ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Инженерная геометрия и компьютерная графика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Начертательная геометрия»

Автор
Гончарова Т.В.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

В учебном пособии изложены основы начертательной геометрии с примерами решения типовых задач, в главах приведены вопросы для самопроверки.

Предназначено для студентов вузов всех форм обучения, изучающих курс «Начертательная геометрия».

Автор

к.т.н., доцент,
доцент АСА ДГТУ
Гончарова Т.В.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В число фундаментальных дисциплин, составляющих основу инженерного образования, входит ***начертательная геометрия***, являющаяся одним из разделов геометрии, который учит изображению предметов и пространственных форм, воспроизведению их по чертежам, способам решения пространственных геометрических задач, а также способствует развитию пространственного воображения.

Законы и выводы начертательной геометрии являются основой для выполнения технических чертежей. Чем сильнее развито пространственное воображение, чем свободнее владеет современный инженер методами изображения трехмерных тел на плоскости. Там, где есть творческие поиски нового, где пытливо думают и принимают смелые технические решения, где конструируют и строят, необходимо свободно владеть проекционным чертежом и его теоретической основой – начертательной геометрией.

Использование начертательной геометрии является рациональным при конструировании сложных поверхностей технических форм с наперед заданными параметрами, в авиационной и автомобильной промышленности, при создании корпусов судов и судовых двигателей и во многих других областях техники.

Известна роль начертательной геометрии в архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве. Проекционные способы дают возможность получать наглядные изображения проектируемых объектов и целых комплексов.

Естественные науки достигают еще большего расцвета в тех случаях, когда изучаемые свойства сопровождаются доступными для человеческого восприятия наглядными геометрическими моделями.

Методы начертательной геометрии, позволяющие решать математические задачи в их графической интерпретации, находят широкое применение в физике, химии, механике, кристаллографии и многих других науках. Как и другие отрасли математики, начертательная геометрия развивает логическое мышление.

Начертательная геометрия со времен ее основоположника – французского ученого (математика, геометра, механика и химика) Гаспара Монжа (1746-1818 гг.) завоевала достойное место в высшей школе как наука, необходимая для инженера и архитектора. Применение для построения чертежа метода ортогонального проецирования (основы современных методов геометрического моделирования трехмерного пространства на плоскости) было предложено Монжем, что послужило назвать этот метод ***методом Монжа***, а описанный ниже эпюр – ***эпюром Монжа***.

Приступая к изучению курса, каждому студенту следует помнить, что *начертательная геометрия* принадлежит к числу тех общетехнических дисциплин, изучение которых требует систематической работы на протяжении всего периода изучения.

Учебным планом предусмотрены лекции и практические занятия студентов под руководством преподавателя для активного и самостоятельного решения задач в рабочих тетрадях, выполнение эпюров с последующей их защитой.

Материал курса "Начертательная геометрия" разделен для промежуточного контроля на три модуля. Названия тем, входящих в каждый из модулей, приведены в табл. 1.

Таблица 1

ТЕМАТИЧЕСКИЙ БЛОК	***№ ТЕМЫ***	***НАЗВАНИЕ ТЕМЫ***
1-й модуль	1 2	Проецирование точки Проецирование прямой линии
2-й модуль	3	Проецирование плоскости Взаимное положение прямых и плоскостей
3-й модуль	4 5	Способы преобразования чертежа Геометрические тела

Тщательная подготовка к каждому практическому занятию является обязательным условием его эффективности. Посещение лекций и четкое ведение конспекта лекций является непременным условием успеха.

После основательного изучения соответствующей части курса (модуля) каждый студент должен выполнить определенное количество работ (чертежей), предусмотренных рабочей программой. Чертежи выполняются студентами по индивидуальным вариантам.

Экзамен проводится лектором в конце 1 семестра (в январе). К сдаче экзамена допускаются студенты, выполнившие все задачи по рабочей тетради, а также защитившие альбом с эпюрами.

Для сдачи экзамена (или дифференцированного зачета) по указанным модулям (выполнив практические домашние и аудиторные контрольные работы, тесты по темам, входящим в изучаемый модуль и предъявив рабочий конспект лекций) студент должен владеть теоретическим материалом и уметь решать задачи по данной теме.

В настоящем пособии приняты следующие буквенно-цифровые обозначения (табл. 2):

Таблица 2

Обозначения и символика			
1.	**Точки** в пространстве – прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots,$ а также арабскими цифрами $- 1, 2, 3\ldots$ При преобразовании эпюра вращением (совмещением или др.) в новом положении точки A^*, B^*, C^* (или A', B', C'), после второго преобразования – A^{**}, B^{**}, C^{**} (или A'', B'', C'').	6. 7. 8.	**Следы плоскостей**: $- \alpha\pi_1, \beta\pi_1, \gamma\pi_{1,}\ldots$ (горизонтальные), $- \alpha\pi_2, \beta\pi_2, \gamma\pi_{2,}\ldots$ (фронтальные), $- \alpha\pi_3, \beta\pi_3, \gamma\pi_{3,}\ldots$ (профильные). **Точки схода следов**: $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$. **Следы прямой**: – горизонтальный M (M_1, M_2, M_3), – фронтальный N (N_1, N_2, N_3), – профильный P (P_1, P_2, P_3).
2.	**Проекции точек** – подстрочными индексами: $- A_1, B_1, C_{1,}\ldots$ (горизонтальные), $- A_2, B_2, C_{2,}\ldots$ (фронтальные), $- A_3, B_3, C_{3,}\ldots$ (профильные).	9.	**Совпадение:** – проекций точек: $A_1 \equiv B_1, C_2 \equiv D_2 \ldots$; – точки с ее проекцией: $A \equiv A_1, B \equiv B_2, M \equiv M_1, N \equiv N_3$.
3.	**Плоскости** – строчными буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \psi, \sigma, \omega, \theta, \eta, \lambda, \mu$.	10.	**Параллельность** – $\alpha \parallel \beta$ (плоскость α параллельна плоскости β).
4.	**Плоскости проекций** – строчной буквой греческого алфавита π. Горизонтальная плоскость (π_1), фронтальная плоскость (π_2), профильная плоскость (π_3) и дополнительные плоскости $\pi_4, \pi_5 \ldots$.	11. 12.	**Перпендикулярность** – $AB \perp CD$ (прямые AB и CD перпендикулярны). **Принадлежность** – $A \in AB$ (точка A принадлежит прямой AB), $A \notin AB$ (точка A не принадлежит прямой AB).
5.	**Оси проекций** – строчными буквами x, y, z (или Ox, Oy, Oz), *где x – ось абсцисс,* *y – ось ординат,* *z – ось аппликат.* Начало координат – буква O.	13.	**Угол наклона** к плоскости проекций – – α – к горизонтальной плоскости проекций; – β – к фронтальной плоскости проекций; – γ – к профильной плоскости проекций. **Угол** – $\angle ABC$ (угол ABC).
14.	**Принятые сокращения:** h_1 (гпг) – горизонтальная проекция горизонтали, h_2 (фпг) – фронтальная проекция горизонтали; f_1 (гпф) – горизонтальная проекция фронтали, f_2 (фпф) – фронтальная проекция фронтали, лнн – линия наибольшего наклона, Н.В. – натуральная величина.		

Лекция 1

Тема 1. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

1.1. Метод проекций

Правила построения изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на ***методе проекций***.

Процесс построения изображений предметов на плоскости с помощью проецирующих лучей называется ***проецированием***. Плоскость, на которой построено изображение, называется ***плоскостью проекций***, воображаемые прямые, при помощи которых строится изображение, – ***проецирующими лучами***. Геометрически закономерное изображение предмета, полученное проецированием на плоскость, называется ***проекцией***. Рисунки, фотографии, чертежи, тени, падающие от освещенных предметов, – все это примеры проекций предметов пространства.

Методы проецирования делятся в зависимости от способа проведения проецирующих лучей на *центральное* и *параллельное* проецирование.

1. Центральное проецирование (коническое)

Задаемся ***плоскостью проекций*** (π_0) и ***центром проекций*** (S) – точкой, не лежащей в этой плоскости (рис. 1). Взяв некоторую точку A и проведя через S и A прямую линию до пересечения ее с π_0, получаем точку A_0. Также поступаем, например, с точками B, C, D. A_0, B_0, C_0, D_0 – ***центральные проекции точек*** A, B, C, D на плоскость π_0. Они получаются в пересечении ***проецирующих прямых*** (***проецирующих лучей***) SA, SB, SC, SD с плоскостью проекций.

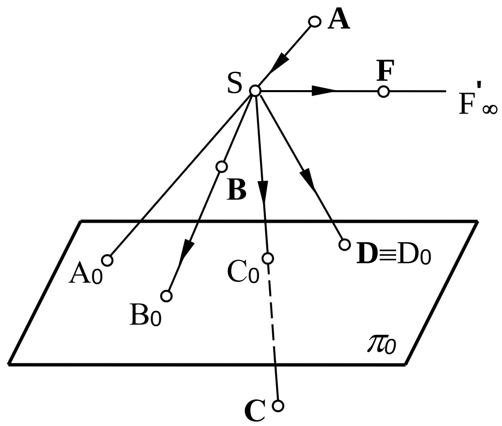


Рис. 1. Центральные проекции точек

Проекцию линии можно построить, проецируя ряд ее точек (рис. 2). Центральное проецирование называется также ***коническим*** (или ***полярным,*** или ***перспективой***), вследствие того, что при проецировании предмета или кривой линии проецирующие лучи, проведенные из центра проекций, образуют проецирующую ***коническую поверхность***.

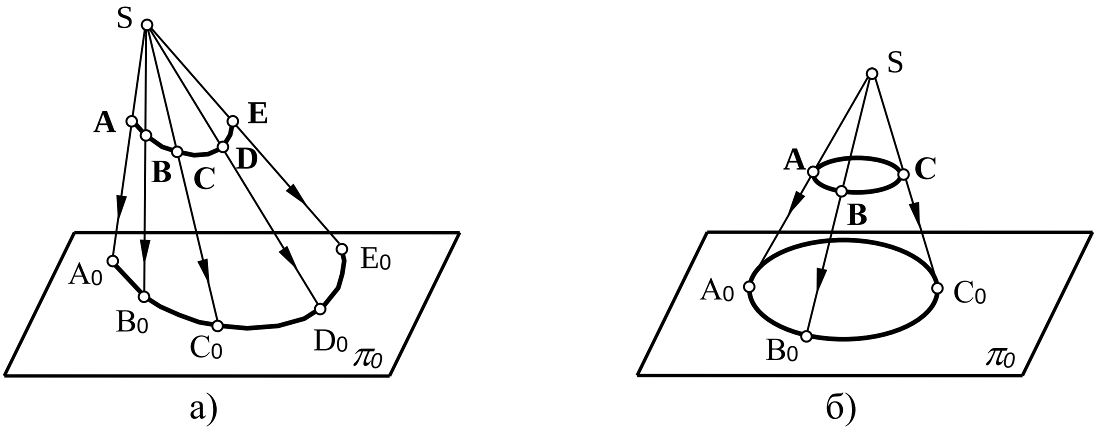


Рис. 2. Центральное проецирование

Центральное проецирование при определенных условиях дает наглядные изображения, подобные тем, которые получаются на сетчатке человеческого глаза в процессе зрительного восприятия предметов. Центральные проекции являются наиболее наглядными, но строятся сложно и неудобоизмеримы, поэтому в техническом черчении применяются редко, а в основном находят применение для изображения форм относительно больших размеров в архитектуре и строительстве.

2. Параллельное проецирование (цилиндрическое)

Параллельное проецирование – частный случай центрального проецирования, когда центр проекции бесконечно удален (рис. 3).

Параллельной проекцией точки называем точку пересечения проецирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций.

Чтобы получить параллельную проекцию некоторой линии, можно построить проекции ряда ее точек и провести через эти проекции линию. При этом проецирующие прямые в своей совокупности образуют ***цилиндрическую поверхность***, поэтому параллельные проекции также называют ***цилиндрическими.***

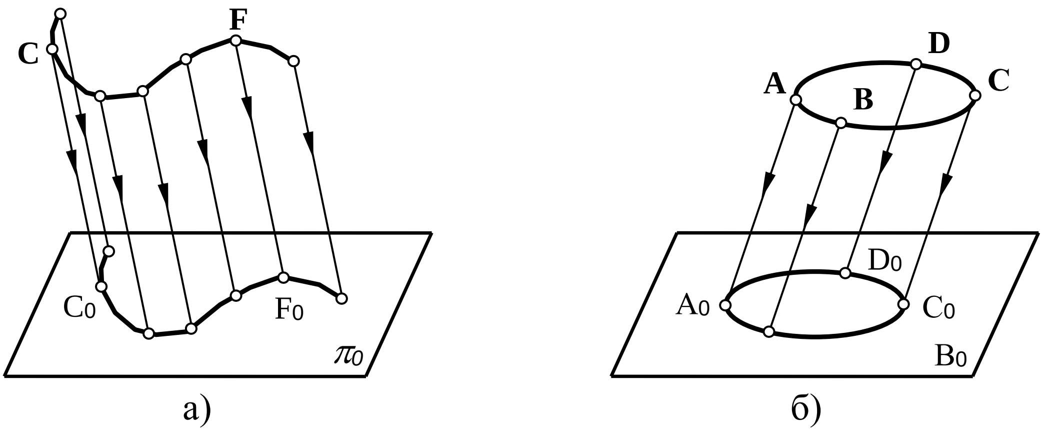


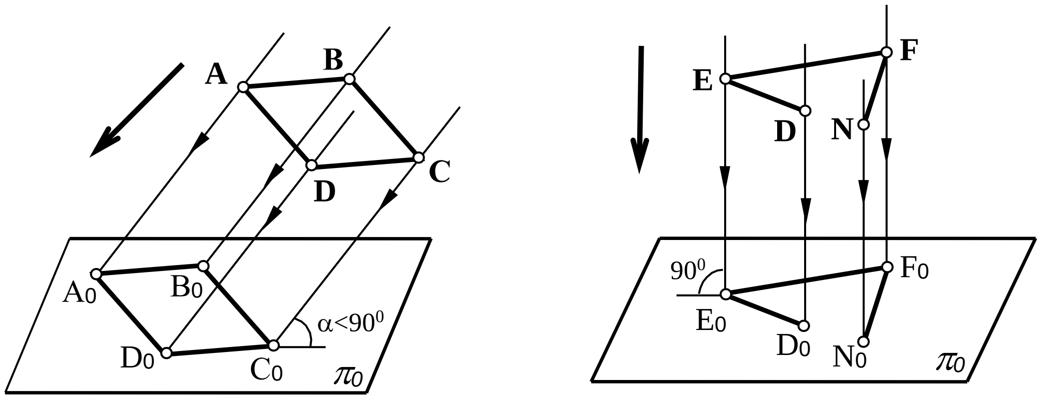
Рис. 3. Параллельное проецирование

Применяя приемы параллельного проецирования точки и линии, можно строить параллельные проекции поверхности и тела.

В свою очередь параллельные проекции делятся на два вида:

• ***косоугольные*** (рис. 4, а и рис. 3), когда направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол, не равный 90^0 ($\alpha \neq 90^0$);

• ***прямоугольные*** (или ***ортогональные,*** от греч. *Orthogonios* – прямоугольный), рис. 4, б, когда проецирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций ($\alpha = 90^0$).



а) Косоугольное б) Прямоугольное

Рис. 4. Параллельное проецирование

Параллельные проекции применяют при построении аксонометрических чертежей.

Некоторые виды параллельных проекций, и в первую очередь ортогональные, обладают достаточной наглядностью при изображении предметов относительно небольших размеров (машин и их деталей) и дают возможность легко производить на них измерения. Это делает их незаменимыми при построении технических чертежей.

Способ ортогонального проецирования положен в основу изучения общей части курса начертательной геометрии.

Так как одна проекция точки не определяет ее положения в пространстве, то для определения местоположения точки необходимо спроецировать ее не на одну, а на две плоскости проекций.

1.2. Точка в системе двух плоскостей проекций π_1, π_2

Даны две взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 5). Считаем их бесконечными и непрозрачными. Плоскость π_1, расположенную горизонтально, называют ***горизонтальной плоскостью проекций***, π_2, расположенную вертикально, – ***фронтальной плоскостью проекций.***

Линия пересечения плоскостей проекций π_1 и π_2 называется ***осью проекций*** (*Ox*). Ось проекций разделяет каждую из плоскостей на две полуплоскости (*по́лы*): горизонтальную плоскость на переднюю (π_1) и заднюю ($-\pi_1$), фронтальную – на верхнюю (π_2) и нижнюю ($-\pi_2$).

Плоскости π_1 и π_2 при пересечении образуют четыре прямых двугранных угла – это ***квадранты*** (или ***четверти***) пространства (I, II, III, IV).

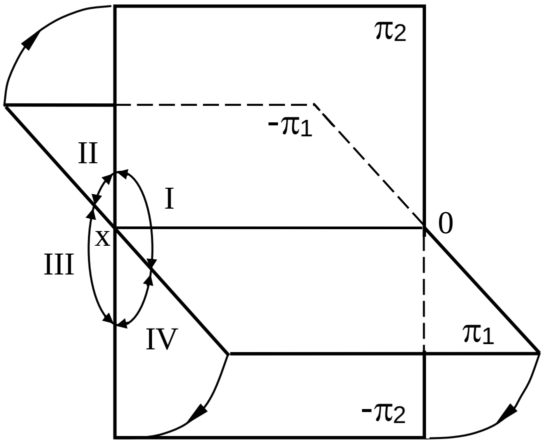


Рис. 5. Система двух плоскостей проекций π_1, π_2

Ортогональной проекцией точки на плоскость называют основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость.

Для построения проекций (•) *A*, лежащей в первой (I) четверти (квадранте) пространства в системе π_1, π_2 (рис. 5), проводим из *A* перпендикуляры к π_1 и π_2, получаем проекции точки *A*:

– A_1 – ***горизонтальную*** проекцию точки *A* на плоскость π_1;

– A_2 – ***фронтальную*** проекцию точки *A* на плоскость π_2.

Для совмещения плоскости π_1 с π_2 поворачиваем π_1 вокруг оси проекций на угол 90^0 и получаем одну плоскость чертежа – ***эпюр Монжа*** (рис. 6, б). В результате передняя полуплоскость (π_1) будет совмещена с нижней полуплоскостью ($-\pi_2$), а задняя полуплоскость ($-\pi_1$) – с верхней полуплоскостью (π_2).

Изображение взаимно связанных ортогональных проекций, полученное в результате совмещения плоскостей проекций в одну, называется ***ортогональным чертежом*** или ***эпюром*** (франц. *Épure* – чертеж).

На эпюре остаются проекции точки A (A_1 и A_2), которые расположатся на одном перпендикуляре к оси проекций (Ox) – на ***линии проекционной связи*** ($A_1 – A_X – A_2$). Расстояние от точки A до горизонтальной плоскости проекций π_1 (AA_1) будет соответствовать отрезку A_2A_X, а до фронтальной плоскости проекций π_2 (AA_2) – отрезку A_1A_X (рис. 6).

Прямые AA_2 и AA_1 образуют плоскость ψ (рис. 6, а), перпендикулярную к плоскостям π_1 и π_2 и, следовательно, к оси Ox.

Горизонтальная проекция точки A (A_1) располагается ниже оси Ox, а фронтальная проекция точки A (A_2) – выше оси Ox, что характерно для точки, лежащей в первой (I) четверти пространства.

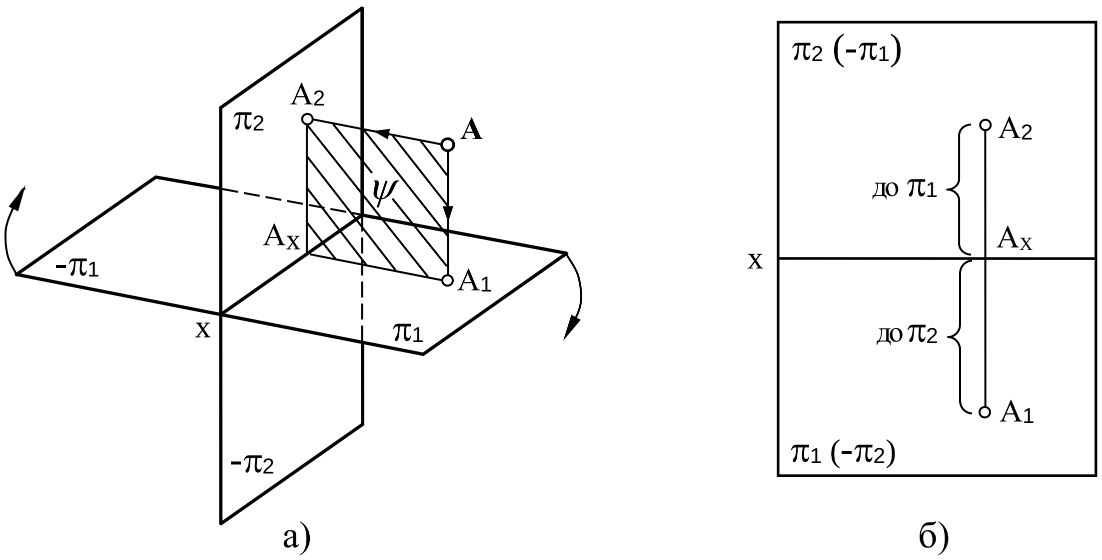


Рис. 6. Точка в I четверти

Ознакомимся с эпюрами точек, лежащих в II, III и IV четвертях.

Точка B лежит во второй (II) четверти пространства (рис. 7, а). Ее фронтальная проекция (B_2) будет лежать на верхней поле плоскости π_2 и на эпюре выше оси Ox. Горизонтальная ее проекция (B_1) лежит на задней поле горизонтальной плоскости ($-\pi_1$) и после совмещения плоскостей окажется выше оси Ox (рис. 7, б). В результате обе проекции (B_1 и B_2) расположатся выше оси Ox.

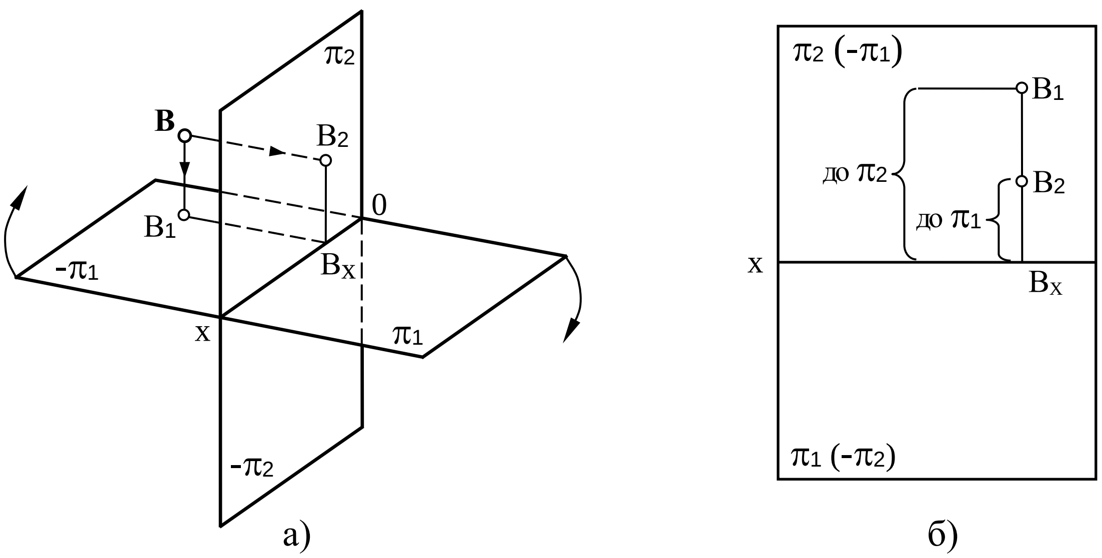


Рис. 7. Точка во II четверти

Точка C, расположенная в третьей (III) четверти (рис. 8, а), проецируется на нижнюю полу фронтальной плоскости ($-\pi_2$) и на заднюю полу горизонтальной ($-\pi_1$), поэтому ее фронтальная проекция (C_2) будет на эпюре ниже оси Ox (рис. 8, б), а горизонтальная проекция (C_1) – выше.

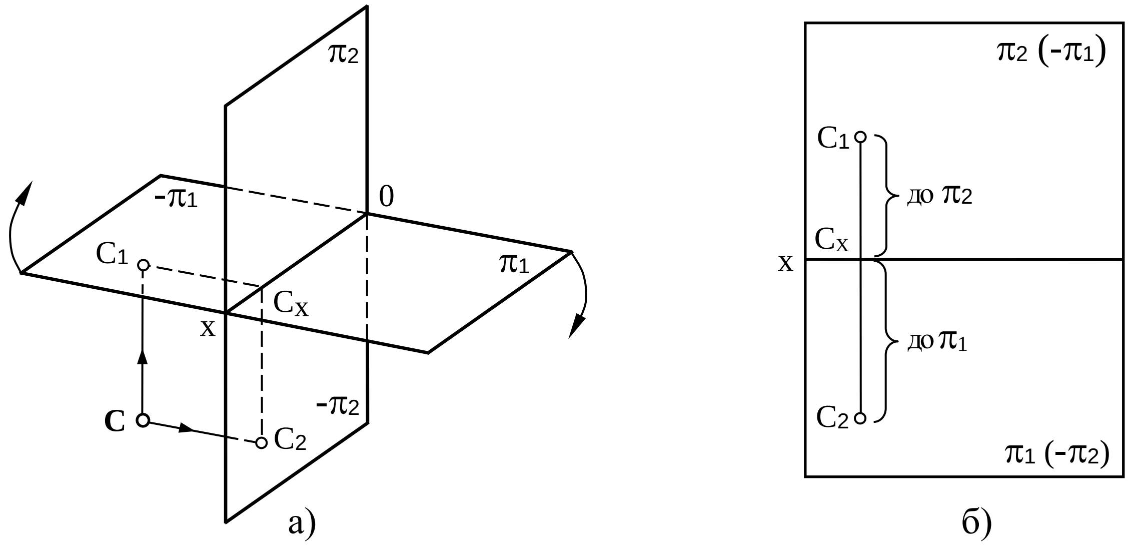


Рис. 8. Точка в III четверти

Точка D лежит в четвертой (IV) четверти пространства (рис. 9, а), проецируется на переднюю полу горизонтальной плоскости (π_1) и нижнюю полу фронтальной плоскости ($-\pi_2$). Обе проекции точки D (горизонтальная D_1 и фронтальная D_2) на эпюре лежат ниже оси Ox (рис. 9, б).

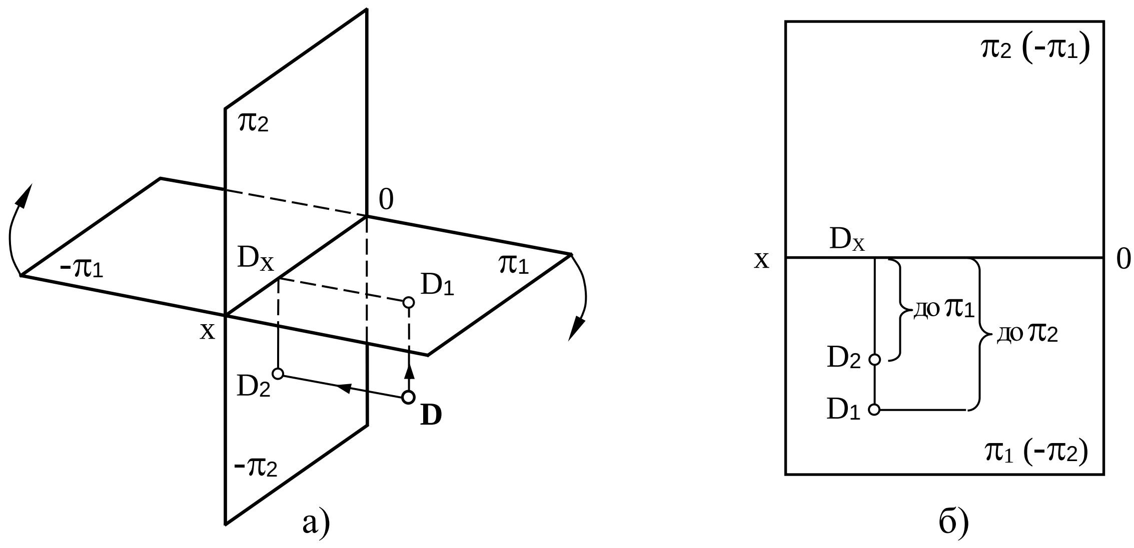


Рис. 9. Точка в IV четверти

Точка E лежит на передней поле горизонтальной плоскости проекций (π_1), рис. 10, а. Проведя необходимые построения, получаем горизонтальную проекцию (E_1), которая будет совпадать с самой точкой E ($E_1 \equiv E$), и фронтальную проекцию точки (E_2), которая будет совпадать с E_x ($E_2 \equiv E_x$). После совмещения плоскостей на эпюре (рис. 10, б) горизонтальная проекция E_1, а вместе с ней и сама точка E располагаются ниже оси Ox, а фронтальная проекция E_2 будет лежать на оси Ox.

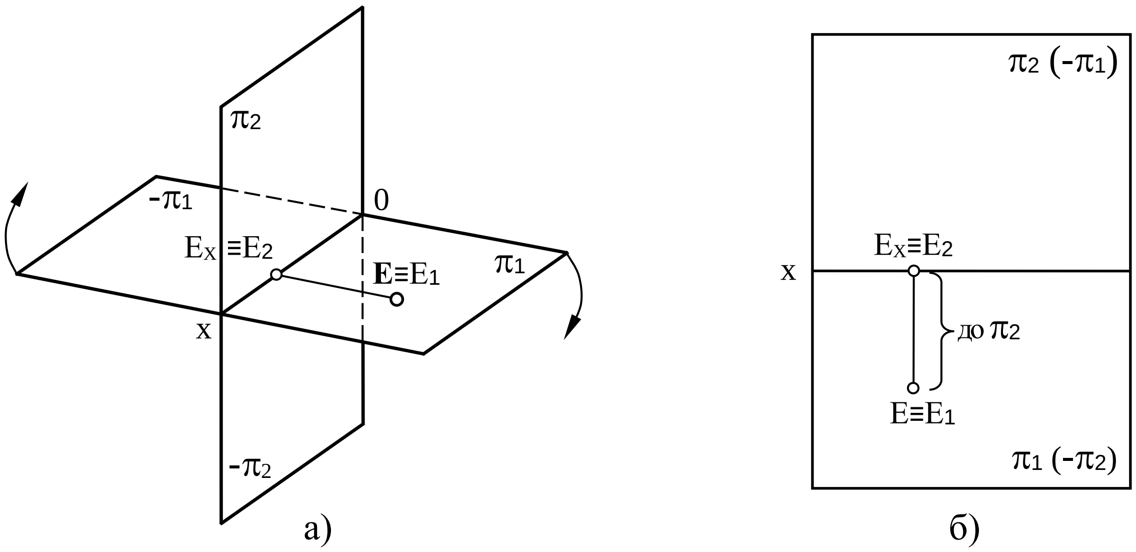


Рис. 10. Точка ∈ π_1

Точка *F* лежит на верхней поле π_2 (рис. 11, а). Фронтальная проекция (F_2) будет совпадать с самой точкой *F* ($F_2 \equiv F$) и горизонтальная проекция точки (F_1) будет совпадать с F_X ($F_1 \equiv F_X$). На эпюре (рис. 11, б) фронтальная проекция F_2 вместе с самой точкой *F* располагаются выше оси *Ox*, а горизонтальная проекция F_1 лежит на оси *Ox*.

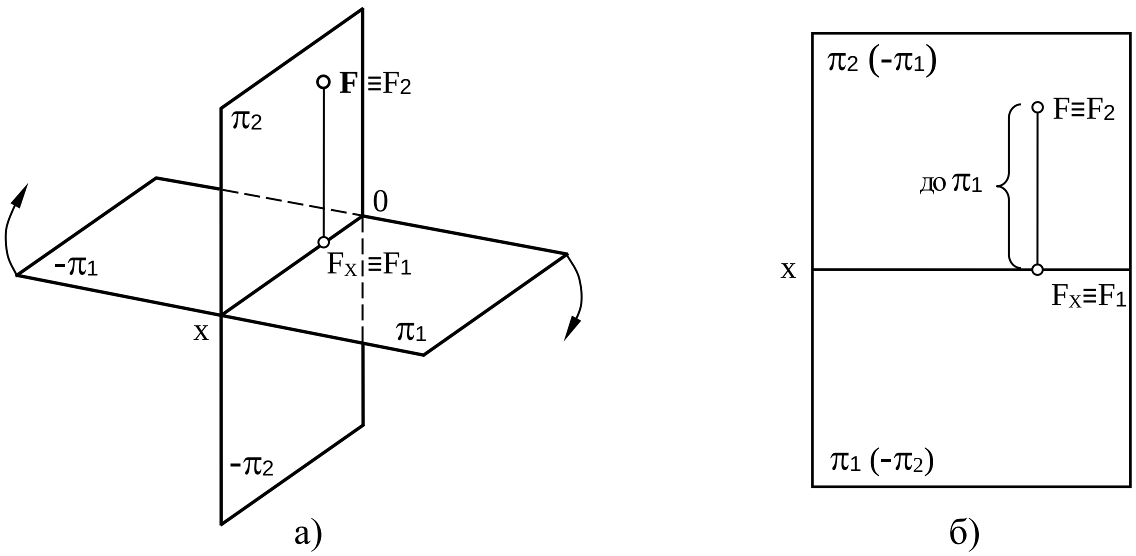


Рис. 11. Точка ∈ π_2

Если не ограничивать плоскости проекций π_1, π_2, эпюр будет иметь следующий вид (рис. 12).

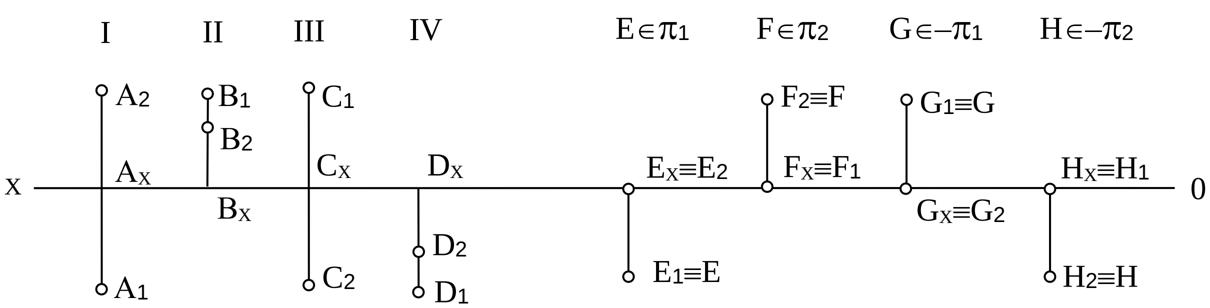


Рис. 12. Эпюры точек

1.3. Точка в системе трех плоскостей проекций π_1, π_2, π_3

Третья плоскость (рис. 13, а) расположена вертикально, перпендикулярна к π_1 и π_2, обозначается π_3 и называется ***профильной плоскостью проекций*** ($\pi_3 \perp \pi_1, \pi_2$).

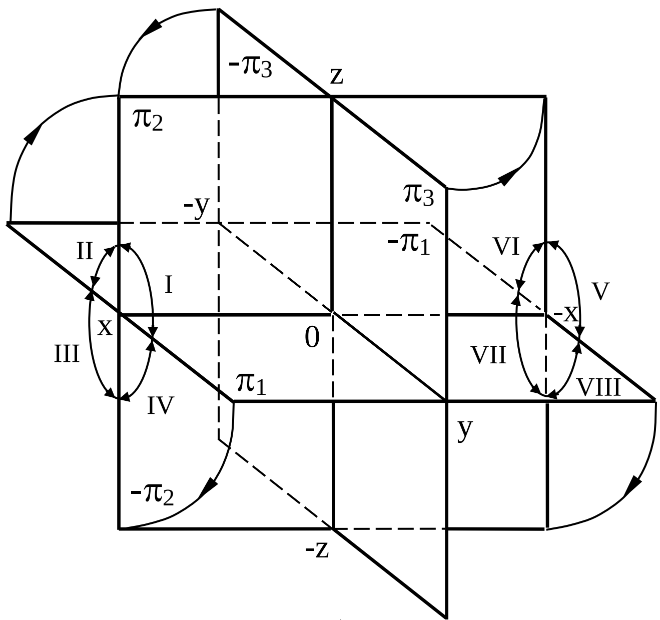
Плоскости проекций, попарно пересекаясь, определяют три оси: *Ox, Oy, Oz*, которые можно рассматривать как *систему прямоугольных декартовых координат* в пространстве с началом в точке ***O*** (буква *O* – первая буква лат. слова *Origo* – начало). В системе, называемой "*правой*", "*положительный*" луч *Ox* направлен от точки *O* влево (в отличии от математики). Каждая координатная ось делится точкой *O* на две полупрямые. Система знаков, указанная на рис. 13, а, соответствует "*правой системе*" *координат*.

Три плоскости проекций делят пространство на восемь прямых трехгранных углов, называемых ***октантами***. Нумерация октантов указывается римскими цифрами (I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII) и дана на рис. 13, а.

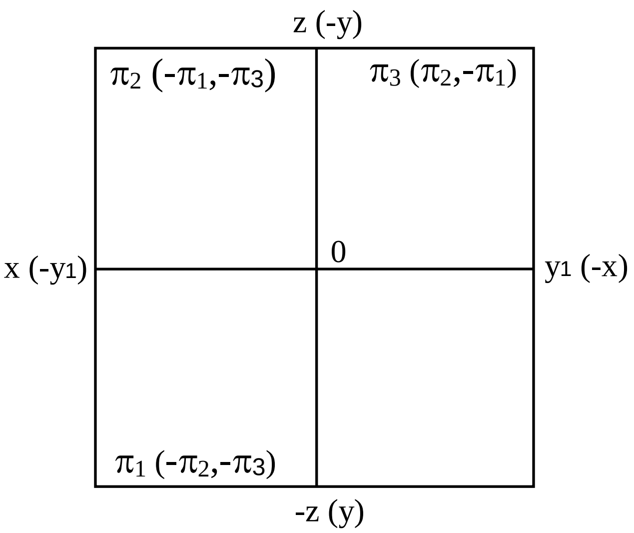
Нумерация первых четырех октантов (I, II, III, IV), где $x > 0$, совпадает с нумерацией четвертей. Последние четыре октанта (V, VI, VII, VIII), где $x<0$, симметричны первым относительно профильной плоскости проекций: V-й симметричен I-му, VI-й симметричен II-му, III-й симметричен VII-му, IV-й симметричен VIII -му.

К горизонтальной A_1 и фронтальной A_2 проекции добавляется *профильная* проекция точки – A_3.

Переходим от наглядного изображения к плоскому чертежу (*эпюру*), для чего вращаем плоскости π_1 и π_3 вокруг осей *Ox* и *Oz* до совмещения с плоскостью π_2 (рис. 13, б).



а)



б)

Рис. 13. Система трех плоскостей проекций π_1, π_2, π_3

Слева от оси *Oz* расположены – I–IV октанты, справа – V–VIII. По расположению горизонтальной A_1 и фронтальной A_2 проекций точки относительно оси *Ox* определяют октант (рис.14). Положение точки в пространстве можно определять также по трем координатам *x, y, z* (табл. 3).

