



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Авиационный колледж ДГТУ

## **Методические указания**

к практическим занятиям  
по ПМ.01 МДК.01.03

# **«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНТРОЛЯ И АНАЛИЗА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»**

Автор  
Смирнов Ю. А.

Ростов-на-Дону, 2019

## Аннотация

Методические указания по ПМ.01 МДК.01.03  
Технология формирования систем автоматического управления типовых технологических процессов, средств измерений, несложных мехатронных устройств и систем предназначены для студентов всех форм обучения специальностей 15.02.07. Автоматизация технологических процессов и производств

## Автор



**Кандидат технических наук, доцент, преподаватель 1 категории авиационного колледжа ДГТУ  
Смирнов Юрий Александрович.**





## Оглавление

<b>Практическое занятие №1.....</b>	<b>4</b>
<b>Практическое занятие №2.....</b>	<b>9</b>
<b>Практическое занятие №3.....</b>	<b>18</b>
<b>Практическое занятие №4.....</b>	<b>23</b>
<b>Практическое занятие №5.....</b>	<b>27</b>

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.

### Задачи на безусловный и условный экстремум функционала. Метод Эйлера - Лагранжа

#### 1. Задача на безусловный экстремум функционала

Эту задачу отличает отсутствие всяких ограничений, что является недостатком, так как отсутствие ограничений обычно лишает задачу практического смысла. Итак, задан минимизируемый функционал

$$J = \int F(x, \dot{x}) dt.$$

Подынтегральная функция  $F$  в нем дифференцируема как по  $x$ , так и по  $\dot{x} = dx/dt$ . Требуется найти экстремаль  $x^0(t)$ , которая минимизирует данный функционал при заданных краевых условиях  $x(0), x(T)$  и известном значении времени  $T$ .

Идея вывода расчетного уравнения использует предположение о том, что к экстремали добавляется дополнительная функция  $\eta(t)$  с весовым коэффициентом  $\alpha$ . В результате аргумент функционала получает вариацию и будет равен:

$$x(t) = x^0(t) + \alpha \eta(t),$$

где  $\eta(t)$  - дифференцируемая функция с нулевыми краевыми значениями, т. е.  $\eta(0) = \eta(T) = 0$  (рис. 8.3).

Соответственно функционал получает положительное приращение (вариацию), являющееся функцией коэффициента  $\alpha$ :

$$\Delta J(\alpha) = J(x(t) + \alpha \eta(t)) - J(x^0(t)) > 0.$$

Эта функция имеет экстремум - минимум при  $\alpha = 0$  (рис 8.4). Исследуя эту функцию на экстремум, Эйлер получил следующее дифференциальное уравнение для нахождения экстремалей:

$$\frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right] = 0.$$

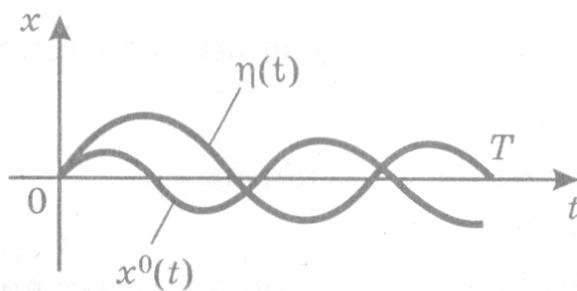


Рис. 8.3

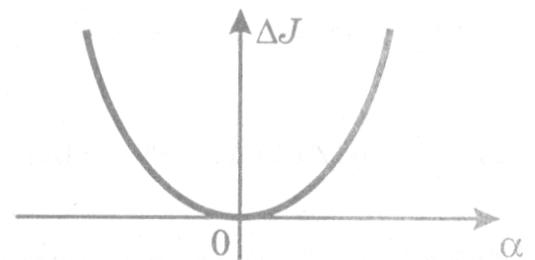


Рис. 8.4

Компактная условная запись этого уравнения имеет вид:

$$F_x - \frac{dF_{\&}}{dt} = 0,$$

где индексы обозначают производные по  $x$  и  $\&$ .

Уравнение Эйлера в общем случае является нелинейным уравнением второго порядка, общее решение которого содержит две постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий.

В задаче на безусловный экстремум может быть задан функционал, зависящий от нескольких функций и их первых производных:

$$J = \int_0^T F(x_1, \&, x_2, \&, \dots, x_n, \&) dt.$$

В этом случае необходимо решить систему уравнений Эйлера:

$$F_{x_i} - \frac{dF_{x_i}}{dt} = 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

В более общем случае функционал может зависеть и от производных высших порядков. В этом случае вместо уравнений Эйлера составляют и решают уравнения Эйлера—Пуассона:

$$\sum_{i=0}^{n_k} (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i F_{x_k^{(i)}}}{dt^i} = 0 \quad (k = \overline{1, m}),$$

где  $k$  - порядковый номер функции;  $n_k$  - порядок старшей производной от  $x_k$ ;  $m$  - число функций.

Пример. Найти экстремаль улучшенной квадратичной интегральной оценки

$$J = \int_0^T (x^2 + \tau^2 x^2) dt.$$

Находим  $F_x = 2x$ , и  $F_{\&} = 2\tau\&$  и составляем уравнение Эйлера

$$x - \tau^2 \& = 0.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение

$$1 - \tau^2 s^2 = 0$$

Общее решение уравнения Эйлера в данном случае имеет вид:

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t},$$

где  $s_1 = -\tau^{-1}$ ,  $s_2 = \tau^{-1}$ .

Задавшись граничными условиями  $x(0) = x_H$  и  $x(\infty) = 0$ , найдем постоянные интегрирования  $c_1 = x_H$ ,  $c_2 = 0$ . Тогда уравнением экстремали будет экспонента

$$x^0(t) = x_H e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

## 2. Задача на условный экстремум. Метод Эйлера-Лагранжа

Помимо минимизируемого функционала

$$J = \int_0^T F(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n) dt,$$

подынтегральная функция которого зависит от нескольких функций и их первых производных по времени, задано произвольное число классических ограничений:

$$\varphi_j(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n) = 0, \quad (j = \overline{1, m}).$$

Требуется найти  $m$  экстремалей  $x_i^0(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) при заданных краевых условиях.

Метод решения этой задачи требует формирования нового функционала

$$J^* = \int_0^T F^*(L) dt,$$

где  $F^*(L) = F(L) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \varphi_j(L)$ ,  $\lambda_j(t)$  - неизвестные функции,

называемые множителями Лагранжа.

Благодаря такой замене задача сводится к предыдущей. При этом уравнения Эйлера должны быть составлены как для искомым экстремалей, так и для множителей Лагранжа:

$$F_{x_i}^* - \frac{dF_{\dot{x}_i}^*}{dt} = 0, \quad (i = \overline{1, n}); \quad (8.1)$$

$$F_{\lambda_i}^* - \frac{dF_{\dot{\lambda}_i}^*}{dt} = 0, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (8.2)$$

Но  $F_{\dot{x}_i}^* = 0$ , а  $F_{\lambda_i}^* = \varphi_j$ , т. е. уравнения (8.2) совпадают с уравнениями ограничений. Поэтому может быть выполнено совместное решение системы уравнений Эйлера (8.1) и заданных ограничений. Исключая время из уравнений экстремалей, можно найти алгоритм управления оптимального автоматического регулятора.

**Пример 1.** Синтезировать автоматический регулятор, оптимальный по минимуму квадратичного критерия

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2) dt.$$

Объект описывается дифференциальным уравнением  $\dot{x} + x = u$  и при краевых условиях  $x(0) = x_H, x(\infty) = 0$ .

Записав предварительно уравнение ограничения в стандартном виде

$$\varphi = x - u = 0,$$

составляем подынтегральную функцию нового функционала:

$$F^* = F + \lambda\varphi = x^2 + u^2 + \lambda(x - u).$$

Записываем систему уравнений Эйлера для искомых экстремалей

$$x^0(t) \text{ и } u^0(t): \begin{cases} F_x^* - \frac{dF_{x^*}^*}{dt} = 0; \\ F_u^* - \frac{dF_{u^*}^*}{dt} = 0. \end{cases} \begin{cases} \lambda + 2x - u = 0; \\ 2u - \lambda = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения выражаем  $\lambda = 2u$  и, подставляя в предыдущее, получим

$$x - u = 0. \quad (8.3)$$

Теперь решаем уравнение (8.3) совместно с уравнением объекта. Для этого находим корни характеристического уравнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1+s) & -1 \\ 1 & (1-s) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{откуда } s_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t},$$

где из граничных условий  $c_1 = x_H, c_2 = 0$ .

Получаемую отсюда экстремаль  $x^0(t) = x_H e^{-\sqrt{2}t}$  подставляем в уравнение объекта и находим  $u^0(t)$ . Затем можно исключить время и получить уравнение регулятора в виде:

$$u^0(t) = x_H (1 - \sqrt{2}) e^{-\sqrt{2}t} = -0,41x^0(t).$$

В результате получен пропорциональный алгоритм оптимального регулятора с коэффициентом передачи  $-0,41$ , что дает возможность представить структурную схему оптимальной САУ (рис. 8.5):



Рис. 8.5

Пример 2. Задано уравнение объекта в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x \in R^{n \times 1}$ ,  $u \in R^{m \times 1}$ ,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ , причем  $A$  и  $B$  зависят в общем случае от времени, в чем проявляется нестационарность объекта.

Критерий оптимальности - обобщенный квадратичный функционал:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt.$$

Коэффициенты матриц  $Q$  и  $R$  также могут зависеть от времени по двум причинам:

- из-за нестационарности объекта;
- для того, чтобы в начальной стадии переходного процесса сделать критерий малочувствительным к величинам ошибок, которые здесь определяются в основном начальными отклонениями, а не свойствами оптимальной системы.

Требуется найти оптимальный алгоритм управления  $u(x, t)$ .

В результате решения получается оптимальный алгоритм с пропорциональным воздействием на объект по всем переменным состояниям:

$$u^0 = -K_{\text{рег}}^0 x,$$

где  $K_{\text{рег}}^0 = R^{-1} B^T K$ ,  $K_{\text{рег}}^0 \in R^{m \times n}$ ,  $K \in R^{n \times n}$ .

Матрица  $K$  в общем случае содержит зависящие от времени коэффициенты, которые находятся из системы нелинейных дифференциальных уравнений Риккати:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t).$$

Если объект стационарный и функционал стационарный, то коэффициенты регулятора от времени зависеть не будут. В частности, для предыдущего примера  $Q = R = B = -A = 1$ , т.е. скаляры, уравнение

Риккати вырождается в квадратное уравнение  $K^2 + 2K - 1 = 0$ , которое имеет корень  $K_{\text{рег}}^0 = 0,41$ .

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2.

