(x, a'') - y_n^2 * f_2(x, a''),$$

где  $y \in [0,1]$ ;  $f_1(x, a''), f_2(x, a'')$  везде положительны.

Интервал  $\left[0, \max\{f_1(x, a'')\} / \min\{f_2(x, a'')\}\right]$ , ограничивает область значений  $y_{n+1}$ , если  $\max\{f_1(x, a'')\} / \min\{f_2(x, a'')\} < 1$ , в противном случае правая граница принимается равной  $[0,1]$ . В качестве функций  $f(x, a'')$  предложены следующие:

$$-f(x, a'') = \left(\sum_{i=1}^m a_i'' * x_i\right)^v,$$

где  $v$  - некоторая целочисленная константа,  $v > 0$ ;

$$-f(x, a'') = c_1 / \left[ c_2 + \left(\sum_{i=1}^m a_i'' * x_i\right)^v \right],$$

где  $c_1, c_2$  - некоторые константы;  $c_1 > 0, c_2 > 0$ ;  $v$  - четная, целочисленная константа,  $v > 0$ ;

$$-f(x, a'') = c_1 / \left[ \ln \left( c_2 + \left(\sum_{i=1}^m a_i'' * x_i\right)^v \right) + c_3 \right],$$

где  $c_1, c_2, c_3$  - константы;  $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ ;  $v$  - четная положительная;

$$-f(x, a'') = c / \left[ 1 + \exp \left( - \left(\sum_{i=1}^m a_i'' * x_i\right) \right) \right],$$

где  $c$  - константа;  $c > 0$ .

Вторая группа функций получена на основе логистического отображения Лоренца

$$x_{n+1} = x_n + nx_n^2. \quad (5.5)$$

В общем случае эти функции принадлежат к виду:

$$-y_{n+1} = f(y_n, x, a^n) = f_1(x, a^n) + y_n * f_2(x, a^n) + y_n^2 + f_3(x, a^n),$$

где области значений  $f_2(x, a^n)$  и  $f_3(x, a^n)$  положительны. Границы значений  $f_1(x, a^n)$  имеют вид:

$$leftbord = \begin{cases} L = \min \{ f_1(x, a^n) \}, & \text{if } L > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$rightbord = \begin{cases} R = \max \{ f_1(x, a^n) \} + \max \{ f_2(x, a^n) \} + \max \{ f_3(x, a^n) \}, & \text{if } R < 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Для реализации функции  $f_2(x, a^n)$  и  $f_3(x, a^n)$  предложено использовать функции, которые описывают  $f_1(x, a^n)$  и  $f_2(x, a^n)$  для логистического отображения (5.5). Функция  $f_1(x, a^n)$  принимаются в виде:

$$-f(x, a^n) = \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^m a_i^n * x_i \right) - c_1 \right] / \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^m a_i^n * x_i \right) + c_2 \right], c_1 > 0, c_2 > 0;$$

$$-f(x, a^n) = \cos \left( \sum_{i=1}^m a_i^n * x_i \right); \quad -f(x, a^n) = \sin \left( \sum_{i=1}^m a_i^n * x_i \right).$$

На основе логистического отображения

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = bx_n, \quad |b| < 1$$

или упрощенного одномерного варианта

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1} \tag{5.6}$$

получены такие функции:

$$-y_{n+1} = f(y_n, x, a^n) = f_1(x, a^n) - y_n * f_2(x, a^n) + y_{n-1} * f_3(x, a^n),$$

где область значений  $f_1(x, a^n)$  и  $f_2(x, a^n)$  положительна,  $|f_3(x, a^n)| < 1$ .