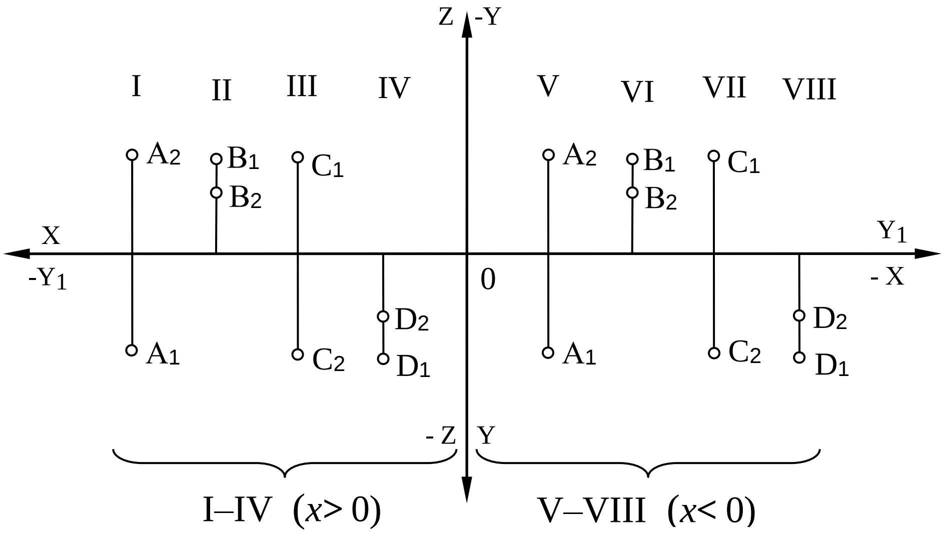


Рис. 14. Определение октанта

Таблица 3

Октант	Знаки координат		
	x	***y***	***z***
I	+	+	+
II	+	–	+
III	+	–	–
IV	+	+	–
V	–	+	+
VI	–	–	+
VII	–	–	–
VIII	–	+	–

Координатами называют числа, определяющие расстояние от точки до трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Точка, у которой все три координаты – значимые числа, расположена в пространстве. Точка, у которой одна из координат равна 0, находится на соответствующей плоскости проекций. Если точка имеет две нулевые координаты, то она лежит на одной из осей проекций. Если же все три координаты точки равны 0, то такая точка расположена в начале координат.

Строим проекции точки *A* по координатам ***A*** **(***x; y; z***),** рис. 15.

(•) ***A (50; 30; 60)*** ∈ I
x y z

A_1 (*x* ;*y*)
A_2 (*x*; *z*)
A_3 (*y* ;*z*)

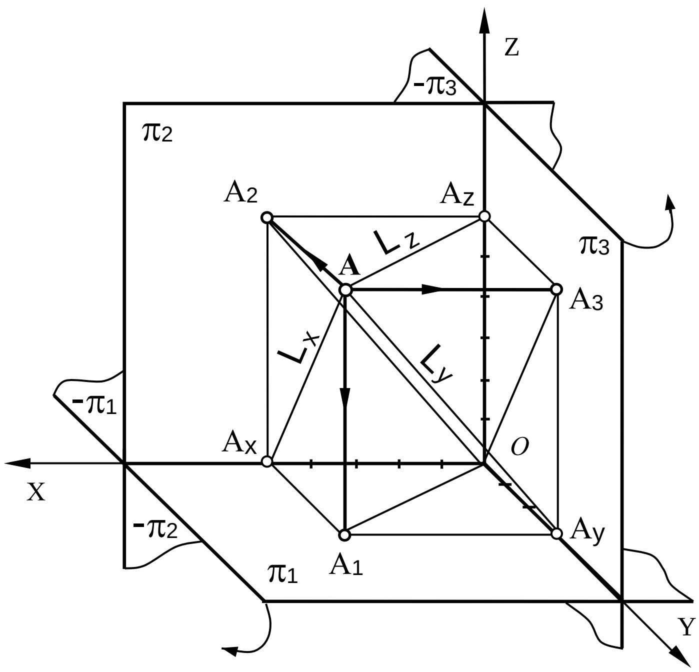


Рис. 15. Точка *A* в системе π_1, π_2, π_3 (*наглядное изображение*)

На осях координат от точки *О* откладываем отрезки, соответственно равные 50, 30 и 60 мм. На этих отрезках как на ребрах строим прямоугольный *параллелепипед координат* данной точки *А* (рис.15).

Вершина его, противоположная началу координат, и будет определять заданную точку *А*. Построение параллелепипеда также позволяет определить и все три ортогональные проекции точки (A_1, A_2, A_3).

Проецирующими лучами являются $A\,A_1$, $A\,A_2$, $A\,A_3$.

Каждая из ортогональных проекций точки, будучи расположена на плоскости, определяется только двумя координатами: $A_1\,(x\,y)$, $A_2\,(x\,z)$, $A_3\,(y\,z)$. Но две любые проекции определяются тремя координатами, поэтому задание точки двумя проекциями равносильно заданию точки тремя координатами.

На эпюре (рис. 16), где все плоскости проекций (которые мы теперь не ограничиваем) совмещены, проекции A_1 и A_2 окажутся на одной *вертикальной линии связи* (перпендикулярной к оси *Ox*), проекции A_2 и A_3 – на одной *горизонтальной линии связи* (перпендикулярной к оси *Oz*). Профильная проекция точки A_3 настолько удалена от оси *Oz* насколько горизонтальная A_1 удалена от оси *Ox*. Поэтому координату *y* переносим с *Oy* на Oy_1 с помощью линейки, циркуля, биссектрисы угла или под углом 45^0 (рис. 16).

Точка *А*, все координаты которой положительны, лежит в I октанте.

Расстояние до плоскости $\pi_1 = A\,A_1 = A_2\,A_X = A_Z\,0 = A_3\,A_{y1} = z$.

Расстояние до плоскости $\pi_2 = A\,A_2 = A_1\,A_X = A_y\,0 = A_3\,A_Z = y$.

Расстояние до плоскости $\pi_3 = A\,A_3 = A_2\,A_Z = A_X 0 = A_1\,A_y = x$.

L_X, L_y, L_Z – расстояния от точки *А* до соответствующих осей,

$L_X = A_3 0$, $L_y = A_2 0$, $L_Z = A_1 0$.

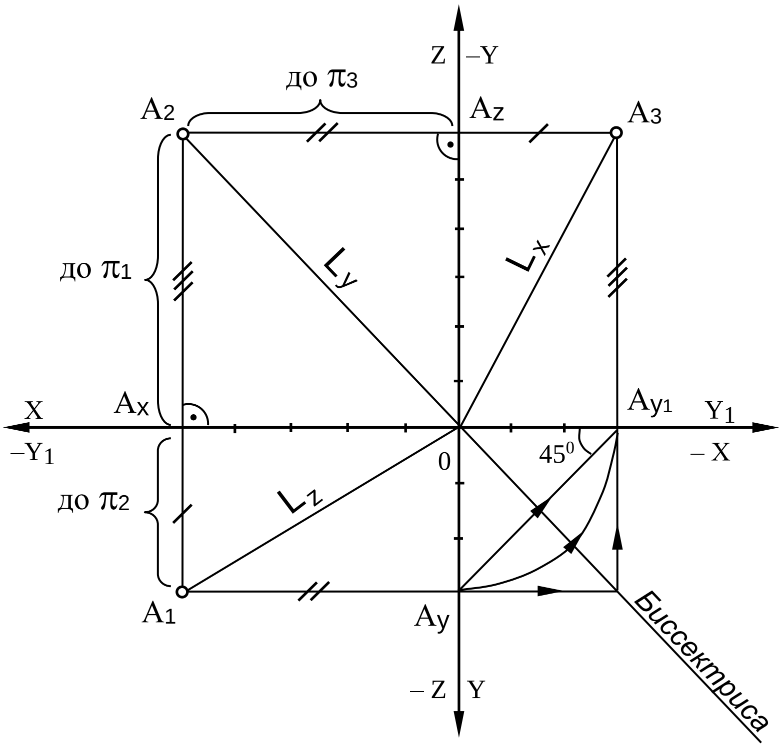


Рис. 16. Точка *А* в системе π_1, π_2, π_3 (*эпюр*)

Пример 1.1. Дана (•) *B* (– 30; 50; 45). Построить проекции B_1, B_2, B_3. Указать на эпюре B_x, B_y, B_z; расстояния до плоскостей проекций π_1, π_2, π_3; расстояния до осей *Ox*, *Oy*, *Oz* (рис. 17). Определить октант.

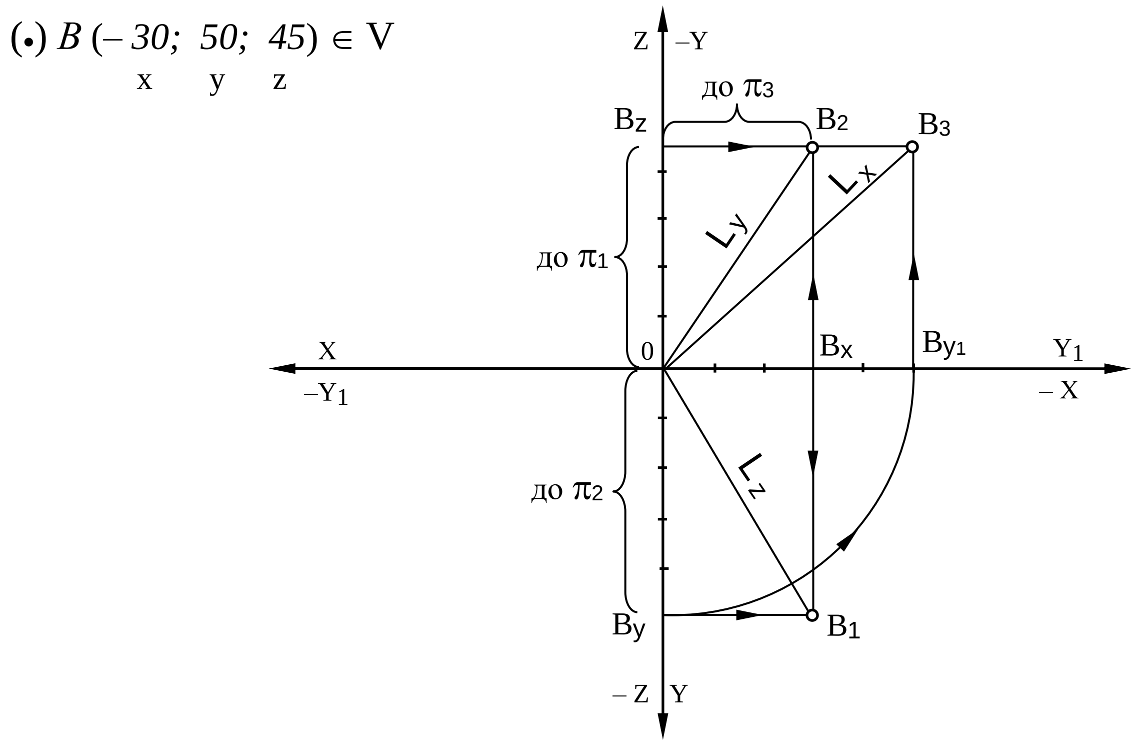


Рис. 17. Контрольная работа № 1 (*Задача 1*) Точка *B*

Пример 1.2. Дана (•) *C* (– 45; – 60; – 30). Построить проекции C_1, C_2, C_3. Указать на эпюре C_x, C_y, C_z; расстояния до плоскостей проекций π_1, π_2, π_3; расстояния до осей *Ox*, *Oy*, *Oz* (рис. 18). Определить октант.

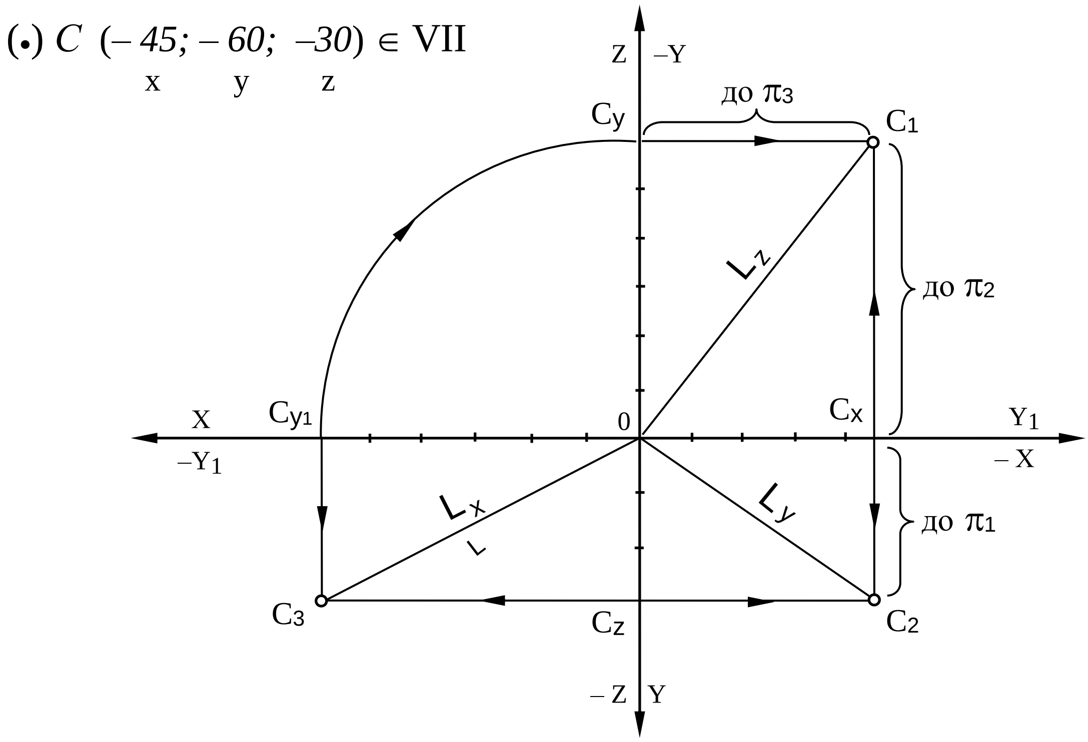


Рис. 18. Контрольная работа № 1 (*Задача 1*) Точка *C*

Пример 1.3. Дана (•) D (30; 60; – 40). Построить проекции D_1, D_2, D_3. Указать на эпюре D_x, D_y, D_z; расстояния до плоскостей проекций π_1, π_2, π_3; расстояния до осей Ox, Oy, Oz (рис. 19). Определить октант.

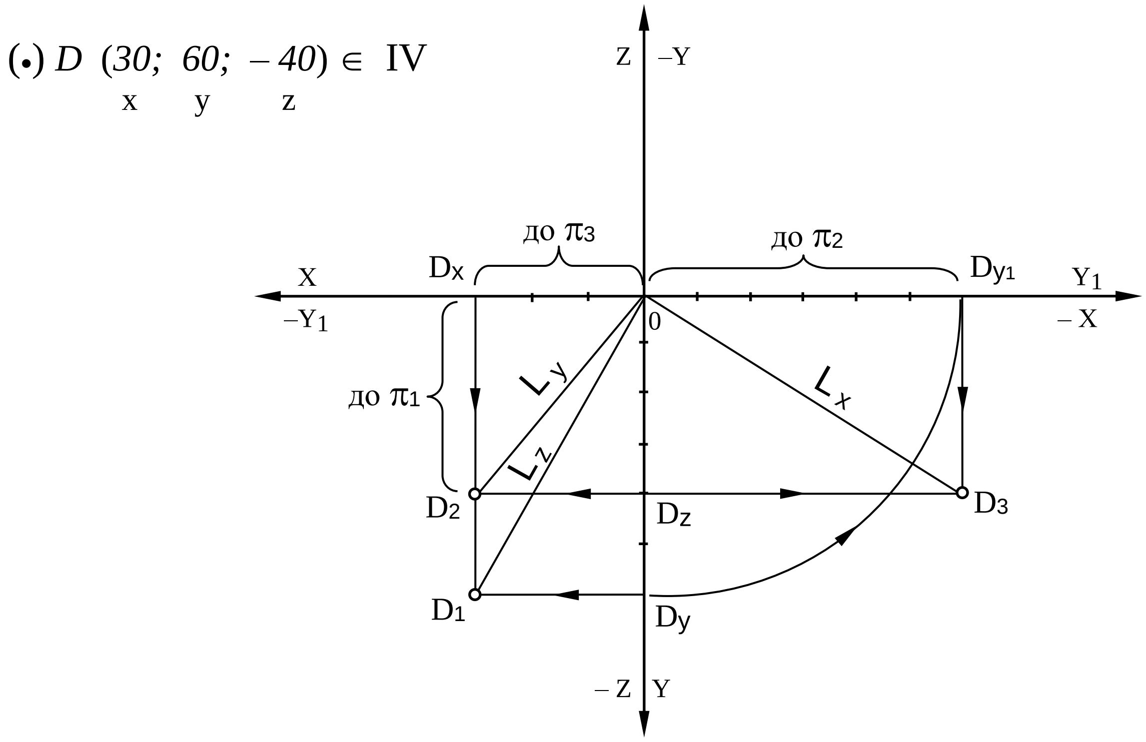


Рис. 19. Контрольная работа № 1 (*Задача 1*) Точка *D*

Пример 1.4. Дана (•) E (0; – 50; 35). Построить проекции E_1, E_2, E_3. Указать на эпюре E_x, E_y, E_z; расстояния до плоскостей проекций π_1, π_2, π_3; расстояния до осей Ox, Oy, Oz (рис. 20). Определить место расположения точки.

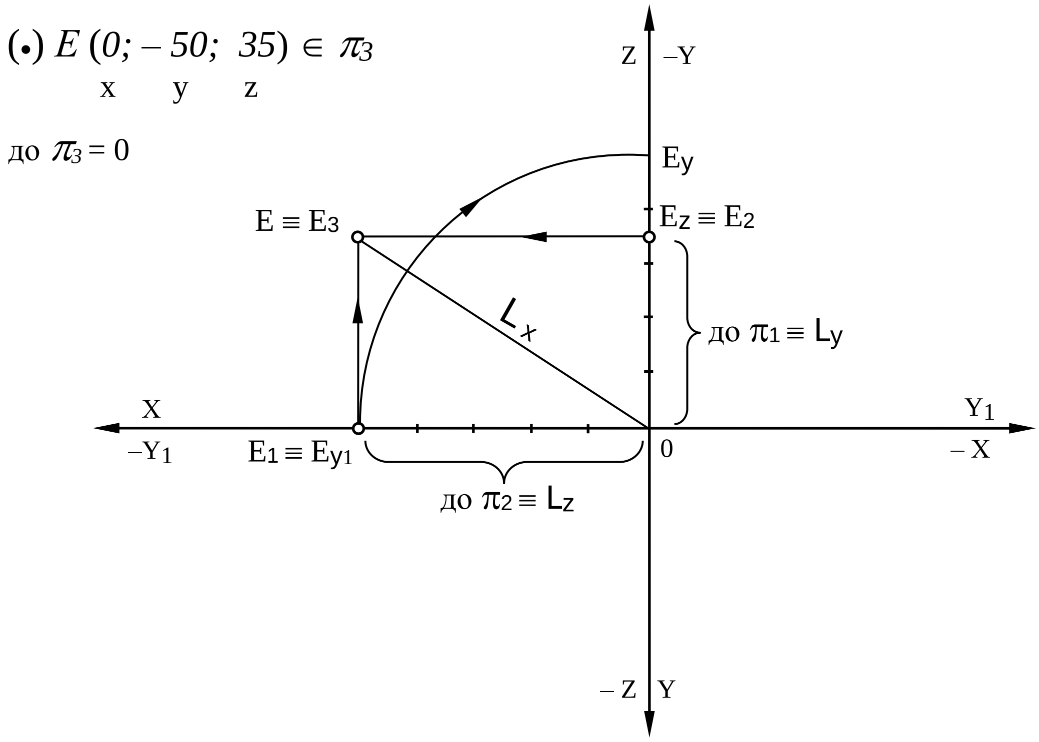


Рис. 20. Контрольная работа № 1 (*Задача 1*) Точка *E*

Вопросы для самоконтроля к теме 1

1. Что называется проецированием?
2. Какие существуют виды проецирования?
3. Что называется центральным проецированием?
4. Что называется параллельным проецированием?
5. На какие виды подразделяются параллельные проекции?
6. Что такое "система π_1, π_2" и как называются плоскости проекций π_1, π_2?
7. Как построить эпюр точки в ортогональной системе двух плоскостей проекций?
8. Что такое квадранты или четверти пространства?
9. Какими пóлами плоскостей проекций ограничены четверти пространства: I, II, III, IV?
10. Как определяется положение точки в четверти?
11. Что такое эпюр и как перейти от пространственного чертежа к эпюру? Что такое эпюр Монжа?
12. Что означает слово "ортогональный"?
13. Что называется осью проекций?
14. Что такое "линия связи"?
15. Что такое "система π_1, π_2, π_3" и как называется плоскость проекций π_3?
16. Как построить эпюр точки в ортогональной системе трех плоскостей проекций?
17. Какая система координат применяется в начертательной геометрии ("правая" или "левая")? В каких четвертях пространства координата x (y или z) положительна, отрицательна?
18. Что такое прямоугольные декартовы координаты точки? В какой последовательности записываются координаты в обозначении точки?
19. Что такое проекция точки и как обозначаются проекции пространственной точки?
20. Как на эпюре определить расстояние от точки до плоскостей проекций?
21. Как на эпюре определить расстояние от точки до осей координат?
22. Как расположены на эпюре относительно друг друга и оси проекций горизонтальная и фронтальная проекции?
23. Как расположены на эпюре относительно друг друга и оси проекций фронтальная и профильная проекции?
24. Что такое октанты?
25. Как определяется положение точки в октанте?
26. По каким координатам определяются на эпюре горизонтальная, фронтальная и профильная проекции точки?
27. Как восстановить положение пространственной точки по ее проекциям?

Лекция 2

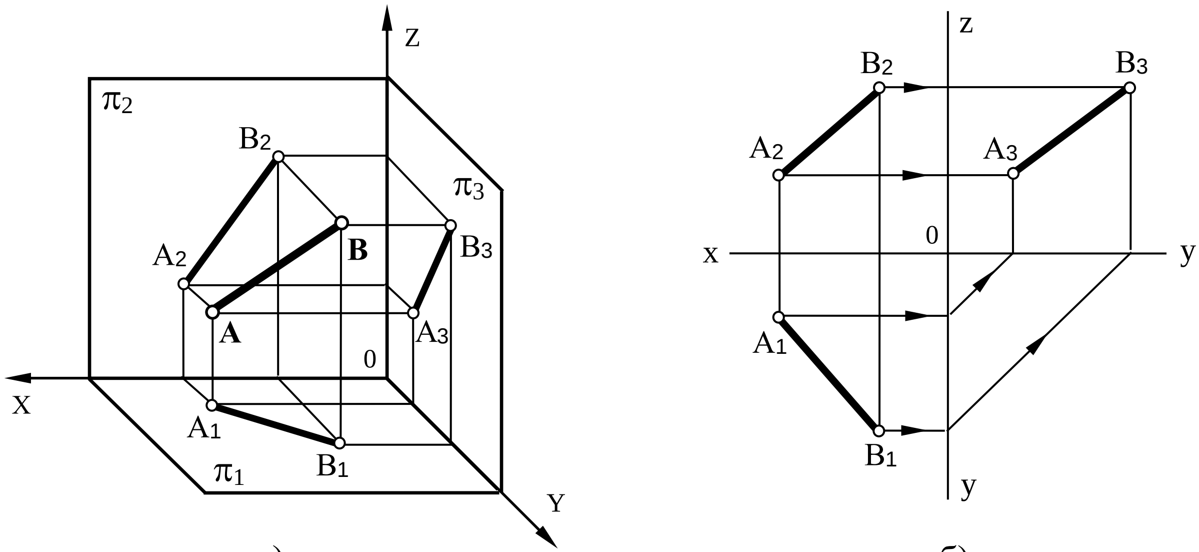
Тема 2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

2.1. Проецирование отрезка прямой общего положения

Положение прямой в пространстве определяется положением двух ее точек. Чтобы спроецировать отрезок AB прямой на плоскости π_1, π_2, π_3, достаточно спроецировать на эти плоскости точки A и B. Проведя через одноименные проекции этих точек прямые линии, получаем проекции отрезка AB – *горизонтальную* (A_1B_1), *фронтальную* (A_2B_2) и *профильную* (A_3B_3).

На рис. 21, а показано наглядное изображение отрезка AB в системе π_1, π_2, π_3. Точки A и B находятся на разных расстояниях от каждой из плоскостей π_1, π_2, π_3, проекции прямой наклонены к осям координат (рис. 21, б), каждая из проекций меньше самого отрезка. Такая прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций, называется ***прямой общего положения***.

Прямая AB наклонена к плоскостям проекций и образует с ними углы: с π_1 – угол α, с π_2 – β, с π_3 – γ. На эпюре мы видим только проекции этих углов.



а) б)

Рис. 21. Прямая общего положения

В зависимости от положения прямой относительно плоскостей проекции различают прямые *общего* и *частного* положения.

2.2. Особые (частные) положения прямой линии относительно плоскостей проекций

Прямые в пространстве могут быть:

– общего положения (см. выше);

– параллельны одной плоскости проекций (*прямые уровня*);

– параллельны двум плоскостям проекций (*проецирующие прямые*).

Прямые могут лежать:

– на плоскости проекций;

– на осях.

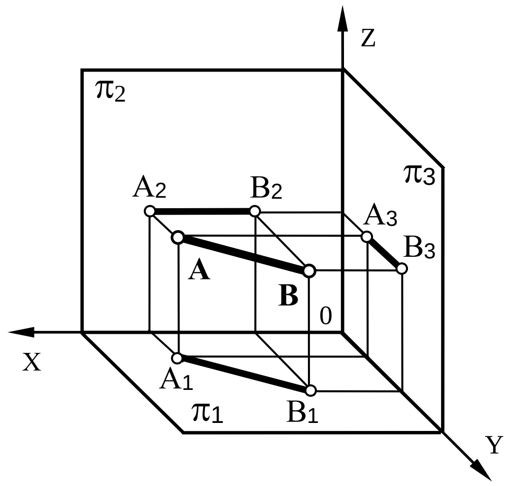
2.2.1. Прямые, параллельные одной из плоскостей проекций (прямые уровня)

Прямая уровня – это прямая, параллельная какой-либо одной плоскости проекций. Она проецируется в натуральную величину на параллельную ей плоскость проекций. На эту плоскость проецируются в истинную величину и углы наклона прямой к двум другим плоскостям. К *прямым уровня* относятся *горизонтальная*, *фронтальная* и *профильная* прямые.

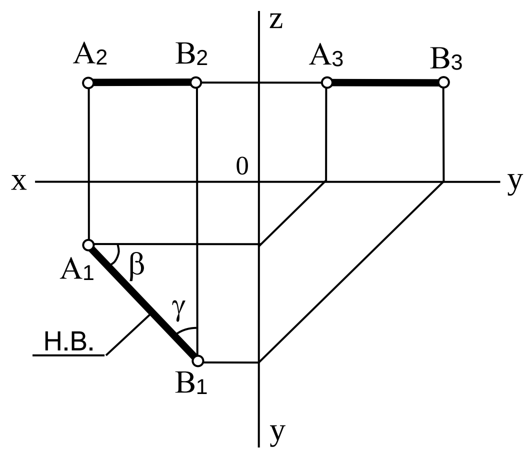
А. Горизонтальная прямая ($\parallel \pi_1$).

Прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций (π_1), носит название ***горизонтальной прямой уровня*** (или ***горизонтали***), рис. 22.

Фронтальная проекция A_2B_2 параллельна оси Ox, профильная проекция A_3B_3 параллельна оси Oy. Горизонтальная проекция A_1B_1 проецируется в *натуральную величину* (Н.В.), равную AB, на горизонтальную плоскость (π_1). Углы β и γ – истинные углы наклона к плоскостям проекций π_2 и π_3 соответственно.



а)



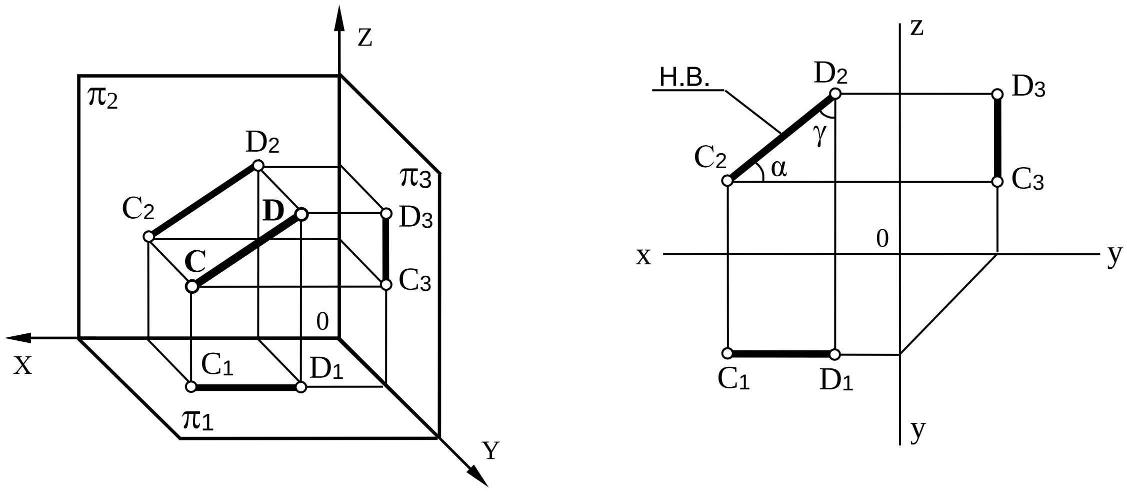
б)

Рис. 22. Горизонтальная прямая

Б. Фронтальная прямая ($\parallel \pi_2$).

Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций (π_2), носит название ***фронтальной прямой уровня*** (или ***фронтали***), рис. 23.

Горизонтальная проекция C_1D_1 параллельна оси Ox, профильная проекция C_3D_3 параллельна оси Oz. Фронтальная проекция C_2D_2 проецируется в *натуральную величину* (Н.В.), равную CD, на фронтальную плоскость проекций (π_2). Углы α и γ – истинные углы наклона к плоскостям проекций π_1 и π_3 соответственно.



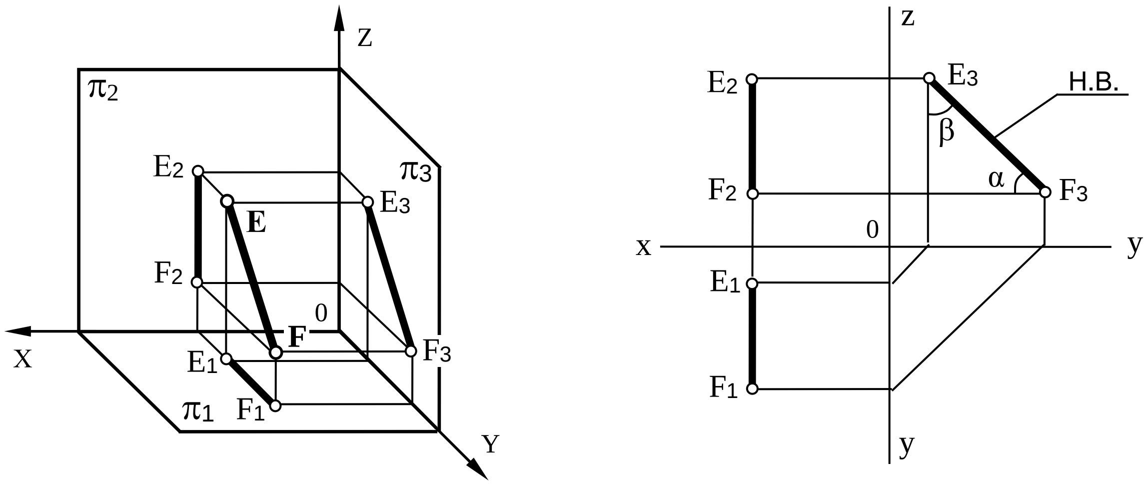
а) б)

Рис. 23. Фронтальная прямая

В. Профильная прямая ($\| \pi_3$).

Прямая, параллельная профильной плоскости проекций (π_3), носит название ***профильной прямой уровня*** (рис. 24).

Горизонтальная проекция E_1F_1 параллельна оси Oy, фронтальная проекция E_2F_2 параллельна оси Oz, профильная проекция E_3F_3 проецируется в *натуральную величину* (Н.В.), равную EF, на профильную плоскость проекций (π_3). Углы α и β – истинные углы наклона к плоскостям проекций π_1 и π_2 соответственно.



а) б)

Рис. 24. Профильная прямая

2.2.2. ПРЯМЫЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ДВУМ ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ (ПРОЕЦИРУЮЩИЕ)

Прямые, параллельные двум плоскостям проекций и перпендикулярные к третьей плоскости проекций, называются ***проецирующими*** прямыми. К проецирующим относятся *горизонтально-проецирующая, фронтально-проецирующая* и *профильно-проецирующая* прямые.

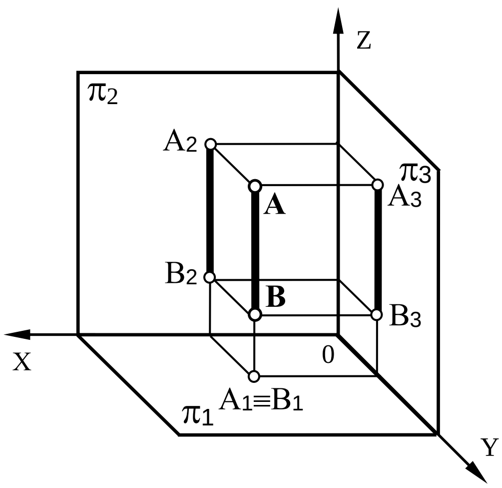
Каждая из них проецируется в точку на ту плоскость проекций, к которой она перпендикулярна, две другие проекции перпендикулярны к осям, ограничивающим эту плоскость проекций.

Любая точка, принадлежащая проецирующей прямой, проецируется на плоскость, перпендикулярную к ней, точкой, совпадающей с проекцией прямой.

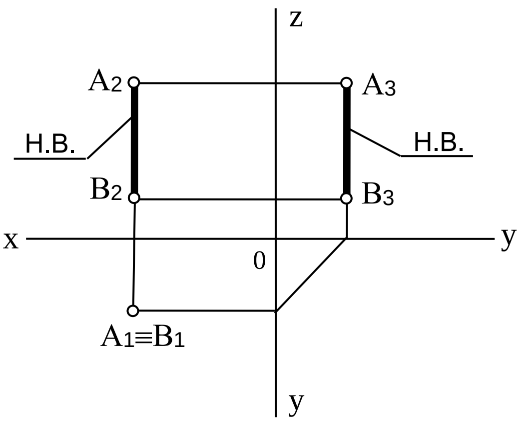
А. Горизонтально-проецирующая прямая ($\perp \pi_1$ и $\parallel \pi_2, \pi_3$).

Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (π_1) (рис. 25), называется ***горизонтально-проецирующей***.

На горизонтальную плоскость (π_1) такая прямая проецируется в точку ($A_1 \equiv B_1$). Проекции A_2B_2 и A_3B_3 параллельны оси *Oz* и являются *натуральными величинами* (Н.В.) прямой *AB*.



а)



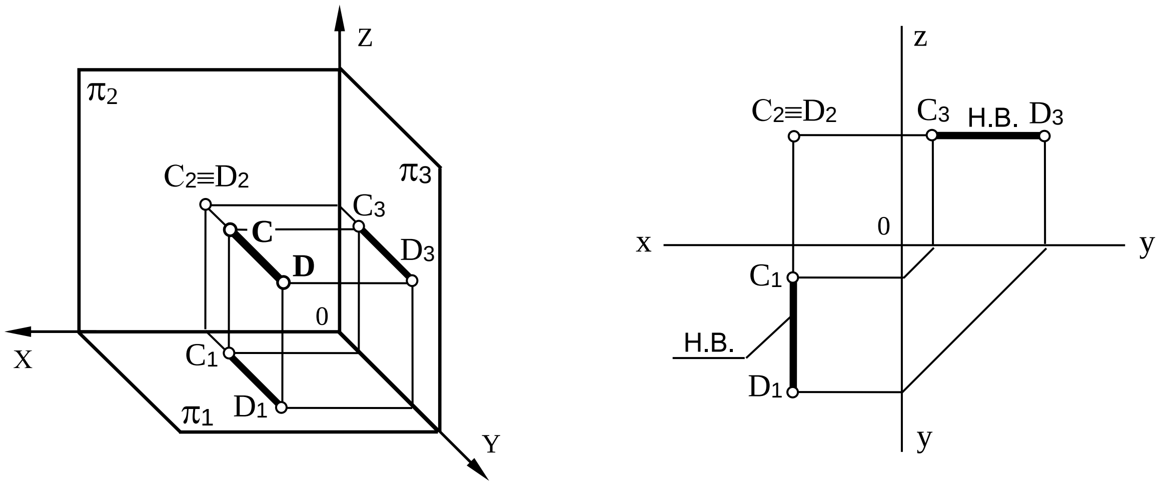
б)

Рис. 25. Горизонтально-проецирующая прямая

Б. Фронтально-проецирующая прямая ($\perp \pi_2$ и $\parallel \pi_1, \pi_3$).

Прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (π_2) (рис. 26), называется ***фронтально-проецирующей*** прямой.

На фронтальную плоскость проекций (π_2) такая прямая проецируется в точку ($C_2 \equiv D_2$). Проекции C_1D_1 и C_3D_3 параллельны оси *Oy* и являются *натуральными величинами* (Н.В.) прямой *CD*.



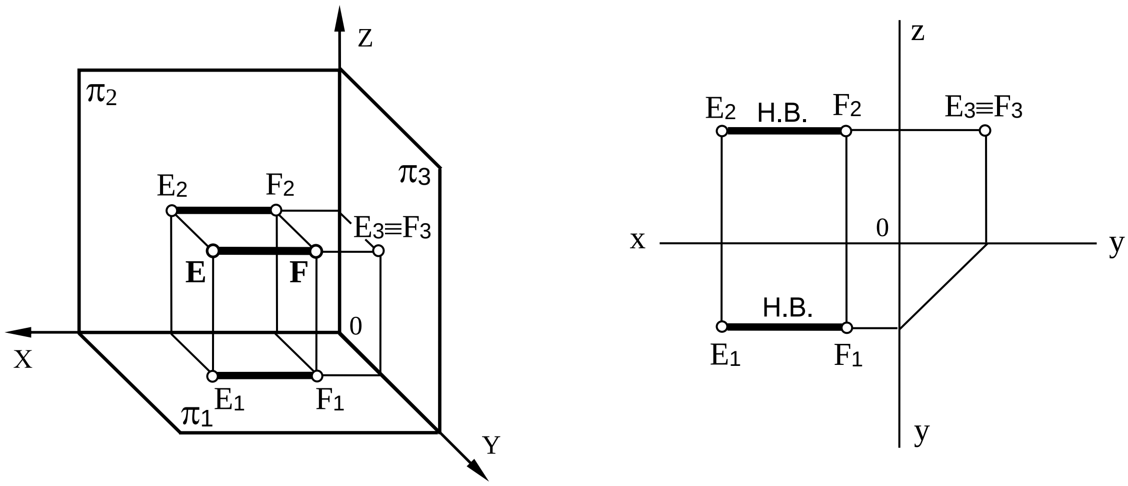
а) б)

Рис. 26. Фронтально-проецирующая прямая

В. Профильно-проецирующая прямая ($\perp \pi_3$ и $\parallel \pi_1, \pi_2$).

Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций (π_3) (рис. 27), называется ***профильно-проецирующей*** прямой.

На профильную плоскость проекций (π_3) такая прямая проецируется в точку ($E_3 \equiv F_3$). Проекции E_2F_2 и E_3F_3 параллельны оси Ox и являются *натуральными величинами* (Н.В.) прямой EF.