### Принцип оптимальности. Метод динамического программирования

#### Принцип оптимальности. Метод динамического программирования

В основу метода динамического программирования положен принцип оптимальности. Согласно ему любой конечный отрезок оптимальной траектории (от произвольной промежуточной точки до одной и той же конечной точки процесса) является сам по себе оптимальной траекторией для своих краевых условий. Для доказательства предположим, что при движении по оптимальной траектории  $M_0M_1M_2O$  (рис. 8.6) достигается минимум заданного критерия оптимальности.

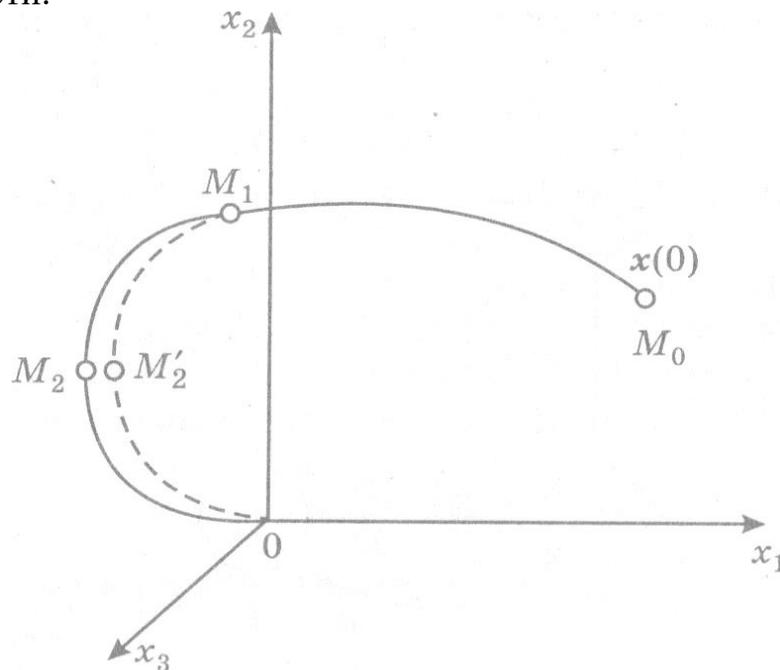


Рис. 8.6

Докажем, что конечный отрезок  $M_1M_2O$  является оптимальной траекторией для своих краевых условий. Допустим, что это не так, и минимум критерия оптимальности достигается при движении по траектории  $M_1M'_2O$ . Но тогда и при движении из точки  $M_0$  меньшее значение критерия будет получено на траектории  $M_0M_1M'_2O$ , что противоречит первоначальному предположению и заставляет отвергнуть сделанное допущение.

Метод динамического программирования позволяет решать задачи трех видов: дискретную, дискретно-непрерывную и непрерывную.

**1. Дискретная задача.** Она отличается дискретностью всех величин (времени, управляющих воздействий, управляемых величин). К числу исходных данных относятся:

- а) состояния выхода объекта управления;
- б) значения управляющих воздействий;
- в) алгоритм перехода из предыдущего состояния в последующее:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}),$$

где  $k$  - номер шага,  $k = \overline{1, N}$ , причем эти переходы задаются таблицей или диаграммой переходов;

- г) начальное состояние  $x_0$  и число шагов процесса  $N$ ;
- д) критерий оптимальности  $J$ , зависящий от состояний и управлений в оптимальном процессе.

Пусть для примера выходная величина объекта может иметь четыре состояния:  $x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Управляющее воздействие может иметь два значения:  $u = \{-1, 1\}$ . Диаграмма переходов показана на рис. 8.7. Примем  $x_0 = a_1, N = 2$ .

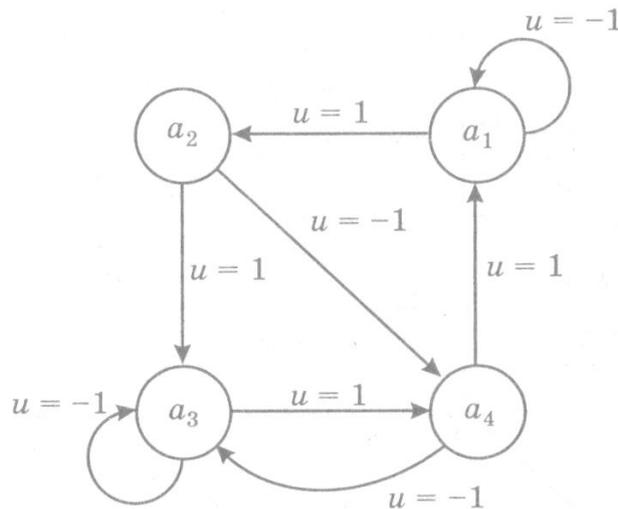


Рис. 8.7

Критерий оптимальности управления объектом примем в виде функции от конечного состояния объекта  $J = \varphi(x_N)$ , которая задана таблично (табл. 8.1) и должна быть минимизирована.

Таблица 8.1

$x_N$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
<b>J</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>2</b>

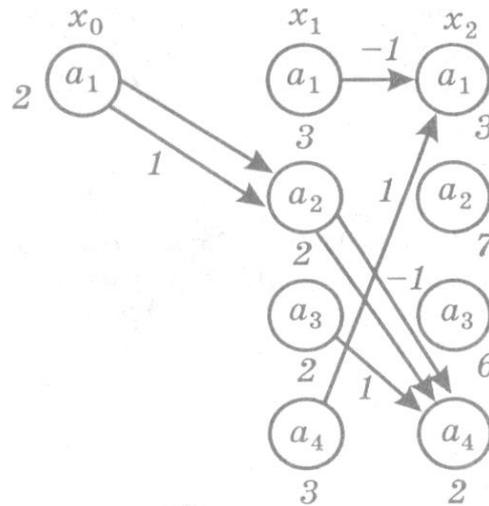


Рис. 8.8

Для решения задачи около каждого конечного состояния  $x_2$  на диаграмме оптимальных переходов (рис. 8.8) записываем в соответствии с таблицей значения критерия оптимальности  $J$ .

Затем рассматриваются все возможные переходы из каждого предыдущего состояния  $x_1$  в последующие  $x_2$ . Из них выбираются только те, которые оптимальны в смысле минимума. Эти переходы отмечаются стрелками, около которых ставятся соответствующие значения управления, а около предшествующего состояния указывается значение  $J$ . После этого находится аналогично оптимальный переход из начального состояния  $x_0$  в  $x_1$ . Оптимальная траектория обозначена двойными стрелками и получается при управлении

$$u^0 = \{u_0^0 = 1, u_1^0 = -1\}.$$

**2. Дискретно-непрерывная задача МДП.** В этой задаче управляющее воздействие и управляемые величины могут иметь бесчисленное количество значений в пределах заданных ограничений. Время изменяется дискретно с малым шагом  $\Delta t$ , что соответствует численным методам решения задач на ЭВМ. Задана продолжительность процесса  $T$ , уравнение объекта управления

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (8.4)$$

ограничение на управление  $u \in \Omega(u)$  и начальное состояние  $x(0) = x_0$ .

Задан в виде функционала минимизируемый критерий оптимальности

$$J = \varphi(x(T)) + \int_0^T f_0'(x, u) dt. \quad (8.5)$$

Требуется найти оптимальное управление  $u^0(t)$  и траекторию  $x^0(t)$ .

Прежде всего от дифференциального уравнения (8.4) переходим к разностному уравнению, заменяя  $dx$  на  $x_{k+1} - x_k$ ,  $dt$  на  $\Delta t$ ,  $x$  и  $u$  на  $x_k$  и  $u_k$ ,

где  $x(k\Delta t), u(k\Delta t)$  относительное дискретное время  $k = 0, 1, 2, \dots$

Обозначив  $f'(L) \cdot \Delta t = f(L)$ , получим из (8.4) разностное уравнение

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k). \quad (8.6)$$

Критерий оптимальности (8.5) вместо интеграла необходимо представить в виде конечной суммы

$$J = \varphi(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x_k, u_k), \quad (8.7)$$

где  $f_0(L) = f'_0(L) \cdot \Delta t$ .

Переход к уравнениям (8.6) и (8.7) означает дискретизацию задачи по времени.

В соответствии с принципом оптимальности последовательно оптимизируем конечные отрезки процесса, начинающиеся от конечной точки  $t = T$  и постепенно увеличивающиеся на  $\Delta t$  (рис. 8.9).

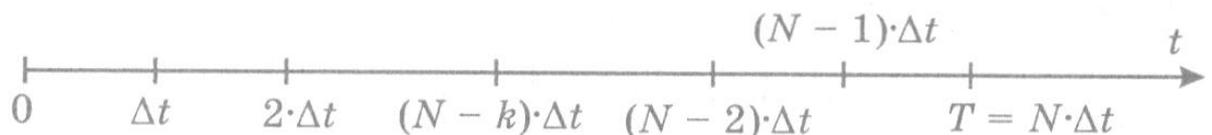


Рис. 8.9

Первым рассматриваем отрезок

$$\Delta t \leq t \leq N\Delta t.$$

На этом отрезке из всего функционала (8.7) минимизируется частичная сумма

$$J_{N-1} = \varphi(x_{N-1} + f(x_{N-1}, u_{N-1})) + f_0(x_{N-1}, u_{N-1})$$

за счет изменения управления  $u_{N-1}$  с учетом ограничений, где  $x_N$  заменено согласно (8.6). В результате минимизации получаем следующую функцию от состояния  $x_{N-1}$ :

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in \Omega} J_{N-1}. \quad (8.8)$$

Данную зависимость необходимо запомнить до получения аналогичной функции на следующем шаге расчета. Кроме (8.8) определится и оптимальное управление

$$u_{N-1}^0 = u_{N-1}(x_{N-1}). \quad (8.9)$$

Функция (8.9) должна храниться в памяти до окончания расчета процесса. Затем переходим к отрезку  $(N-2)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$ , на котором минимизируется

$$J_{N-2} = J_{N-1} + f_0(x_{N-2}, u_{N-2}).$$

Минимум этой частичной суммы должен быть найден по двум переменным  $u_{N-2}$  и  $u_{N-1}$  но с учетом уже сделанной минимизации по  $u_{N-1}$  в виде (8.8) остается минимизировать ее только по одному аргументу  $u_{N-2}$ . В результате получим

$$S_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2} \in \Omega} [S_{N-1}(x_{N-2} + f(x_{N-2}, u_{N-2})) + f_0(x_{N-2}, u_{N-2})]. \quad (8.10)$$

Функция (8.10) заменяет в памяти функцию (8.8), и находится оптимальное управление

$$u_{N-2}^0 = u_{N-2}(x_{N-2}).$$

Аналогично на отрезке  $(N-k)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$  находим

$$S_{N-k}(x_{N-k}) = \min_{u_{N-k} \in \Omega} [S_{N-k+1}(x_{N-k} + f(x_{N-k}, u_{N-k})) + f_0(x_{N-k}, u_{N-k})],$$

$$u_{N-k}^0 = u_{N-k}(x_{N-k}).$$

Наконец для всего процесса  $0 \leq t \leq N\Delta t$  находим

$$S_0(x_0) = \min_{u_0 \in \Omega} J,$$

$$u_0^0 = u_0(x_0).$$

Таким образом, получен алгоритм расчета по рекуррентным формулам, который и называется динамическим программированием. При его применении по формуле (8.11) находим оптимальное управление  $u_0^0$ , затем по уравнению объекта (8.6) находим состояние объекта  $x_1$ , далее находим  $u_1^0$  и т. д., вплоть до  $u_{N-1}^0$ .