Границы области значений:

$$leftbord = \begin{cases} L = \min \{f_1(x, a'')\} - \max \{f_2(x, a'')\}, & \text{if } L > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$riqhbord = \begin{cases} R = \max \{f_1(x, a'')\} + \max \{f_3(x, a'')\}, & \text{if } R < 1, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Для реализации функции  $f_1(x, a'')$  и  $f_2(x, a'')$  предложены функции, определенные для логистического отображения (5.4),  $f_3(x, a'')$  - для логистического отображения (5.6) при  $c_1 = c_2 = 1$ . Необходимо отметить, что, кроме перечисленных требований, функции  $f_1, f_2$  и  $f_3$  должны быть определены так, чтобы область значений  $f(y_n, x, a'')$  охватывала все возможные для данной выборки значения  $y$ .

В отношении нейросетевой реализации полученных функций отметим, что в качестве активационного элемента, традиционно представляемого в НС в виде одной «чистой» функции, здесь необходим преобразователь, работающий с комбинаций функций. Обучение такой НС не отличается от методов, которые применяют для стандартных НС.

### 3. Стандартные принципы прогнозирования структурированных временных рядов на основании методов погружения

Известно, что прогнозирование четкого временного ряда сводится к типовой задаче нейроанализа - аппроксимации функции многих переменных по заданному набору примеров с помощью процедуры погружения ряда в многомерное пространство [67]. Идеологические основы этой задачи можно определить таким образом: найти функцию  $\psi: \mathcal{R}^{k \times n+l} \rightarrow \mathcal{R}^k$ , такую, чтобы вычислить  $x(t+d)$ , зная  $x(t)$  до момента времени  $t$ , плюс определенное количество время независимых переменных  $\eta$  (вектор экзогенных переменных, например, объем комнаты, в которой измеряется температура, может быть решающим фактом в некоторых случаях), т. е. зная

$$x(t), x(t-1), x(t-2), \dots, x(t-l) \quad (5.7)$$

найти

$$x(t+d) = \psi(x(t), \dots, x(t-l), \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k),$$

где  $d$  - лаг прогнозирования;  $n$  - размерность вектора  $x$ ;  $l$  - длина временного ряда;  $k$  - количество независимых переменных.

Типичный случай  $d = 1$ , что означает вычисление следующего значения ( $d$  может принимать любое значение, большее, чем единица).

Задачу прогнозирования временного ряда, как уже отмечалось, можно рассматривать как задачу аппроксимации. Нейронная сеть, аппроксимирующая любой пригодной функцией  $F(x): \mathcal{R}^n \rightarrow R^m$ , может быть выполнена:

1. многослойным персептроном MLP [66,68]

$$F^{MLP}(x) = \sum_{j=1}^q v_{jl} \sigma \left( \sum_{i=1}^m W_{ij} x_i - o_j \right), \quad l = 1, m, \quad (5.8)$$

где  $q$  - количество скрытых слоев;  $v_{jl}$  и  $W_{ij}$  - веса;  $\sigma$  - сигмоидальная (или другая нелинейная, не полиномиальная) функция;  $o_j$  - смещение;

2. сетью типа RBNF [67,69]

$$F^{RBNF}(x) = \sum_{j=1}^k v_{jl} \tilde{A} \left( \sum_{i=1}^m (W_{ij} - x_i) \right), \quad l = 1, m, \quad (5.9)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  - гауссова функция.

Сети типа MLP или RBNF могут расширить класс задач классического подхода моделирования временных рядов (5.5), т. е. если заменить линейную модель (5.2) нелинейной (5.8), или (5.9), или в общем виде:

$$x(t+1) = \psi(x(t), x(t-1), \dots, x(t-l)) + e(t).$$

Оценка качества прогноза вычисляется как сумма погрешности прогнозирования за  $N$  прогнозов (используя тестовую последовательность)

$$\xi = \sum_{i=0}^N \varepsilon(x(t-i), \hat{x}(t-i)),$$

где  $\varepsilon(\cdot)$  - функция измерения погрешности между реальным и прогнозным значениями, функция расстояния (например, Евклидово расстояние или др.).

На рис. 5.3 представлена схема НС как сеть прямого распространения с временным окном как нелинейная авторегрессионная модель.