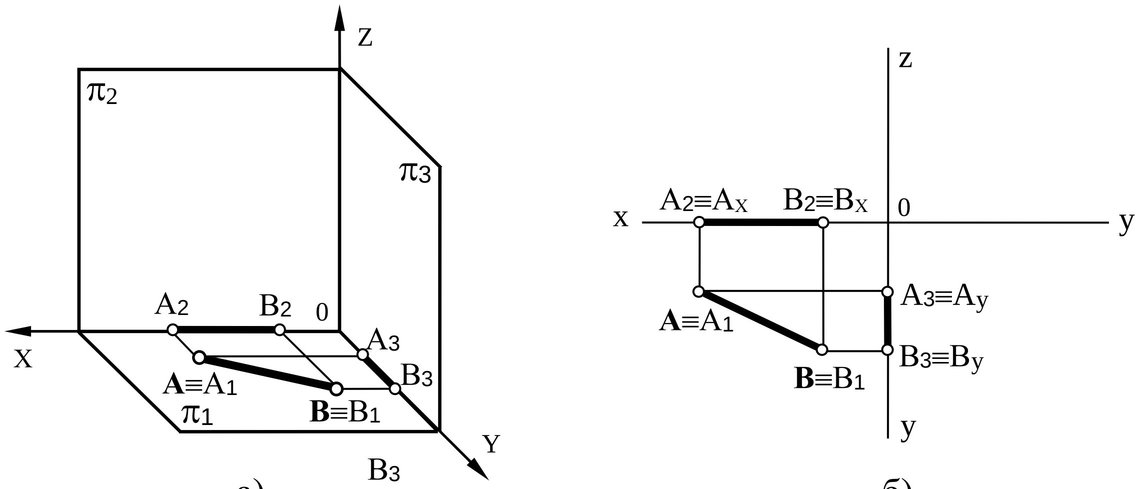


а) б)

Рис. 27. Профильно-проецирующая прямая

2.2.3. *ПРЯМЫЕ, ЛЕЖАЩИЕ НА ПЛОСКОСТЯХ ПРОЕКЦИЙ*

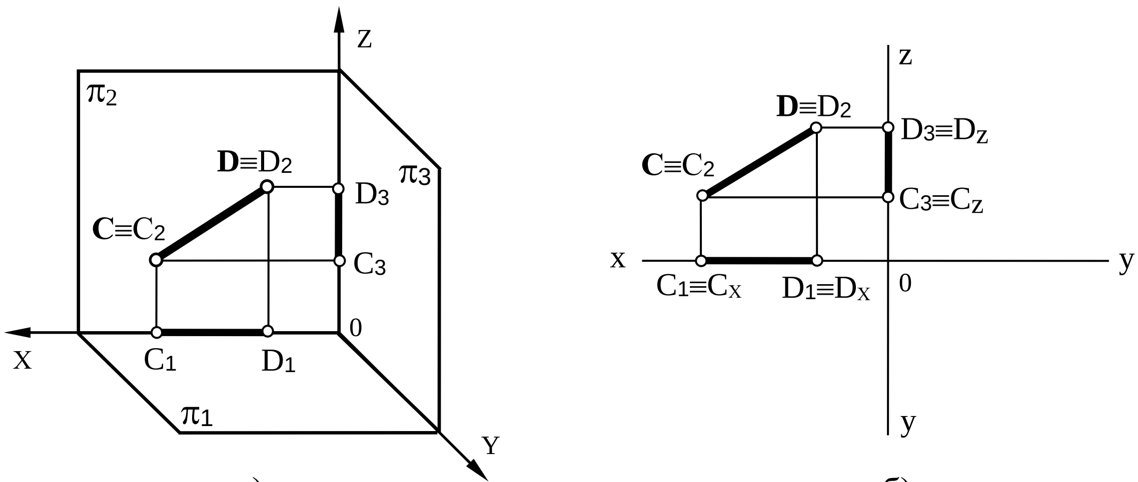
А. Горизонтальная прямая, лежит на π_1 (рис. 28).



а) б)

Рис. 28. Горизонтальная прямая $\in \pi_1$

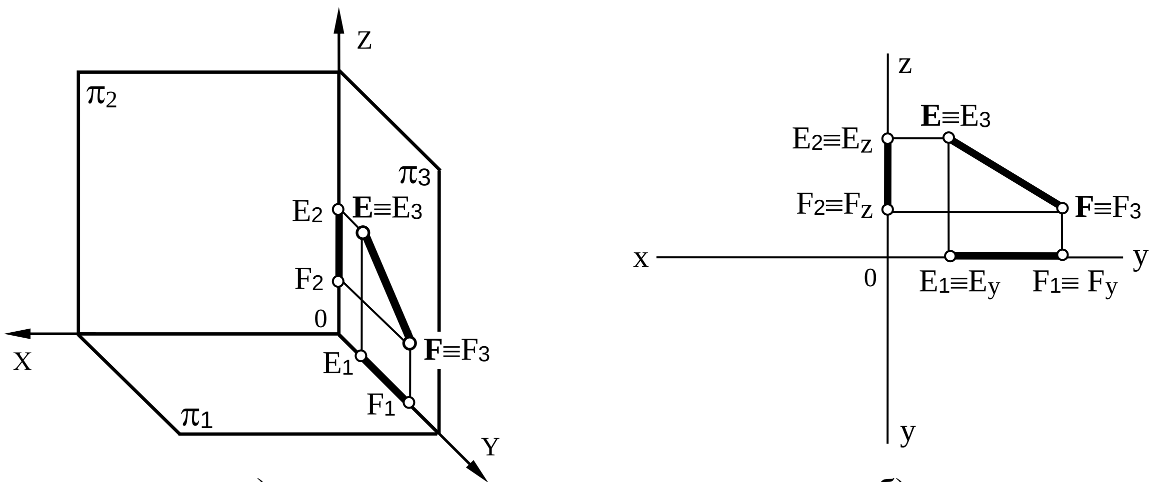
Б. Фронтальная прямая, лежит на π_2 (рис. 29).



а) б)

Рис. 29. Фронтальная прямая $\in \pi_2$

В. Профильная прямая, лежит на π_3 (рис. 30).

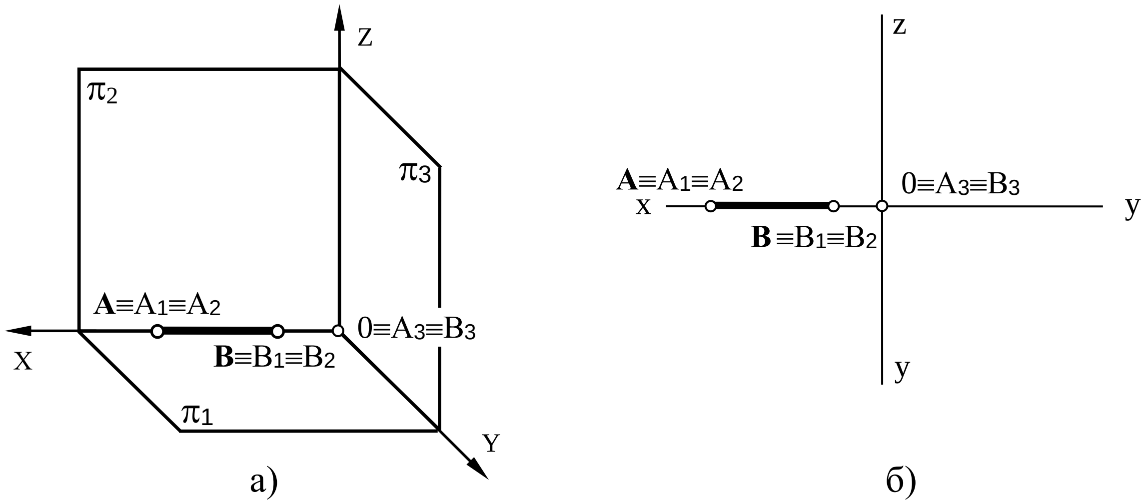


а) б)

Рис. 30. Профильная прямая $\in \pi_3$

2.2.4. *Прямые, лежащие на осях*

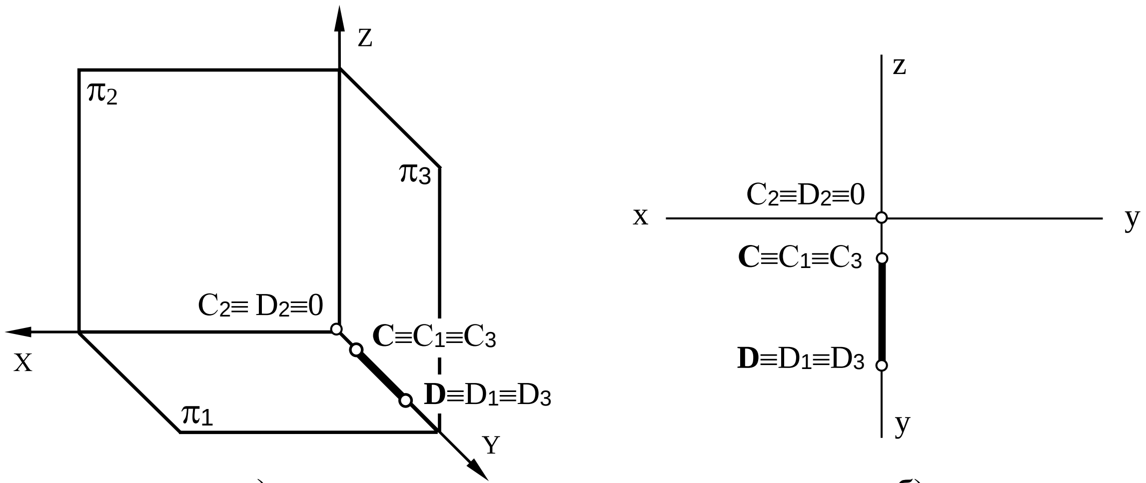
А. *Прямая, лежащая на оси Ox* (рис. 31).



а) б)

Рис. 31. Прямая ∈ *Ox*

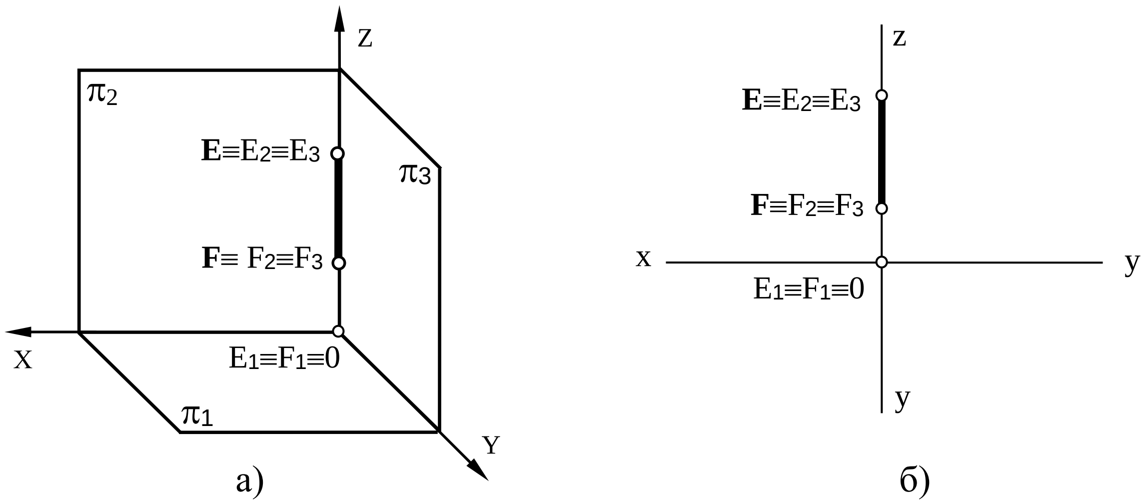
Б. *Прямая, лежащая на оси Oy* (рис. 32).



а) б)

Рис. 32. Прямая ∈ *Oy*

В. *Прямая, лежащая на оси Oz* (рис. 33).



а) б)

Рис. 33. Прямая ∈ *Oz*

2.3. Следы прямой линии

Следами прямой линии называются точки пересечения прямой с плоскостями проекций π_1, π_2, π_3.

В системе 3-х плоскостей проекций прямая общего положения имеет три следа:

– *горизонтальный M* (M_1, M_2, M_3);
– *фронтальный N* (N_1, N_2, N_3);
– *профильный P* (P_1, P_2, P_3).

Точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций (π_1) называется ***горизонтальным следом*** (M).

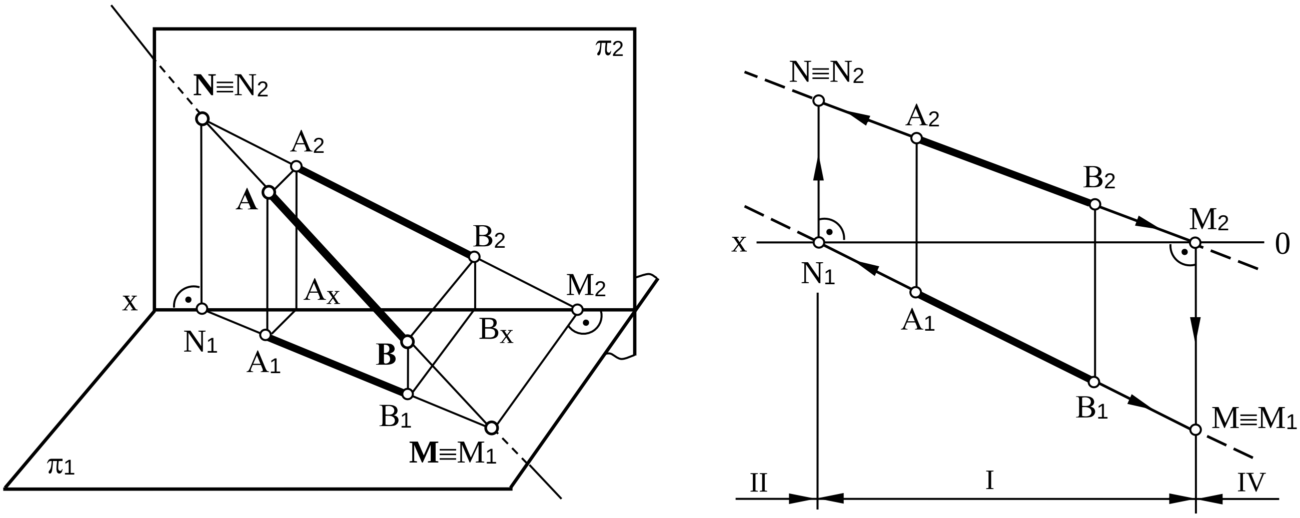
Точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций (π_2) называется ***фронтальным следом*** (N).

Точка пересечения плоскости с профильной плоскостью проекций (π_3) называется ***профильным следом*** (P).

Прямая, параллельная одной плоскости проекций, имеет два следа, расположенных в плоскостях, которым она не параллельна.

Прямая, перпендикулярная плокости проекций, имеет только один след.

Рассмотрим прямую AB в системе двух плоскостей проекций на наглядном изображении (рис. 34, а), на эпюре (рис. 34, б), и найдем ее горизонтальный (M) и фронтальный (N) следы.



а) б)

Рис. 34. Следы прямой AB в системе π_1, π_2

Эти следы (рис. 34, а) определены как точки, в которых прямая пересекается со своими проекциями. Каждый след, являясь точкой, одновременно принадлежащей и данной прямой и одной из плоскостей проекций, совпадает с одноименной своей проекцией, т.е. горизонтальный след совпадает со своей горизонтальной проекцией ($M \equiv M_1$), фронтальный – со своей фронтальной проекцией ($N \equiv N_2$) и профильный – со своей профильной проекцией ($P \equiv P_3$). Две другие проекции каждого следа располагаются на соответствующих осях проекций.

Чтобы найти горизонтальный след прямой (рис. 34)*, надо продолжить фронтальную проекцию* A_2B_2 *до пересечения с осью* Ox *и через* (•) M_2 *восстановить перпендикуляр к оси* Ox *до пересечения с продолжением горизонтальной проекции* A_1B_1*. Горизонтальная проекция горизонтального следа* (M_1) *совпадает с самим горизонтальным следом* (M) – $M \equiv M_1$.

– M_1 – горизонтальная проекция горизонтального следа;

– M_2 – фронтальная проекция горизонтального следа;

– M_3 – профильная проекция горизонтального следа.

Для нахождения фронтального следа и его проекции поступаем аналогично (рис. 34, а). *Продолжаем горизонтальную проекцию* A_1B_1 *до пересечения с осью* Ox *и через* (•)N_1 *восстанавливаем перпендикуляр к оси* Ox *до пересечения с продолжением фронтальной проекции* A_2B_2. *Фронтальная проекция фронтального следа* (N_2) *совпадает с самим фронтальным следом* (N) – $N \equiv N_2$.

– N_1 – горизонтальная проекция фронтального следа;

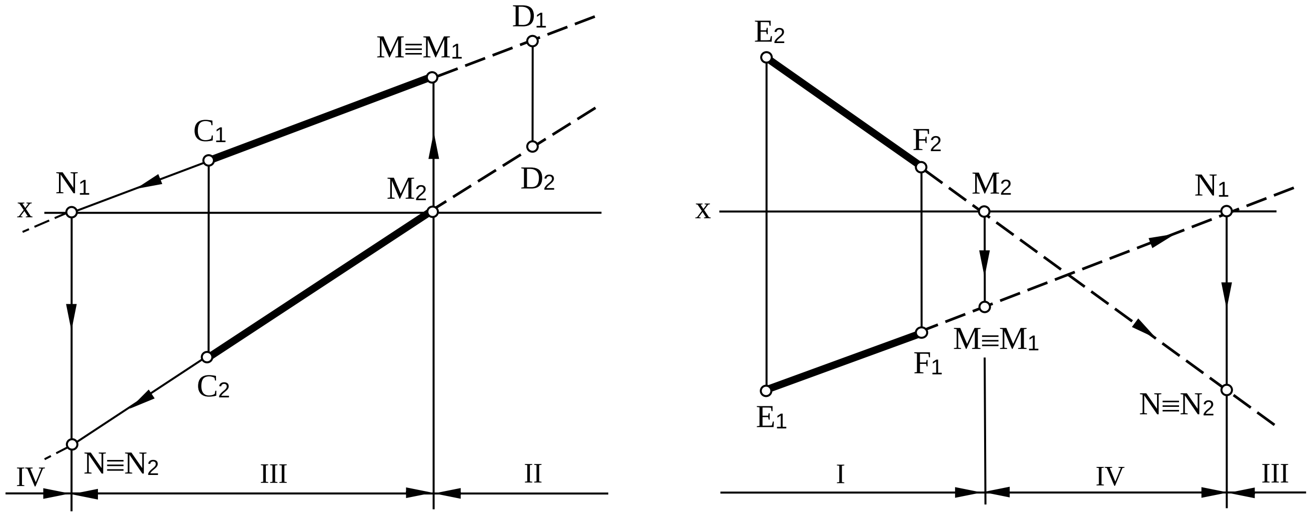
– N_2 – фронтальная проекция фронтального следа;

– N_3 – профильная проекция фронтального следа.

Следы прямой (M и N) позволяют установить, через какие четверти пространства проходит прямая.

На участке от следа M до следа N (рис. 34, б) прямая AB находится в первой четверти (I), так как горизонтальная проекция прямой (A_1) ниже оси Ox, а фронтальная (A_2) – выше. После пересечения прямой плоскости π_1 в точке M обе проекции прямой оказываются ниже оси Ox, что говорит о том, что на этом участке прямая находится в четвертой четверти (IV). После пересечения прямой плоскости π_2 в точке N обе ее проекции располагаются выше оси Ox, значит, прямая перешла во вторую четверть (II) пространства.

На рис. 35 приведены примеры построения следов прямых CD (рис. 35, а) и EF (рис. 35, б).



а)   б)

Рис. 35. Следы прямых CD и EF в системе π_1, π_2

Рассмотрим построение следов прямой линии AB в системе трех плоскостей проекций π_1, π_2, π_3 (рис. 36, 37).

Горизонтальный (M, M_1, M_2) и фронтальный (N, N_1, N_2) следы прямой будут определены по тем же правилам, которые были указаны выше. Появится только необходимость указать профильные проекции горизонтального и фронтального следов прямой (M_3, N_3), которые определяются по правилу построения третьей проекции точки по двум уже известным проекциям. Соединяем M_3 и N_3 и на этой линии выделяем A_3B_3 – профильную проекцию отрезка AB.

Затем приступаем к построению профильного следа (P) прямой AB. Определяем горизонтальную проекцию профильного следа (P_1) в пересечении горизонтальной проекции прямой (A_1B_1) с осью Oy, фронтальную проекцию профильного следа (P_2) – в пересечении фронтальной проекции прямой (A_2B_2) с осью Oz. По двум известными проекциям точки P (P_1, P_2) строим ее профильную проекцию (P_3), которая будет совпадать с самим профильным следом P ($P \equiv P_3$), так как точка P принадлежит плоскости π_3, две же другие ее проекции будут лежать на осях проекций.

Заметим, что горизонтальные проекции всех следов (M_1, N_1, P_1) располагаются на горизонтальной проекции прямой (A_1B_1), фронтальные проекции следов (M_2, N_2, P_2) – на фронтальной (A_2B_2) и профильные проекции следов (M_3, N_3, P_3) – на профильной (A_3B_3).

Следы прямой (M, N, P), являясь точками, в которых прямая переходит из одного октанта в другой, позволяют отмечать ее ***видимость*** (рис. 37). *Видимой частью прямой будет та, которая расположена в пределах первого октанта*. Проекции прямой, соответствующие ее видимой части, будут изображаться *сплошными* линиями, а соответствующие невидимым частям – *штриховыми*.

На участке от следа M до профильной плоскости π_3 (на эпюре до оси Oz) прямая AB находится в первом октанте (I), так как горизонтальная проекция прямой (A_1) ниже оси Ox, а фронтальная (A_2) – выше, $x>0$. Слева от следа M прямая расположена в четвертом октанте (IV), так как обе проекции прямой ниже оси Ox, $x>0$. На участке от оси Oz до фронтального следа N прямая проходит через пятый октант (V), так как горизонтальная проекция прямой ниже оси Ox, фронтальная – выше, $x<0$. Справа от следа N прямая уходит в шестой октант (VI), так как обе проекции выше оси Ox, $x<0$.

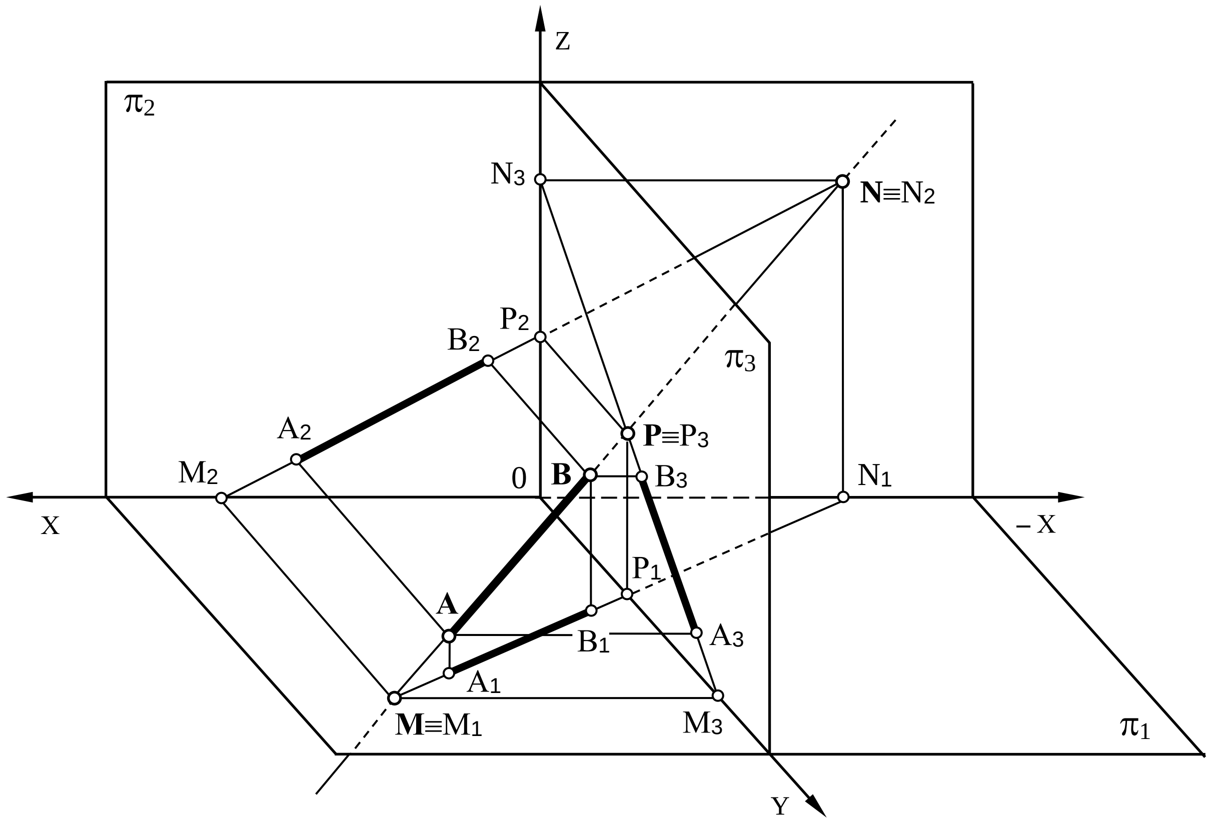


Рис. 36. Следы прямой *AB* в системе π_1, π_2, π_3 (*наглядное изображение*)

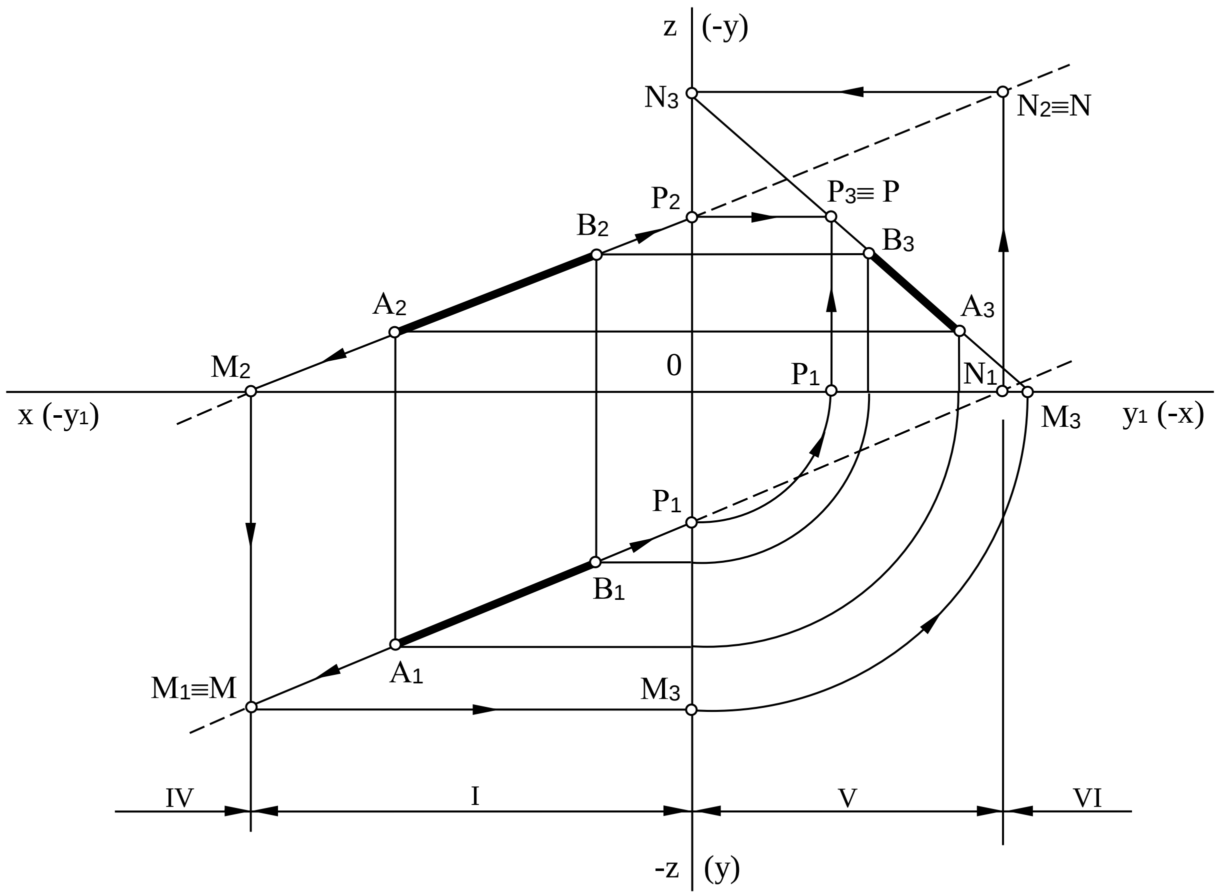
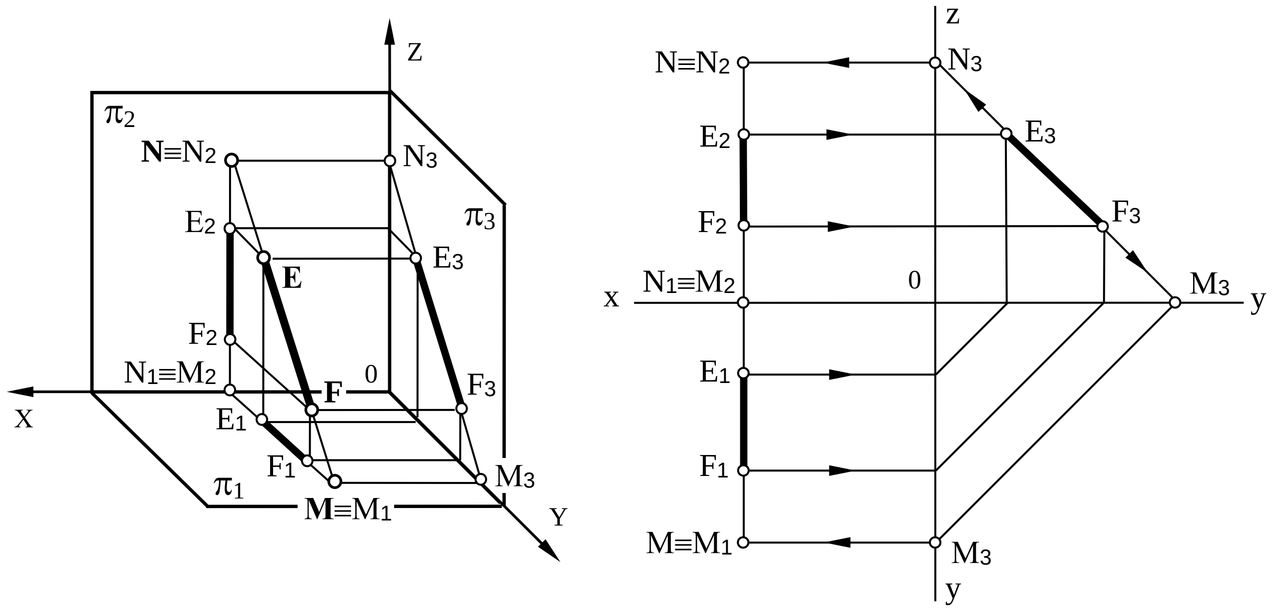


Рис. 37. Следы прямой *AB* в системе π_1, π_2, π_3 (*эпюр*)

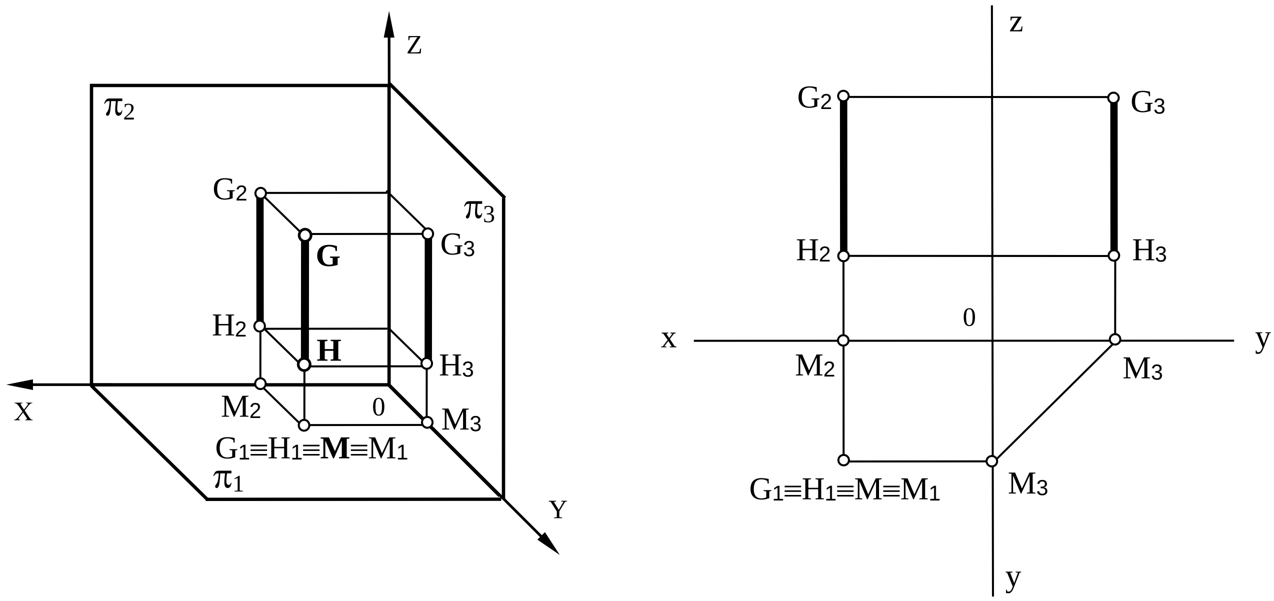
Прямые уровня не имеют следов на плоскости проекций, которой они параллельны. Например, профильная прямая *EF* не имеет профильного следа (рис. 38). Для построения следов прямой *EF* сначала необходимо построить профильную проекцию E_3F_3, продлив которую, получим положение M_3 и N_3. Затем находим $M \equiv M_1$ и $N \equiv N_2$.



а) б)

Рис. 38. Следы профильной прямой *EF* в системе π_1, π_2, π_3

Проецирующая прямая имеет только один след, причем на плоскости, которой она перпендикулярна. Так, горизонтально-проецирующая прямая *GH* имеет только горизонтальный след ($M \equiv M_1$), рис. 39.



а) б)

Рис. 39. Следы горизонтально-проецирующей прямой *KL* в системе π_1, π_2, π_3

Пример 2.1. Дана прямая общего положения *CD* (рис. 40). Построить горизонтальный (M, M_1, M_2) и фронтальный (N, N_1, N_2) следы прямой. Определить октанты, через которые проходит прямая.

(В контрольной работе № 1 *допускается не указывать невидимые линии*).

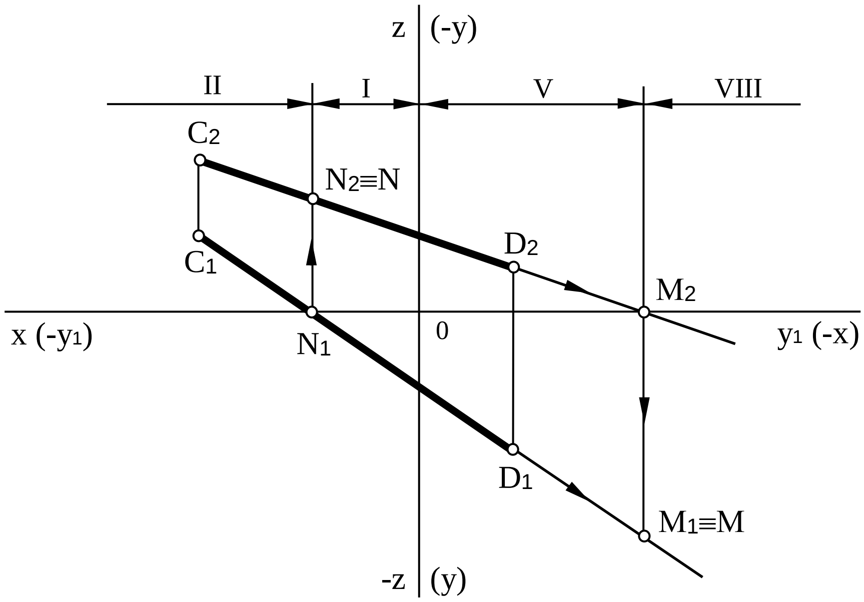


Рис. 40. Контрольная работа № 1 (*Задача 2*) Прямая *CD*

Пример 2.2. Дана прямая общего положения *KL* (рис. 41). Построить горизонтальный (M, M_1, M_2) и фронтальный (N, N_1, N_2) следы прямой. Определить октанты, через которые проходит прямая.

(В контрольной работе № 1 *допускается не указывать невидимые линии*).

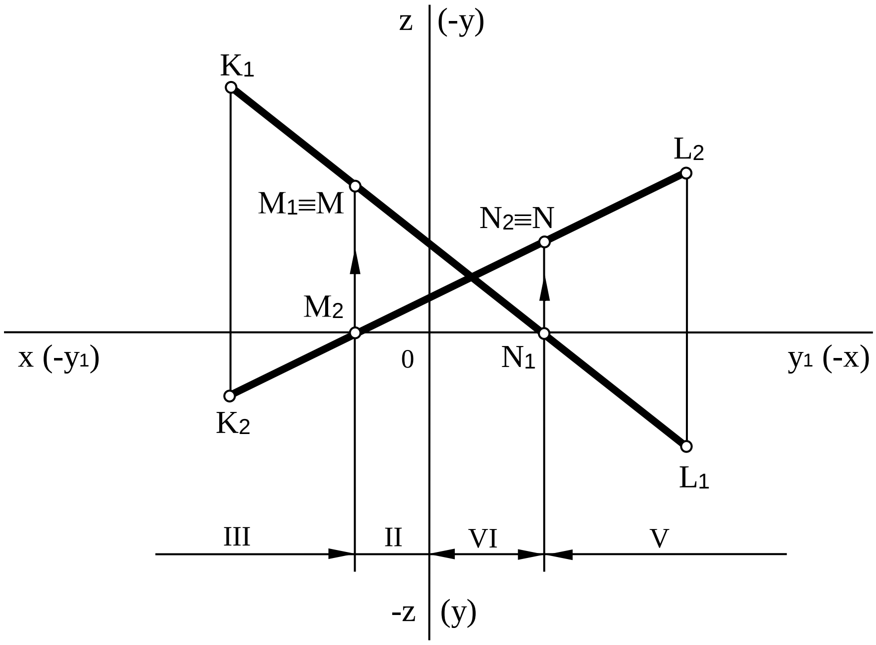


Рис. 41. Контрольная работа № 1 (*Задача 2*) Прямая *KL*

2.4. Определение натуральной величины прямой и углов ее наклона к плоскостям проекций

(Метод прямоугольного треугольника)

Прямая общего положения и углы ее наклона к плоскостям проекций проецируются с искажением на все три плоскости проекций.

Натуральную (или *истинную*) величину отрезка прямой AB и углы наклона ее к плоскостям можно определить ***методом прямоугольного треугольника***.

Для нахождения *натуральной* величины прямой AB (Н.В. AB) и угла наклона ее α к плоскости π_1 необходимо построить прямоугольный треугольник (рис. 42), одним из катетов которого (горизонтальным) будет горизонтальная проекция прямой (A_1B_1), а вторым катетом (вертикальным) – алгебраическая разность расстояний ($\Delta z = z_A - z_B$) точек A и B от плоскости π_1 (или от концов фронтальной проекции прямой (A_2 и B_2) на эпюре до оси Ox), тогда гипотенуза этого треугольника и будет Н.В. AB (рис. 42, а). Угол между A_1B_1 и Н.В. AB будет искомый угол α.