**3. Непрерывная задача.** Задано уравнение объекта управления

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t),$$

где  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ ,  $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ ,  $f = [f_1, \dots, f_n]^T$ ,

и краевые условия:  $x(t_0)$  – закрепленный левый конец траектории,  $x(t_f)$  – подвижный правый конец.

Задано ограничение на управление  $u \in \Omega(u)$  и минимизируемый функционал общего вида (функционал Больца):

$$J = \varphi(x(t_f), u(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt.$$

Найти оптимальное управление  $u^0(t)$ , траекторию  $x^0(t)$  или закон оптимального управления  $u^0 = u(x, t)$ .

Для вывода уравнения Беллмана рассмотрим две точки на искомой оптимальной траектории  $x(t)$  и  $x(t_1)$  (рис. 8.10), причем  $t_1 = t + \Delta t$ , где  $\Delta t$  – малое приращение времени. Введем обозначение

$$S(x(t_0), t_0) = \min_{u \in \Omega} J,$$

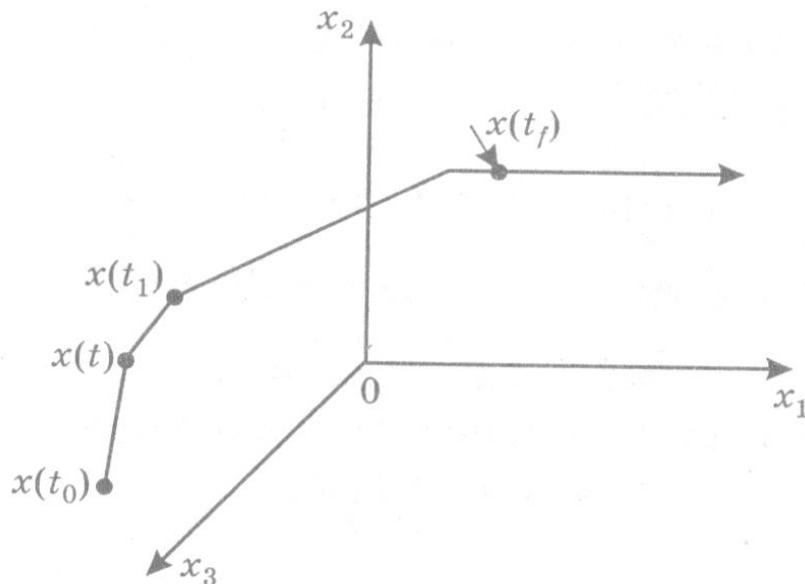


Рис. 8.10

которое указывает на то, что минимум критерия оптимальности зависит только от начального состояния и начального момента времени процесса. Применяя принцип оптимальности, можно выразить минимальное значение функционала для конечных отрезков траектории, начинающихся в точках  $x(t)$  и  $x(t_1)$ :

$$S(x(t), t) = \min_{u \in \Omega} \left[ \varphi(x(t_f), u(t_f)) + \int_0^{t_1} f_0(L) dt + \int_{t_1}^{t_f} f_0(L) dt \right],$$

$$S(x(t_1), t_1) = \min_{u \in \Omega} \left[ \varphi(x(t_f), u(t_f)) + \int_{t_1}^{t_f} f_0(L) dt \right].$$

Сравнение этих равенств позволяет выразить первый минимум через второй:

$$S(x(t), t) = \min_{u \in \Omega} \left[ \int_t^{t_1} f_0(L) dt + S(x(t_1), t_1) \right].$$

Входящий в это равенство интеграл можно заменить произведением его подынтегральной функции на  $\Delta t$  (вследствие малости последнего). Кроме того, функцию, входящую в левую часть, как независимую от управления, можно ввести под знак минимума для того, чтобы получить приращение функции  $S$ , называемой функцией Беллмана. После этого придем к следующему результату:

$$\min_{u \in \Omega} [f_0(x, u, t) \Delta t + \Delta S(x(t), t)] = 0$$

Поделив почленно равенство на  $\Delta t$  и устремив  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) \Delta t + \frac{d}{dt} S(x(t), t) \right] = 0. \quad (8.12)$$

Считая функцию Беллмана  $S$  непрерывной и дифференцируемой функцией всех своих аргументов, выразим производную  $\frac{dS}{dt}$ , как производную сложной функции, причем производную  $\frac{dS}{dt}$ , как независимую от управления  $u$ , перенесем в правую часть равенства:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] = - \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}.$$

Заменив входящие сюда производные переменных состояния на соответствующие функции из уравнений объекта управления, получим уравнение Беллмана в общем виде:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} f_i(x, u, t) \right] = - \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}. \quad (8.13)$$

Применяется и другая запись уравнения Беллмана с использованием скалярного произведения, в которое входит градиент функции  $S$ :

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + \langle \text{grad} S(x, t), f(x, u, t) \rangle \right] = - \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}. \quad (8.14)$$

В частном случае, когда объект стационарен и подынтегральная функция функционала  $f_0$  не зависит от времени, искомая функция Беллмана  $S$  также не будет явно зависеть от времени. Следовательно,

$\frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0$  и уравнение Беллмана упрощается, что соответствует так называемой задаче Лагранжа:

$$\min_{u \in \Omega} \left[ f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right] = 0. \quad (8.15)$$

Для задачи максимального быстродействия  $f_0 = 1$ , и уравнение Беллмана (8.15) приобретает вид:

$$\min_{u \in \Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) = -1. \quad (8.16)$$

Из уравнения Беллмана должна быть найдена функция Беллмана  $S$  и оптимальное управление, что на практике выполняется в следующем порядке при оптимизации обобщенного квадратичного функционала.

1. В соответствии с исходными данными выбираем то или иное уравнение Беллмана (8.13)-(8.16).

2. Минимизируем по управляющему воздействию  $u$  левую часть уравнения Беллмана, выражая при этом искомое оптимальное управление через производные неизвестной функции  $S$ .

3. Подставляем в уравнение Беллмана найденное выражение для оптимального управления. При этом знак  $\min$  опускается.

4. Решаем полученное уравнение относительно функции Беллмана  $S$ . Решение ищется в виде положительно определенной квадратичной формы  $S = x^T C x$ . После подстановки выражения для функции в уравнение Беллмана элементы симметричной матрицы  $C$  могут быть найдены приравнением к 0 всех коэффициентов квадратичной формы, образовавших левую часть уравнения Беллмана.

5. Подставляем функцию Беллмана, как функцию переменных состояния, в выражение для оптимального управления, найденного в п. 2. В результате получим оптимальный алгоритм управления. Соответствующая система устойчива, так как удовлетворяет требованиям прямого метода Ляпунова. Действительно, приняв функцию Беллмана за функцию Ляпунова, т. е. считая  $S = V$ , получаем  $\dot{V} \leq 0$  согласно (8.12) при положительной определенности  $f_0(x, u, t)$ .

**Пример.** Задана система уравнений объекта:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$$

и краевые условия:  $x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0, x_1(T) = x_2(T) = 0$ , где  $T$  - длительность оптимального процесса.

Задан критерий оптимальности, который необходимо минимизировать:

$$J = \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 u^2) dt,$$

где  $x_1^2$  характеризует качество процесса управления, а  $\alpha^2 u^2$  – энергетические затраты на управление.

Ограничений на управление не наложено.

Требуется найти оптимальный алгоритм управления  $u^0(x_1, x_2)$ .

### **Решение.**

1. Выбираем уравнение Беллмана для задачи Лагранжа, подставляя  $f_0, f_1, f_2$ :

$$\min_u \left[ x_1^2 + \alpha^2 u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u \right] = 0.$$

2. Приравниваем к 0 производную по управлению  $u$  от минимизируемой функции

$$2\alpha^2 u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0$$

и находим отсюда оптимальное управление

$$u^0 = -\frac{\partial S}{\partial x_2} \frac{1}{2\alpha^2}.$$

3. Подставляем найденную функцию  $u^0$  в уравнение Беллмана и делаем преобразования, опуская знак минимума:

$$x_1^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 = 0.$$

4. Выбираем функцию Беллмана в виде квадратичной формы с симметричной матрицей

$$S = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2$$

и, подставляя ее в уравнение Беллмана, получим

$$x_1^2 - \frac{1}{4\alpha^2} (2c_{12}x_1 + 2c_{22}x_2)^2 (2c_{11}x_1 + 2c_{12}x_2)x_2 = 0.$$

Отсюда находим, приравнивая к 0 коэффициенты при  $x_1^2$ ,  $x_2^2$  и  $x_1x_2$ :

$$c_{11} = \sqrt{2\alpha}, c_{12} = \alpha, c_{22} = \alpha\sqrt{2\alpha}, S = \sqrt{2\alpha}x_1^2 + 2\alpha x_1x_2 + \alpha\sqrt{2\alpha}x_2^2.$$

5. Подставив последнее выражение в формулу для функции  $u^0$ , найдем оптимальное управление

$$u^0(x_1, x_2) = -\frac{1}{\alpha} (x_1 + \sqrt{2\alpha} x_2).$$

Соответствующая структурная схема оптимальной САУ (рис. 8.11) показывает, что оптимальным является регулятор с пропорциональным управлением по переменным состояния (ПД- регулятор).

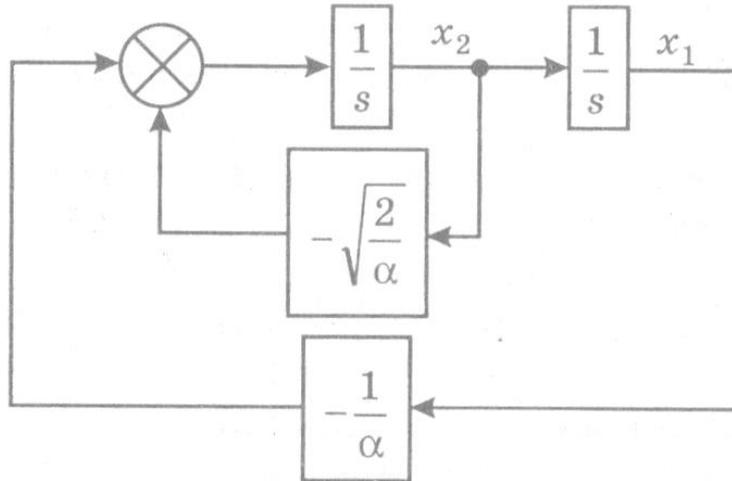


Рис. 8.11

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3.