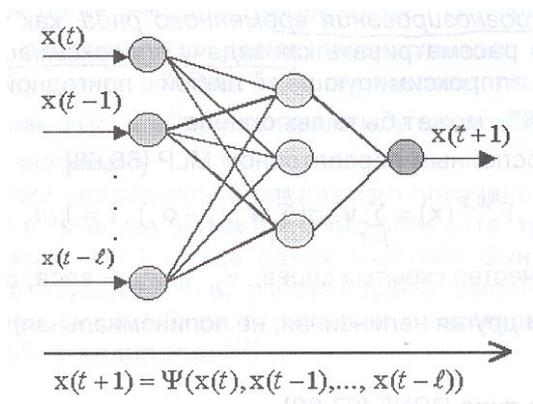


Рис. 5.3. Нейронная сеть прямого распространения с временным окном как нелинейная авторегрессионная модель

Следует учитывать то обстоятельство, что случайность в выборе начальных значений синаптических весов может приводить теоретически к тому, что результаты прогнозирования НС при обучении на одной и той же выборке, будут в общем случае различаться. Влияние этого недостатка можно существенно уменьшить, организовав комитет НС, который состоит из нескольких сетей, возможно, разных типов.

Очень важно отметить что, для прогнозирования временных рядов в НСЛБ требуется тщательная предобработка данных, подаваемых на вход сети и снимаемых с ее выхода. Исходя из условий конкретной задачи можно применить распространенные способы - масштабирование, дифференцирование, нелинейные преобразования (логарифмическая шкала и др.).

Увеличение ширины окна погружения ряда приводит в конце концов к понижению предсказуемости, когда повышение размерности входов уже не

компенсируется увеличением их информативности, а также приводит к повышению размерности сети. Недостаточно широкое окно погружения в лаговое пространство не способно предоставить такую информацию, что, естественно, снижает эффективность предсказания.

На рис. 5.4 представлены результаты прогноза значения функции  $y = \sin(0,0314 * x)$ , где  $x=1, \dots, 80$ . Длина окна равна 4 и 8 обучающих выборок. В данном случае отметим, что все прогнозные значения были получены без подстройки. Можно видеть достаточно высокую точность прогноза. Программы на внутреннем языке MATLAB, предназначенные для прогнозирования четких временных рядов, приведены в приложении 3.1.

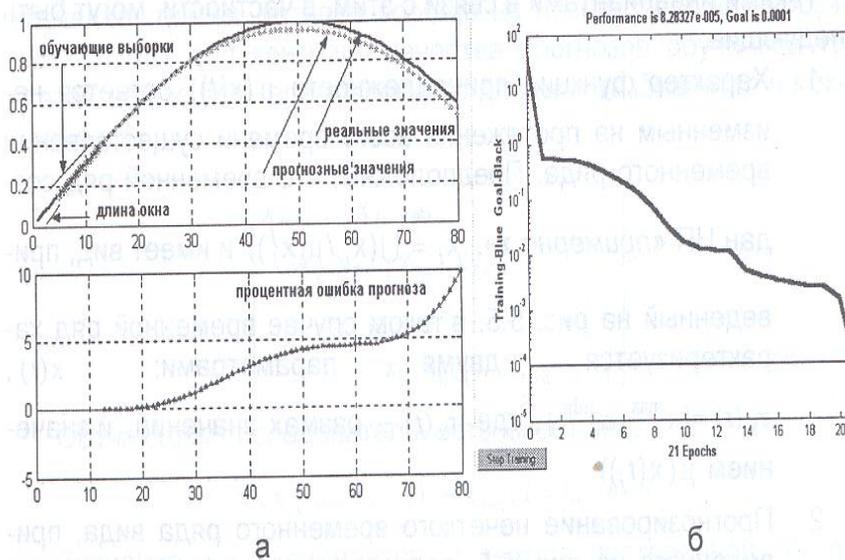


Рис. 5.4. Результаты прогнозирования четкого временного ряда:

а – графики исходной и прогнозной функции и процентной ошибки; б – зависимость целевой функции

от количества эпох

В приложении 3.2 приведены результаты исследования влияния длины окна (количество нейронов на входном слое) на результат прогноза при постоянном количестве нейронов на скрытом слое, а также влияние количества нейронов в скрытом слое на результат прогноза при постоянном количестве нейронов во входном слое.