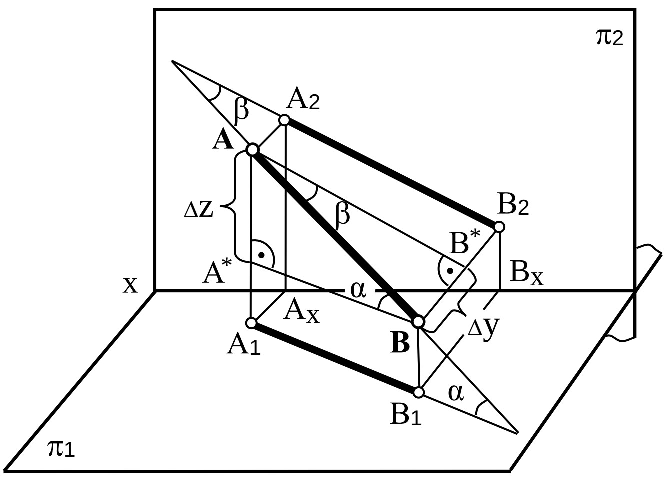
Аналогично Н.В. AB и угол наклона ее β к фронтальной плоскости проекций π_2 можно определить из прямоугольного треугольника (рис. 42, б), одним из катетов которого (горизонтальным) будет горизонтальная проекция прямой (A_2B_2), а вторым катетом (вертикальным) – разность расстояний ($\Delta y = y_B - y_A$) точек A и B от плоскости π_2 (или от концов горизонтальной проекции прямой (A_1 и B_1) на эпюре до оси Ox), тогда гипотенуза этого треугольника будет Н.В. AB (рис. 42, б). Угол между A_2B_2 и Н.В. AB будет угол β.

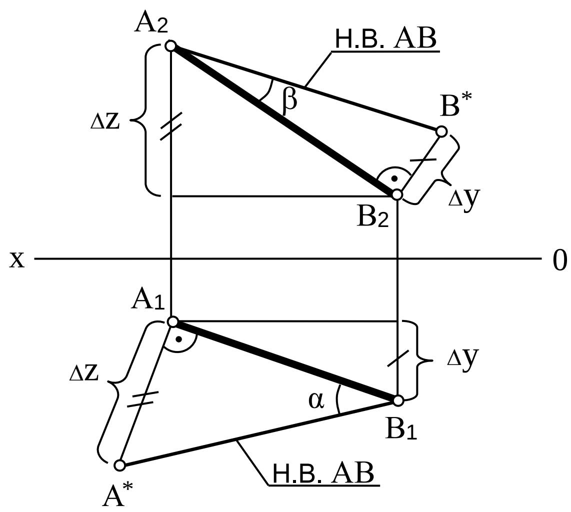
$AK \,||\, A_1B_1$

$AB = AK \cdot \cos\alpha$

$AB = A_1B_1 \cdot \cos\alpha$

$\Delta z = BK = BB_1 - AA_1$





а) б)

Рис. 42. Метод прямоугольного треугольника

Пример 2.3. Дана прямая общего положения *CD* (рис. 43). Определить натуральную величину прямой и углы наклона ее к плоскостям проекций π_1 и π_2.

C1 (x **y**)
C2 (x **z**)

D1 (x **y**)
D2 (x **z**)

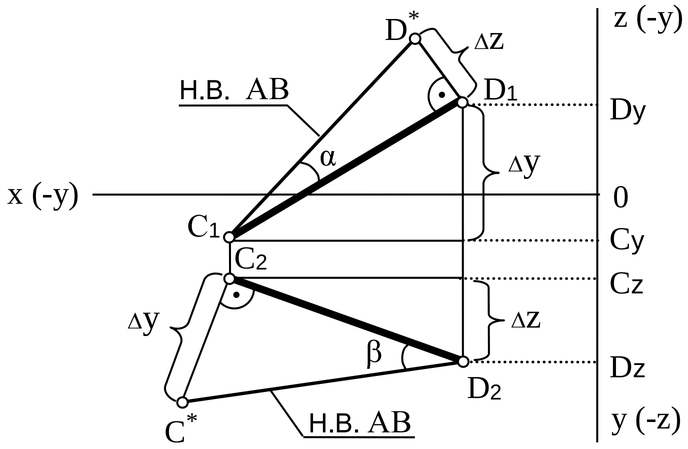


Рис. 43. Контрольная работа № 1 (*Задача 3*) Прямая *CD*

Замеряем Δz и откладываем перпендикулярно из D_1 на свободное поле чертежа, получаем точку D^*. Соединив C_1 и D^*, получаем C_1D^* = Н.В. *CD*.

Δz – разность расстояний от концов фронтальной проекции прямой (C_2 и D_2) на эпюре до оси *Ox* или точек *C* и *D* до плоскости π_1:

$\Delta z = z_D - z_C \quad (z_D = -z, \quad z_C = -z)$.

Угол, образованный между C_1D_1 и C_1D^* – искомый угол α.

Затем замеряем Δy и откладываем перпендикулярно из C_2 на свободное поле чертежа, получаем точку C^*. Соединив D_2 и C^*, получаем D_2C^* = Н.В. *CD*:

$\Delta y = y_D + y_C \quad (y_D = -y, \; y_C = +y)$.

Δy – разность расстояний от концов горизонтальной проекции прямой (C_1 и D_1) на эпюре до оси *Ox* или точек *C* и *D* до плоскости π_2.

Угол между C_2D_2 и D_2C^* – искомый угол β.

Пример 2.4. Дана прямая общего положения *EF* (рис. 44). Определить натуральную величину прямой и углы наклона ее к плоскостям проекций π_1 и π_2.

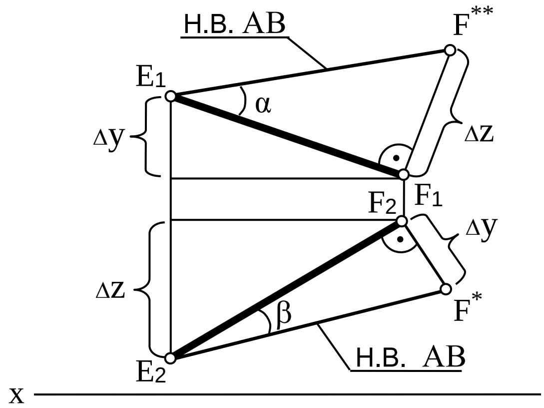


Рис. 44. Контрольная работа № 1 (*Задача 3*) Прямая *EF*

Аналогично получаем:

$\Delta z = z_F - z_E \quad (z_F = +z, \quad z_E = +z), \quad \Delta y = y_E - y_F \quad (y_E = -y, \; y_F = -y)$.

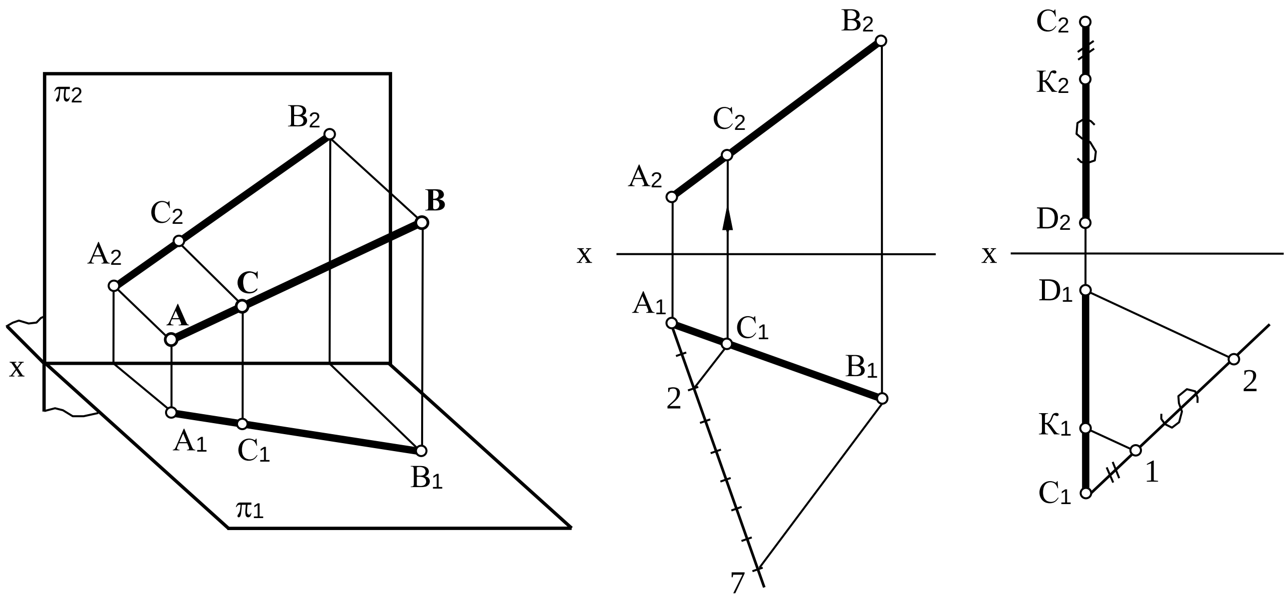
2.5. Деление отрезка в заданном отношении

Одним из свойств параллельного проецирования является то, что отношение отрезков прямой линии равно отношению их проекций (рис. 45, а): $\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$, так как прямые AA_1, CC_1 и BB_1 параллельны между собой.

На рис. 45, б дан пример деления отрезка прямой линии в некотором заданном отношении. Отрезок AB разделен в отношении 2 : 5. Из (•) A_1 проведена вспомогательная прямая, на которой отложено семь (2 + 5) отрезков произвольной длины, но равных между собой. Проведя отрезок B_17 и параллельно ему через (•) *2* прямую, получаем (•) C_1, причем $A_1C_1 : C_1B_1 = 2 : 5$. Затем находим C_2. Точка C делит отрезок AB в отношении 2 : 5.

На рис. 45, в дана профильная прямая CD своими проекциями C_1D_1 и C_2D_2. На фронтальной проекции C_2D_2 задана (•) K_2. Надо разделить горизонтальную проекцию C_1D_1 в том же отношении, в каком (•) K_2 делит отрезок C_2D_2. Проведя из (•) C_1 некоторую вспомогательную прямую, откладываем на ней $C_11 = C_2K_2$ и $1\text{-}2 = K_2D_2$. Затем проводим прямую D_12 и параллельно ей через (•) *1* прямую до пересечения с C_1D_1 в (•) K_1. Эта точка представляет собой искомую горизонтальную проекцию точки K, принадлежащей отрезку CD.

Таким образом, для того чтобы осуществить деление отрезка в заданном отношении на ортогональном чертеже, достаточно одну из проекций разделить в этом отношении.



а) б) в)

Рис. 45. Деление отрезка

2.6. Взаимное положение прямой и точки

Если точка лежит на прямой, то проекции этой точки будут лежать на одноименных проекциях этой прямой.

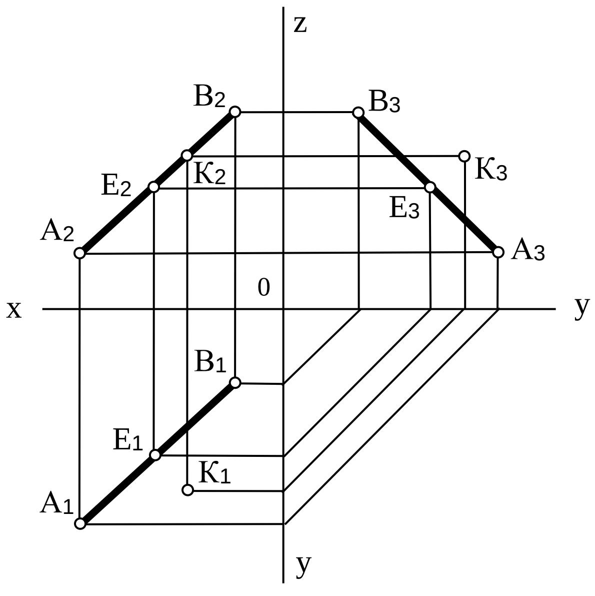
На рис. 46, а дан чертеж некоторой прямой общего положения *AB*. Точка *E* принадлежит прямой *AB*, так как проекции точки *E* лежат на одноименных проекциях прямой *AB,* т.е. $E_1 \in A_1B_1$, $E_2 \in A_2B_2$, $E_3 \in A_3B_3$.

Точка *К* не принадлежит прямой *АВ* (рис. 46, а), так как горизонтальная K_1 и профильная K_3 проекции точки *К* не лежат на одноименных проекциях прямой *АВ,* т.е. $K_1 \notin A_1B_1$, $K_3 \notin A_3B_3$, хотя $K_2 \in A_2B_2$.

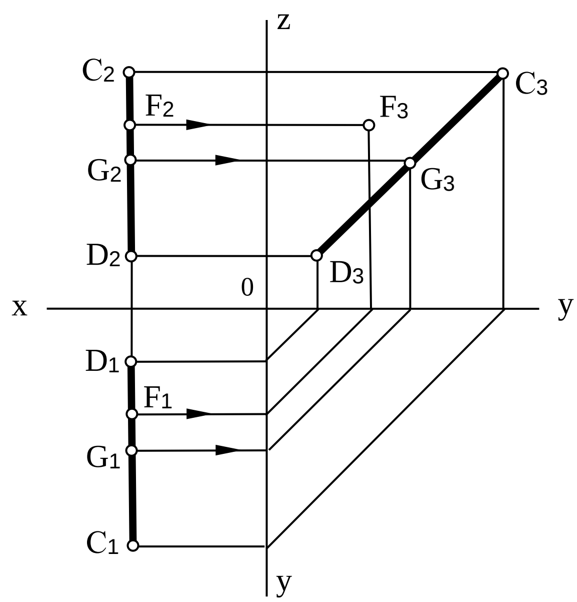
О принадлежности точки прямой можно судить по двум проекциям. Исключение составляет профильная прямая (рис. 46, б), где о взаимном положении прямой и точки можно судить, только построив профильную проекцию.

На рис. 46, б дан чертеж некоторой профильной прямой *CD*. Горизонтальная F_1 и фронтальная F_2 проекции точки *F* лежат на одноименных проекция прямой *CD* ($F_1 \in C_1D_1$, $F_2 \in C_2D_2$), но профильная проекция точки не лежит на профильной проекции прямой ($F_3 \notin C_3D_3$), значит, точка *F* не принадлежит прямой *CD* – $(\bullet)\, F \notin CD$.

Точка *G* принадлежит профильной прямой *CD,* так как проекции этой точки лежат на одноименных проекциях этой прямой.



а) Прямая общего положения
$(\bullet)\, E \in AB$, $(\bullet)\, K \notin AB$



б) Профильная прямая
$(\bullet)\, G \in CD$, $(\bullet)\, F \notin CD$

Рис. 46. Принадлежность точки прямой

2.7. Взаимное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут быть *взаимно параллельными*, *пересекающимися* и *скрещивающимися*.

1. *Параллельные прямые*

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются ***параллельными***.

Проекции двух параллельных прямых параллельны между собой (рис. 47), т.е. горизонтальные проекции параллельны между собой ($A_1B_1 \parallel C_1D_1$), фронтальные проекции параллельны между собой ($A_2B_2 \parallel C_2D_2$) и профильные проекции параллельны между собой ($A_3B_3 \parallel C_3D_3$).

О параллельности профильных прямых можно судить, построив профильную проекцию.

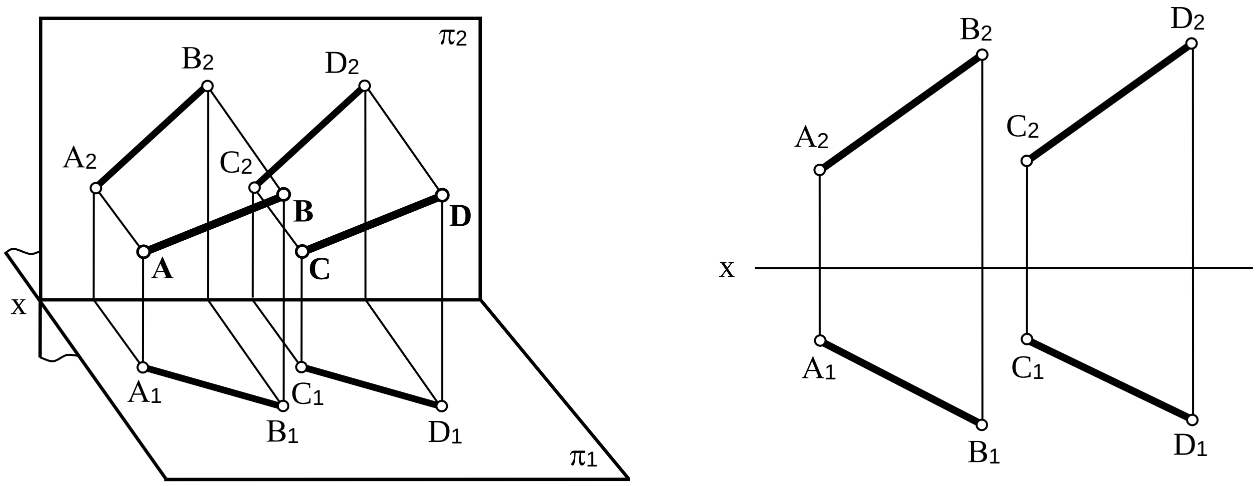


Рис. 47. Параллельные прямые

2. *Пересекающиеся прямые*

Две прямые, имеющие общую точку, называются ***пересекающимися***.

Если прямые линии пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой в точке, которая является проекцией их общей точки (*К*) *пересечения* (рис. 48). *Причем проекции точки пересечения* (K_1 и K_2) *лежат на одном перпендикуляре* (*линии связи*) *к оси проекций.* Это справедливо всегда по отношению к прямым общего положения.

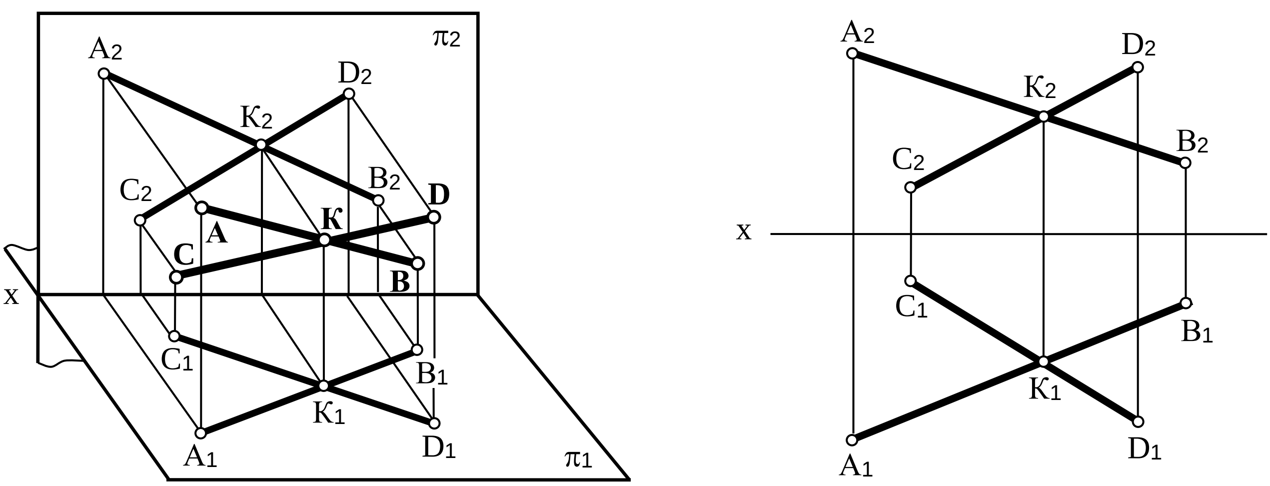


Рис. 48. Пересекающиеся прямые

3. Скрещивающиеся прямые

Скрещивающимися называются две прямые, не лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки.

Скрещивающиеся прямые линии не пересекаются и не параллельны между собой. Точки пересечения одноименных проекций прямых не располагаются на одном перпендикуляре (линии связи) к оси проекций.

На рис. 49 изображены две скрещивающиеся прямые общего положения. Точка пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых представляет собой проекции двух точек, из которых одна принадлежит первой, а другая второй из этих скрещивающихся прямых.

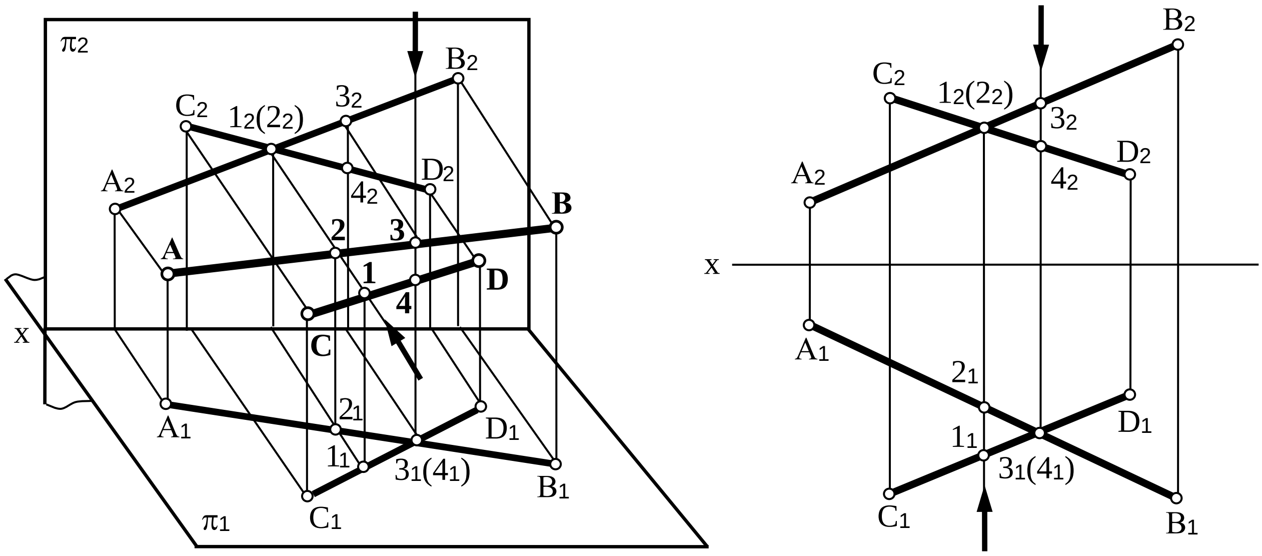


Рис. 49. Скрещивающиеся прямые

Точки, принадлежащие скрещивающимся прямым и проецирующиеся на одну из плоскостей в одну общую, а на другую – в две разные точки, называются *конкурирующими* (например, точки *1* и *2*, *3* и *4* на рис. 49).

Видимость элементов в местах пересечения одноименных проекций определяется с помощью ***метода конкурирующих точек***.

Например, (•) *1* ∈ *CD*, а (•) *2* ∈ *AB*. Эти точки (*1* и *2*) одинаково удалены от π_1, но расстояния этих точек от π_2 различны: (•) *1* дальше от π_2, чем (•) *2*. По направлению стрелки (взгляда наблюдателя спереди на плоскость π_2) первой на эпюре встречается проекция 1_1, которая закрывает собой 2_1, т.е. (•) *1* расположена дальше от оси *Ox*, чем (•) *2*, а значит, (•) *1* – видима и на фронтальном виде прямая *CD* перекрывает прямую *AB*.

Далее, (•) *3* ∈ *AB*, а (•) *4* ∈ *CD*. Эти точки (*3* и *4*) одинаково удалены от π_2, но расстояния этих точек от π_1 различны: (•) *3* дальше от π_1, чем (•) *4*. По направлению стрелки (взгляда наблюдателя сверху на плоскость π_1) первой на эпюре встречается проекция 3_2, которая закрывает собой 4_2, т.е. (•) *3* расположена дальше от оси *Ox*, чем (•) *4*, а значит, (•) *3* – видима и на виде сверху прямая *AB* перекрывает прямую *CD*.

Из двух конкурирующих точек видимой будет та, которая имеет большую координату и поэтому отстоит дальше от плоскости проекций.

Обозначения проекций "*закрытых*" точек помещены в скобках.

2.8. Проецирование прямого угла

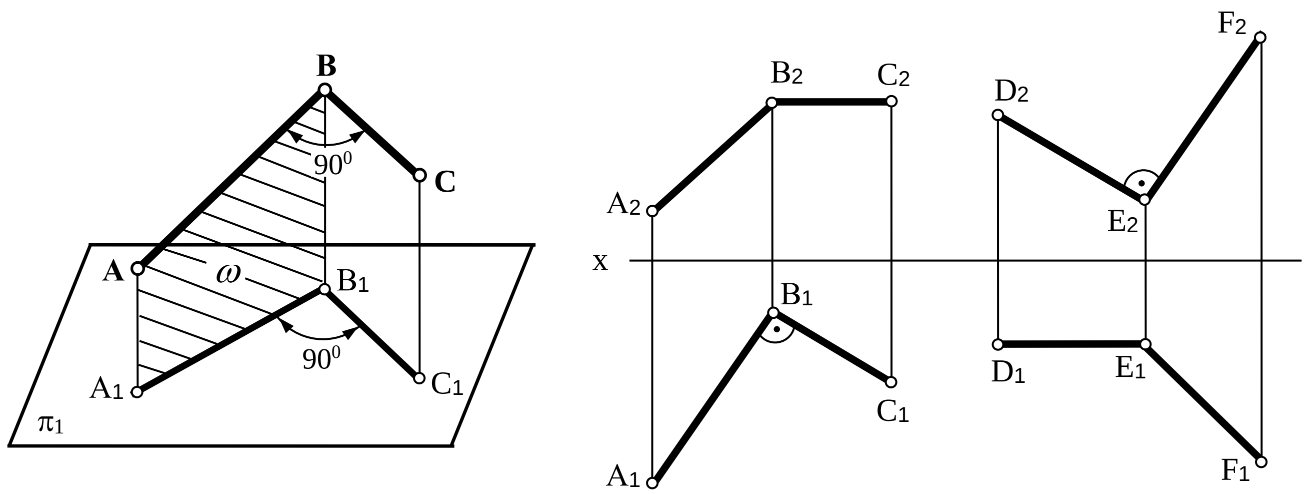
Плоские углы образованы двумя пересекающимися прямыми.

1.) *Если плоскость, в которой расположен некоторый угол, перпендикулярна к плоскости проекций, то угол проецируется на эту плоскость проекций в виде прямой линии.*

2.) *Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее в виде прямого же угла.*

Рассмотрим проецирование прямого угла ABC (рис. 50, а), сторона BC которого параллельна плоскости проекций π_1 ($BC \parallel \pi_1$). Спроецируем его на эту плоскость. Тогда сторона AB и проецирующая прямая BB_1 образуют горизонтально-проецирующую плоскость ω, причем $BC \perp \omega$. Так как $BC \parallel \pi_1$, то $BC \parallel B_1C_1$. Следовательно, $B_1C_1 \perp \omega$. Отсюда $BC \perp A_1B_1$ или $\angle ABC = 90^0$.

Из этого следует, что углы ($\angle ABC$ со стороной $BC \parallel \pi_1$ и $\angle DEF$ со стороной $DE \parallel \pi_2$), изображенные на рис. 50, б, в пространстве прямые углы. В первом случае в свою натуральную (или истинную) величину он проецируется на горизонтальную плоскость проекций, во втором – на фронтальную плоскость проекций.



а) б)

Рис. 50. Проецирование прямого угла

Вопросы для самоконтроля к теме 2

1. Как определяется положение в пространстве прямой линии?
2. Как построить чертеж прямой линии?
3. Как может быть расположена прямая относительно плоскостей проекций?
4. Какие прямые называются прямыми общего положения? Как располагаются ее проекции относительно осей координат?
5. Какие прямые называются прямыми частного положения? Назовите их. Как такие прямые располагаются относительно осей координат?
6. Что называется следом прямой линии на плоскости проекций?
7. Сколько следов в системе трех плоскостей проекций имеет прямая общего положения?
8. Сформулируйте общий принцип построения горизонтального и фронтального следов прямой линии?
9. Как построить профильный след прямой линии?
10. Какие прямые имеют в системе трех плоскостей проекций один след? Назвать, какой.
11. Какие прямые имеют в системе трех плоскостей проекций два следа? Назвать, какие.
12. Как определить, через какие четверти (или октанты) пространства проходит прямая?
13. Расположение в каком октанте прямой линии делает ее видимой?
14. В чем заключается метод прямоугольного треугольника? Как определяют углы наклона прямой к плоскостям проекций?
15. Как осуществить деление отрезка в заданном отношении на ортогональном чертеже?
16. Назовите признак принадлежности точки прямой линии?
17. Сколько проекций дают представление о принадлежности точки прямой?
18. Как могут взаимно располагаться две прямые в пространстве?
19. Какие прямые называются параллельными?
20. Можно ли по чертежу двух профильных прямых в системе двух плоскостей проекций определить, параллельны ли между собой эти прямые?
21. Какие прямые называются пересекающимися?
22. Какие прямые называются скрещивающимися?
23. Каким методом определяется видимость точек на чертеже?
24. В каком случае прямой угол проецируется на одну из плоскостей проекций в прямую линию?
25. В каком случае прямой угол проецируется на одну из плоскостей проекций в натуральную величину?

Лекция 3

Тема 3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

3.1. Способы задания плоскостей

Положение плоскости в пространстве определяется следующими геометрическими элементами (рис. 51):

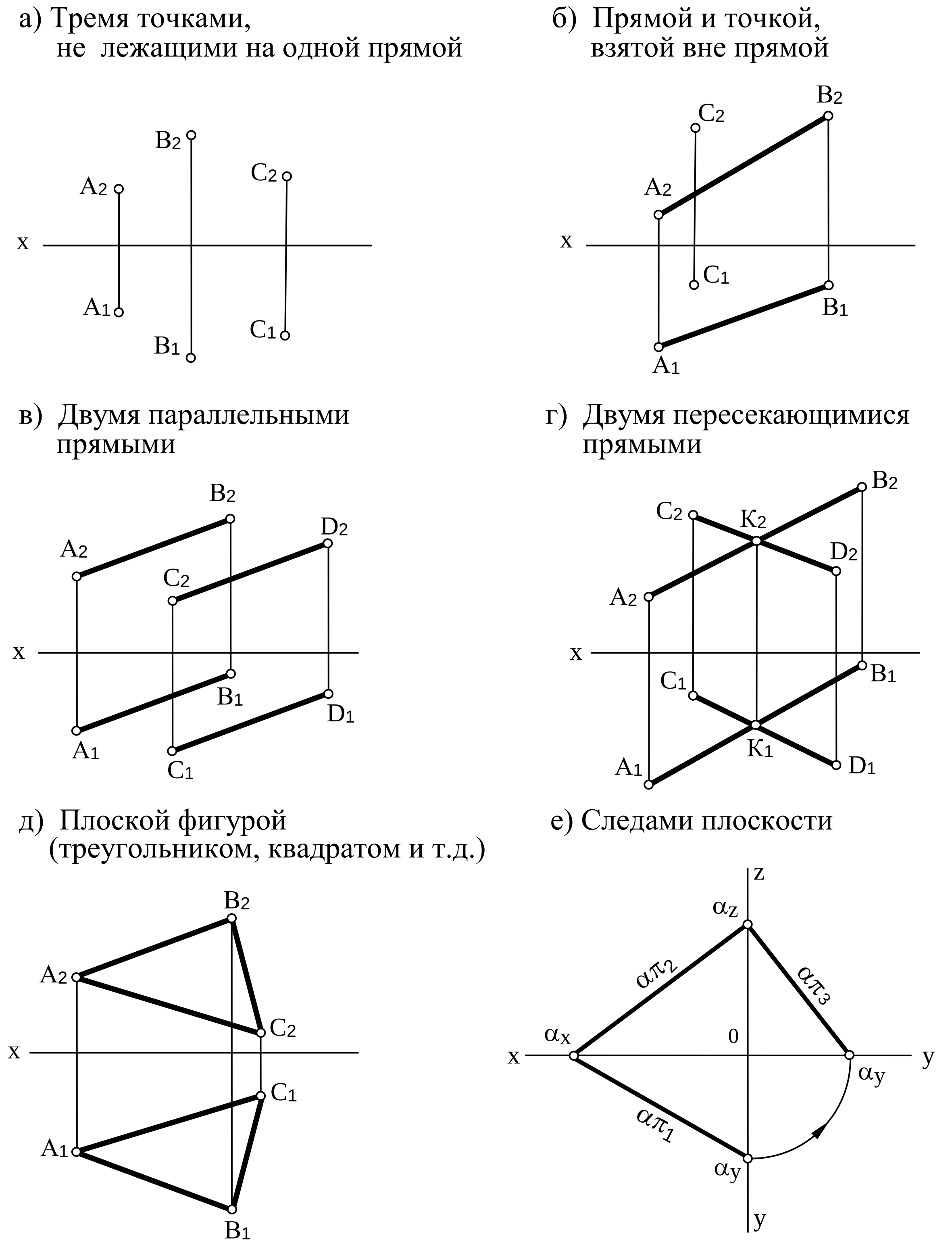


Рис. 51. Способы задания плоскостей

3.2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

В зависимости от расположения относительно плоскостей проекций различают плоскости *общего* и *частного* положения.

3.2.1. Плоскость общего положения

Плоскостью общего положения называется плоскость, не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций (рис. 51, 52).

Следы плоскости — это линии, по которым некоторая плоскость α пересекается с плоскостями проекций.

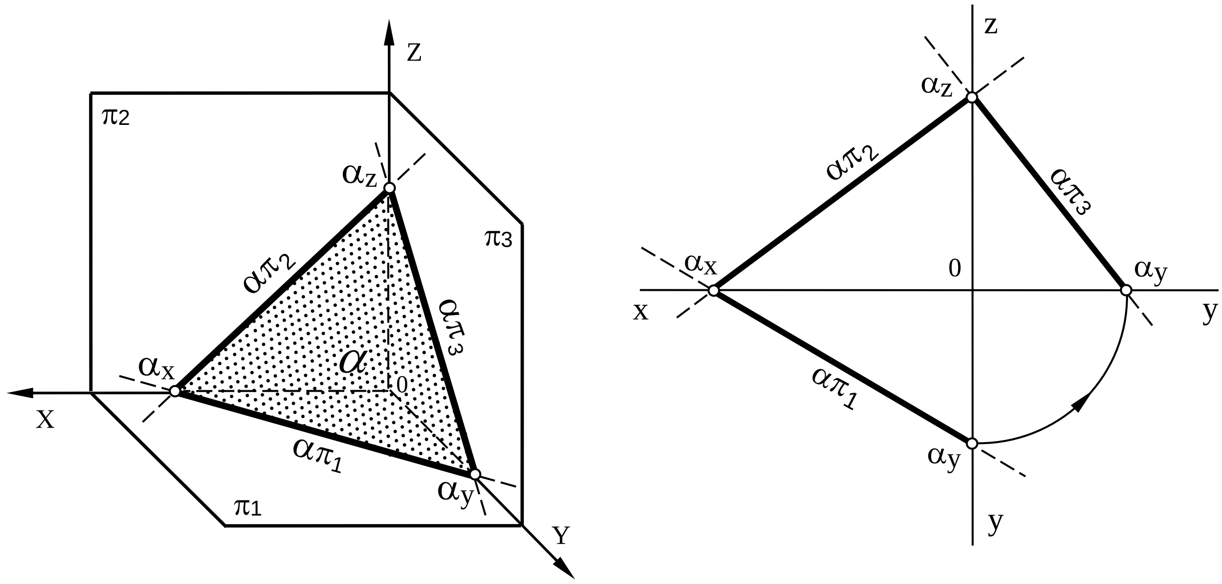
Плоскость общего положения в системе трех плоскостей проекций имеет три следа (рис. 52, а):

– $\alpha\pi_1$ – горизонтальный след плоскости α;

– $\alpha\pi_2$ – фронтальный след плоскости α;

– $\alpha\pi_3$ – профильный след плоскости α.

На рис. 52 приведены наглядное изображение (рис. 52, а) и эпюр (рис. 52, б) плоскости α.



а) б)

Рис. 52. Плоскость общего положения

Следы плоскостей пересекаются попарно между собой на осях, в точках, называемых ***точками схода следов*** (α_x, α_y, α_z).

Плоскости в пространстве не ограничены. При изображении следов плоскости отмечается их видимость. Видимой будет только та часть следов, которая расположена в I октанте.

Каждый из следов плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие оказываются лежащими на осях.

3.2.2. ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

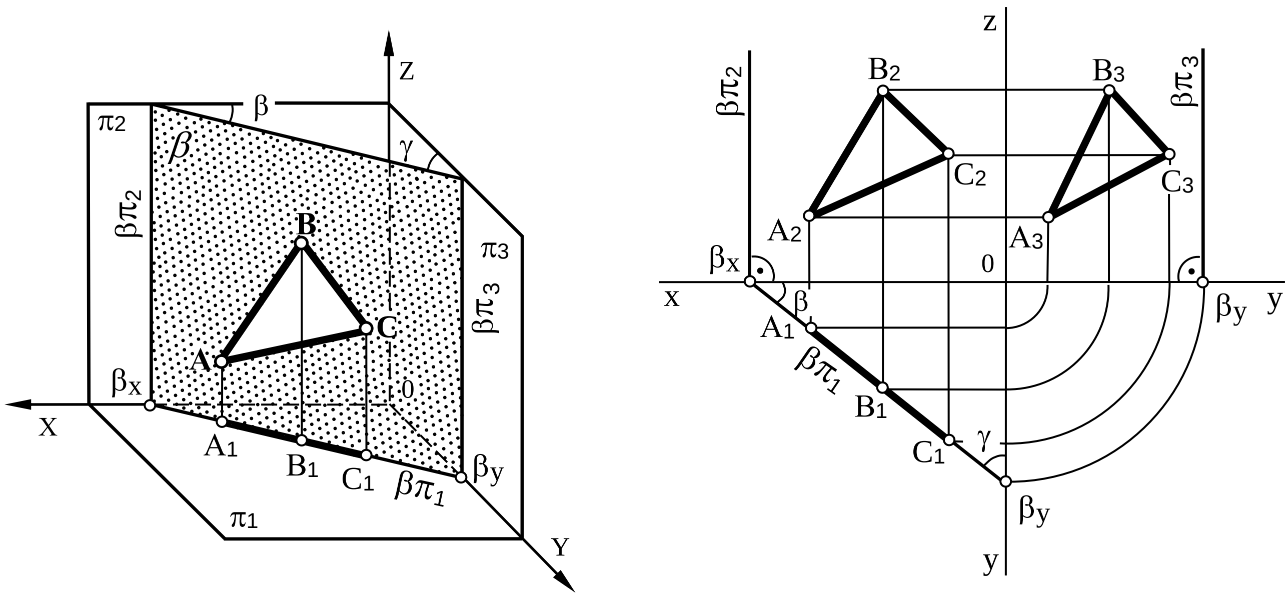
Плоскости *частного* положения – это плоскости, перпендикулярные одной (*проецирующие*) или двум (*дважды проецирующие*) плоскостям проекций.

1. Проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная лишь одной из плоскостей проекций.

А. Горизонтально-проецирующая $(\perp\pi_1)$.

Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (π_1), называется ***горизонтально-проецирующей*** (рис. 53).

На рис. 53 горизонтально-проецирующая плоскость задана проекциями треугольника *ABC* и следами плоскости β.



а) б)

Рис. 53. Горизонтально-проецирующая плоскость

Горизонтальная проекция $\triangle ABC$ представляет собой отрезок прямой, а β и γ – углы наклона к π_2 и π_3 соответственно, проецируются без искажения.

Фронтальный след плоскости $\beta\pi_2 \perp \pi_1$ (и к оси *Ox*), профильный след $\beta\pi_3 \perp \pi_1$ (и к оси *Oy*). Горизонтальный след такой плоскости обладает *собирательным свойством,* т.е. горизонтальные проекции всех точек, принадлежащих плоскости β, находятся на ее горизонтальном следе $\beta\pi_1$.