#### Принцип максимума Понтрягина Л.С. Синтез оптимального по быстродействию регулятора

##### 1. Принцип максимума

Это метод расчета оптимальных процессов и систем, который выражает необходимое условие оптимальности. Рассмотрим упрощенный вывод принципа максимума.

Задано уравнение управляемого объекта в векторно-матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

где  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ .

Ограничение наложено на скалярное управляющее воздействие  $|u| \leq U_m$ .

Задан минимизируемый функционал:

$$J = \int_0^T f_0(x, u) dt.$$

Необходимо найти оптимальное управление  $u^0(t)$  и траекторию  $x^0(t)$ . Порядок решения поставленной задачи следующий.

1. Вводим дополнительную переменную состояния

$$x_0(t) = \int_0^T f_0(x, u) dt,$$

конечное значение которой  $x_0(T) = J$ , т. е. равно критерию оптимальности. Эта переменная вместе с другими характеризует объект управления и образует обобщенный вектор состояния

$$\mathcal{X}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T.$$

Дифференцируя по  $t$  выражение для новой переменной найдем уравнение в нормальной форме  $\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u)$ . Добавив это уравнение в систему заданных уравнений объекта управления, получим систему обобщенных уравнений:

$$\frac{d\mathcal{X}_0}{dt} = \mathcal{F}(x, u), \quad (8.17)$$

где  $\mathcal{F} = [f_0, f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ .

2. Производим игольчатую вариацию управляющего воздействия относительно искомого оптимального закона его изменения

(рис. 8.12), при которой это воздействие скачком изменяется до продольного значения и затем обратно в течение бесконечно малого отрезка времени  $\varepsilon$ .

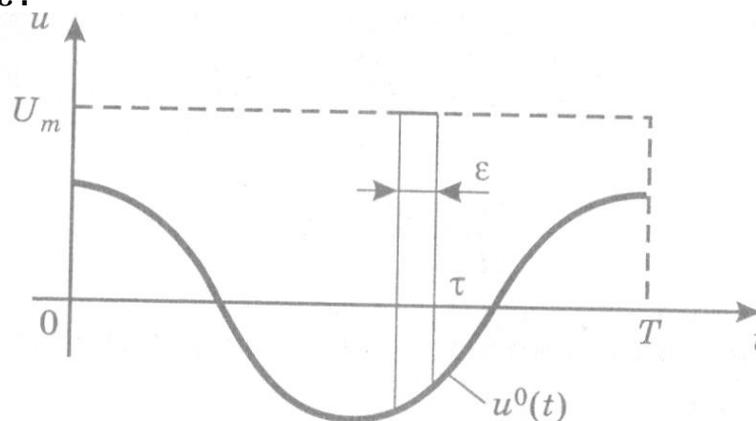


Рис. 8.12

Площадь игольчатой вариации бесконечно мала, поэтому она вызывает бесконечно малые отклонения (вариации) переменных состояния:

$$\delta \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_0^0(t)$$

где  $\tau \leq t \leq T$ .

В частности, вариация

$$\delta x_0(T) = \delta J > 0, \quad (8.18)$$

так как система оптимальна по минимуму критерия оптимальности.

3. Выразим вариацию траектории в момент времени  $\tau$  как произведение ее скорости на длительность вариации, т. е.

$$\delta x(\tau) = \left( \frac{dx(\tau)}{dt} - \frac{dx^0(\tau)}{dt} \right)_{t=\tau} \cdot \varepsilon.$$

В последнем равенстве заменим скорости на соответствующие функции, взятые из (8.17):

$$\delta x(\tau) = \left[ f(x(\tau), u(\tau)) - f(x^0(\tau), u^0(\tau)) \right] \cdot \varepsilon. \quad (8.19)$$

4. Определим вариацию критерия оптимальности в момент  $t = \tau$  по формуле скалярного произведения:

$$\delta J = - \langle \delta x(\tau), \psi(\tau) \rangle, \quad (8.20)$$

где  $\psi(\tau)$  - вспомогательная вектор-функция, подлежащая определению и имеющая смысл градиента изменения критерия оптимальности при изменении переменных состояния.

5. Подставляем (8.19) в (8.20) и с учетом знака вариации  $\delta J$  получим неравенство для  $\tau \leq t \leq T$ :

$$\langle f(x^0(t), u^0(t)), \psi(\tau) \rangle - \langle f(x(t), u(t)), \psi(\tau) \rangle > 0. \quad (8.21)$$

6. Обозначаем функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H = \langle f(x(t), u(t)), \psi(\tau) \rangle = \sum_{i=0}^n f_i(x(t), u(t)), \psi_i(\tau). \quad (8.22)$$

Сравнение (8.22) и (8.21) позволяет сформулировать принцип максимума.

Для оптимального управления объектом необходимо, чтобы гамильтониан  $H$  имел максимальное (наибольшее) значение в любой момент процесса управления.

Если оптимальное управление находится внутри допустимой области, то гамильтониан  $H$  достигает максимума. Если же управление  $u^0(t)$  меняется по границам этой области, то  $H$  достигает своего наибольшего значения (супремума).

7. Для нахождения вспомогательных функций получены следующие уравнения:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (8.23)$$

Для функций  $\psi_i$  в соответствии с (8.20) и (8.18) получаются следующие граничные условия:

$$\psi_0(T) = -1, \psi_i(T) = 0, (i = \overline{1, n}).$$

Так как гамильтониан  $H$  от  $x_0$  не зависит, то из (8.23) имеем  $\frac{d\psi_0(t)}{dt} = 0$ , следовательно,  $\psi_0(t) = -1 = const$ .

## 2. Порядок практического применения принципа максимума

1. Располагая заданным функционалом и уравнениями объекта, составляем гамильтониан  $H$  по формуле (8.22). Причем, если подынтегральная функция  $f_0$  от управления  $u$  не зависит, то соответствующее слагаемое можно в гамильтониан не включать, так как это не повлияет на решение задачи. Это справедливо, в частности, для критерия максимального быстродействия, когда  $f_0 = 1$ .

2. Исследуем гамильтониан  $H$  на максимум по управлению  $u$ , т. е. решаем уравнение  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ .

Отсюда находим в общем виде оптимальное управление через переменные  $x$  и  $\psi$ . Если это уравнение приводит к нулевым значениям хотя бы для одной функции  $\psi_i$  (тривиальное решение), то это считается неприемлемым и означает, что оптимальное управление изменяется по границам допустимой области. Соответственно гамильтониан  $H$  имеет не максимум, а наибольшее значение (супремум). В этом случае оптимальный закон управления находится из выражения для  $H$  в классе знаковых функций с учетом ограничений на управление.

3. Найденный оптимальный алгоритм управления подставляют в уравнения (8.16) и (8.23), и они решаются совместно. При этом решении возникают сложности с определением постоянных интегрирования, удовлетворяющих граничным условиям. Поэтому обычно ограничиваются решением качественного характера, при котором определяется лишь характер изменения оптимального управления. Дальнейшее применение метода припасовывания позволяет получить точное решение количественного характера.

**Пример.** Пусть необходимо определить характер оптимального по быстродействию управления углом поворота вала двигателя постоянного тока, описываемого уравнением:

$$T_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = ku,$$

где  $|u| \leq U_m$ .

1. Обозначив  $y = x_1$ , переходим к уравнениям в нормальной форме:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{ku - x_2}{T_0} \end{cases}$$

и составляем гамильтониан  $H$

$$H = f_1 \psi_1 + f_2 \psi_2 = x_2 \psi_1 + \frac{ku - x_2}{T_0} \psi_2.$$

2. Исследуем гамильтониан  $H$  на максимум, т. е. находим и приравниваем к 0 производную  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ . Отсюда  $\psi_2 = 0$ , но такое решение тривиально и неприемлемо. Значит  $H^0 = \sup_u H$ , и оптимальное управление находится из формулы для  $H$  так, чтобы он был наибольшим, т. е.

$$u^0(t) = U_m \text{sign} \psi_2(t).$$

3. Составляем систему уравнений для вспомогательных функций:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\psi_1 + \frac{\psi_2}{T_0}. \end{cases}$$

Решение ее облегчается тем, что в эту систему не вошли функции  $x_i$ . с точностью до постоянных интегрирования получим

$$\psi_1 = c_1 = \text{const}, \quad \psi_2(t) = c_2 e^{\frac{t}{T_0}} + c_1 T_0,$$

что следует после нахождения корня соответствующего характеристического уравнения. Следовательно, оптимальное управление  $u^0(t)$  определяется формулой

$$u^0(t) = U_m \text{sign} \left( c_2 e^{\frac{t}{T_0}} + c_1 T_0 \right).$$

Функция  $\psi_2(t)$  в данном случае может изменить знак не более одного раза. Соответственно оптимальное управление может

иметь не более двух интервалов постоянства на уровнях  $\pm U_m$  (рис. 8.13).

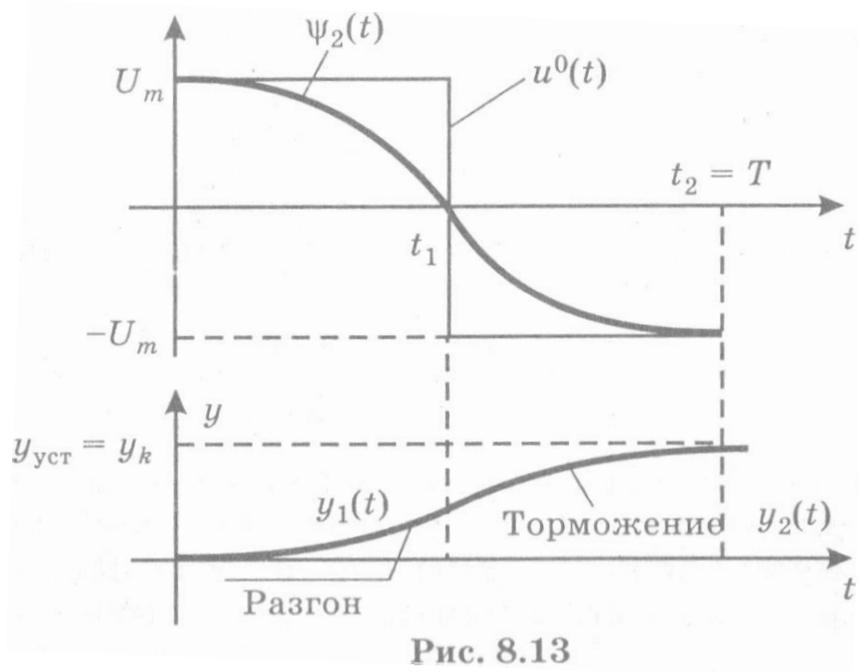


Рис. 8.13

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4.