#### 4. Алгоритмы прогнозирования слабо структурированных временных рядов на основании методов погружения в нейросетевом логическом базисе

Для прогнозирования нечетких временных рядов рассмотрим временные особенности постановок задач. Прежде всего, нужно ввести априорные допущения об инвариантах динамики временного ряда. Это физико-математическое понятие способно существенно повысить качество прогнозов. Как известно, НП (НЧ) характеризуются кортежем

$$\{x^j / \mu(x^j)\}, \mu(x^j) \rightarrow [0,1], j = 1, 2, \dots, J.$$

Таковыми инвариантами в связи с этим, в частности, могут быть следующие.

1. Характер функции принадлежности  $\mu(x(t))$  остается неизменным на протяжении всего времени существования временного ряда. Предположим, что временной ряд создан НП «примерно  $x$ »,

$$\mathcal{X}_\varphi \stackrel{def}{=} \bigcup_j (x_i^j / \mu(x_i^j)) \text{ и имеет вид, приведенный на рис. 5.5.}$$

В таком случае временной ряд характеризуется двумя параметрами:  $x(t), r_x(t) = [x^{max}, x^{min}]$ , где  $r_x(t)$  - размах значений, и значением  $\mu(x(t))$ .

2. Прогнозирование нечеткого временного ряда вида, приведенного на рис. 5.5, возможно выполнить независимо в отдельности для  $x(t), r_x(t)$  и  $\mu(x(t))$ , в таком случае имеем три комитета НС для  $x(t), r_x(t)$  и  $\mu(x(t))$  с соответствующими

$$\text{рядами } \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \mathbf{r}_x = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \mu(\mathbf{x}) = \{\mu(x_1), \mu(x_2), \dots, \mu(x_n)\},$$

прогноз значений каждого ряда выполняется автономно.

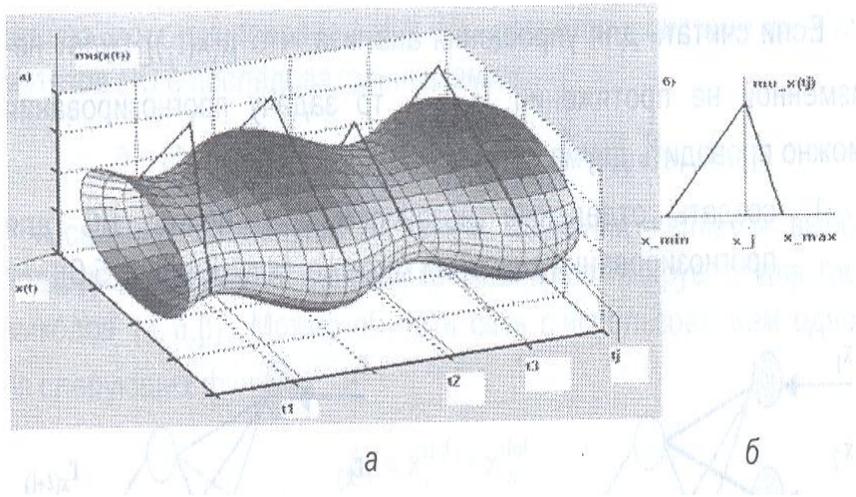


Рис. 5.5. Общий вид нечеткого временного ряда (а), функции принадлежности (б)

Как известно, для решения задачи прогнозирования нужно сформировать три последовательности: обучающую, валидационную и тестовую. Первая используется для обучения, вторая - для выбора оптимальной архитектуры, если прекращается обучение; третья, которая вообще не использовалась в обучении, служит для контроля качества прогнозов обученной НС. С этой целью весь временной ряд длины  $n$  разбивается на окна длиной  $l$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_l, \\ x_2, x_3, \dots, x_l, x_{l+1} \\ \dots\dots\dots \\ x_k, x_{k+1}, \dots, x_{l+k-1}, x_n \end{array} \right\},$$