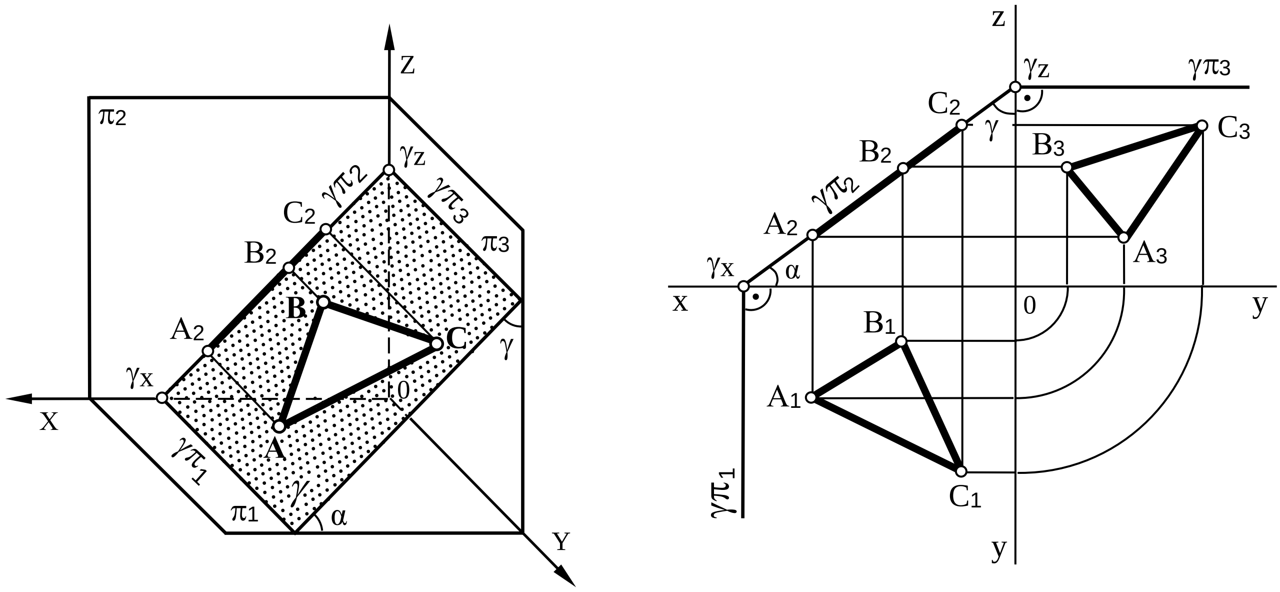
Собирательное свойство наклонного следа проецирующей плоскости: *Если объект проецирования лежит в проецирующей плоскости, то соответствующие ему проекции будут лежать на наклонном следе проецирующей плоскости.*

Б. Фронтально-проецирующая $(\perp\pi_2)$.

Плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (π_2), называется ***фронтально-проецирующей*** (рис. 54).

На рис. 54 фронтально-проецирующая плоскость задана $\triangle ABC$ и следами плоскости γ. Фронтальная проекция $\triangle ABC$ представляет собой отрезок прямой линии, а α и γ – углы наклона плоскости γ к π_1 и π_3

соответственно. След $\gamma\pi_1 \perp \pi_2$ (и к оси Ox), $\gamma\pi_3 \perp \pi_2$ (и к оси Oz). Фронтальный след $\gamma\pi_2$ такой плоскости обладает *собирательным свойством*.



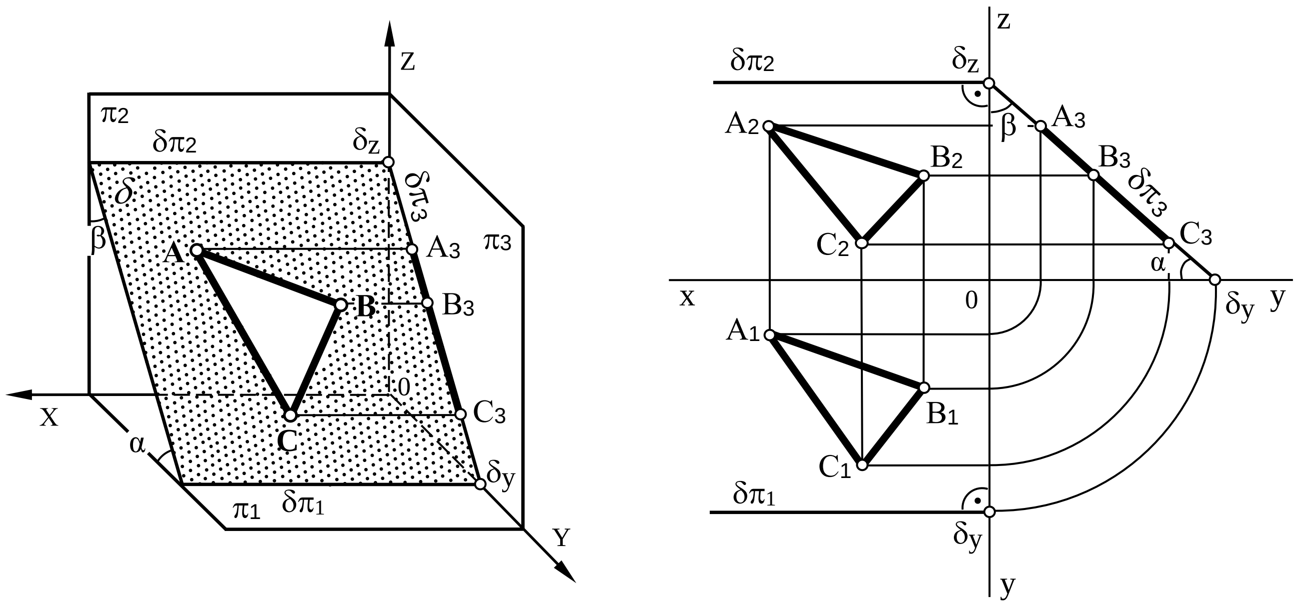
а) б)

Рис. 54. Фронтально-проецирующая плоскость

В. Профильно-проецирующая ($\perp\pi_3$).

Плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций (π_3), называется ***профильно-проецирующей*** (рис. 55).

На рис. 55 профильно-проецирующая плоскость задана $\triangle ABC$ и следами плоскости δ. Профильная проекция $\triangle ABC$ представляет собой отрезок прямой линии, а α и β – углы наклона плоскости δ к π_1 и π_2 соответственно. След $\delta\pi_1 \perp \pi_3$ (и к оси Oy), $\delta\pi_2 \perp \pi_3$ (и к оси Oz). Профильный след $\delta\pi_3$ такой плоскости обладает *собирательным свойством.*



а) б)

Рис. 55. Профильно-проецирующая плоскость

2. Дважды проецирующей (или ***плоскостью уровня***) называется плоскость перпендикулярная двум плоскостям проекций.

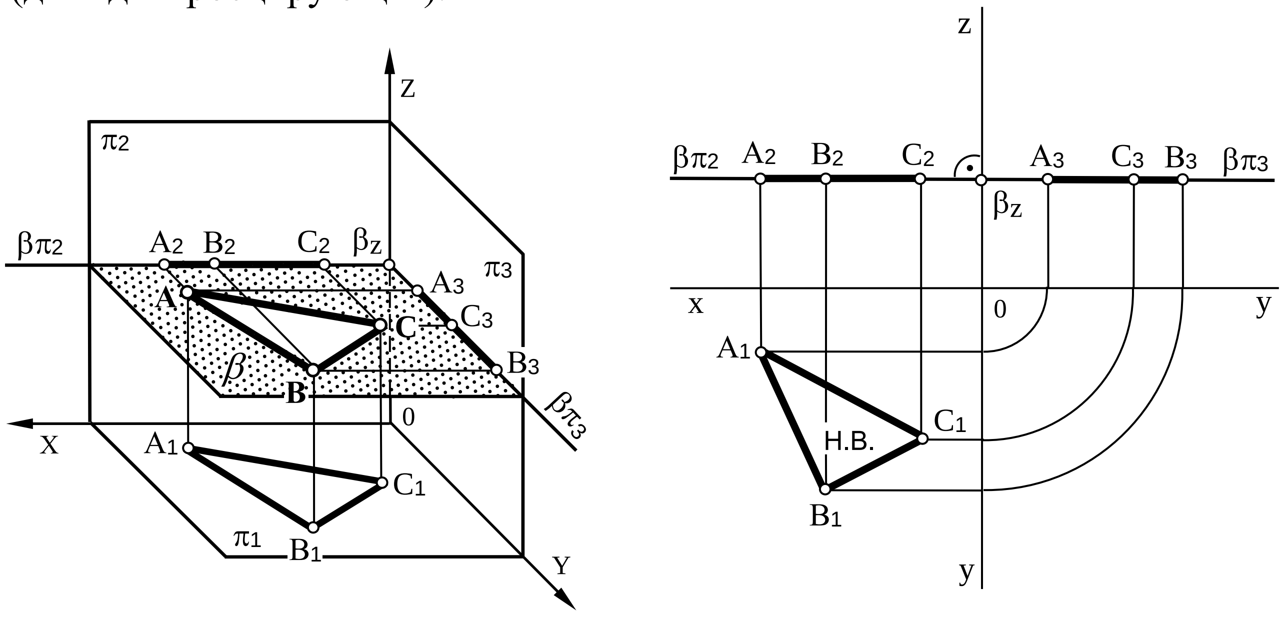
А. Горизонтальная ($|| \pi_1, \perp \pi_2, \pi_3$).

Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций (π_1) и перпендикулярная фронтальной (π_2) и профильной (π_3), называется ***горизонтальной плоскостью уровня*** (рис. 56).

На рис. 56 горизонтальная плоскость задана проекциями треугольника *ABC* и следами плоскости β.

Плоскость $\triangle ABC$ проецируется на π_1 без искажения, а на π_2 и π_3 – в виде прямых, совпадающих с одноименными следами.

Горизонтальная плоскость уровня β не имеет горизонтального следа ($\beta\pi_1$), так как параллельна плоскости π_1. Фронтальный ($\beta\pi_2$) и профильный ($\beta\pi_3$) следы параллельны осям *Ox* и *Oy* соответственно и обладают *собирательным свойством,* так как эта плоскость проецирующая к π_2 и π_3 (дважды проецирующая).



а) б)

Рис. 56. Горизонтальная плоскость

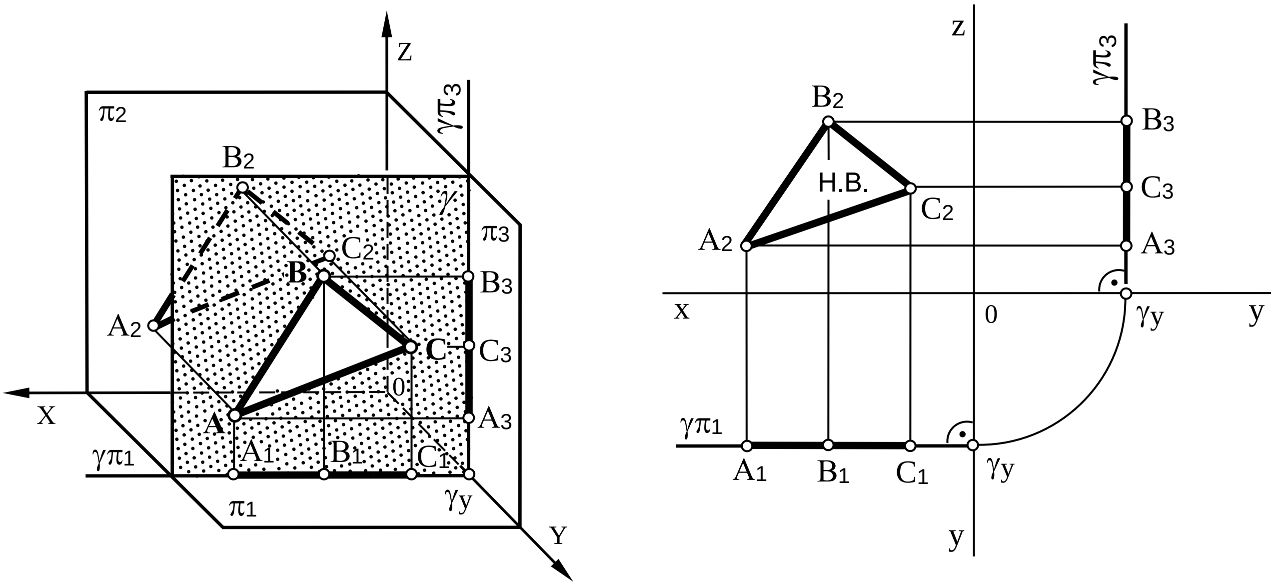
Б. Фронтальная ($|| \pi_2, \perp \pi_1, \pi_3$).

Плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций (π_2) и перпендикулярная горизонтальной (π_1) и профильной (π_3), называется ***фронтальной плоскостью уровня*** (рис. 57).

На рис. 57 фронтальная плоскость задана проекциями треугольника *ABC* и следами плоскости γ.

Плоскость $\triangle ABC$ проецируется на π_2 без искажения, а на π_1 и π_3 – в виде прямых, совпадающих с одноименными следами.

Фронтальная плоскость уровня γ не имеет фронтального следа ($\gamma\pi_2$), так как параллельна плоскости π_2. Горизонтальный ($\gamma\pi_1$) и профильный ($\gamma\pi_3$) следы параллельны осям *Ox* и *Oz* соответственно и обладают *собирательным свойством,* так как эта плоскость проецирующая к π_1 и π_3 (дважды проецирующая).



а) б)

Рис. 57. Фронтальная плоскость

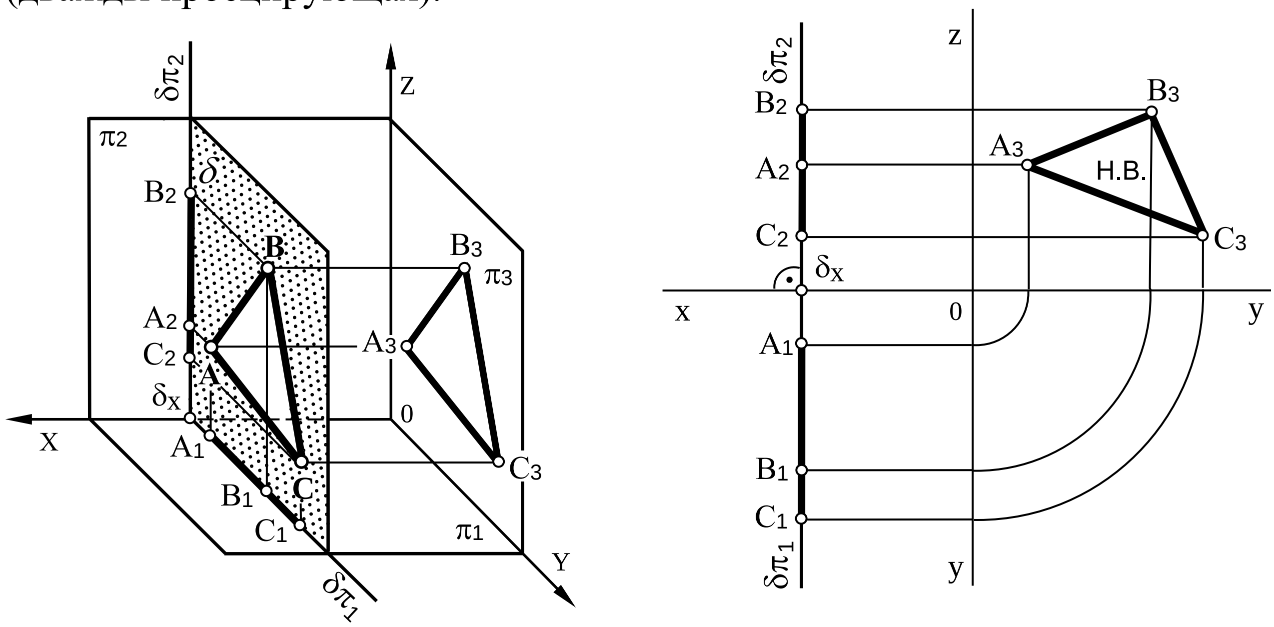
В. Профильная ($|| \pi_3, \perp \pi_1, \pi_2$).

Плоскость, параллельная профильной плоскости проекций (π_3) и перпендикулярная горизонтальной (π_1) и фронтальной (π_2), называется ***профильной плоскостью уровня*** (рис. 58).

На рис. 58 профильная плоскость задана проекциями треугольника ABC и следами плоскости δ.

Плоскость $\triangle ABC$ проецируется на π_3 без искажения, а на π_1 и π_2 – в виде прямых, совпадающих с одноименными следами.

Профильная плоскость уровня δ не имеет профильного следа ($\delta\pi_3$), так как параллельна плоскости π_3. Горизонтальный ($\delta\pi_1$) и фронтальный ($\delta\pi_2$) следы параллельны осям Oy и Oz соответственно и обладают *собирательным свойством,* так как эта плоскость проецирующая к π_1 и π_2 (дважды проецирующая).



а) б)

Рис. 58. Профильная плоскость

3.3. Прямая и точка в плоскости

3.3.1. Прямая общего положения в плоскости общего положения

На рис. 59 изображены плоскость общего положения α, заданная следами, и лежащая в ней прямая общего положения *MN*.

Прямая *MN* вместе с плоскостью α пересекает плоскости проекций π_1 и π_2. Точки пересечения прямой с плоскостями проекций – это следы прямой *M* и *N*, а линии пересечения плоскости α с плоскостями проекций – это следы плоскости $\alpha\pi_1$, $\alpha\pi_2$ и $\alpha\pi_3$. Следовательно, *если прямая принадлежит плоскости, ее следы лежат на одноименных следах плоскости*. Спроецировав точки *M* и *N* и соединив их одноименные проекции, получаем чертеж прямой общего положения, лежащей в плоскости общего положения (рис. 59, б).

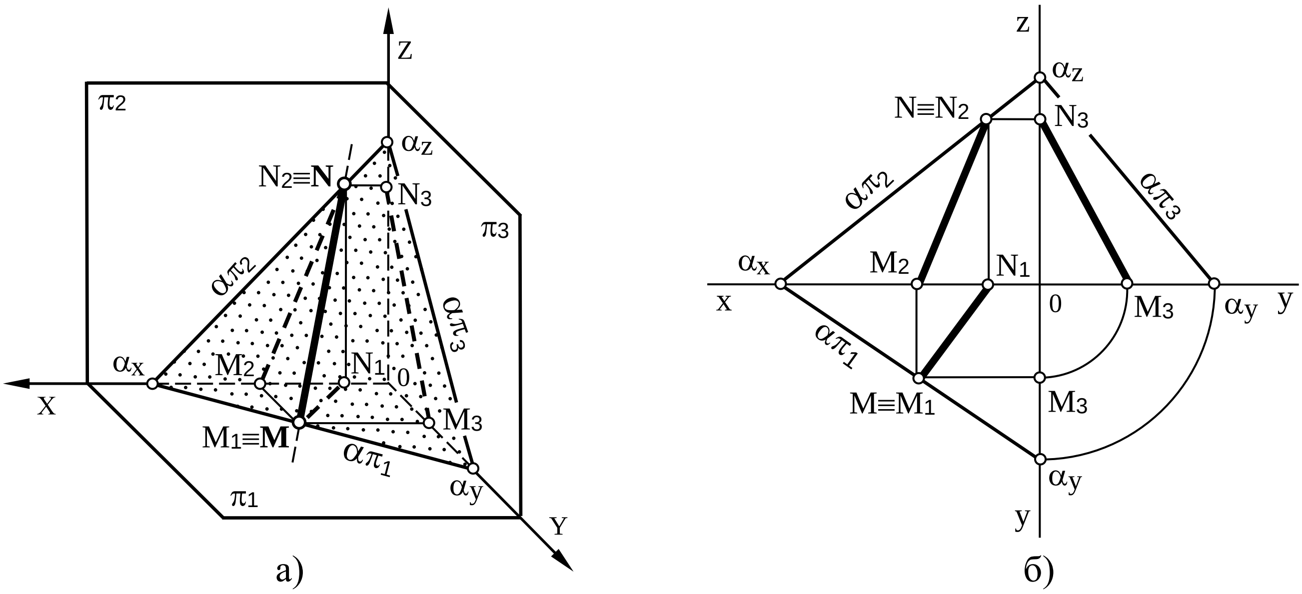


Рис. 59. Прямая общего положения плоскости α

3.3.2. Прямые особого положения в плоскости общего положения

К прямым особого положения относятся *горизонтали*, *фронтали*, *профильные* прямые, а также *линии наибольшего наклона* плоскости.

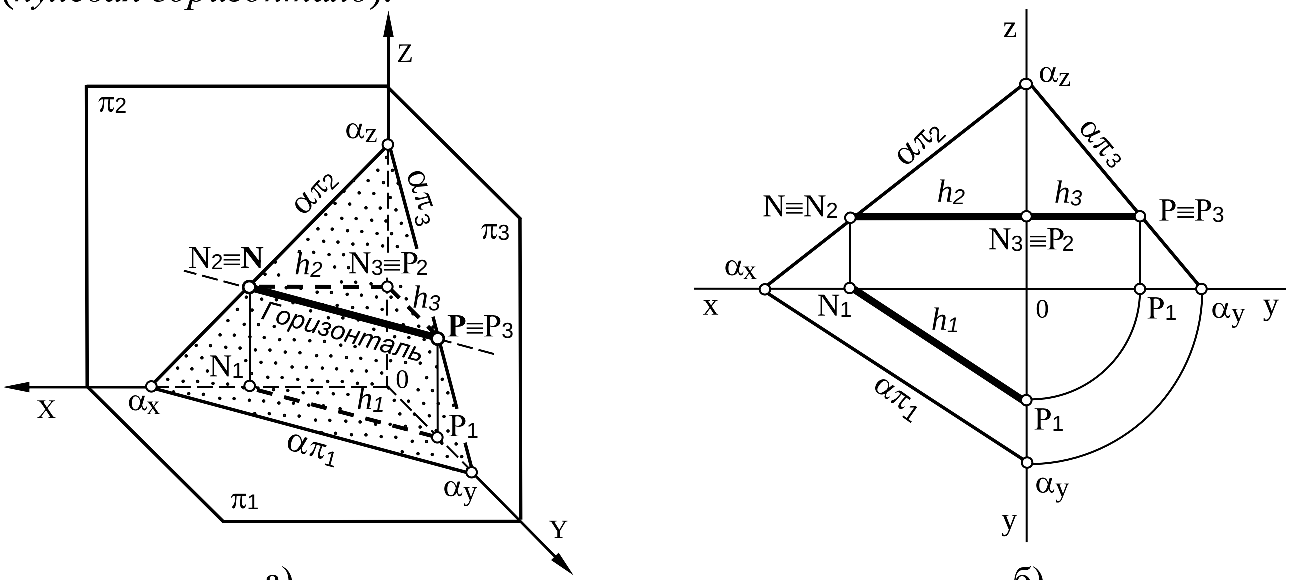
1. Горизонталь плоскости

Прямая, лежащая в плоскости α и параллельная горизонтальной плоскости проекций (π_1), называется ***горизонталью плоскости*** α.

В пространстве I четверти возьмем плоскость α и построим в ней горизонталь *NP* (рис. 60).

Горизонталь имеет фронтальный след *N* и профильный след *P*, которые лежат на одноименных следах плоскости. Так как прямая *NP* параллельна плоскости π_1, горизонтального следа у нее нет, фронтальная N_2P_2 и профильная N_3P_3 ее проекции параллельны осям *Ox* и *Oy* соответственно. Горизонтальная проекция горизонтали (h_1) *NP* всегда параллельна горизонтальному следу плоскости, которой она принадлежит.

Горизонтальный след плоскости ($\alpha\pi_1$) есть одна из горизонталей (*нулевая горизонталь*).



а) б)

Рис. 60. Горизонталь плоскости α

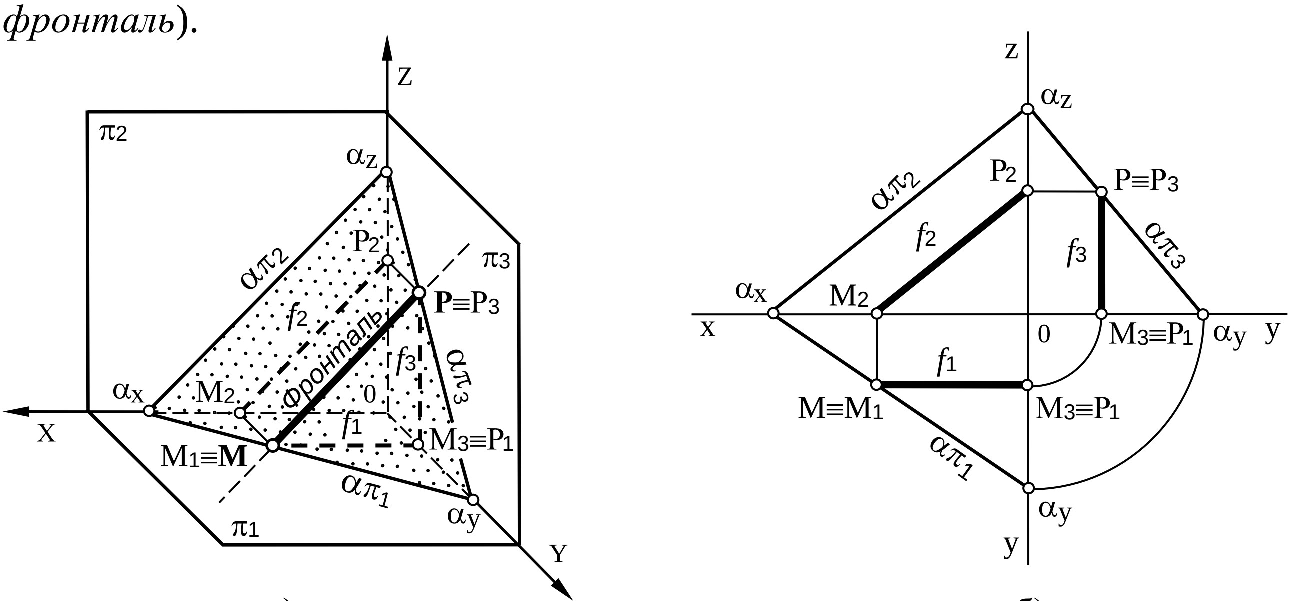
2. *Фронталь плоскости*

Прямая, лежащая в плоскости α и параллельная фронтальной плоскости проекций (π_2), называется ***фронталью плоскости*** α.

В пространстве I четверти возьмем плоскость α и построим в ней фронталь *MP* (рис. 61).

Фронталь имеет горизонтальный след *M* и профильный след *P*, которые лежат на одноименных следах плоскости. Так как прямая *MP* параллельна плоскости π_2, фронтального следа у нее нет, горизонтальная M_1P_1 и профильная M_3P_3 ее проекции параллельны осям *Ox* и *Oz* соответственно. Фронтальная проекция фронтали (f_2) *MP* всегда параллельна фронтальному следу плоскости, которой она принадлежит.

Фронтальный след плоскости ($\alpha\pi_2$) есть одна из фронталей (*нулевая фронталь*).



а) б)

Рис. 61. Фронталь плоскости α

3.3.3. ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА ПЛОСКОСТИ (*ЛИНИЯ СКАТА*)

Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям π_1, π_2, π_3 называются прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные соответственно горизонталям, фронталям или профильным прямым плоскости. Линии наибольшего наклона (ЛНН) плоскости перпендикулярны к ее следам.

Пример 3.1. Плоскость общего положения α задана следами. Построить линию наибольшего наклона плоскости к π_1 и определить угол α (рис. 62).

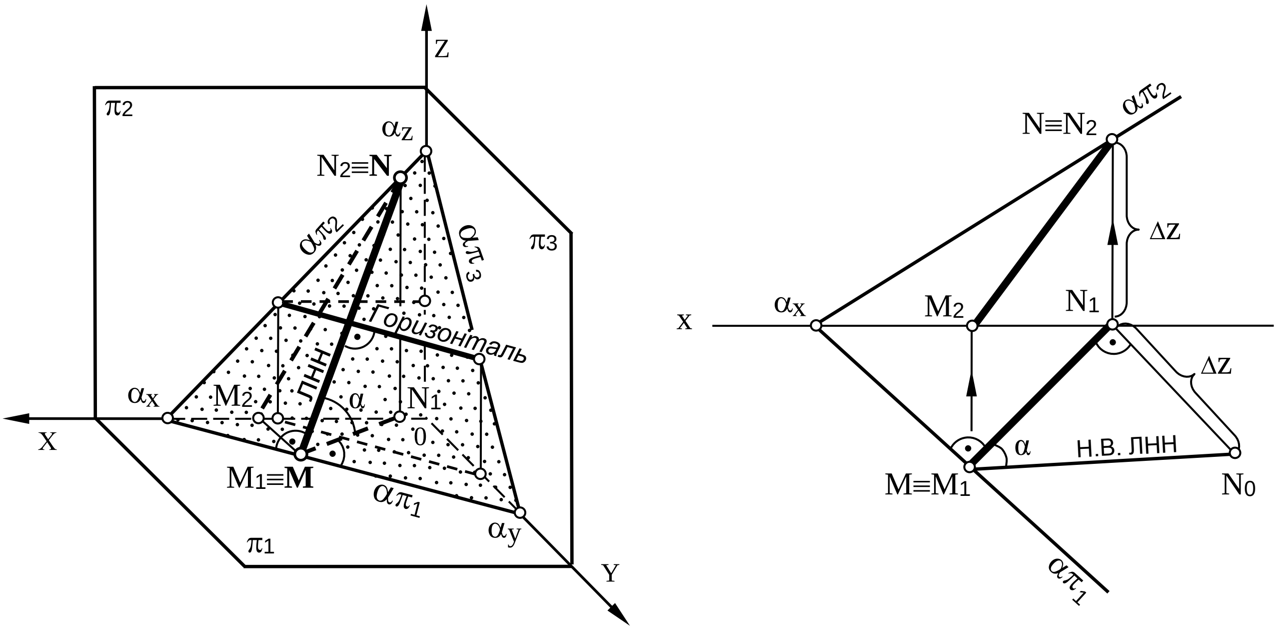


Рис. 62. Линия наибольшего наклона плоскости α

Прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная к ее горизонталям, называется ***линией ската*** плоскости.

Согласно правилам проецирования прямого угла (§ 2.8), горизонтальная проекция линии ската плоскости перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали (h_1) этой плоскости или к ее горизонтальному следу. Фронтальная проекция линии ската строится после горизонтальной и находится обычным проецированием.

Проведем линию MN перпендикулярно к горизонтальному следу ($\alpha\pi_1$) плоскости (рис. 62, а), т.е. построим $M_1N_1 \perp \alpha\pi_1$, затем по вертикальным линиям связи найдем M_2N_2.

Так как MN является прямой общего положения, воспользуемся методом прямоугольного треугольника и определим натуральную величину этой линии наибольшего наклона (Н.В. ЛНН). Гипотенуза MN_0 будет натуральной (истинной) величиной MN, а острый угол $N_1M_1N_0$ (между натуральной величиной прямой MN и ее горизонтальной проекцией (M_1N_1) – есть истинная величина угла наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций (π_1) – $\angle\, \alpha$.

Построение проекций линии наибольшего наклона плоскости, заданной не следами, и определение угла наклона ее к горизонтальной плоскости проекций π_1 (π_2 или π_3) сводится к предварительному построению соответственно горизонтали (фронтали или профильной прямой).

Пример 3.2. Плоскость общего положения задана $\triangle ABC$. Построить линию наибольшего наклона плоскости к π_1 и определить угол α (рис. 63).

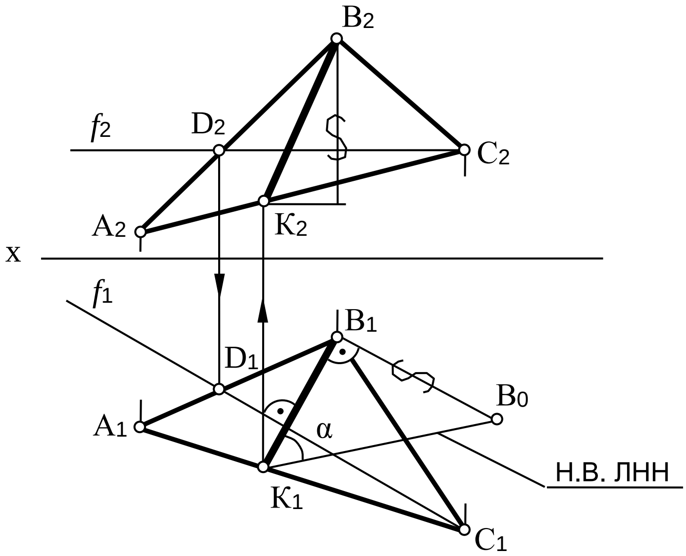


Рис. 63. Линия наибольшего наклона $\triangle ABC$

Линия наибольшего наклона (ЛНН) плоскости $\triangle ABC$ к плоскости π_1 – это прямая, принадлежащая $\triangle ABC$ и перпендикулярная горизонтали этой плоскости. Согласно правилу проецирования прямого угла, если одна из сторон такого угла параллельна какой-либо плоскости, то на эту плоскость угол проецируется в свою натуральную величину, т.е. 90^0. Одна из сторон нашего угла – это горизонталь, следовательно, на горизонтальную плоскость проекций (π_1) этот прямой угол спроецируется без искажения. Таким образом, горизонтальная проекция линии наибольшего наклона плоскости $\triangle ABC$ к π_1 будет перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали (h_1) данной плоскости.

Проводим горизонталь в плоскости $\triangle ABC$ (прямую CD), а затем любую прямую, например BK (рис. 63), принадлежащую данной плоскости и перпендикулярную этой горизонтали. Ее горизонтальная проекция B_1K_1 перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали (h_1) плоскости $\triangle ABC$. Фронтальная проекция этой прямой – это B_2K_2.

Определяем угол наклона прямой BK к плоскости π_1. При помощи метода прямоугольного треугольника определяем натуральную величину (Н.В.) линии наибольшего наклона (BK) и искомый угол α.

Пример 3.3. Плоскость общего положения β задана следами. Построить линию наибольшего наклона плоскости к π_2 (рис. 64).

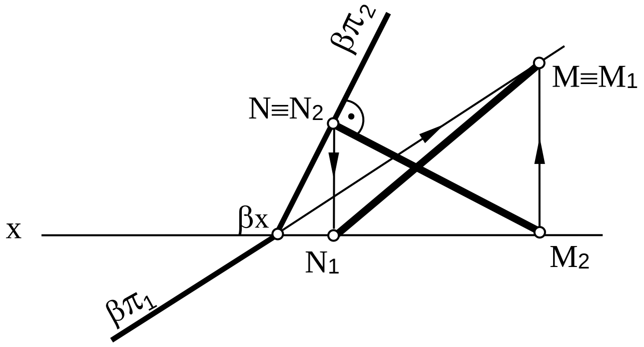


Рис. 64. Построение ЛНН (плоскость β)

Проводим фронтальную проекцию линии наибольшего наклона плоскости (M_2N_2) перпендикулярно к фронтальному следу плоскости $\beta\pi_2$ (нулевой фронтали), тогда $N_2 \equiv N$ окажется на фронтальном следе ($\beta\pi_2$), а M_2 – на оси Ox. Затем опускаем линии связи из M_2 на продолжение горизонтального следа ($\beta\pi_1$) и получаем $M_1 \equiv M$, а из $N_2 \equiv N$ – на ось Ox и получаем N_1. Получаем горизонтальную проекцию линии (M_1N_1).

Пример 3.4. Плоскость общего положения задана плоскостью $\triangle ABC$. Построить линию наибольшего наклона плоскости к π_2 (рис. 65).

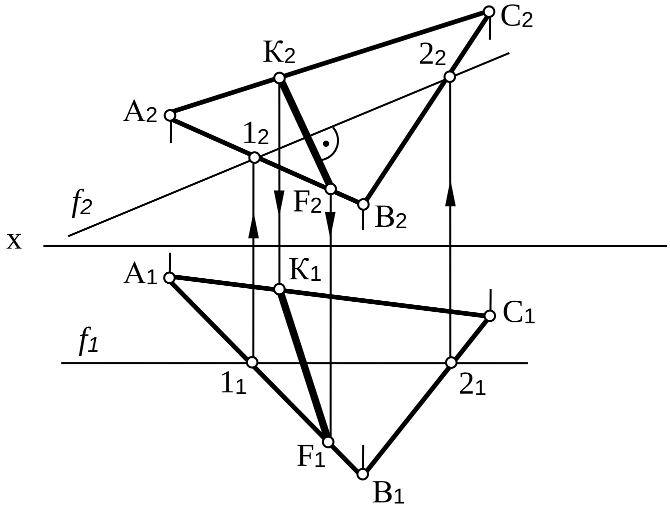


Рис. 65. Построение ЛНН ($\triangle ABC$)

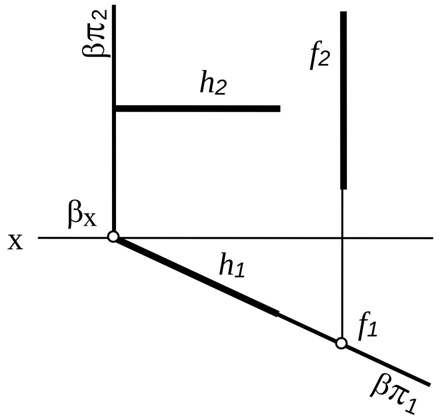
Строим фронталь в плоскости $\triangle ABC$ (прямую 1-2), т.е. параллельно оси Ox проводим горизонтальную проекцию фронтали 1_12_1 (f_1), по линиям связи достраиваем фронтальную проекцию фронтали (f_2) – 1_22_2. Затем проводим прямую FK, принадлежащую данной плоскости и перпендикулярную фронтали – линию наибольшего наклона плоскости к π_2. Ее фронтальная проекция F_2K_2 перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали (f_2) плоскости $\triangle ABC$. Горизонтальная проекция этой прямой – это линия F_1K_1.

3.3.4. *Линии особого положения в проецирующих плоскостях*

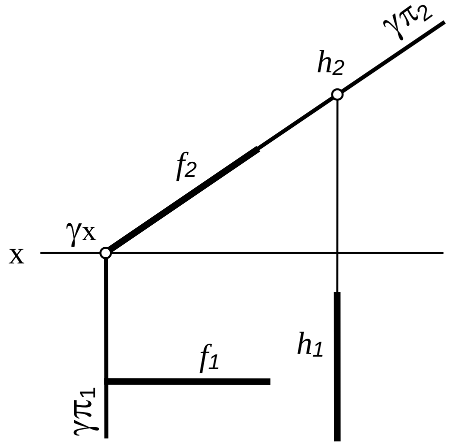
На рис. 66, а показано построение горизонтали и фронтали в горизонтально-проецирующей плоскости β, заданной следами.

На рис. 66, б показано построение горизонтали и фронтали во фронтально-проецирующей плоскости γ, заданной следами.

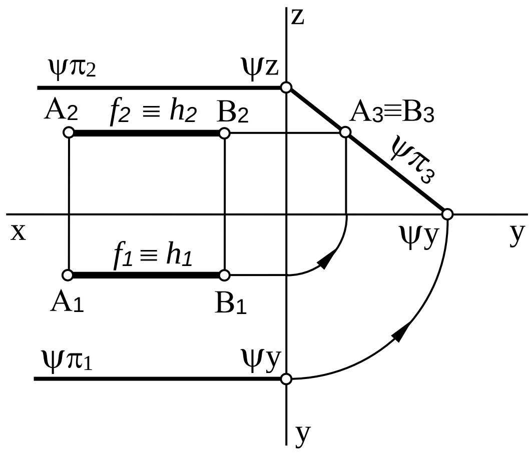
На рис. 66, в представлен чертеж горизонтали и фронтали в профильно-проецирующей плоскости ψ, заданной следами.



а)



б)



в)

Рис. 66. Горизонталь и фронталь в проецирующих плоскостях

Так как наклонный след проецирующей плоскости обладает собирательным свойством, то горизонтальная проекция горизонтали (h_1) в горизонтально-проецирующей плоскости β (рис. 66, а) совпадает с горизонтальным следом $\beta\pi_1$, а фронтальная проекция фронтали (f_2) во фронтально-проецирующей плоскости γ (рис. 66, б) – с фронтальным следом $\gamma\pi_2$. Профильная проекция горизонтали (она же фронталь) *AB*, лежащей в профильно-проецирующей плоскости ψ (рис. 66, в), проецируется (вырождается) в точку.

3.3.5. *Принадлежность точки и прямой плоскости*

Построение прямой линии, лежащей в плоскости, основано на двух положениях (из элементарной геометрии). Прямая принадлежит плоскости, если:

1. *она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости*;
2. *она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости, или параллельной ей.*

① ***Пример 3.5.*** Плоскость задана двумя параллельными прямыми. Используя *1-е положение*, провести прямую, принадлежащую данной плоскости (рис. 67).