### Синергетические оптимальные системы автоматического управления

Название «синергетика» произошло от греческого «синергос» - «вместе действующий» и обозначает общенаучное направление, изучающее совместные действия нелинейных динамических систем различной природы. Базовые положения синергетической теории заключаются в следующем:

1. В синергетических системах в процессе самоорганизации происходит уменьшение числа свободы, т. е. управляемая декомпозиция фазового пространства путем выделения лишь нескольких координат, к которым подстраиваются остальные. Именно эти так называемые макропеременные  $\psi_i(x_1, \dots, x_n)$  и определяют основные особенности динамики системы, открывая возможность построения упрощенных агрегированных моделей.

2. Следствием этого процесса самоорганизации является образование в фазовом пространстве так называемых аттракторов - инвариантных многообразий  $\psi_i = 0$ , к которым притягиваются траектории системы.

3. Каждый аттрактор имеет свою область притяжения в фазовом пространстве, отделенную границей от других областей. Причем направленная самоорганизация обеспечивает выход на желаемый аттрактор за счет соответствующего выбора алгоритма изменения управляющих воздействий как функций координат системы.

Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов состоит из следующих этапов:

1. **Постановка задачи.** Объект управления (ОУ) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где  $x \in R^{n \times 1}$  - вектор состояния.

Требуется найти закон управления  $u^0(x)$ , который обеспечивает перевод изображающей точки из произвольного начального состояния сначала в окрестность инвариантного многообразия  $\psi(x_1, \dots, x_n) = 0$ , а затем дальнейшее устойчивое асимптотическое движение вдоль этого многообразия в желаемое состояние, в частности, в начало координат.

Примером решения подобной задачи может служить известная оптимальная по быстродействию система второго порядка, в которой  $\psi(x_1, x_2) = 0$  — уравнение линии переключения, с которой изображающая точка должна сначала сблизиться, а затем двигаться вдоль нее к началу координат.

2. Выбор агрегированных макропеременных, т. е. функций  $\psi_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Эти функции могут строиться различными способами, и их поиск является главной задачей проектирования. Этот поиск пока в большей мере носит эвристический характер.

3. Нахождение закона оптимального управления производится без решения оптимизационной задачи. Изменение макропеременной  $\psi(t)$  считается оптимальным, если минимизируется так называемый сопровождающий оптимизирующий функционал, имеющий, в частности, вид улучшенной квадратичной оценки:

$$J_{20} = \int_0^{\infty} [\psi^2(t) + T^2 \dot{\psi}^2(t)] dt.$$

Как известно, минимум такому функционалу доставляет асимптотически стремящаяся к 0 экспонента, являющаяся общим решением так называемого функционального уравнения:

$$T\dot{\psi}(t) + \psi(t) = 0.$$

Затем определяют производную от макропеременной по времени, как от сложной функции в силу уравнений объекта. Эту про-

изводную и саму макропеременную подставляют в функциональное уравнение и находят отсюда искомый закон оптимального управления. Сопровождающий оптимизирующий функционал с учетом  $\psi(x)$  позволяет также найти критерий качества, по которому оптимизируется синтезируемая система. Он содержит высокие степени координат, что существенно улучшает важные показатели качества в отношении быстродействия, перерегулирования, демпфирования колебаний и др. Особенно эти достоинства проявляются в областях значительных отклонений изображающей точки от заданного состояния.

Пример. Заданы уравнения движения самолета в вертикальной плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u, \end{cases}$$

где  $x_1$  - угол атаки;  $u$  - отклонение руля высоты.

*1-й вариант:*

1.1. Агрегированную макропеременную выберем линейной

$$\psi(x_1, x_2) = \beta_1 x_1 + x_2.$$

1.2. Находим производную от нее по времени с учетом уравнений ОУ:

$$\dot{\psi}(x_1, x_2) = \beta_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \beta_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u.$$

1.3. Подставляя  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  в функциональное уравнение, находим закон оптимального управления:

$$u^0 = -\frac{1}{a_3} \left( a_1 + \frac{\beta_1}{T} \right) x_1 - \frac{1}{a_3} \left( a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T} \right) x_2.$$

1.4. Подставляя этот закон в уравнения объекта, получим уравнения замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\beta_1}{T} x_1 - \left( \beta_1 + \frac{1}{T} \right) x_2, \end{cases}$$

условия устойчивости которой  $\beta_1 > 0$  и  $T > 0$ . Совместное решение приводит к одному уравнению:

$$\frac{T}{\beta_1} \ddot{x}_1 + \left( T + \frac{1}{\beta_1} \right) \dot{x}_1 + x_1 = 0,$$

которое при  $\xi = \frac{1 + \beta_1 T}{2\sqrt{\beta_1 T}} \geq 1$  эквивалентно апериодическому звену

второго порядка с особой точкой типа "устойчивый узел" (рис. 9.5)

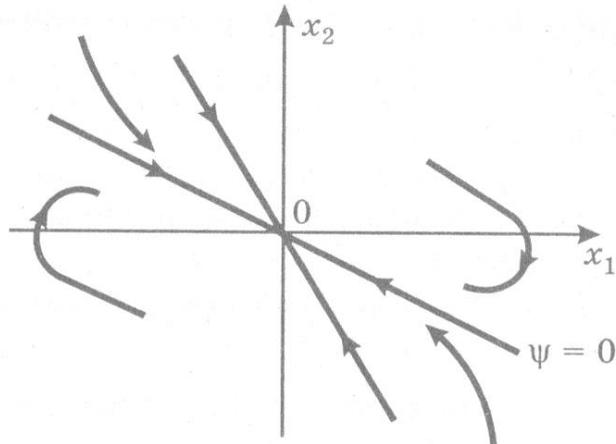


Рис. 9.5

Многообразию  $\psi = 0$ , т. е.  $x_2 = -\beta_1 x_1$ , является прямолинейной фазовой траекторией, стремящейся к началу координат.

*2-й вариант:*

Если применить нелинейную макропеременную

$$\psi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + x_2,$$

то аналогично определим нелинейный закон оптимального управления:

$$u^0 = -\frac{1}{a_3} \left[ \left( a_1 + \frac{\beta_1}{T} \right) x_1 - \left( a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T} \right) - \frac{\beta_2}{T} x_1^3 - 3\beta_2 x_1^2 x_2 \right].$$

Из уравнения многообразия  $\psi = 0$  найдем  $x_2$  и подставив в первое уравнение ОУ, получим нелинейное дифференциальное уравнение движения САУ вдоль многообразия  $\psi = 0$  в начало координат (рис. 9.6):

$$\dot{x}_1 = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_1^3.$$

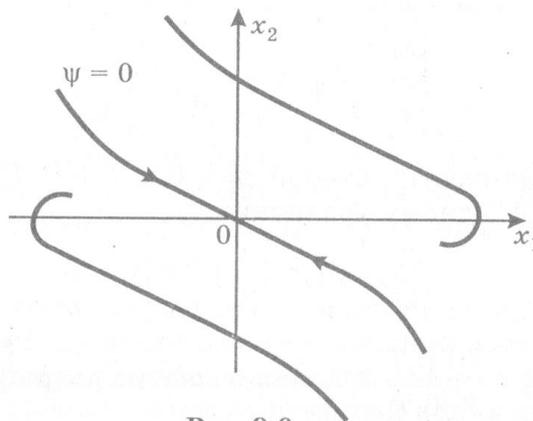


Рис. 9.6

Как и в первом варианте, это уравнение более низкого (первого) порядка, чем уравнение ОУ. При  $\beta_1 > 0$  и  $\beta_2 > 0$  свободное движение устойчиво в целом.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5.

### Интеллектуальные системы автоматического управления

Создание систем, ориентируемых для работы в условиях неполноты или нечеткости исходной информации, неопределенности внешних возмущений и среды функционирования, требует привлечения нетрадиционных подходов к управлению с использованием методов и технологий искусственного интеллекта. Такие системы, названные интеллектуальными системами управления, образуют совершенно новый класс. Это понятие возникло в начале 80-х гг. XX в.

В качестве базовых выделяются 4 интеллектуальные технологии:

- технология экспертных систем, ориентированная на обработку знаний с явной формой представления в виде продукционных правил;
- технология нечеткой логики, ориентированная на обработку логико-лингвистических моделей представления знаний с помощью продукционных правил и размытых множеств;
- технология нейросетевых структур с неявной формой представления знаний, скрытых в архитектуре сети, параметрах нейронов и связей;
- технология ассоциативной памяти, ориентированная на обработку знаний с неявной формой представления в виде гиперповерхности в многомерном пространстве признаков.

Отсюда, в частности, видно, что основной отличительной чертой интеллектуальных систем автоматического управления является возможность системной обработки знаний, под которыми понимается проверенный практикой результат познания деятельности, верное ее отражение в мышлении человека. Знания позволяют отнести сложившуюся ситуацию к некоторому классу, для которого требуется управление считается известным согласно теории ситуационного управления Д.А. Поспелова и его научной школы. Одна из передовых тенденций в области обработки знаний состоит в интеграции различных интеллектуальных технологий для сочетания их преимуществ.

Организация интеллектуальных систем автоматического управления производится по следующим пяти принципам:

- наличие тесного информационного взаимодействия интеллектуальной системы автоматического управления с реальным внешним миром при использовании информационных каналов связи;
- наличие прогнозов изменения внешнего мира и собственного поведения системы;

- многоуровневый характер иерархической структуры в соответствии с правилом: повышение интеллектуальности и снижение требований к точности по мере повышения ранга иерархии;
- сохранение функционирования при разрыве связей от высших уровней иерархии;
- повышение интеллектуальности и совершенствование собственного поведения.

### Нейросетевые системы и регуляторы

Высокое быстродействие за счет распараллеливания входной информации в сочетании с обучаемостью нейронных сетей подобно своим биологическим прототипам делает эту технологию весьма привлекательной для создания самообучающихся оптимальных автоматических устройств управления с идентификацией объекта управления. Причем применение нейрокомпьютеров представляется перспективным для всех уровней иерархии интеллектуальных систем: исполнительного, тактического и стратегического.

Наиболее распространенной структурой, которая вобрала в себя все основные свойства, присущие нейронным сетям, является многослойная нейронная сеть прямого распространения (рис. 9.21).