Обучающая последовательность имеет вид

$$(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{l-i+1}) \rightarrow x_{l+i}, \quad i = 1, \dots, n-l.$$

Значение  $x_{l+i}$  «снимается» с выхода построенной НС при подаче на вход вектора  $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{l-i+1}\}$ , валидационная выборка конструируется таким образом, чтобы в ее состав входили значения, которые принадлежат двум окнам, но не входят в состав обучающих выборок, тестовая выборка может совпадать с валидационной.

Если считать для упрощения анализа, что  $\mu(x(t_j))$  будет неизменной на протяжении  $[t_1 - t_2]$ , то задачу прогнозирования можно проводить двумя путями:

1. создать отдельные независимые комитеты НС для прогнозирования значений кортежа  $\{x, r_x, \mu_x\}$  (рис. 5.6):

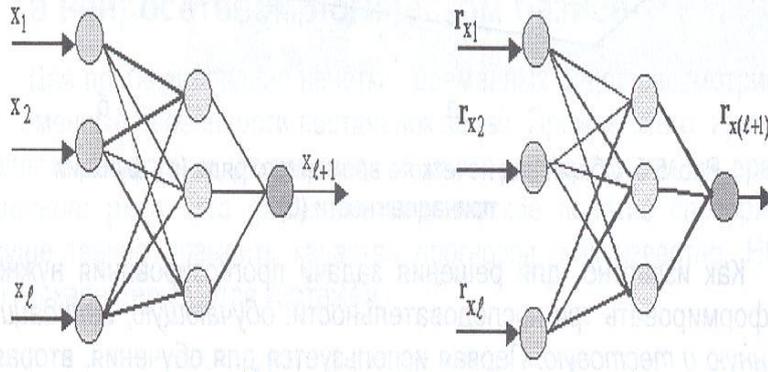


Рис. 5.6. Прогнозирование нечетких временных рядов независимо для комитета

по числовым рядам  $x = x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{r}_x = r_1, r_2, \dots, r_n$  соответственно

2. расширить множество входных признаков, т. е. все элементы предшествующего кортежа считать компонентами входного вектора. В общем случае такой подход возможно применять практически для всех симметричных (в особенности (L-R) - функций). Известно, что унимодальная НП  $\mu_a$  с модой  $a$ , т. е.  $\mu_{\mu_a}(a) = 1$ , с помощью  $L(y)$  и  $R(y)$  задается в форме:

$$\mu_{\mu_a}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & \text{àñèè } x \leq 0, \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & \text{àñèè } x > 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

где  $\alpha > 0, \beta > 0$  – левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных  $L(y)$  и  $R(y)$  нечеткая унимодальная переменная задается тройкой  $\tilde{a} = \{a, \alpha, \beta\}$ . Следовательно, прогнозирование НЧ (L-R)- сводится к системе трех комитетов НС с последовательностями:

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}; \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}; \beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}.$$

Основной проблемой на этапе обучения является выбор подходящей функций ошибки, которая минимизируется для трех выходов  $\{a, \alpha, \beta\}$ . Можно обучать сеть с использованием одной из следующих функций:

$$\xi_1 = x_r^{def} - x_m^{def}$$

по дефазифицированным значениям выхода;

$$\xi_2 = \sum_j (\mathcal{X}_j - \mathcal{X}_m)^2$$

по выполнению операции НА, в этом случае ошибка не достигает «0» в связи нечетким вычитанием;

$$\xi_3 = \sum_j dist(\mathcal{X}_j - \mathcal{X}_m)$$

по расстоянию между двумя нечеткими множествами, где индекс  $m$  - модельное значение.