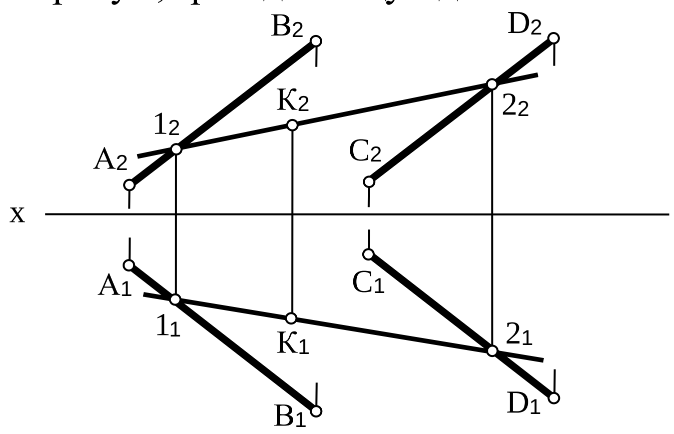


Рис. 67. Точка и прямая в плоскости

На прямых *AB* и *CD* возьмем произвольные точки *1* (1_1, 1_2) и *2* (2_1, 2_2) и проведем через них прямую *1-2* (1_12_1, 1_22_2). Эта прямая будет принадлежать плоскости, так как имеет с ней две общие точки.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

Таким образом, (•) *K* лежит в данной плоскости, так как она лежит на прямой, принадлежащей этой плоскости ($K_1 \in 1_12_1$, $K_2 \in 1_22_2$).

Пример 3.6. Пусть плоскость β задана следами. Используя *1-е положение*, провести прямую, принадлежащую данной плоскости (рис. 68).

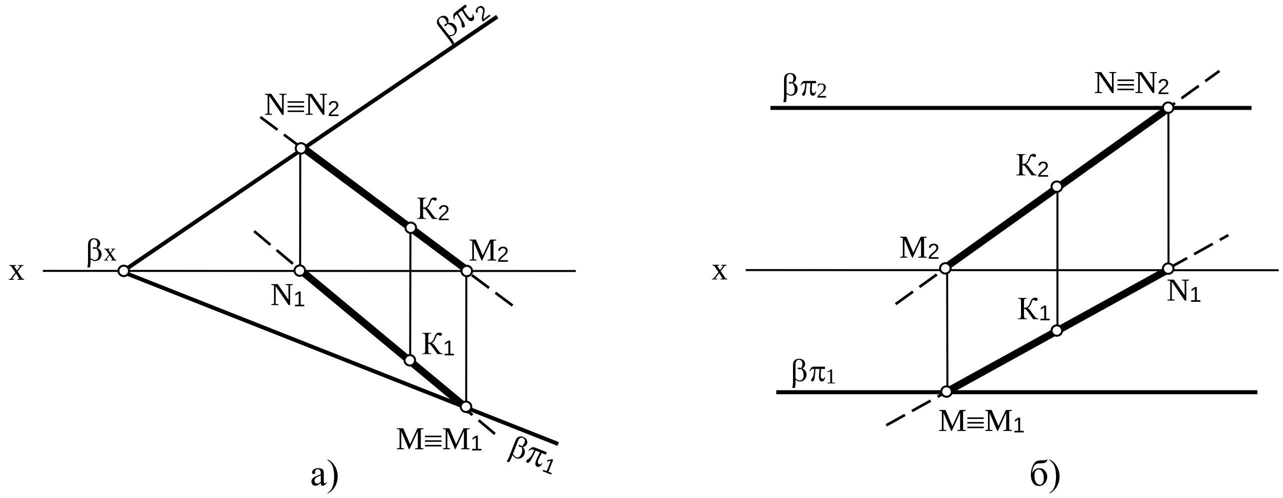


Рис. 68. Точка и прямая в плоскости (Прямая общего положения)

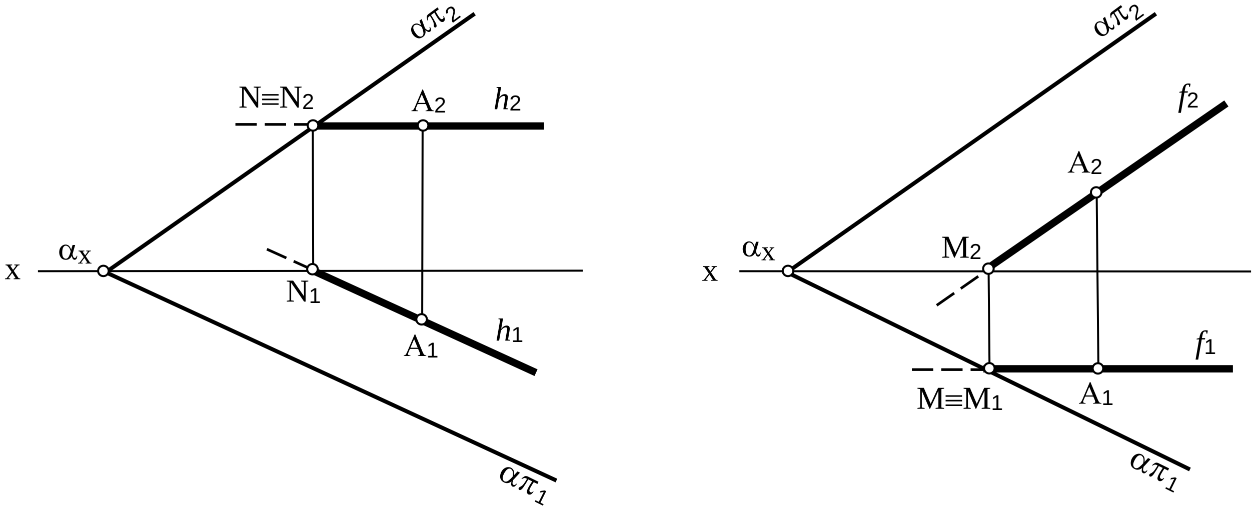
На рис. 68, а следами задана плоскость β общего положения, а на рис. 68, б – профильная плоскость β.

Берем точку M (M_1, M_2) на горизонтальном следе ($\beta\pi_1$) плоскости β (рис. 68, а или б) и точку N (N_1, N_2) на фронтальном следе ($\beta\pi_2$). Соединив одноименные проекции точек, получим прямую MN (M_1N_1, M_2N_2), лежащую в плоскости β.

Таким образом, MN проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости. *Когда плоскость задана следами, то прямая принадлежит плоскости, если следы прямой находятся на одноименных следах плоскости*.

(•) K лежит в данной плоскости, так как она лежит на прямой, принадлежащей этой плоскости ($K_1 \in M_1N_1$, $K_2 \in M_2N_2$).

② ***Пример 3.7.*** Пусть плоскость α задана следами. Используя *2-е положение*, провести прямую, принадлежащую данной плоскости (рис. 69).



а) Горизонталь б) Фронталь

Рис. 69. Точка и прямая в плоскости

Возьмем точку N (N_1, N_2) на фронтальном следе ($\alpha\pi_2$) и проведем через нее прямую (рис. 69, а), параллельную горизонтальному следу ($\alpha\pi_1$) плоскости α (след представляет собой некоторую прямую).

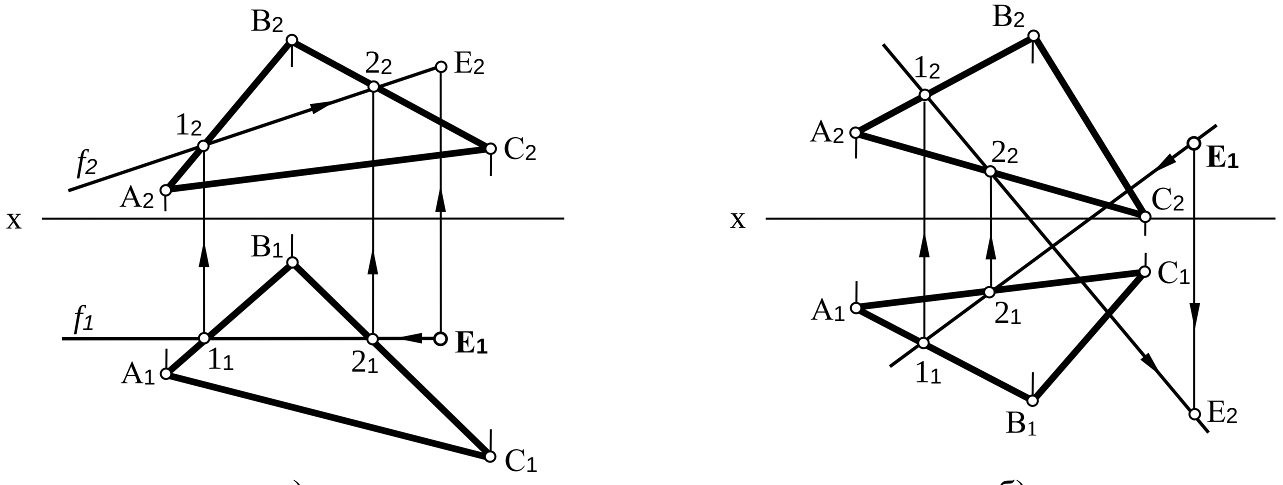
Аналогично поступаем с точкой M (M_1, M_2), которую берем на горизонтальном следе ($\alpha\pi_1$) и проводим через нее прямую (рис. 69, б), параллельную фронтальному следу ($\alpha\pi_2$).

Таким образом, прямая проведена через точку (принадлежащую данной плоскости) параллельно другой прямой (принадлежащей плоскости).

Прямая принадлежит плоскости, если она параллельна одному из следов этой плоскости и имеет с другим следом общую точку (рис. 69).

(•) A лежит в данной плоскости α, так как она лежит на прямой, принадлежащей этой плоскости.

Пример 3.8. Плоскость общего положения задана $\triangle ABC$. По заданной горизонтальной проекции ($\boldsymbol{E_1}$) точки E, принадлежащей этой плоскости, найти фронтальную проекцию (E_2) при помощи *фронтали* (рис. 70, а) и *прямой общего положения* (рис. 70, б).



а) б)

Рис. 70. Контрольная работа № 2 (Точка E)

Проводим через (•) E прямую *1-2*, принадлежащую плоскости (фронталь, рис. 70, а, и прямую общего положения, рис.70, б). Ее проекции должны лежать на соответствующих проекциях прямой. Через заданную горизонтальную проекцию (E_1) проводим горизонтальную проекцию прямой $1_1 2_1$, которая пересекает горизонтальные проекции сторон $\triangle ABC$. Затем по 1_1 и 2_1 находим фронтальные проекции прямой 1_2 и 2_2 и соединяем. На продолжение линии $1_2 2_2$ опускаем линию связи из E_1, это и будет искомая проекция E_2.

Пример 3.9. Плоскость общего положения задана двумя пересекающимися прямыми. По заданной фронтальной проекции ($\boldsymbol{G_2}$) точки G, принадлежащей этой плоскости, найти горизонтальную проекцию (G_1) при помощи *прямой общего положения* (рис. 71).

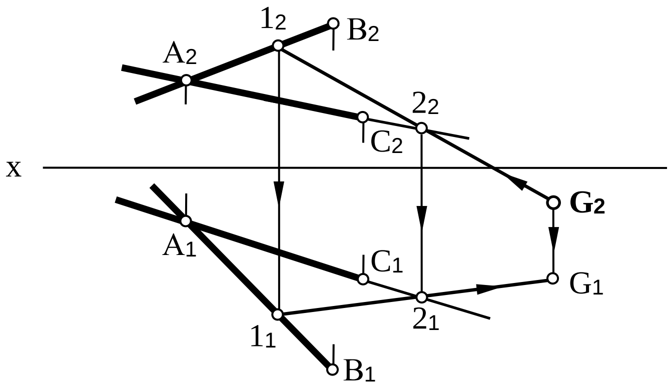


Рис. 71. Контрольная работа № 2 (Точка G)

Через (•) G проводим прямую *1-2*. Так как *1-2* лежит в плоскости, то ее проекции лежат на соответствующих проекциях прямой. Через заданную фронтальную проекцию (G_2) проводим фронтальную проекцию прямой $1_2 2_2$, пересекающую фронтальные проекции линий A_2B_2 (в 1_2) и A_2C_2 (в 2_2). По линиям связи находим горизонтальные проекции прямой 1_1 и 2_1 и соединяем. Продолжаем линию $1_1 2_1$ и опускаем на нее линию связи из G_2, определяем искомую проекцию G_1.

Пример 3.10. Плоскость общего положения δ задана следами. По заданной горизонтальной проекции (***J_1***) точки J, лежащей в этой плоскости, найти фронтальную проекцию (J_2) при помощи *прямой общего положения* (рис. 72).

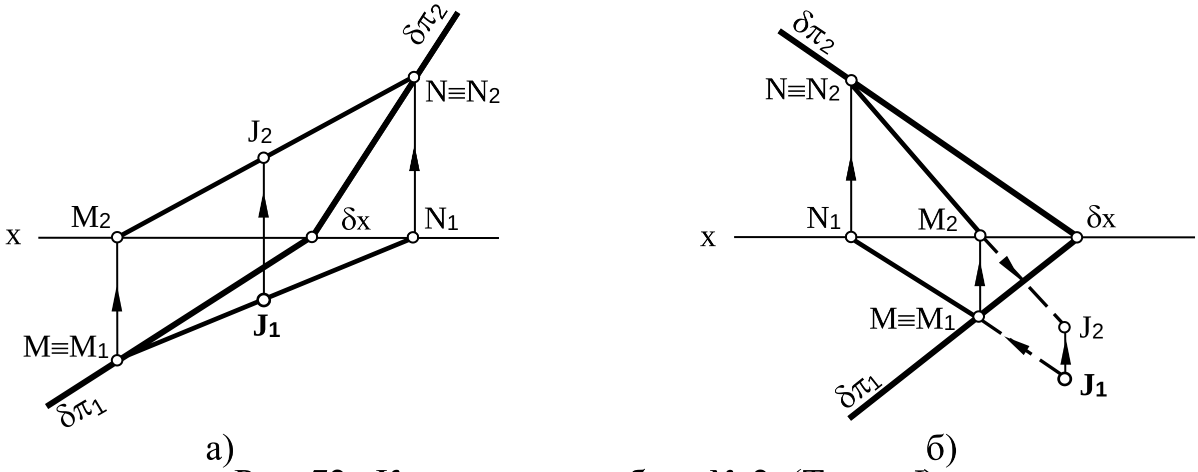


Рис. 72. Контрольная работа № 2 (Точка J)

Через (•) J проводим прямую общего положения MN, принадлежащую плоскости δ. Через заданную горизонтальную проекцию (J_1) проводим горизонтальную проекцию M_1N_1, она пересекает горизонтальный след ($\delta\pi_1$) в (•) $M_1 \equiv M$ и ось Ox в (•) N_1. Затем из N_1 поднимаем линию связи на фронтальный след ($\delta\pi_2$), где получаем $N_2 \equiv N$, а из (•) $M_1 \equiv M$ – на ось Ox, где получаем M_2. На линии M_2N_2 проецированием находим искомую проекцию J_2.

Пример 3.11. Профильно-проецирующая плоскость ψ задана следами. По заданной фронтальной проекции (***F_2***) точки F, лежащей в этой плоскости, найти горизонтальную проекцию (F_1) при помощи *прямой общего положения* (рис. 73).

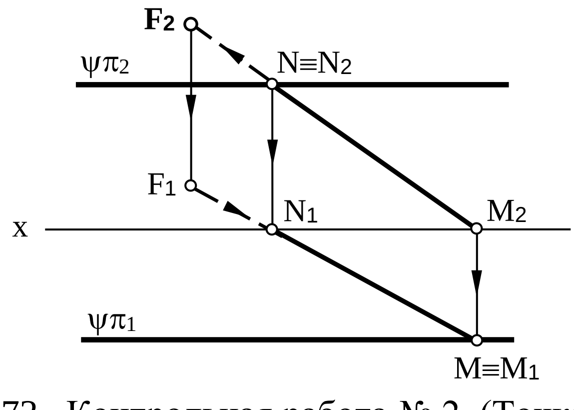
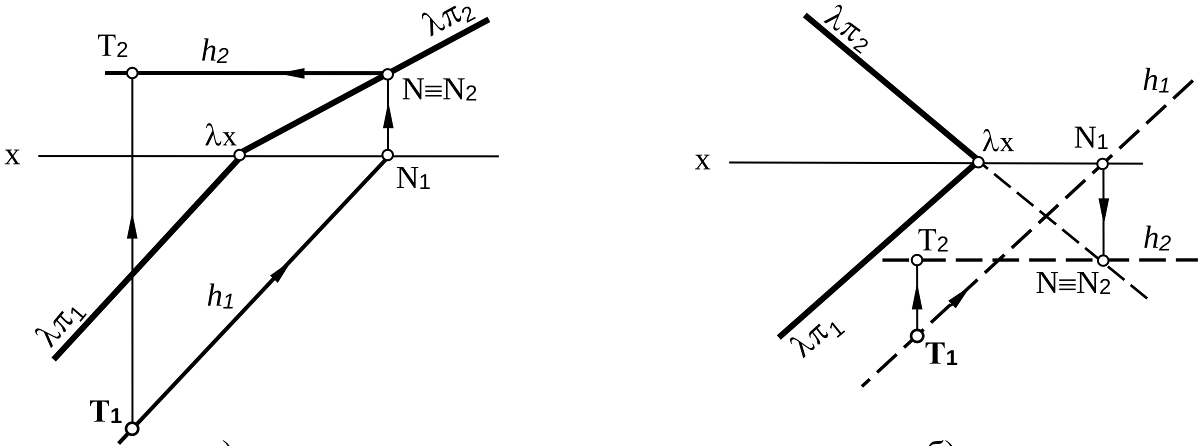


Рис. 73. Контрольная работа № 2 (Точка F)

Проводим через (•) F прямую общего положения MN, которая принадлежит плоскости ψ. Через заданную фронтальную проекцию (F_2) проводим фронтальную проекцию M_2N_2, она пересекает фронтальный след ($\psi\pi_2$) в (•) $N_2 \equiv N$ и ось Ox в (•) M_2. После этого из M_2 опускаем линию связи на горизонтальный след ($\psi\pi_1$), где получаем $M_1 \equiv M$, а из (•) $N_2 \equiv N$ – на ось Ox, где получаем N_1. Затем на линию M_1N_1 проецируем искомую проекцию F_1.

Пример 3.12. Плоскость общего положения λ задана следами. По заданной горизонтальной проекции (***T_1***) точки *T*, лежащей в этой плоскости, найти фронтальную проекцию (T_2) при помощи *горизонтали* (рис. 74).

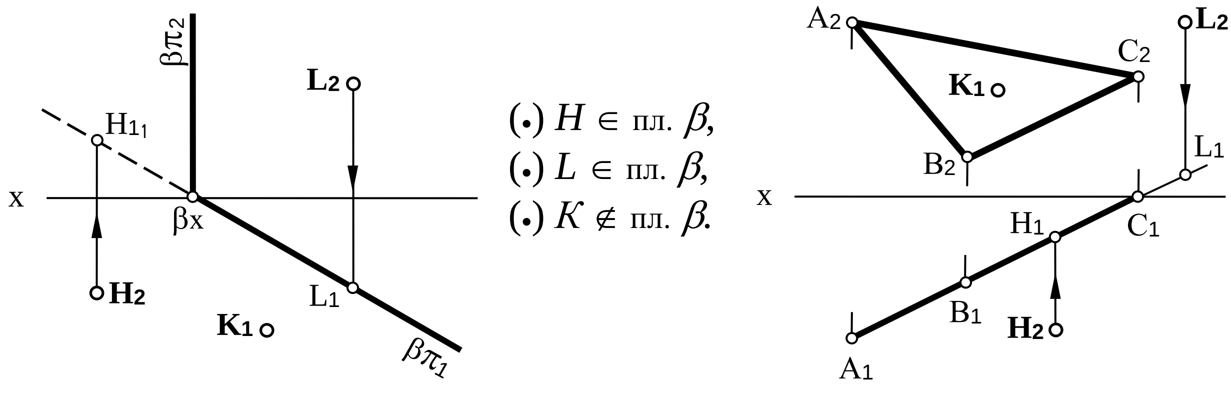


а) б)

Рис. 74. Контрольная работа № 2 (Точка *T*)

Проводим через (•) *T* горизонталь, принадлежащую плоскости λ. Через заданную горизонтальную проекцию (T_1) проводим горизонтальную проекцию горизонтали (h_1) параллельно горизонтальному следу ($\lambda\pi_1$) до пересечения с осью *Ox*, где лежит (•) N_1, из которой опускаем линию связи на фронтальный след ($\lambda\pi_2$), на нем получаем $N_2 \equiv N$. Затем проводим из N_2 фронтальную проекцию горизонтали (h_2) параллельно оси *Ox*, и из T_1 опускаем на нее линию связи, получая искомую проекцию T_2.

Пример 3.13. Заданы горизонтально-проецирующие плоскости: следами (β) (рис. 75, а) и $\triangle$ *ABC* (рис. 75, б). По заданным проекциям точек ***H_2***, ***K_1***, ***L_2*** найти недостающие проекции и определить, лежат ли точки в плоскостях.



а) б)

Рис. 75. Контрольная работа № 2 (Точки *H*, *K*, *L*)

Согласно собирательному свойству следа проецирующей плоскости, все горизонтальные проекции точек, принадлежащих плоскости β (рис. 75, а), будут лежать на ее горизонтальном следе ($\beta\pi_1$). Горизонтальные проекции H_1, L_1 лежат на $\beta\pi_1$, значит, точки *H* и *L* принадлежат плоскости β. А (•) *K* не принадлежит плоскости, иначе ее горизонтальная проекция K_1 лежала бы на $\beta\pi_1$. В случае с треугольником *ABC* поступаем аналогично.

Пример 3.14. Фронтальная плоскость ω задана следами ($\omega\pi_1$). По заданным проекциям точек $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{W_2}$, $\mathbf{J_1}$ найти недостающие проекции и определить, лежат ли точки в данной плоскости (рис. 76).

(•) $V \in$ пл. ω,
(•) $W \in$ пл. ω,
(•) $J \notin$ пл. ω.

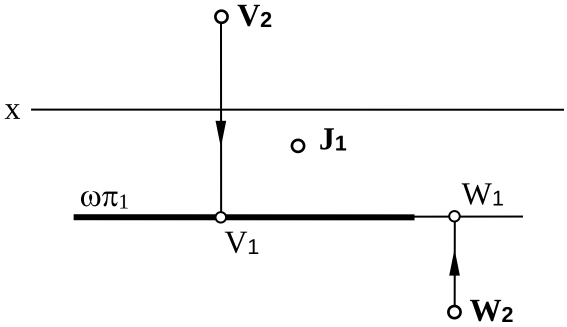


Рис. 76. Контрольная работа № 2 (Точки *V*, *W*, *J*)

Учитывая собирательное свойство следа проецирующей плоскости (а фронтальная плоскость ω дважды проецирующая), все горизонтальные проекции точек, принадлежащих плоскости ω, будут лежать на ее горизонтальном следе ($\omega\pi_1$). Горизонтальные проекции точек V и W (V_1, W_1) расположены на $\omega\pi_1$, это означает, что точки V и W принадлежат плоскости ω. Горизонтальная проекция J_1 не лежит на следе $\omega\pi_1$, что говорит о том, что плоскости ω точка (•) J не принадлежит.

Пример 3.15. Профильно-проецирующая плоскость α задана следами ($\alpha\pi_2$ и $\alpha\pi_3$). Достроить горизонтальный след ($\alpha\pi_1$) и по заданным проекциям точек $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{S_3}$ найти недостающие проекции, и определить, лежат ли точки в данной плоскости (рис. 77).

(•) $U \in$ пл.α,
(•) $R \in$ пл.α,
(•) $S \notin$ пл.α.

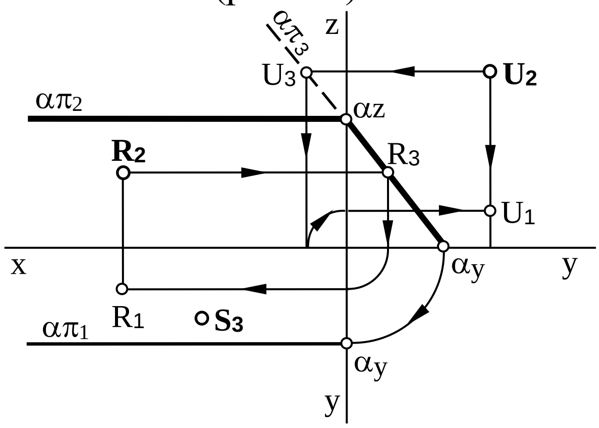


Рис. 77. Контрольная работа № 2 (Точки *U*, *R*, *S*)

Согласно собирательному свойству следа проецирующей плоскости, все профильные проекции точек, принадлежащих плоскости α, должны располагаться на ее профильном следе ($\alpha\pi_3$). Профильные проекции U_3, R_3 лежат на $\alpha\pi_3$, значит, точки U и R принадлежат плоскости α. Профильная проекция S_3 не попадает на след $\alpha\pi_3$, из этого следует, что (•) S не принадлежит заданной плоскости.

Горизонтальные проекции точек U_3, R_3 находятся по правилу проецирования точки.

Лекция 4

3.4. Взаимное положение прямой с плоскостью и двух плоскостей

3.4.1. Определение видимости геометрических элементов на эпюрах

Чтобы придать чертежу наглядность изображения, принято отделять видимые части геометрических элементов от невидимых. Видимые части чертят сплошными линиями толщиной *S*, в соответствие с ГОСТ 2.303-68, а невидимые – штриховыми толщиной от *S/3* до *S/2*.

Элементы видимости определяют при помощи двух конкурирующих точек, лежащих на одном перпендикуляре к плоскости проекций π_1 или π_2.

Конкурирующими точками называют такие точки, которые принадлежат различным геометрическим элементам и проекции которых на плоскости π_1 или π_2 совпадают, т.е. лежат на одном перпендикуляре (проецирующей прямой) к плоскости проекций (*1* и *2*, *3* и *4*, рис. 78).

При пересечении прямой с плоскостью часть этой прямой для наблюдателя невидима. Точка пересечения прямой с плоскостью служит границей видимости линии.

Вопрос о видимости линии (рис. 49) всегда можно свести к вопросу о видимости точек. При этом не только плоскость может закрывать точку, но и точка может закрывать другую точку (рис. 78, а).

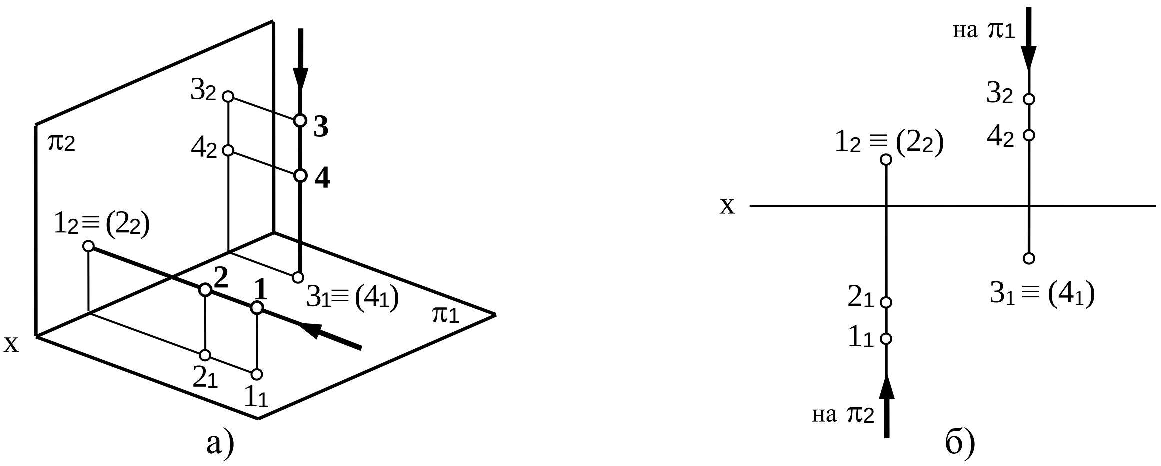


Рис. 78. Конкурирующие точки

На ортогональном чертеже видимость проекций конкурирующих точек определяется раздельно. Сначала на горизонтальной плоскости проекций видимость определяют по расположению фронтальных проекций (3_2, 4_2) конкурирующих точек, а затем на фронтальной плоскости – по расположению горизонтальных проекций ($1_1, 2_1$) конкурирующих точек.

По отношению к плоскости π_1 (рис. 78, б) видимой будет та точка, фронтальная проекция которой находится дальше от оси *Ox* и, следовательно, наиболее удалена от π_1, т.е. на плоскости π_1 видима проекция 3_1, а проекция 4_1 невидима и заключена в скобки.

По отношению к плоскости π_2 видимой будет та точка, горизонтальная проекция которой дальше от оси *Ox* и, следовательно, дальше расположена от π_2 (и ближе к наблюдателю), т.е. на плоскости π_2 видима проекция 1_2, а 2_2 невидима и заключена в скобки.

3.4.2. *Взаимное положение прямой и плоскости*

Прямая по отношению к плоскости может занимать следующие положения:
– лежать в плоскости (см. выше);
– быть параллельной плоскости;
– пересекать плоскость.

1. Прямая, параллельная плоскости

Прямая параллельна плоскости, когда она параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 79).

Отсюда, чтобы через данную точку A провести прямую (рис. 79, а), параллельную плоскости β, необходимо сначала в этой плоскости взять произвольную прямую (MN), а затем через заданную точку A провести прямую параллельно прямой MN.

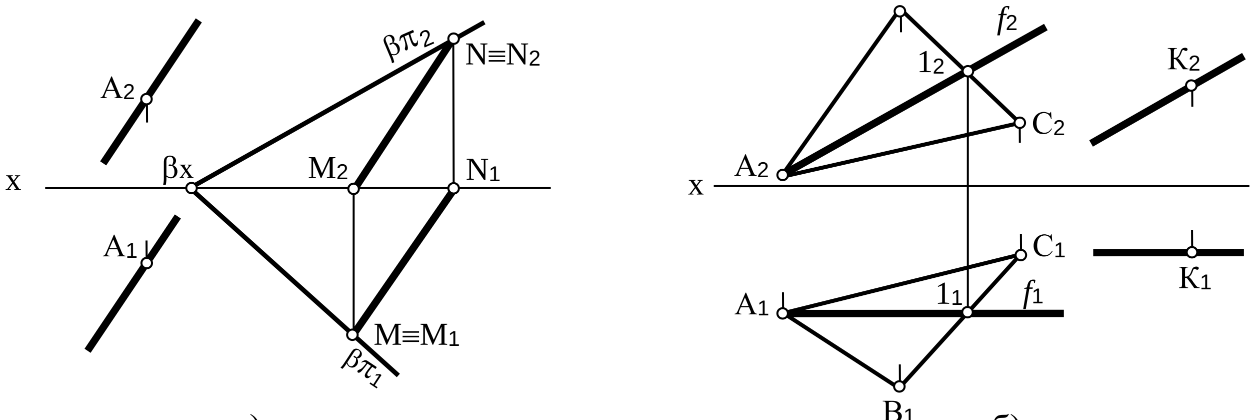


Рис. 79. Прямая, параллельная плоскости

2. Пересечение прямой линии с плоскостью

Если прямая не лежит в плоскости и не параллельна ей, то она пересекает плоскость и имеет с ней одну общую точку.

При нахождении точки K пересечения прямой с проецирующей плоскостью используют собирательное свойство следа этой плоскости (рис. 80).

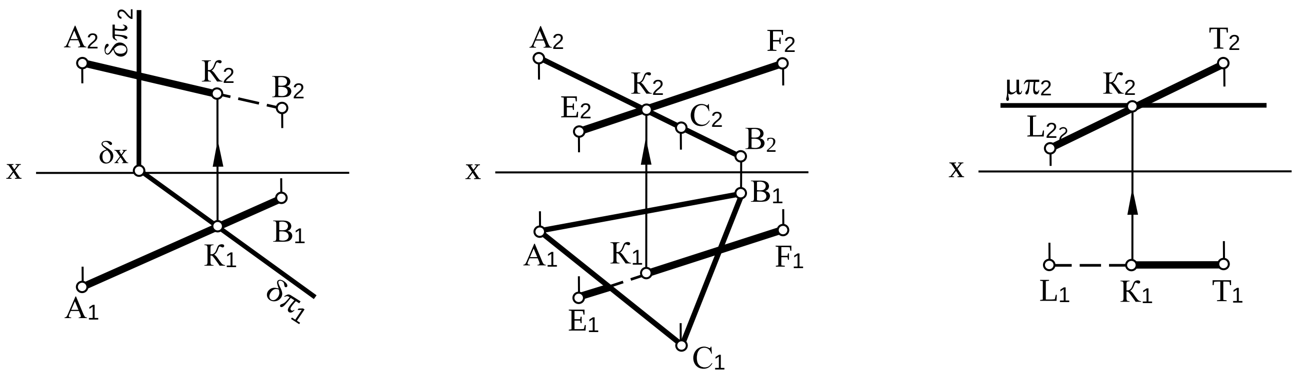


Рис. 80. Прямая, пересекающая проецирующую плоскость

На рис. 80, а представлено пересечение прямой AB с горизонтально-проецирующей плоскостью δ, заданной следами, на рис. 80, б – пересечение прямой EF с фронтально-проецирующей плоскостью $\triangle ABC$, на рис. 80, в – прямой LT с горизонтальной плоскостью μ .

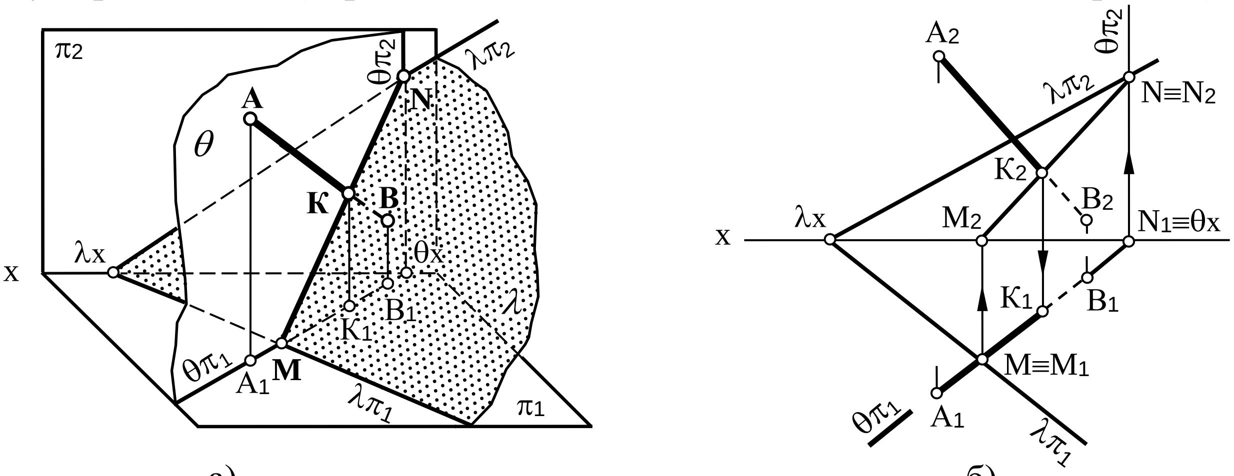
Решение задачи построения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения состоит в следующем:

1.) Через данную прямую провести вспомогательную плоскость (как правило, – проецирующую).

2.) Определить линию, по которой пересекаются между собой плоскости.

3.) Определить искомую точку на пересечении заданной прямой с построенной линией пересечения плоскостей.

Пример 3.16. Плоскость общего положения λ задана следами. Найти точку пересечения (*K*) прямой *AB* общего положения с плоскостью λ (рис. 81).



а) б)

Рис. 81. Прямая, пересекающая плоскость λ

Заключаем прямую *AB* во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость θ, горизонтальный след ($\theta\pi_1$) которой обладает собирательным свойством и поэтому на нем лежит горизонтальная проекция A_1B_1. Фронтальный след плоскости $\theta\pi_2$ перпендикулярен оси *Ox*. Определяем линию пересечения (*MN*) плоскостей λ и θ. Фронтальную проекцию точки пересечения (K_2) прямой *AB* с плоскостью λ находим на пересечении фронтальной проекции линии пересечения плоскостей (M_2N_2) с фронтальной проекцией прямой (A_2B_2). Горизонтальную проекцию (K_1) находим проецированием на A_1B_1.

Пример 3.17. Плоскость общего положения задана плоскостью $\triangle ABC$. Найти точку пересечения прямой общего положения *DE* с $\triangle ABC$ (рис. 82).

(•) $1 \in AB$,
(•) $2 \in BC$,
(•) $3 \in DE$,
(•) $4 \in DE$,
(•) $5 \in AC$.

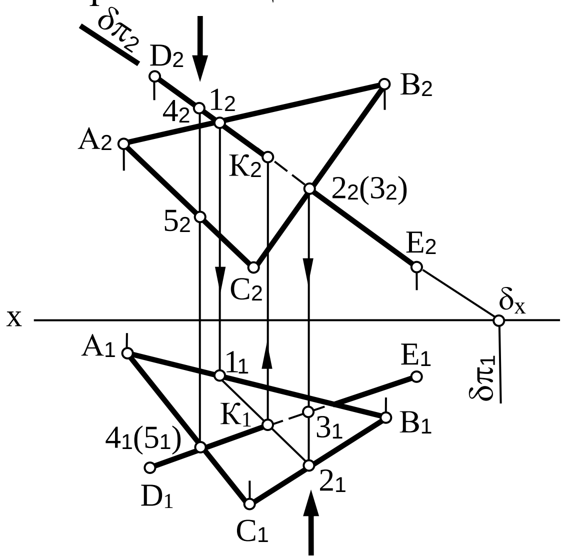


Рис. 82. Прямая, пересекающая плоскость $\triangle ABC$

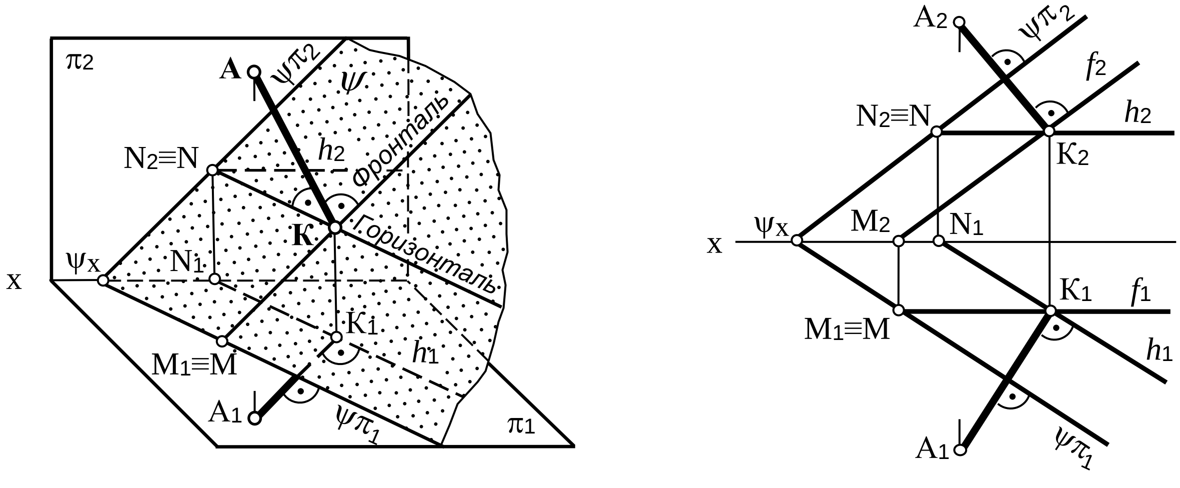
Заключаем DE во фронтально-проецирующую плоскость δ, она пересекает плоскость треугольника по прямой линии 1-2, фронтальная проекция которой ($1_2 2_2$) лежит на фронтальном следе $\delta\pi_2$ (так как фронтальный след плоскости δ обладает собирательным свойством). Горизонтальный след плоскости $\delta\pi_1$ перпендикулярен оси Ox. Находим горизонтальную проекцию линии пересечения плоскостей $1_1 2_1$. Там, где линия $1_1 2_1$ пересеклась с горизонтальной проекцией прямой DE (D_1E_1), получаем горизонтальную проекцию (K_1) точки пересечения прямой DE с плоскостью $\triangle ABC$. По K_1 находим фронтальную проекцию K_2, которая будет лежать на D_2E_2. Определяем видимость элементов на эпюре с помощью метода конкурирующих точек.