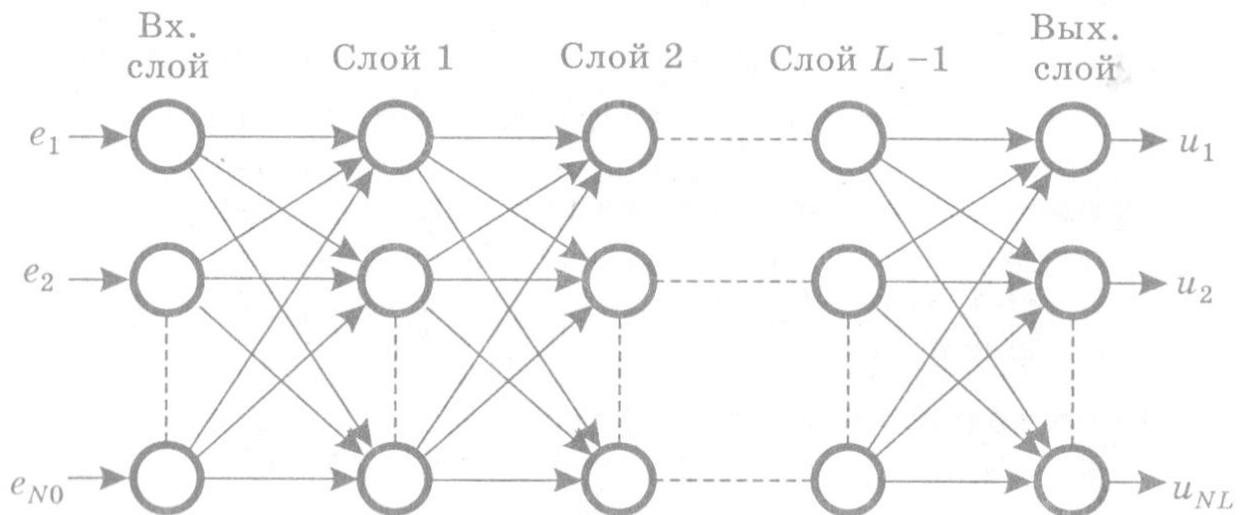


Рис. 9.21

Многослойная нейронная сеть прямого распространения состоит из нейронов, структура которых представлена на рис. 9.22, и

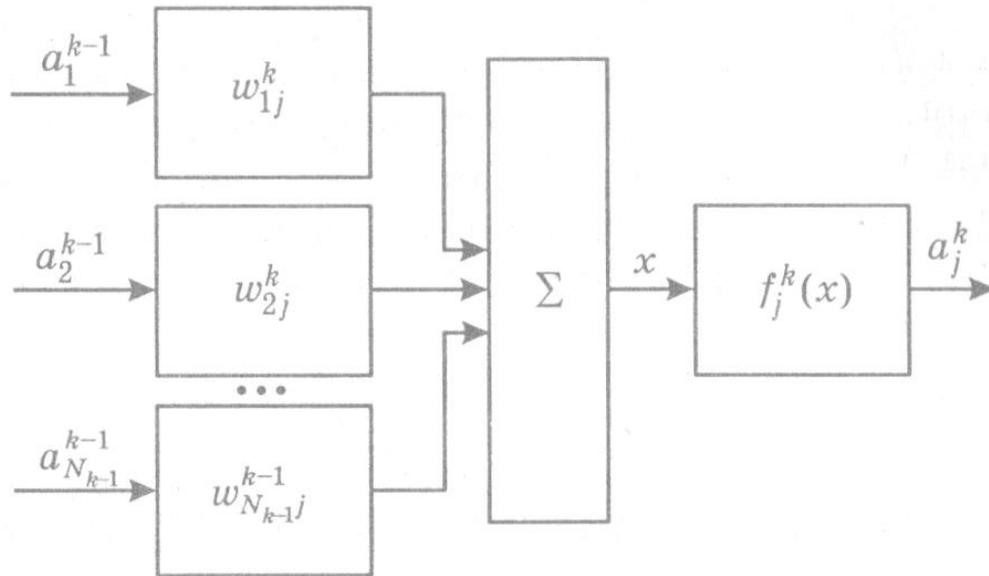


Рис. 9.22

имеет следующие обозначения:  $a_j^k$  - выход  $j$ -го нейрона в  $k$ -м слое;  $w_{ij}^k$  - весовой коэффициент связи  $i$ -го нейрона  $(k-1)$ -го слоя с  $j$ -м нейроном  $k$ -го слоя;  $N_k$  - количество нейронов в  $k$ -м слое;  $f_j^k(x)$  - функция преобразования  $j$ -го нейрона в  $k$ -м слое.

Многослойная нейронная сеть прямого распространения имеет однородную топологию, только прямые связи (одностороннюю передачу сигнала) от всех нейронов предыдущего слоя ко всем нейронам последующего слоя и описывается следующими уравнениями:

- для первого слоя

$$a_j^1 = f_j^1 \left\{ \sum_{i=1}^{N_0} (w_{ij}^1 e_i) \right\}, \quad j = \overline{1, N_1}; \quad (9.12)$$

- для промежуточных (скрытых) слоев

$$a_j^k = f_j^k \left\{ \sum_{i=1}^{N_{k-1}} (w_{ij}^k a_i^{k-1}) \right\}, \quad k = 2, \dots, L-1; \quad j = \overline{1, N_k}; \quad (9.13)$$

- для последнего (выходного) слоя

$$u_j = f_j^L \left\{ \sum_{i=1}^{N_{L-1}} (w_{ij}^L a_i^{L-1}) \right\}, \quad j = \overline{1, N_L}, \quad (9.14)$$

где  $e_i$  -  $i$ -й вход, а  $u_j$  -  $j$ -й выход нейрона.

Функция преобразования  $f_j^k(x)$  в промежуточных слоях сети должна быть нелинейной, так как в случае линейного преобразования многослойная нейронная сеть сводится к однослойной нейронной сети и может быть двух видов:

- *сжимающая функция*, наиболее удобная для программной реализации:

$$f_j^k(x) = \frac{x + \beta_j^k}{a_j^k + |x + \beta_j^k|};$$

- *пороговая функция*, наиболее удобная для аппаратной реализации:

$$f_j^k(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } x \geq \beta_j^k; \\ -1 & \text{при } x \leq \beta_j^k, \end{cases}$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры нейрона (крутизна характеристики и смещение соответственно).

Многослойная нейронная сеть прямого распространения характеризуется отсутствием внутренней динамики (т. е. безынерционностью) и может реализовать любое однозначное нелинейное преобразование входного вектора  $E = [e_1, \dots, e_{N_0}]^T$  в желаемый выходной  $u = [u_1, \dots, u_{N_L}]^T$ , точность которого определяется числом нейронов в скрытых слоях.

Настройка многослойной нейронной сети прямого распространения на требуемое функционирование производится изменением коэффициентов  $w_{ij}^k$  и параметров нейронов  $\alpha_j^k$ ,  $\beta_j^k$  по тестовым примерам и называется процедурой обучения.

Высокие требования по точности к желаемому преобразованию определяют необходимость обучения сети на большом количестве примеров. В этом случае обучение производится сразу по группе примеров, которая называется страницей примеров. При этом минимизируется критерий оценки обучения в виде функции

$$H = \sum_{m=1}^p H^m, \text{ где критерий оценки по отдельному примеру } P^m$$

$$H^m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_L} (u_j^m - u_{rj}^m)^2$$

определяется как сумма квадратов разности между  $j$ -м выходом нейросетевого регулятора  $u_{rj}^m$  и его желаемым значением  $u_j^m$  при подаче входного вектора  $E^m$  примера  $P^m$ .

Значение  $u_{rj}^m$  определяется функциональным преобразованием нейросетевого регулятора

$$u_{rj}^m = f_j(E^m, W, \alpha, \beta),$$

где вектор весовых коэффициентов многослойной нейронной сети прямого распространения

$$W = [w_{11}^1, \dots, w_{ij}^k, \dots, w_{N_{L-1}N_L}^L]^T.$$

Таким образом для обучения нейронной сети по странице примеров требуется минимизировать функцию оценки  $H$ , изменяя значения весовых коэффициентов связей и параметров нейронов. Эта постановка задачи позволяет применить все множество методов нелинейного программирования для настройки нейросетевого регулятора, среди которых наиболее распространены градиентные методы. Последние требуют информации о векторе градиента функции оценки

$$\Delta H = \Delta H(\Delta W, \Delta A, \Delta B),$$

где  $\Delta W$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  – векторы приращений весовых коэффициентов и параметров  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

После получения вектора градиента можно проводить изменение весовых коэффициентов связей и параметров нейронов в соответствии с выбранным оптимизационным методом.

**Пример 1.** Оптимальная по быстродействию САУ с многослойной нейронной сетью прямого распространения (рис. 9.23).

В этой САУ нейросетевой регулятор в виде многослойной нейронной сети прямого распространения должен выполнять задачу классификации входного вектора  $E = [e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(n-1)}(t)]^T$  на два класса (области), разделенных гиперповерхностью переключения и соответствующим значениям управляющего воздействия  $u = \{u_{\min}, u_{\max}\}$ .

Известные в ТАУ алгоритмы синтеза законов оптимального управления позволяют получить множество точек гиперповерхности переключения, на основании которого формулируется мно-

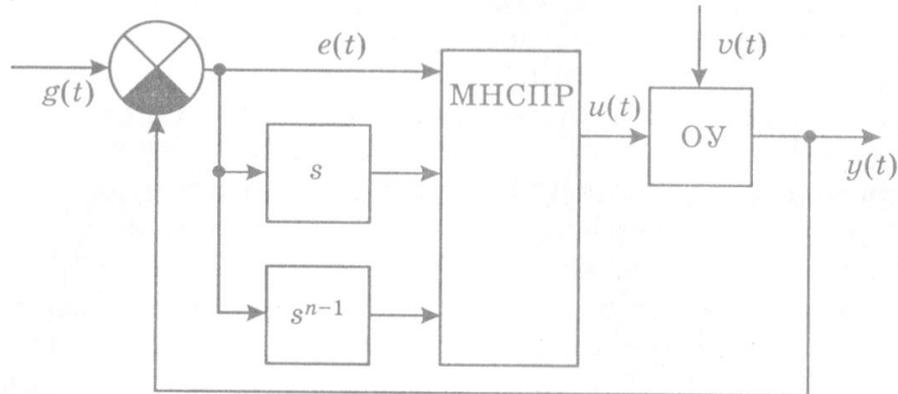


Рис. 9.23

жество тестовых примеров для обучения нейросетевого регулятора с помощью алгоритма формирования обучающей выборки.