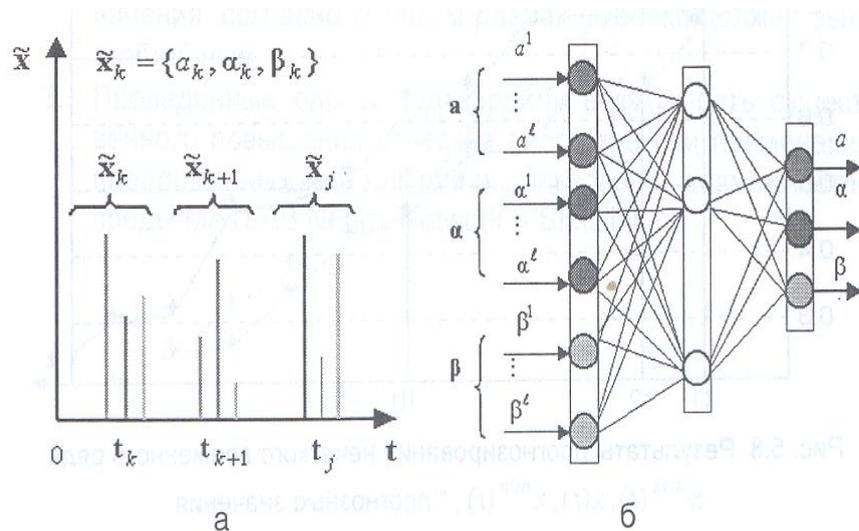


Рис. 5.7. Представление прогнозируемого ряда и его нейросетевая реализация: а – форма представления нечеткого временного ряда  $\xi_j = \{a_j, \alpha_j, \beta_j\}$ ; б– общая схема НС для прогнозирования с толерантными НП

Альтернативной и более эффективной, на наш взгляд, является выбор функции

$$\xi_4 = \left( \sum_j \left[ (a_j - a_j^d)^2 + (\alpha_j - \alpha_j^d)^2 + (\beta_j - \beta_j^d)^2 \right] \right)^{1/2}.$$

где индекс  $d$  - действительное значение.

Дополнительные условия (ограничения) должны быть учтены при инициализации весов НС, а так же при ее обучении (условия (5.10)).

На рис. 5.8 представлены результаты прогнозирования нечетких временных рядов при заданной тройке параметров  $\{x^{max}, x^{min}, x_j\}$ ,  $x_j \in [x^{max}, x^{min}]$ .



Рис. 5.8. Результаты прогнозирования нечеткого временного ряда

$x^{max}(t), x^{min}(t)$ , прогнозные значения

Можно видеть достаточно высокую точность прогноза. Программы на внутреннем языке MATLAB, предназначенные для прогнозирования нечетких временных рядов, приведены в приложении 3.3.

Отметим, что существующие программные средства (функции `predict` из MATLAB и `adaline` из Toolbox Neural Network) не обеспечивают того уровня точности и качества прогноза, который достигается предложенными методами, даже для случая структурированности временного ряда, в частности, стандартные методы требуют довольно мощной обучающей выборки (приблизительно на порядок больше, чем та, что используется в предложенных алгоритмах).

### **Краткое обобщение**

1. Прогнозирования слабо структурированных временных рядов, значения которых могут быть заданы в виде НП (или НЧ), целесообразно выполнять с использованием традиционных для НС методов, в частности, методов погружения, расширив входное множество таким образом, чтобы оно включало все компоненты кортежа, которым отображаются применяемые НМ.

2. Повысить точность прогнозирования структурированных временных рядов возможно за счет применения методологии, предложенной для нечетких рядов. Для этого необходимо входные множества (рабочее, тестовое и валидационное) расширить за счет включения в них значения размаха выборки (максимальное и минимальное значения), а также наложить дополнительные ограничения, согласно которым размах выборки должен быть стабильным.

3. Проведенные опыты подтвердили возможность существенного повышения качества прогнозов при применении предложенных методик при использовании возможностей среды MATLAB Neural Network & Simulink.