Прямая, перпендикулярная плоскости

(*частный случай прямой, пересекающей плоскость*)

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна каким-либо двум ее пересекающимся прямым.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то ее проекции перпендикулярны к одноименным следам плоскости (а также к соответствующим *проекциям горизонталей и фронталей*), рис. 83.



а) б)

Рис. 83. Прямая, перпендикулярная плоскости ψ

Проведем в некоторой плоскости ψ (рис. 83, а) две пересекающиеся прямые, например горизонталь NK и фронталь MK. В точке их пересечения (K) восставим перпендикуляр AK. Тогда $AK \perp NK$ и $AK \perp MK$ и, следовательно, $AK \perp \psi$.

Спроецируем прямой угол AKN на плоскость π_1. Так как сторона NK параллельна плоскости π_1, то на основании теоремы о проецировании прямого угла можно утверждать, что $A_1K_1 \perp N_1K_1$, т.е. $\angle A_1K_1N_1 = 90^0$. Но N_1K_1 – горизонтальная проекция горизонтали (гпг) всегда параллельна $\psi\pi_1$, следовательно, $A_1K_1 \perp \psi\pi_1$.

Аналогично этому можно доказать, что $A_2K_2 \perp M_2K_2$ и $A_2K_2 \perp \psi\pi_2$.

Справедлива и обратная теорема: *если проекции прямой перпендикулярны следам плоскости, то прямая перпендикулярна плоскости.*

Прямая AK, перпендикулярная плоскости ψ, представлена на рис. 83, б.

На рис. 84, а представлена прямая *AB*, которая перпендикулярна плоскости общего положения ω, заданной следами, на рис. 84, б горизонтальная прямая *CD* перпендикулярна горизонтально-проецирующей плоскости η и на рис. 84, в фронтальная прямая *EF* перпендикулярна фронтально-проецирующей плоскости, заданной двумя параллельными прямыми *AB* и *CD*.

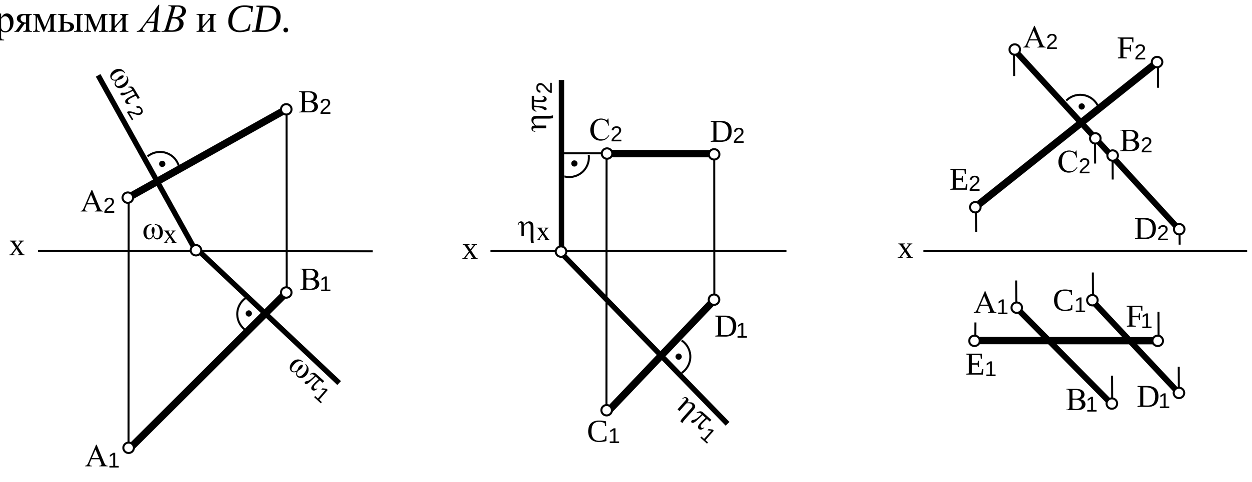


Рис. 84. Прямая, перпендикулярная плоскости

Пример 3.18. Плоскость общего положения δ задана следами и дана (•) *S* вне ее. Определить расстояние от точки до плоскости (рис. 85).

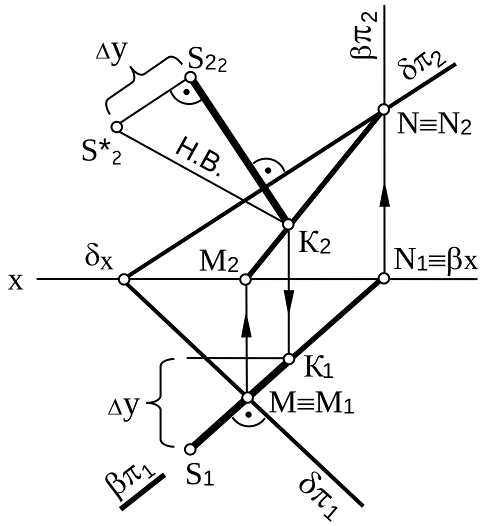


Рис. 85. Прямая, перпендикулярная плоскости δ

Для определения расстояния от точки до плоскости необходимо опустить перпендикуляр из (•) *S* на плоскость δ, найти точку пересечения перпендикуляра с плоскостью и определить натуральную (истинную) величину этого перпендикуляра.

Из (•) *S* проводим направление перпендикуляра перпендикулярно одноименным следам (из $S_1 \perp \delta\pi_1$, а из $S_2 \perp \delta\pi_2$). Находим точку пересечения (*K*) перпендикуляра с плоскостью δ, для чего заключаем направление перпендикуляра во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость β и строим линию пересечения (*MN*) двух плоскостей β и δ. Затем на пересечении фронтальной проекции перпендикуляра (из S_2) и фронтальной проекции линии пересечения плоскостей (M_2N_2) находим фронтальную проекцию точки пересечения (K_2) перпендикуляра с плоскостью δ. Горизонтальную проекцию (K_1) находим на горизонтальной проекции перпендикуляра.

Методом прямоугольного треугольника находим натуральную величину (Н.В.) перпендикуляра SK.

Пример 3.19. Плоскость общего положения задана плоскостью $\triangle ABC$ и дана (•) S вне ее. Определить расстояние от точки до плоскости (рис. 86).

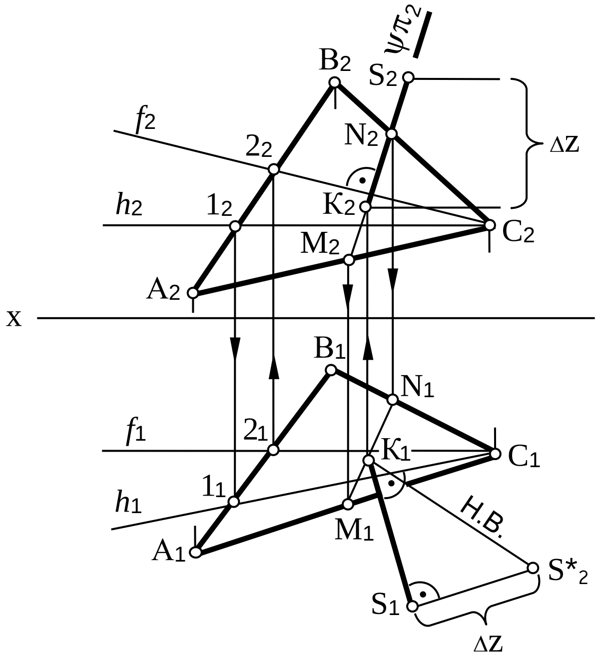


Рис. 86. Прямая, перпендикулярная плоскости $\triangle ABC$

Расстояние от точки до плоскости выражается отрезком перпендикуляра, опущенного из этой точки на заданную плоскость.

Из данной точки опускаем перпендикуляр на плоскость. Проводим в треугольнике горизонталь (C-1) и фронталь (C-2). Из S_1 опускаем перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали (h_1), а из S_2 – к фронтальной проекции фронтали (f_2). Затем определяем точку K (K_1, K_2) пересечения перпендикуляра с заданной плоскостью, для чего заключаем перпендикуляр во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость ψ и строим линию пересечения (MN) плоскостей ψ и $\triangle ABC$. Затем на пересечении горизонтальной проекции перпендикуляра и горизонтальной проекции линии пересечения плоскостей (M_1N_1) находим горизонтальную проекцию точки пересечения (K_1) перпендикуляра с плоскостью $\triangle ABC$. Фронтальная проекция (K_2) лежит на фронтальной проекции перпендикуляра.

Методом прямоугольного треугольника определяем натуральную длину (Н.В.) перпендикуляра SK.

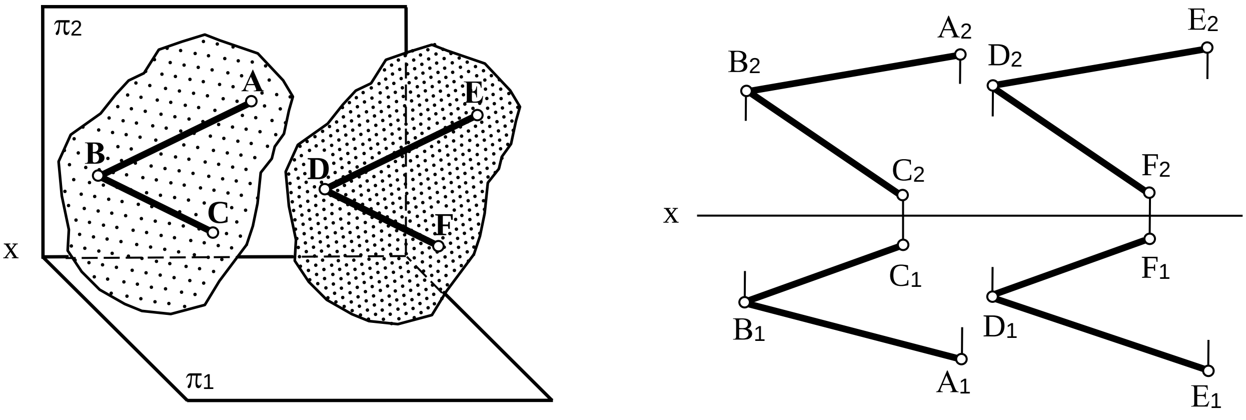
3.4.3. Взаимное положение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве могут быть *параллельными* или *пересекаться* между собой.

1. *Плоскости параллельные*

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой, то такие плоскости параллельны между собой.

Так как $AB \| DE$, $AC \| DF$, то плоскости параллельны (рис. 87),

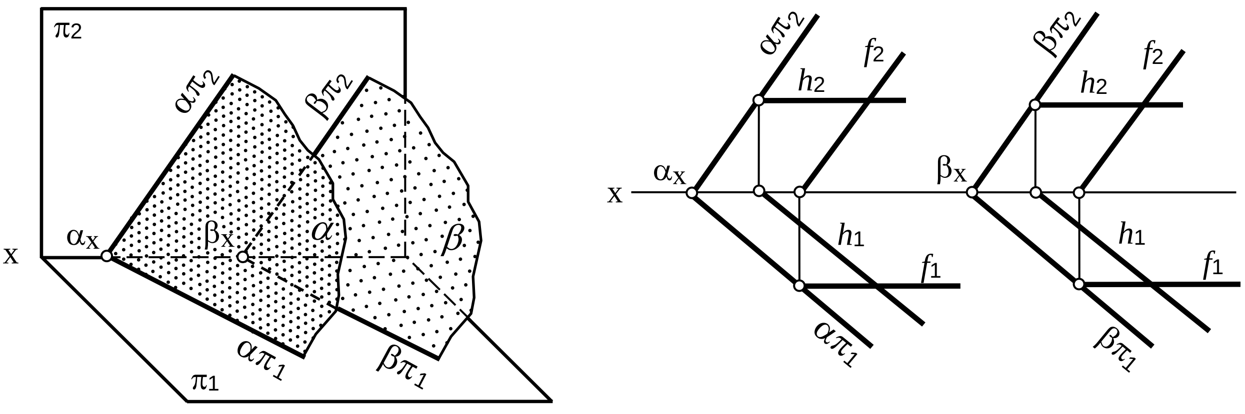


а) б)

Рис. 87. Параллельные плоскости (*A-B-C* и *E-D-F*)

Так как следы плоскости можно рассматривать как пересекающиеся прямые, принадлежащие плоскости, то на этом основании можно сделать вывод, что у параллельных плоскостей одноименные следы параллельны (рис. 88).

У параллельных плоскостей горизонтали и фронтали параллельны между собой (рис.88, б).



а) б)

Рис. 88. Параллельные плоскости (α и β)

В параллельности профильно-проецирующих плоскостей можно убедиться только по их профильным следам.

Пример 3.20. Через точку L провести следами плоскость ψ, параллельную плоскости η (рис. 89).

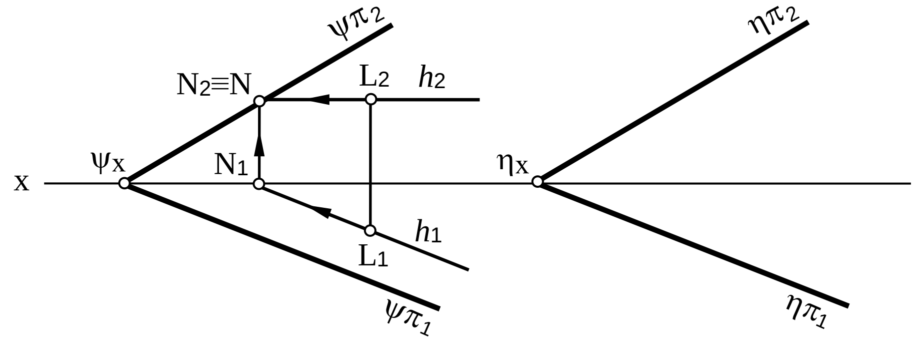


Рис. 89. Параллельные плоскости (ψ и η)

Так как горизонтали и фронтали параллельных плоскостей взаимно параллельны, то через точку L проводим горизонталь NL будущей плоскости ψ (или можно провести фронталь) таким образом, чтобы ее горизонтальная проекция (h_1) была параллельна следу $\eta\pi_1$. Получаем фронтальный след фронтали N ($N_2 \equiv N$). Затем через N проводим фронтальный след плоскости ($\psi\pi_2$) параллельно $\eta\pi_2$ до пересечения с осью Ox, где получаем точку схода следов (ψ_X), из которой проводим горизонтальный след плоскости ($\psi\pi_1$) параллельно ($\eta\pi_1$).

Пример 3.21. Через точку K провести следами плоскость γ, параллельную плоскости $\triangle ABC$ (рис. 90).

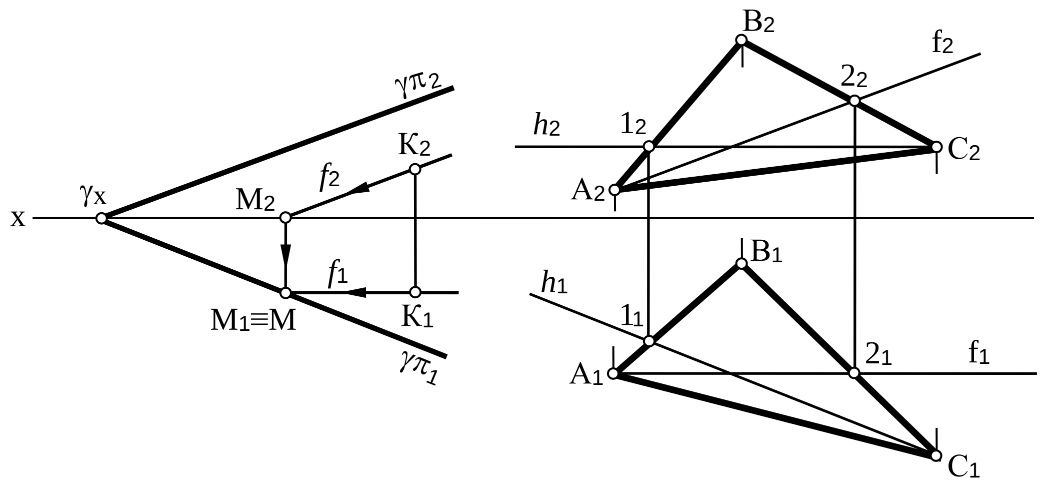


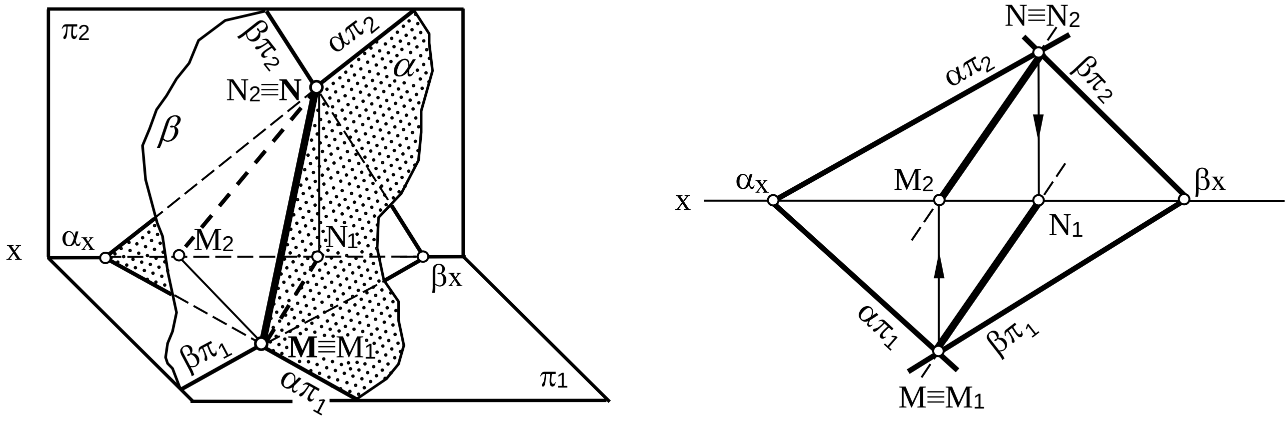
Рис. 90. Параллельные плоскости (γ и $\triangle ABC$)

Так как плоскости γ и $\triangle ABC$ параллельны между собой, то их горизонтали и фронтали также параллельны. Проводим горизонталь (C-1) и фронталь (A-2) заданной плоскости $\triangle ABC$. Затем через точку K проводим фронталь MK (или можно провести горизонталь) будущей плоскости γ. Получаем горизонтальный след фронтали M ($M_1 \equiv M$). Если прямая принадлежит плоскости, то ее следы лежат на одноименных следах плоскости. Таким образом, через точку $M_1 \equiv M$ проводим горизонтальный след плоскости ($\gamma\pi_1$), который будет параллелен горизонтальной проекции горизонтали (h_1) плоскости $\triangle ABC$. В пересечении $\gamma\pi_1$ с осью Ox получаем точку схода следов (γ_X) искомой плоскости, через которую проводим фронтальный след плоскости ($\gamma\pi_2$) параллельно фронтальной проекции фронтали (f_2) $\triangle ABC$.

2. *Плоскости пересекающиеся*

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой линии, для определения которой достаточно найти две точки, одновременно принадлежащие обеим плоскостям.

Если плоскости заданы следами, линия пересечения определяется точками пересечения одноименных следов плоскостей. Так, линия пересечения плоскостей α и β, заданных следами (рис. 91), горизонтальные следы которых пересекаются в точке M (M_1, M_2), а фронтальные – в точке N (N_1, N_2), есть прямая MN (M_1N_1, M_2N_2).



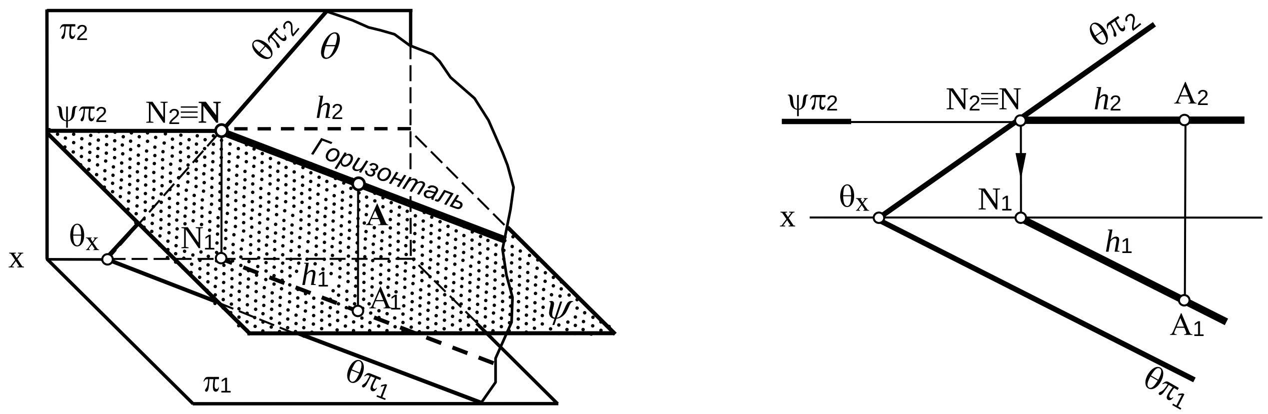
а) б)

Рис. 91. Пересекающиеся плоскости (α и β)

Рассмотрим несколько частных случаев пересечения плоскостей.

Если направление линии пересечения плоскостей известно, достаточно найти только одну общую точку и через нее провести прямую, параллельную известному направлению.

На рис. 92 представлено построение линии пересечения плоскости общего положения θ и горизонтальной плоскости уровня ψ. В пересечении фронтальных следов ($\theta\pi_2$, $\psi\pi_2$) определяем общую точку N (N_1,N_2), через которую проходит линия пересечения. Горизонтальная плоскость ψ пересекает плоскость по прямой, параллельной плоскости π_1 (по горизонтали).

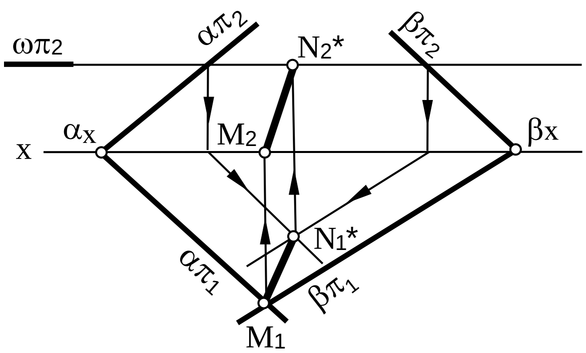


а) б)

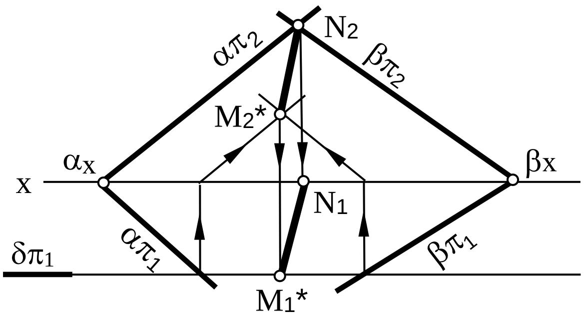
Рис. 92. Пересекающиеся плоскости (θ и ψ)

У пересекающихся плоскостей α и β (рис. 93, а) фронтальные следы в поле чертежа не пересекаются между собой. Точку M находим в пересечении горизонтальных следов ($\alpha\pi_1$, $\beta\pi_1$). Для нахождения второй общей точки (N^*) линии пересечения вводим дополнительную горизонтальную секущую плоскость ω, она пересекает любую из плоскостей α и β по горизонтали.

У пересекающихся плоскостей α и β (рис. 93, б) горизонтальные следы в поле чертежа не пересекаются между собой. Точку N находим в пересечении фронтальных следов ($\alpha\pi_2$, $\beta\pi_2$). Для нахождения второй точки (M^*) вводим дополнительную фронтальную секущую плоскость δ, которая пересекает каждую из плоскостей α и β по фронтали.



а)



б)

Рис. 93. Пересекающиеся плоскости

У пересекающихся плоскостей α и β (рис. 94) горизонтальные и фронтальные следы в поле чертежа не пересекаются между собой. Для нахождения линии пересечения этих плоскостей вводим дополнительные горизонтальную секущую плоскость ω и фронтальную секущую плоскость δ.

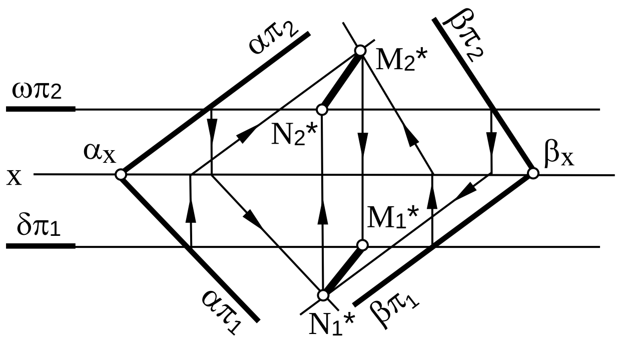
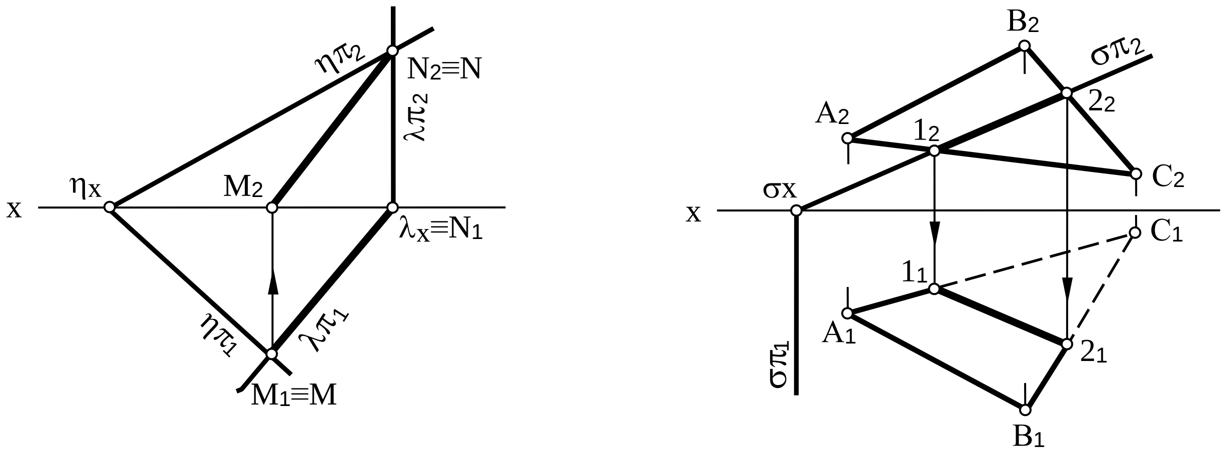


Рис. 94. Пересекающиеся плоскости

В случае, когда пересекается плоскость общего положения с проецирующей, одна из проекций линии пересечения определяется сразу, без дополнительных построений – она совпадает со следом на той плоскости проекций, к которой перпендикулярна проецирующая плоскость. На рис. 95, а показаны две пересекающиеся плоскости, заданные следами: плоскость общего положения η и горизонтально-проецирующая λ. Горизонтальная проекция линии пересечения (M_1N_1) совпадает с горизонтальным следом ($\lambda\pi_1$), фронтальная проекция (M_2N_2) определяется точками M_2 и N_2.

На рис. 95, б показано построение линии пересечения плоскости общего положения, заданной $\triangle ABC$, с фронтально-проецирующей плоскостью σ, заданной следами. Фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом $\sigma\pi_2$ и определяется точками 1_2 и 2_2. Горизонтальная проекция определяется точками 1_1 и 2_1, которые находят при помощи вертикальных линий связи на горизонтальных проекциях A_1C_1 и B_1C_1 сторон треугольника. Невидимая часть горизонтальной проекции треугольника показана штриховыми линиями.

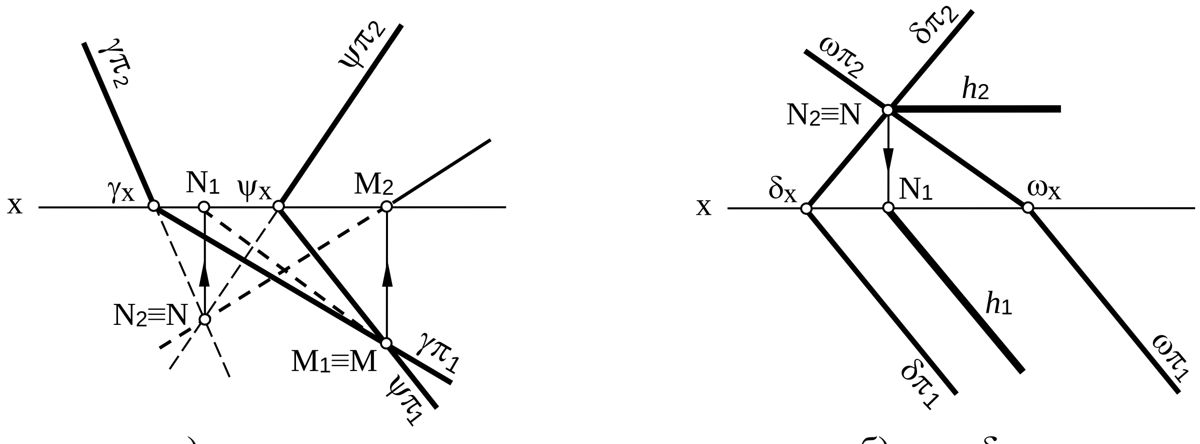


а) η и λ б) σ и $\triangle ABC$

Рис. 95. Пересекающиеся плоскости

На рис. 96, а приведен пример пересечения двух плоскостей γ и ψ общего положения, заданных следами, когда точка пересечения фронтальных следов (N) оказалась на нижней полуплоскости ($-\pi_2$).

На рис. 96, б представлен пример, когда горизонтальные следы пересекающихся плоскостей ω и δ параллельны, поэтому и линия пересечения параллельна плоскости π_1, вследствие чего ее фронтальная проекция (h_2) параллельна оси Ox, а горизонтальная (h_1) – параллельна горизонтальным следам.



а) γ и ψ б) ω и δ

Рис. 96. Пересекающиеся плоскости

3.4.4. Взаимное пересечение плоских фигур

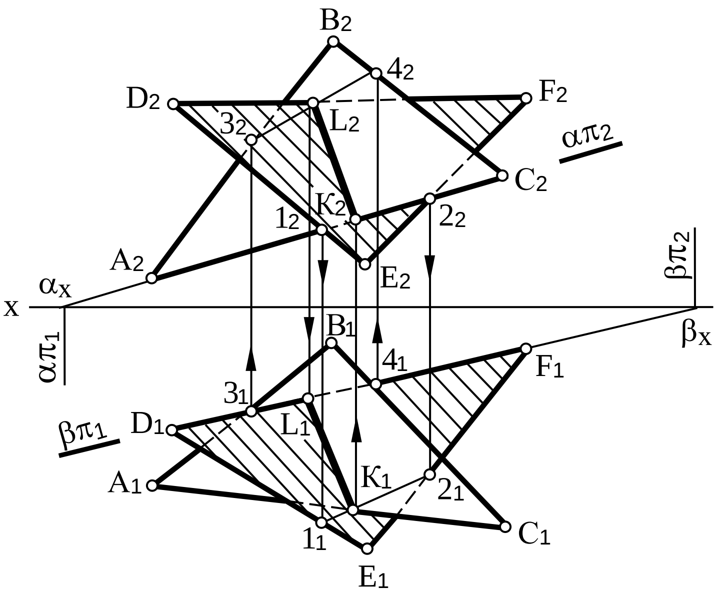
При построении линии пересечения плоских фигур могут встретиться два основных случая, показанных на рис. 97.

В первом случае только одна сторона (*DF*) △*DEF* пересекает △*ABC* в точке *L*, но вместе с тем одна из сторон (*AC*) △*ABC* пересекает △*DEF* в точке *K*, т.е. наблюдается ***частичное*** *пересечение* фигур, т.е. "*врезывание*" одной фигуры в другую (рис. 97, а).

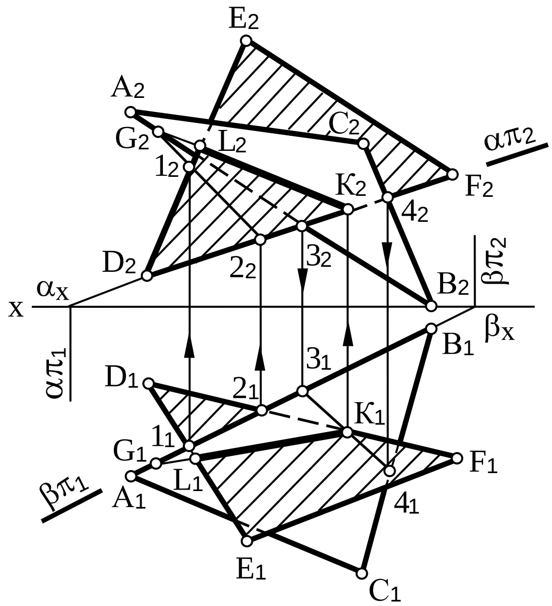
Во втором случае две стороны (*DE* и *EF*) △*DEF* пересекают плоскость △*ABC* в точках *K* и *L*, но ни одна из сторон △*DEF* не встречается со сторонами △*ABC*, т.е. получается ***полное*** *пересечение*, или "*проницание*", одной фигуры сквозь другую (рис. 97, б).

Таким образом, нахождение линии пересечения (или двух точек, общих для обеих плоскостей) сводится к нахождению точки пересечения прямой линии с плоскостью (рис. 82).

Пример 3.22. Построить линию пересечения (*LK*) плоскостей общего положения, заданных △*ABC* и △*DEF*, и определить их видимые части (рис. 97).



а) Пересечение частичное



б) Пересечение полное

Рис. 97. Пересекающиеся плоские фигуры

Прямая линия пересечения (*LK*) двух треугольников *ABC* и *DEF* (рис. 97) построена по точкам пересечения двух сторон одного треугольника с плоскостью второго треугольника.

Определяем точку пересечения *K* (рис. 97, а) стороны *AC* с плоскостью △*DEF*, заключив прямую *AC* во фронтально-проецирующую плоскость α. Находим линию пересечения (линию *1-2*) плоскости α с △*DEF*. Аналогично определяем вторую общую точку *L* посредством горизонтально-проецирующей плоскости β и получаем линию *3-4*.

Построения в примере на рис. 97, б производим аналогично, только при нахождении точки *L* используем мнимую вспомогательную точку *G*.

Видимость геометрических элементов на эпюре определяем с помощью метода конкурирующих точек (§§ 2.7, 3.4.1).

3.4.5. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

На рис. 98 представлены примеры взаимно перпендикулярных плоскостей.

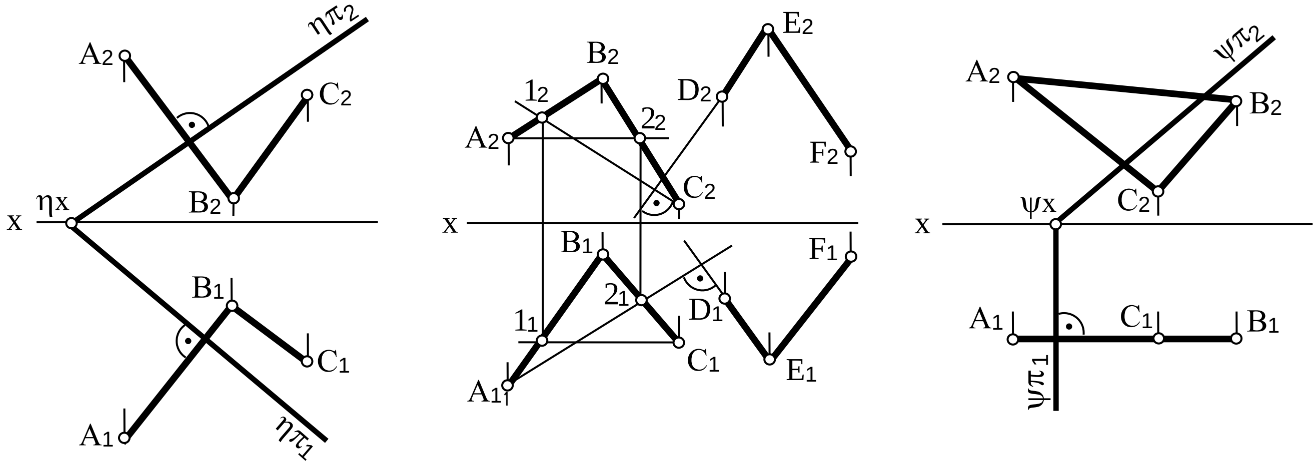


Рис. 98. Взаимно перпендикулярные плоскости

Пример 3.23. Плоскость общего положения λ задана следами и дана (•) A вне ее. Через данную (•) A провести плоскость θ, перпендикулярную плоскости λ (рис. 99).

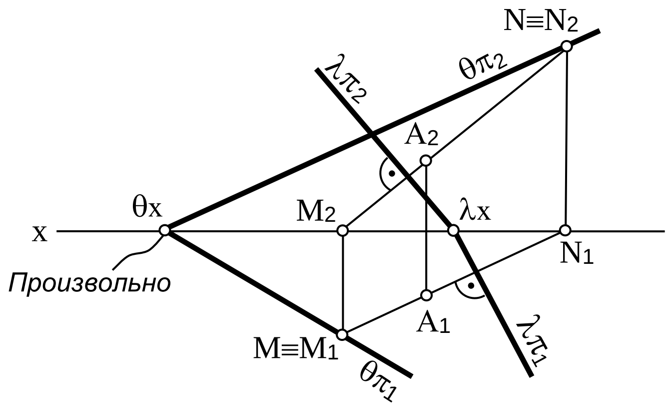


Рис. 99. Взаимно перпендикулярные плоскости (λ и θ)

Из (•) A опускаем перпендикуляр на плоскость λ, т.е. из фронтальной проекции точки A_2 опускаем фронтальную проекцию перпендикуляра на фронтальный след ($\lambda\pi_2$) плоскости λ, а из горизонтальной проекции точки A_1 – горизонтальную проекцию перпендикуляра на горизонтальный след ($\lambda\pi_1$). Находим следы M (M_1,. M_2) и N (N_1, N_2) данного перпендикуляра MN. Выбираем произвольную точку схода следов θx на оси Ox *(задача имеет множество решений)*. Через следы прямой (M и N) и θx проводим одноименные следы плоскости θ, учитывая, что прямая принадлежит плоскости, если ее следы лежат на одноименных следах плоскости. Таким образом, через фронтальный след прямой (N) и точку схода следов θx пройдет фронтальный след $\theta\pi_2$, а через горизонтальный след прямой (M) и точку схода следов θx пройдет горизонтальный след $\theta\pi_1$.