В связи с тем, что разделяемые области пространства состояний являются невыпуклыми, многослойная сеть прямого распространения должна иметь не менее трех слоев нейронов, первый из которых реализует аппроксимацию границы между классами. Алгоритм первого слоя основывается на том, что любую однозначную гиперповерхность можно представить в виде набора гиперплоскостей, которые аппроксимируют ее в некотором диапазоне. Если в качестве функции преобразования нейрона применить пороговую функцию, то из уравнения (9.12) видно, что на выходе сумматора отдельного нейрона первого слоя можно получить функцию, описывающую произвольную гиперплоскость. Один такой нейрон аппроксимирует множество примеров  $P^r$ , для которых декартово расстояние до гиперплоскости, реализуемой на выходе нейрона, удовлетворяет заданной точности.

На первом шаге соответствующего алгоритма аппроксимации предполагают, что нейросетевой регулятор не содержит нейронов в первом скрытом слое. На каждом последующем шаге алгоритма исключаются примеры  $P^r$ , которые могут быть реализованы одним нейроном первого слоя, введенным на предшествующем шаге. После рассмотрения всех примеров число полученных гиперплоскостей определяет размерность первого слоя многослойной нейронной сети прямого распространения. В этой процедуре определения размерности вычисляются также параметры гиперплоскостей, которые необходимо использовать для настройки первого слоя нейросетевого регулятора с пороговыми нейронами.

Для определения размерности первого скрытого слоя требуется найти количество гиперплоскостей, которые аппроксимируют гиперповерхность при заданной точности. Для гиперповерхностей, которые реализуются логической операцией «И» над полученными гиперплоскостями, не требуется обучения нейронов второго слоя, и достаточно установить их весовые коэффициенты равными 1.

Например, нейросетевой регулятор для оптимальной по быстродействию САУ объектом с передаточной функцией  $W(s) = s^{-2}$  при сигнале управления  $|u| \leq 1$ , диапазоне изменения выхода  $-10 \leq y \leq 10$ , шаге дискретизации  $T = 0,005$  с, точности аппроксимации 0,0001 имеет 2 входа, 25 нейронов в первом слое, 3 нейрона во втором слое и один выходной нейрон третьего слоя с релейной характеристикой. Для исключения автоколебаний в установившемся режиме вблизи начала координат фазового пространства ошибки может быть выбран ПД-закон управления, для чего к обучающей выборке добавлено 25 примеров, определяющих в указанной малой области функционирование ПД-регулятора. Обучение производилось комбинацией случайного поиска и метода наискорейшего спуска.

Применение многослойной нейронной сети прямого распространения в задачах идентификации ОУ дает наиболее существенное преимущество при построении нелинейной модели для сложных динамических объектов, описываемых системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, u), \quad y = \psi(x),$$

где  $x \in R^n \times 1$ ,  $y \in R^m \times 1$ , или разностных уравнений  $x[k + 1] = \Phi(x[k], u[k])$ ,  $y[k] = \psi(x[k])$ .

При этом для обеспечения динамических свойств многослойной нейронной сети прямого распространения на статических нейронах в ее структуру вводят:

- внешние ОС с выходов многослойной нейронной сети прямого распространения на ее вход;
- внутренние ОС на каждом нейроне.

В первом случае (рис. 9.24) на входы многослойной нейронной сети прямого распространения подаются последние  $m$  значений сигнала управления  $u[k], \dots, u[k - m + 1]$  и последние  $n$  значений сигнала  $y$  с выхода сети  $y[k], \dots, y[k - n + 1]$ . Недостаток в том, что требуется предварительно определить порядки  $n$  и  $m$  соответствующих частей дифференциального уравнения.

От указанного недостатка свободны модели на базе рекуррентных нейросетей, имеющие две модификации: диагональную и полностью связную.

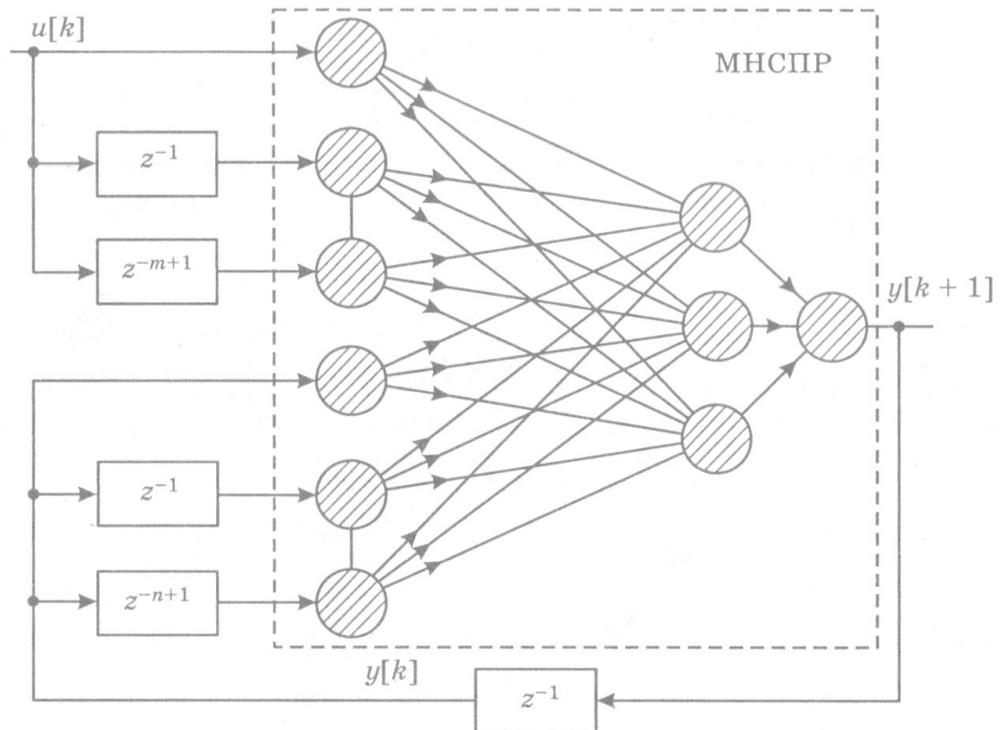


Рис. 9.24

В диагональных нейросетях (рис. 9.25) обратные связи подаются с выхода каждого из нейронов скрытых слоев на его вход, а в полносвязных – также и на входы других нейронов скрытых слоев. В настоящее время еще не решены в полной мере проблемы устойчивости и эффективности методов обучения рекуррентных нейросетей.

Процедура идентификации ОУ заключается в настройке весовых коэффициентов и параметров нейронов по минимуму квадратичной ошибки между выходом ОУ и его модели (рис. 9.26). Обычно в качестве функции преобразования нейрона выбирается разновидность сигмоидальной функции, которая и является нелинейным базисом для строящейся модели. Нейроны выходного слоя должны иметь линейную функцию преобразования.

В качестве базового метода настройки модели используется метод обратного распространения ошибки. Этот метод упрощает вычисление градиента функции оценки обучения  $H$

$$\nabla H = \left[ \frac{\partial H}{\partial \alpha_1^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \alpha_{N_1}^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \alpha_1^L}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \alpha_{N_L}^L}, \frac{\partial H}{\partial w_{11}^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial w_{N_L N_{L-1}}^L} \right]^T.$$

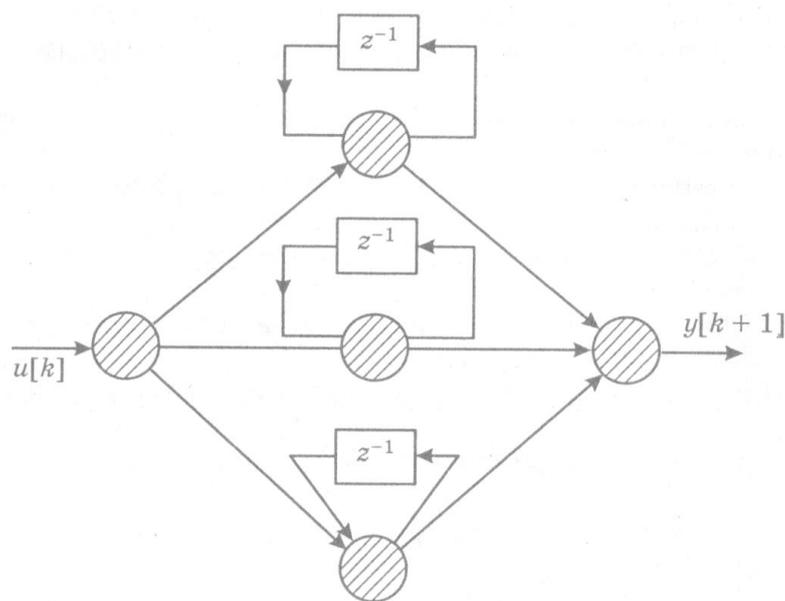


Рис. 9.25

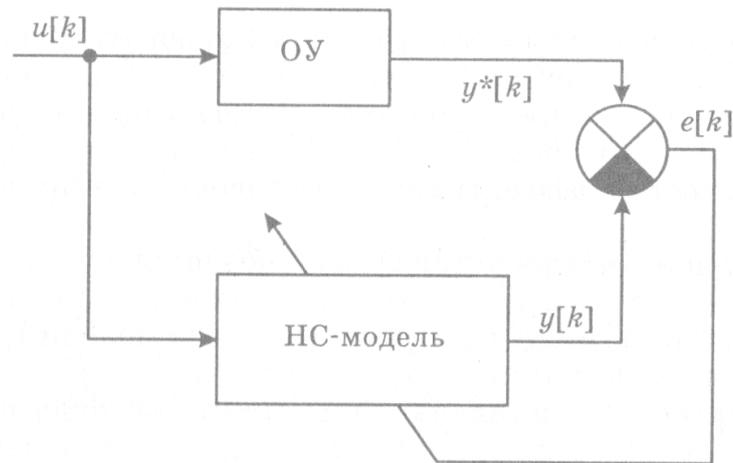


Рис. 9.26

При рассмотрении обратного распространения сигнала в качестве компонент входного вектора принимаются величины  $\mu_j^L$ ,

равные частным производным функции оценки  $H$  по выходу  $u_{rj}$  нейронной сети:

$$\mu_j^L = u_{rj} - u_j, j = 1, \dots, N_L.$$

В соответствующей структурной схеме точки ветвления заменяются сумматорами и наоборот. Выходные величины  $k$ -го слоя получаются из уравнений:

$$\mu_j^k = \mu_j^{k+1} \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \frac{\partial f_i^{k+1}}{\partial x} w_{ij}^{k+1}, k = L - 1, \dots, 1, j = 1, \dots, N_k.$$

Входящие в уравнение частные производные функций преобразования нейронов по их входу при нелинейном преобразовании имеют вид:

$$\frac{\partial f_j^k}{\partial x} = \frac{\alpha_j^k}{(\alpha_j^k + |x|)^2}.$$

По найденным  $\mu_j^k$  можно определить частные производные функции оценки для изменяемых параметров нейронов ( $\beta \equiv 0$ ):

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_j^k} = \mu_j^k \frac{\partial f_j^k}{\partial \alpha_j^k},$$

где частные производные функций преобразования по параметру

$$\frac{\partial f_j^k}{\partial \alpha_j^k} = \frac{x}{(\alpha_j^k + |x|)^2},$$

а  $x$  – выход сумматора нейрона, или, что то же самое, аргумент его функции преобразования.

Так же вычисляются частные производные и для весовых коэффициентов связей нейронов

$$\frac{\partial H}{\partial w_{ij}^k} = \mu_j^k \cdot \frac{\partial f_j^k}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{w_{ij}^k}}{\partial w_{ij}^k},$$

где  $\frac{\partial f_{w_{ij}^k}}{\partial w_{ij}^k} = \mu_j^{k+1}$  при линейном преобразовании.

На основе нейронных сетей может быть построена самообучающаяся САУ. Под самообучением понимается применение комплекса методов и алгоритмов для настройки и функционирования

САУ с неизвестным ОУ. Процедура синтеза такой САУ содержит следующие этапы:

- идентификация ОУ;
- первоначальная настройка регулятора;
- адаптация параметров регулятора в процессе управления.

На рис. 9.27 приведена функциональная схема самообучающейся САУ. Нейросетевая структура в этой системе использует-



Рис. 9.27

ся для построения модели и регулятора. Нейросетевая модель (НС-модель) с внешними ОС может быть использована как на этапе настройки нейросетевого регулятора, так и в процессе управления. Ее настройка производится методом обратного распространения ошибки. Для обеспечения высокого качества управления нейросетевой регулятор должен обладать способностью воспроизводить обратную динамику нейросетевой модели. Поэтому его следует строить по структуре нейросетевой модели, но с переменной мест между входами прямой цепи и обратной связи ( $\tau$  меняется на  $l$  и наоборот в схеме рис. 9.24).

Для реализации нейросетевого регулятора требуется нейросетевая структура, обладающая динамикой, т. е. в ее структуре должны присутствовать обратные связи. Нейросетевой регулятор должен обладать форсирующими свойствами и настраивается на основании метода обратной динамики по нейросетевой модели.

Возможно комплексное применение технологий экспертных систем и нейросетевых структур для создания быстродействующих адаптивных регуляторов.

Использование технологии экспертных систем позволяет повысить гибкость управления, что обеспечивается следующими факторами:

- возможностью работы с несколькими алгоритмами управления и адаптации, при которой осуществляется их обоснованный выбор на основе текущей (иногда неполной и противоречивой) информации о функционирующей системе путем обработки имеющихся знаний;
- способностью к обучению и корректировке знаний, причем содержимое базы знаний экспертных систем может быть расширено и модифицировано, что обеспечивает возможность адаптации к изменениям как целей, так и параметров ОУ.

Но при всех своих достоинствах экспертный регулятор обладает ограниченными возможностями для работы в реальном масштабе времени в системах с быстропротекающими процессами (такт управления  $< 2$  мс). Основными элементами, ограничивающими быстродействие экспертного регулятора, являются база знаний и идентификатор. Естественно применить нейросетевые структуры для построения указанных блоков САУ с экспертным регулятором с базой знаний и идентификатором на основе нейросетевой структуры (рис. 9.28).

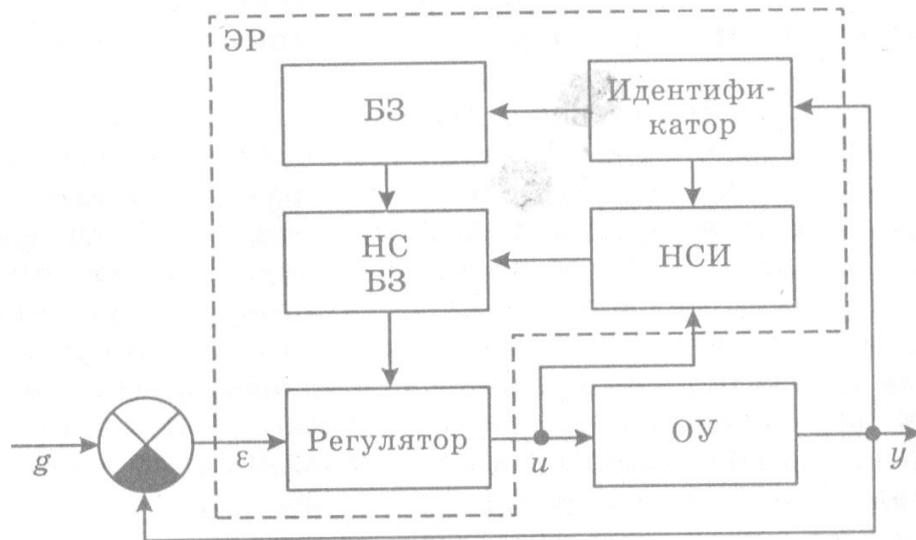


Рис. 9.28

Идентификатор условно разбит на два модуля:

- первый решает задачи, связанные с выбором оптимальной структуры модели ОУ и с определением ее параметров при заданной структуре на основе нерекуррентных методов идентификации в режиме *off-line*;

- второй, нейросетевой идентификатор, решает задачи, связанные с определением изменений параметров ОУ, в реальном масштабе времени и реализуется на нейросетевой структуре.

База знаний подобно идентификатору также разделена на две части:

- первая содержит знания о целях, диапазонах и виде входных и возмущающих сигналов и об алгоритмах базы алгоритмов;
- вторая, содержащая знания о функциональных особенностях ОУ и регулятора, строится на базе нейросетевой структуры.

В результате экспертный регулятор имеет два уровня управления:

- на первом решаются задачи проектирования в режиме *off-line*;

- на втором осуществляются диагностика системы и синтез регулятора в реальном масштабе времени.

Задача разработки нейросетевых базы знаний и идентификатора может быть условно разделена на два этапа:

- определение архитектуры и выбор типа нейросетевой структуры;
- обучение нейросетевой структуры.

Обычно нейросетевые структуры используются в качестве функциональных идентификаторов, хотя параметрическая идентификация является во многих случаях необходимой, так как, во-первых, приводит к более просто реализуемым решениям, и, во-вторых, позволяет легко определить коэффициенты регулятора по известным параметрам ОУ, используя такие алгоритмы, как максимальной степени устойчивости, обратных задач динамики, интегральные оценки и др. Допустим, что из разностного уравнения ОУ выражен параметр  $T$  в виде функции, зависящей от значений выходной и входной решетчатых функций:

$$T = \frac{b_0 u[k] + b_1 y[k]}{a_0 y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2]}$$

Эта зависимость позволяет определить общую структуру нейросетевого идентификатора (рис. 9.29) в следующем виде:

1. Количество входов равно количеству входных и выходных сигналов в разностном уравнении плюс один дополнительный, задающий смещение функции, равное единице.

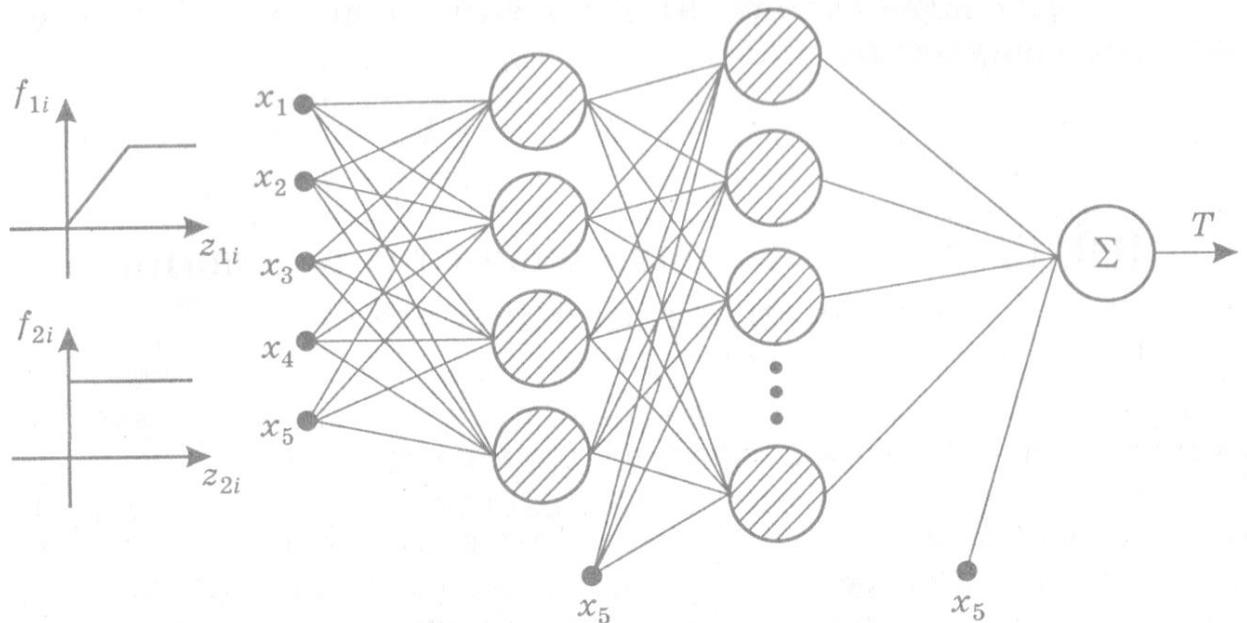


Рис. 9.29

2. Первый слой состоит из нейронов с функцией преобразования

$$f_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{при } z_{1i} > 1, \\ z_{1i} & \text{при } 0 < z_{1i} < 1, \\ 0 & \text{при } z_{1i} < 0, \end{cases}$$

где  $z_{1i}$  – вход  $i$ -го нейрона, равный произведению вектора входов  $x$  на строку весовых коэффициентов связей;  $i$  – номер нейрона в слое.

Этот слой осуществляет вычисление функции модуля числителя и знаменателя.

- Второй слой реализует функцию отношения числителя и знаменателя, число нейронов в нем зависит от необходимой точности воспроизведения зависимости. Функция преобразования данного слоя – пороговая, позволяющая определить весовые коэффициенты нейронной сети аналитически, исходя из требуемой точности.

- Третий слой состоит из одного нейрона, осуществляющего суммирование выходов нейронов второго слоя.

Найденные таким образом параметры объекта используются в дальнейшем для вычисления коэффициентов регулятора по формулам, записанным в базу знаний экспертного регулятора. Эти формулы могут быть получены по желаемой передаточной функции замкнутой САР и известной передаточной функции ОУ (метод обратных задач динамики), а для вычисления можно применить нейронную сеть.