Вопросы для самоконтроля к теме 3

1. Какие известны способы задания плоскостей?
2. Что называют следами плоскости и как они расположены на эпюре при различных положениях плоскости?
3. Где располагаются фронтальная проекция горизонтального следа и горизонтальная проекция фронтального следа плоскости?
4. Какие известны положения плоскости относительно плоскостей проекций?
5. Что называют плоскостью общего положения?
6. Что называют плоскостями частного положения? Перечислить их.
7. Какие плоскости называют проецирующими и каким свойством они обладают?
8. Какие плоскости называют плоскостями уровня?
9. Что называется горизонталью и фронталью плоскости?
10. Что представляют собой линии особого положения в проецирующих плоскостях?
11. Что называется линиями наибольшего наклона к плоскостям проекций? Что называют линией ската?
12. Назовите два положения принадлежности прямой плоскости.
13. Как построить проекции точки, принадлежащей плоскости?
14. Какое взаимное положение могут занимать прямая и плоскость?
15. В каком случае прямая будет параллельна плоскости?
16. Как определить точку пересечения прямой с плоскостью общего положения и с проецирующей плоскостью?
17. Как определить расстояние на чертеже от точки до плоскости?
18. В каком случае прямая будет перпендикулярна плоскости?
19. Каково положение проекций перпендикуляра к плоскости по отношению к главным линиям и следам плоскости?
20. Как определить "видимость" элементов при пересечении прямой с плоскостью или в случае взаимного пересечения плоскостей?
21. Какое взаимное положение могут занимать две плоскости?
22. Что является признаком параллельности двух плоскостей, заданных следами и плоскими фигурами?
23. Как строится линия взаимного пересечения двух плоскостей (общего и частного положения), заданных следами и плоскими фигурами?
24. В чем отличие "полного" от "частичного" пересечения плоских фигур?
25. В каком случае две плоскости взаимно перпендикулярны?

Лекция 5

Тема 4. Способы преобразования чертежа

Решение ряда задач начертательной геометрии упрощается при условии, что исследуемые геометрические элементы (точки, прямые, плоскости и другие объекты проецирования) занимают частное положение. Для преобразования их из общего положения в частное (параллельное π_1 или π_2) в начертательной геометрии предусматриваются следующие *способы преобразования чертежа*:

1. Вращение.
2. Способ перемены плоскостей проекций.
3. Плоскопараллельное перемещение (вращение без указания осей).
4. Совмещение (вращение вокруг одного из следов плоскости).

4.1. Способ вращения

Способ вращения заключается в том, что *данную фигуру вращают в пространстве вокруг некоторой оси до требуемого положения относительно плоскостей проекций, которые остаются неизменными.*

Следует отметить следующие основные положения:

1.) Все точки вращаемого геометрического элемента описывают в пространстве дуги окружностей, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения. Такая плоскость называется *плоскостью вращения точки*.

2.) Центры этих дуг располагаются на оси вращения, а радиусы представляют кратчайшее расстояние от вращаемых точек до оси.

3.) Точки вращаемого геометрического элемента, лежащие на оси вращения, при вращении не изменяют своего положения в пространстве.

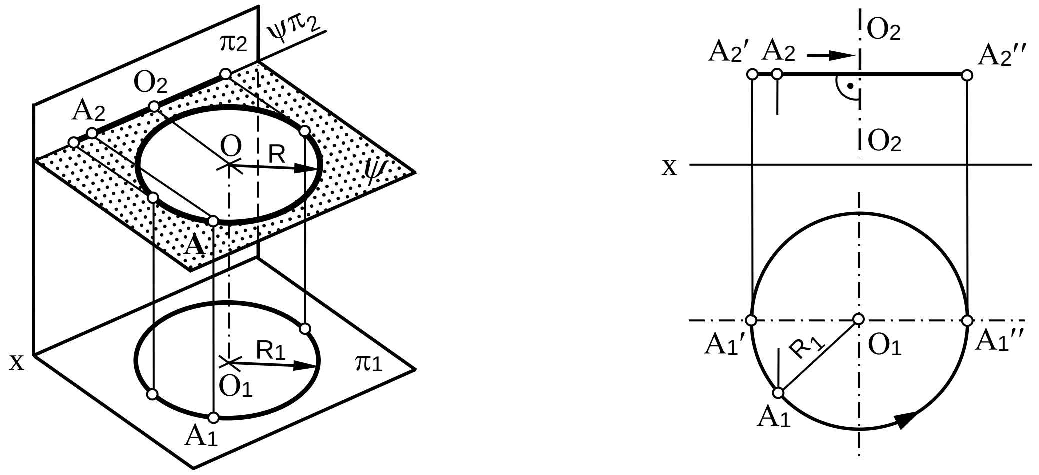
Для упрощения построений обычно оси вращения располагают перпендикулярно или параллельно одной из плоскостей проекций.

4.1.1. Вращение точки

Рассмотрим, как изменяются проекции точки при вращении ее вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций.

В пространстве первой четверти возьмем произвольную точку A (рис. 100) и ось вращения OO, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций (π_1), и придадим точке вращательное движение по часовой стрелке вокруг оси OO. Вращаясь, точка A будет описывать окружность в плоскости ψ, перпендикулярной к оси вращения, и, следовательно, параллельной плоскости π_1. Поэтому эта окружность спроецируется на плоскость π_1 без искажения, а на плоскость π_2 или π_3 – в виде прямой, параллельной оси Ox или Oy.

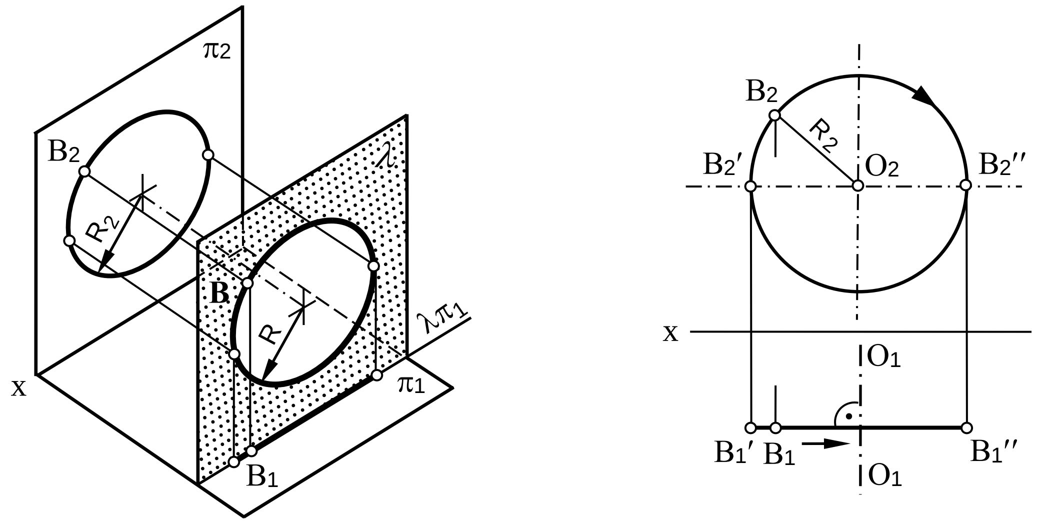
При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_1, горизонтальная проекция точки A перемещается по окружности с центром на оси вращения, а фронтальная – по прямой, перпендикулярной к оси вращения, т.е. параллельной оси Ox.



а) б)

Рис. 100. Вращение точки (ось вращения $\perp \pi_1$)

Вращаясь вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_2 (рис. 101), точка *B* будет перемещаться по дуге окружности радиуса *R* в плоскости λ, перпендикулярной к оси вращения, и, следовательно, параллельной плоскости π_2. Поэтому фронтальная проекция траектории перемещения точки *B* спроецируется на плоскость π_2 в виде окружности, а на плоскость π_1 – в виде отрезка, параллельного оси *Ox*.



а) б)

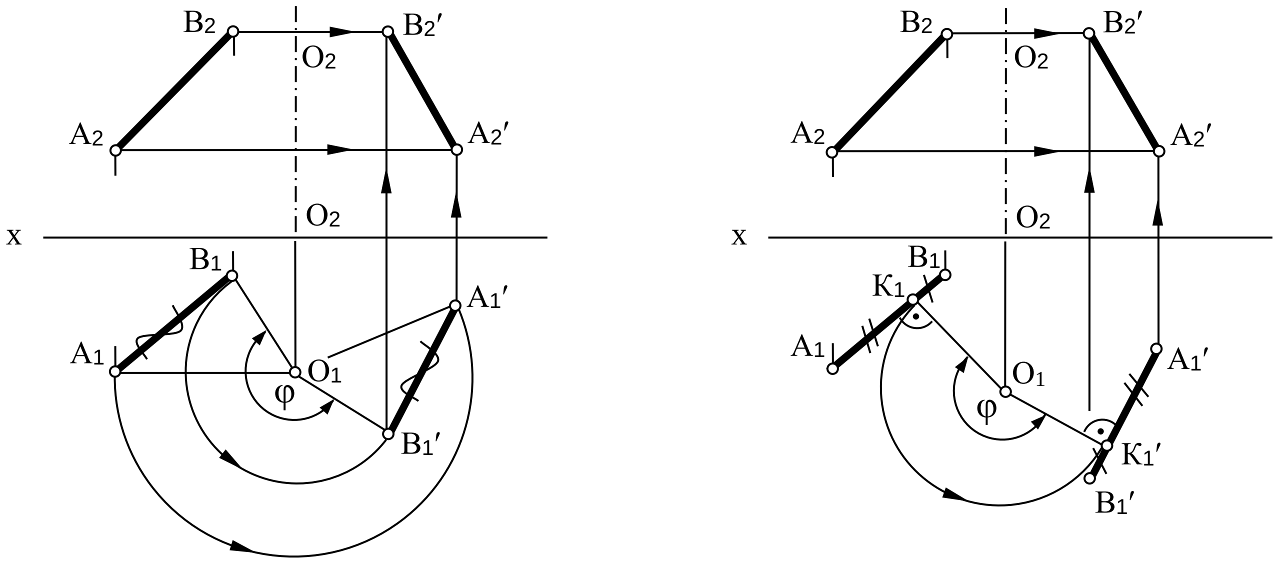
Рис. 101. Вращение точки (ось вращения $\perp \pi_2$)

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_2, фронтальная проекция точки B перемещается по окружности с центром на оси вращения, а горизонтальная – по прямой, перпендикулярной к оси вращения, т.е. параллельной оси Ox.

4.1.2. Вращение прямой

Чтобы повернуть отрезок прямой линии на некоторый угол φ вокруг заданной оси вращения, достаточно повернуть на тот же угол две любые его точки.

Если ось вращения перпендикулярна к плоскости π_1, то длина горизонтальной проекции отрезка при повороте не изменяется (рис. 102, а). Таким образом, так как $A_1B_1 = A_1'B_1'$, то достаточно повернуть на заданный угол одну точку отрезка – K (рис. 102, б), при этом $A_1K_1 = A_1'K_1'$, $B_1K_1 = B_1'K_1'$.



а) б)

Рис. 102. Вращение прямой (ось вращения $\perp$ π_1)

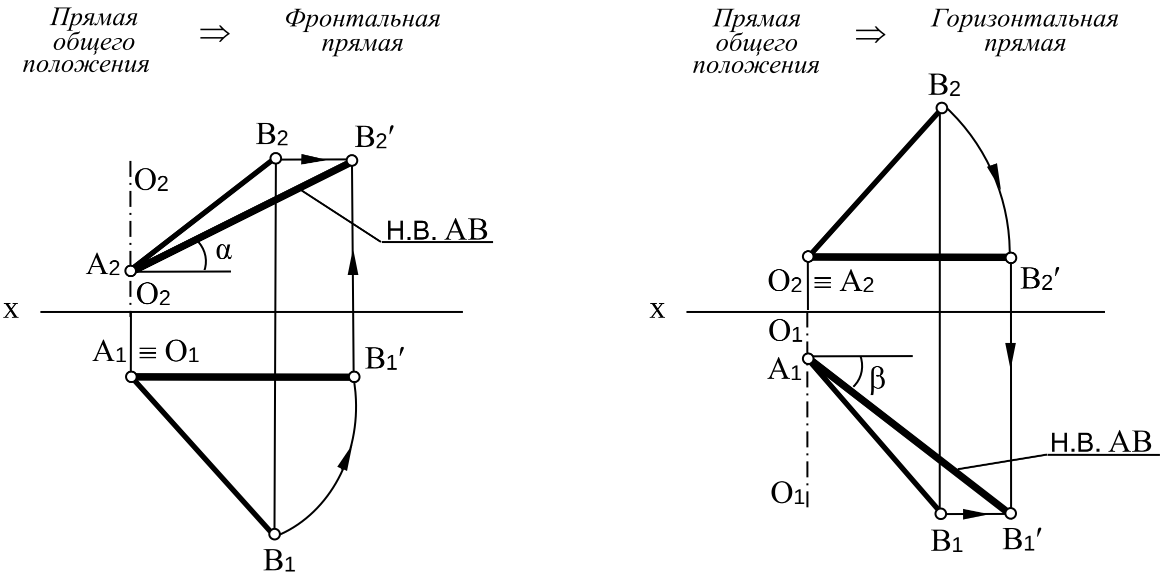
Определение натуральной величины прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций π_1, π_2

Отрезок прямой общего положения проецируется с искажением на плоскости π_1 и π_2 и ни одна из его проекций не является натуральной (истинной) величиной (Н.В.).

Для определения натуральной длины отрезка прямой общего положения его вращают вокруг оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, пока отрезок не станет параллельным другой плоскости проекций, на которую он спроецируется в натуральную величину, т.е. пока он не займет частное положение *горизонтальной* или *фронтальной* прямой уровня.

Ось вращения удобно выбирать проходящей через одну из конечных точек отрезков, тогда точка, через которую проходит ось вращения, будет неподвижна.

Пример 4.1. Определить натуральную величину отрезка AB и углы его наклона (α и β) к плоскостям проекций π_1 и π_2 (рис. 103, а, б).



а) Ось вращения $\perp \pi_1$ б) Ось вращения $\perp \pi_2$

Рис. 103. Вращение прямой

Через конец A заданного отрезка AB проведем (рис. 103, а) ось вращения OO перпендикулярно к горизонтальной плоскости π_1 и повернем отрезок до положения, параллельного фронтальной плоскости π_2. В результате вращения горизонтальная его проекция займет положение A_1B_1', параллельное оси Ox, а фронтальная A_2B_2' в новом положении будет представлять натуральную (истинную) величину отрезка AB (Н.В. AB), так как отрезок займет положение *фронтальной прямой уровня* (рис. 103, а).

Угол α между новой фронтальной проекцией отрезка A_2B_2' и осью Ox равен углу наклона прямой AB к плоскости π_1.

Для определения угла наклона отрезка AB к плоскости π_2 (β) ось вращения OO проводим через конец A (или B) перпендикулярно фронтальной плоскости проекций (π_2) и поворачиваем отрезок до положения, параллельного горизонтальной плоскости π_1. В результате выполненного вращения прямая примет положение *горизонтальной прямой уровня* (рис. 103, б), т.е. фронтальная его проекция займет положение A_2B_2', параллельное оси Ox, а горизонтальная A_1B_1' в новом положении будет представлять натуральную величину отрезка AB (Н.В. AB).

Угол β между новой горизонтальной проекцией отрезка A_1B_1' и осью Ox равен углу наклона прямой AB к плоскости π_2.

4.1.3. Вращение плоскости

Чтобы повернуть плоскость на некоторый угол φ, достаточно повернуть на тот же угол либо три точки этой плоскости, не лежащие на одной прямой, либо две прямые, принадлежащие данной плоскости.

Пример 4.2. Повернуть $\triangle ABC$ на угол $\varphi=100^0$ вокруг оси OO, перпендикулярной к π_1 (рис. 104).

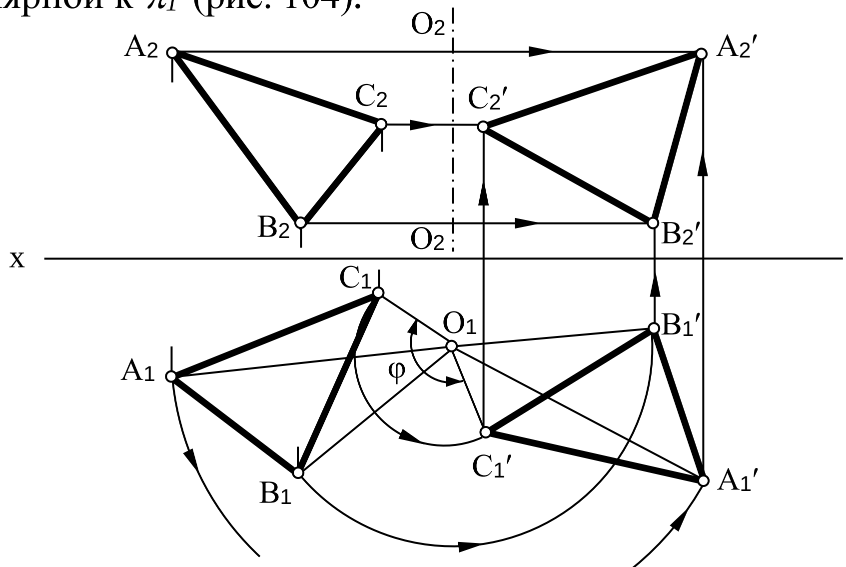


Рис. 104. Вращение плоскости на угол $\varphi=100^0$ ($\triangle ABC$)

Поворот плоскости вокруг заданной оси сводится к повороту принадлежащих ей точек, подобно примеру на рис. 102, а. В данном случае мы поворачиваем все три точки. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1'B_1'C_1'$ равны между собой по построению при оси, перпендикулярной к плоскости π_1. Это соответствует тому, что угол наклона плоскости $\triangle ABC$ по отношению к плоскости π_1 не изменяется.

Определение натуральной величины плоской фигуры

Пример 4.3. Найти натуральную (истинную) величину $\triangle ABC$ (рис. 105).

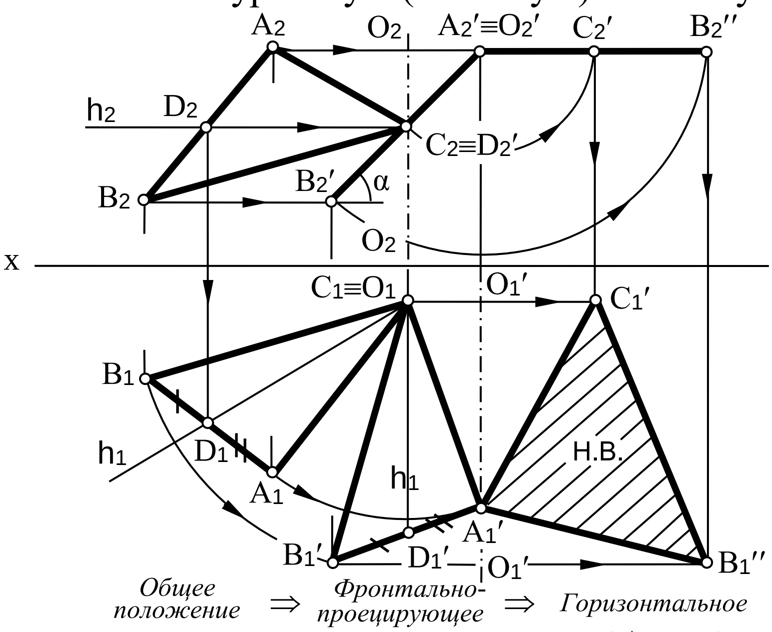


Рис. 105. Вращение плоскости ($\triangle ABC$)

Так как исходный $\triangle ABC$ занимает общее положение, то проецируется на плоскости проекций π_1, π_2 с искажением. Задача нахождения его натуральной величины решается последовательным вращением треугольника вокруг двух заданных осей, перпендикулярных плоскостям проекций.

Первым вращением вокруг оси O, перпендикулярной плоскости π_1 и проходящей через вершину C, придаем $\triangle ABC$ положение, перпендикулярное плоскости π_2 (*фронтально-проецирующее*). Это достигается с помощью горизонтали CD путем поворота ее вокруг оси в положение, перпендикулярное плоскости π_2 ($h_1 \perp Ox$). Фронтальная проекция треугольника – прямая $A_2'B_2'C_2$. Одновременно определяем угол наклона плоскости $\triangle ABC$ к горизонтальной плоскости проекций π_1, т.е. угол α.

Вторым вращением вокруг оси O', перпендикулярной π_2, приводим $\triangle ABC$ в положение $A_2'B_2''C_2'$, параллельное плоскости π_1 (*горизонтальное*). Горизонтальная проекция $A_1'B_1''C_1'$ будет равна натуральной величине $\triangle ABC$.

Вращение плоской фигуры вокруг ее горизонтали

Пример 4.4. Построить натуральный (истинный) вид $\triangle ABC$ вращением его вокруг горизонтали (рис. 106).

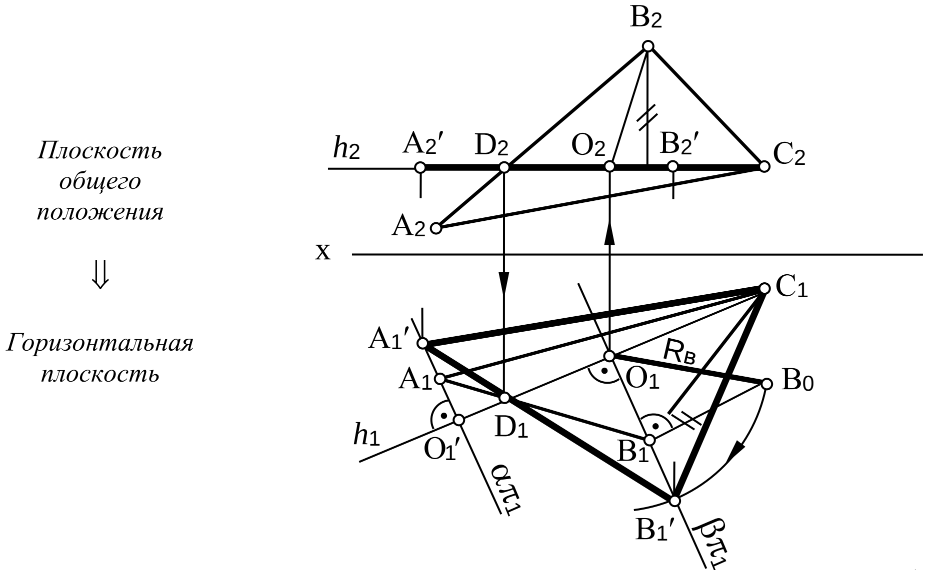


Рис. 106. Вращение плоскости вокруг горизонтали ($\triangle ABC$)

Треугольник ABC проецируется с искажением на плоскости проекций π_1, π_2, так как является плоскостью общего положения. Для определения его натуральной величины в плоскости $\triangle ABC$ проводим горизонталь CD и проворачиваем треугольник вокруг этой горизонтали до положения, параллельного плоскости π_1, когда он примет *горизонтальное* положение.

Точки C и D, лежащие на оси вращения, при вращении будут неподвижны, а точки A и B (вращаясь в плоскостях α и β, перпендикулярных к оси вращения) опишут в пространстве дуги окружностей с центрами O' и O, расположенными на оси вращения. Дуга окружности, которую описывает точка A (и точка B), проецируется на плоскость π_1 в виде прямой, перпендикулярной к C_1D_1.

Строим проекции радиуса вращения вершины B (O_1B_1 и O_2B_2), по которым определяем натуральную величину радиуса вращения $R_B = O_1B_0$ методом прямоугольного треугольника. В пересечении дуги радиуса R_B со следом плоскости вращения ($\beta\pi_1$) точки B получаем самое крайнее положение вершины B (B_1') для случая, когда $\triangle ABC \parallel \pi_1$.

Новое горизонтальное положение точки A (A_1') определяем на пересечении прямой $B_1'D_1$ с перпендикуляром A_1O_1'.

Определяем натуральную (истинную) величину треугольника ($A_1'B_1'C_1$), соединяя найденные точки A_1' и B_1' с точкой C_1. Его новая фронтальная проекция представляет собой прямую $A_2'B_2'C_2$.

Вращение плоскости, заданной следами

При вращении плоскости, заданной следами, обычно поворачивают один из следов и горизонталь (или фронталь) плоскости.

Пример 4.5. Повернуть плоскость η, заданную следами, вокруг оси OO, перпендикулярной к плоскости π_1, на угол $\varphi = 100^0$ (рис. 107).

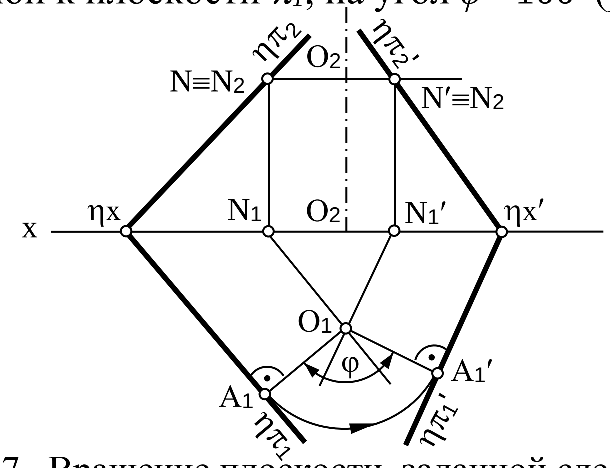


Рис. 107. Вращение плоскости, заданной следами

Чтобы провернуть на заданный угол плоскость, достаточно повернуть на тот же угол две произвольно взятые в ней прямые, например горизонтальный след $\eta\pi_1$ и горизонталь, проходящую через точку O_1, в которой ось вращения пересекается с плоскостью η.

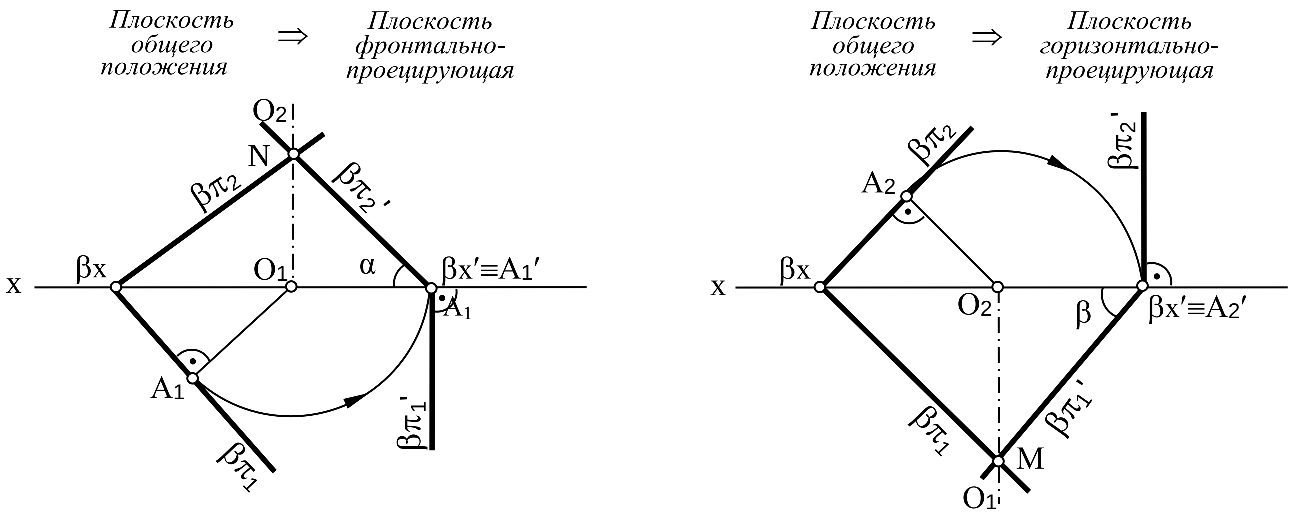
Проведем эту горизонталь и повернем след $\eta\pi_1$ на заданный угол φ. Для этого воспользуемся перпендикуляром O_1A_1, опущенным из точки O_1 на след $\eta\pi_1$. После поворота на заданный угол перпендикуляр займет новое положение O_1A_1', а горизонтальный след плоскости – новое положение $\eta\pi_1'$, пересекая ось проекций в новой точке $\eta x'$. Вместе с плоскостью будет вращаться вокруг неподвижной точки O_1 и горизонталь, оставаясь параллельной $\eta\pi_1$.

Чтобы построить фронтальный след $\eta\pi_2'$, найдем новый фронтальный след горизонтали – точку N'. Соединив $\eta x'$ с точкой N', получим новый фронтальный след $\eta\pi_2'$ плоскости η, повернутый на угол φ.

Ось вращения целесообразно располагать в плоскости проекций, в этом случае поворот плоскости значительно упрощается.

Определение углов наклона плоскости к плоскостям проекций π_1, π_2

Для определения углов наклона плоскости β общего положения, заданной следами, к плоскостям проекций π_1, π_2 надо данную плоскость вращением преобразовать в проецирующую.



а) Ось вращения $\in \pi_2$ и $\perp \pi_1$ б) Ось вращения $\in \pi_1$ и $\perp \pi_2$

Рис. 108. Преобразование плоскости в проецирующую

На рис. 108, а дан пример преобразования плоскости общего положения β во *фронтально-проецирующую*. Ось вращения O_1O_2 расположена в плоскости $\pi_2 \perp \pi_1$. В этом случае точка пересечения фронтального следа и оси вращения (N) при вращении плоскости не будет менять своего положения.

Проведем $O_1A_1 \perp \beta\pi_1$ и повернем точку A_1 до совпадения с осью Ox. Тогда горизонтальный след плоскости займет новое положение, перпендикулярное к оси Ox, и определит $\beta x'$. Соединив $\beta x'$ с неподвижной точкой N, получим новый фронтальный след плоскости $\beta\pi_2'$. При этом определится угол φ_1 наклона плоскости β к плоскости π_1.

На рис. 108, б ось вращения O_1O_2 расположена в плоскости $\pi_1 \perp \pi_2$. Точка пересечения горизонтального следа и оси вращения (M) при вращении плоскости не меняет своего положения. При помощи перпендикуляра O_2A_2 плоскость преобразуется в *горизонтально-проецирующую*, и определяется угол φ_2 наклона плоскости β к плоскости π_2.

4.2. Способ перемены плоскостей проекций

***Способ перемены плоскостей проекций** состоит в замене плоскостей проекций новыми выбранными так, чтобы данная фигура, оставаясь неподвижной, проецировалась на новые плоскости в новом виде, удобном для решения поставленной задачи.*

Сущность способа перемены плоскостей проекций состоит в том, что проецируемые объекты остаются на месте, не вращаются. Желательное положение их относительно плоскостей проекций достигается путем замены одной из плоскостей проекций новой. При этом одна из плоскостей проекций остается прежней, а новая плоскость проекций всегда перпендикулярна к той, которая не меняется (рис. 109, 110).

На рис. 109, а изображена точка A и ее проекции (A_1 и A_2). Проведем замену старой фронтальной плоскости π_2 новой плоскостью π_4. При этом условии для новой системы π_4/π_1 сохраняется процесс ортогонального проецирования. Новая фронтальная плоскость проекций (π_4) перпендикулярна к горизонтальной плоскости π_1 (рис. 109) и пересекает ее по прямой x_1 (новой оси проекций). При перемене обеих плоскостей новая ось обозначается x_2 и т.д. Новая фронтальная проекция A_4 (•) A будет в пересечении проецирующего луча, проведенного через (•) A, с новой фронтальной плоскостью проекций π_4.

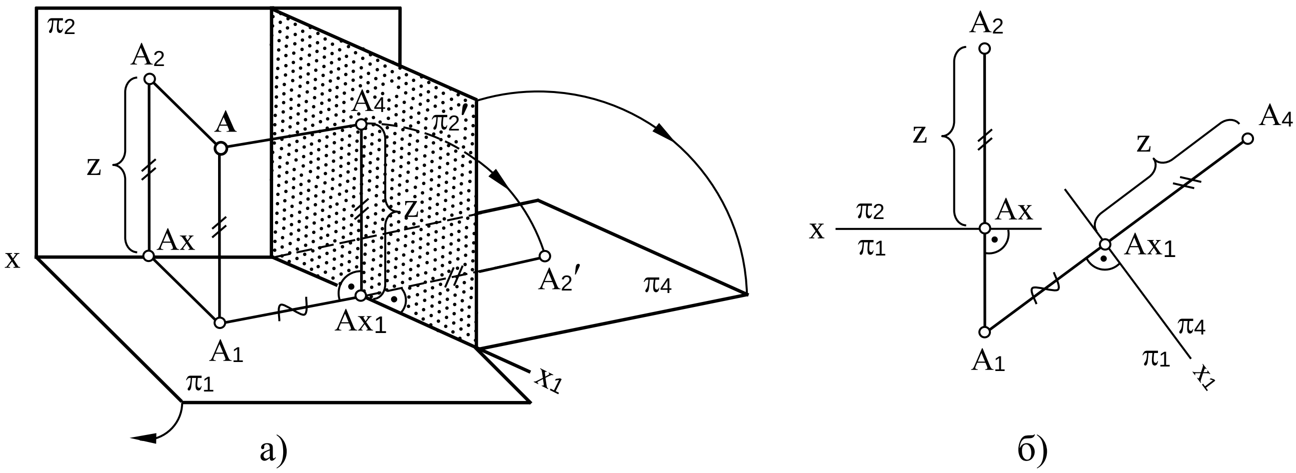


Рис. 109. Способ перемены плоскостей проекций (замена π_2)

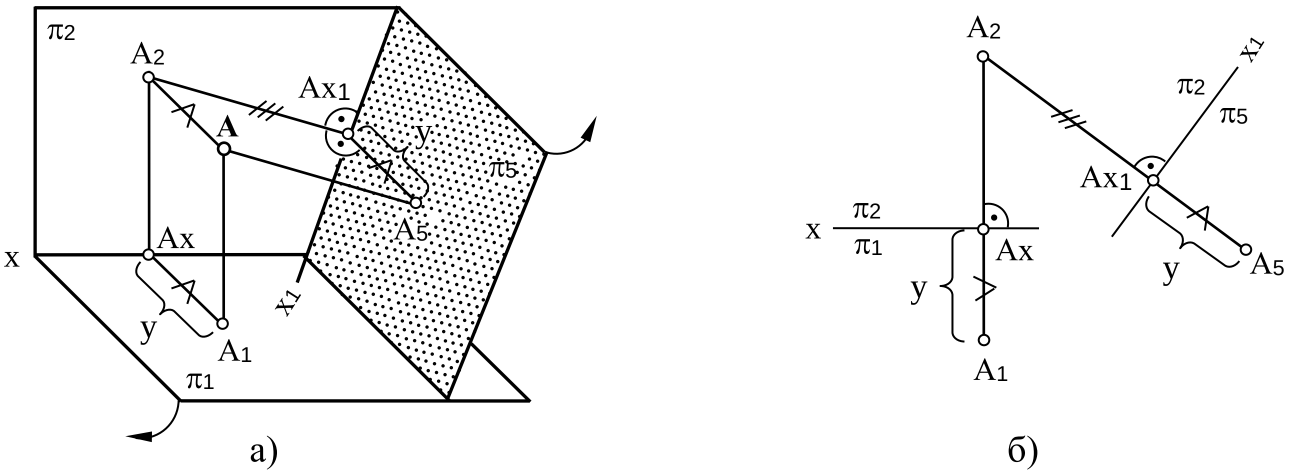


Рис. 110. Способ перемены плоскостей проекций (замена π_1)

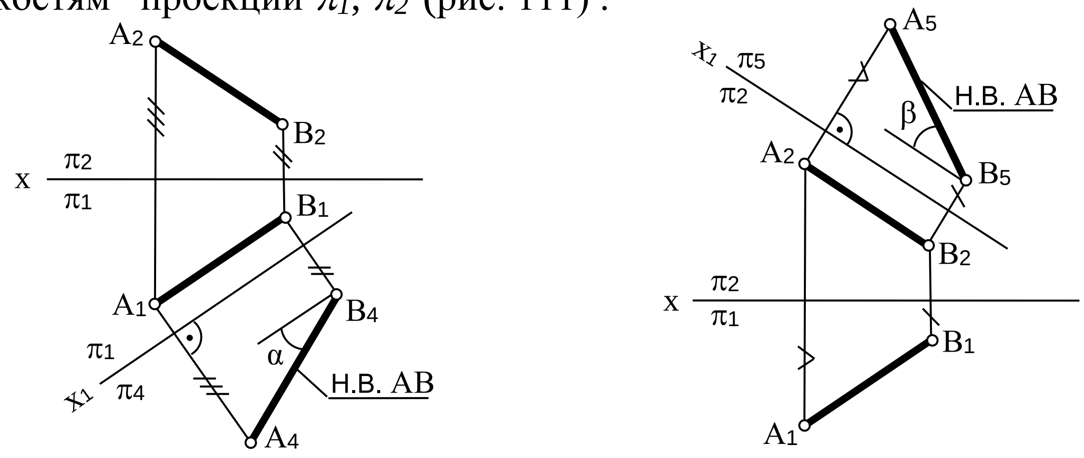
Так как горизонтальная плоскость π_1 не изменила своего положения в пространстве и является общей для старой и новой систем, то координаты z (расстояние до π_1 точки A) остаются неизменны, а значит, расстояние от новой фронтальной проекции (A_4) до новой оси x_1 равно расстоянию от старой проекции (A_2) до оси x, т.е. $A_4Ax_1 = A_2Ax = AA_1 = z$.

После совмещения плоскости π_4 с плоскостью π_1 получаем новый эпюр точки A, где новые фронтальная проекция (A_4) и горизонтальная проекция (A_1) расположатся на одном перпендикуляре (линии связи) к новой оси x_1.

Аналогично можно заменить горизонтальную плоскость проекций (π_1) плоскостью π_5, перпендикулярной к π_2 (рис. 110)

Определение натуральной величины прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций π_1, π_2

Пример 4.6. Определить длину отрезка прямой AB и углы его наклона к плоскостям проекций π_1, π_2 (рис. 111) .



а) Замена π_2 б) Замена π_1

Рис. 111. Способ перемены плоскостей проекций (прямая AB):

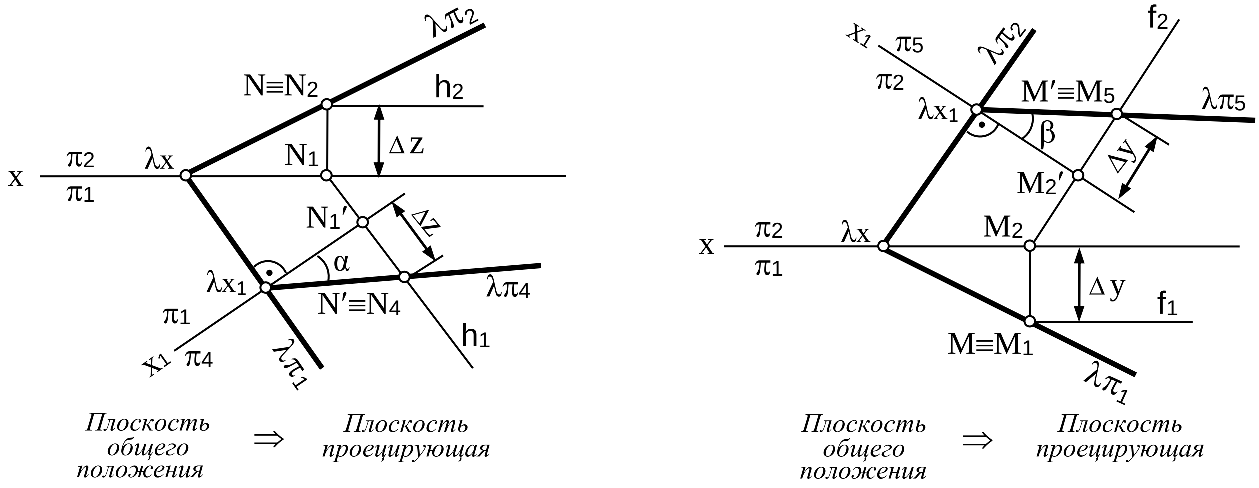
Отрезок AB – общего положения и проецируется с искажением на π_1 и π_2.

Преобразуем прямую общего положения в прямую уровня, заменив плоскость π_2 новой плоскостью π_4 (рис. 111, а), перпендикулярной к π_1 и параллельной заданному отрезку AB. Тогда новая ось x_1 займет положение, параллельное горизонтальной проекции A_1B_1, а отрезок AB и угол α, образованный отрезком с плоскостью π_1, спроецируется на π_4 в натуральную (истинную) величину (Н.В. AB). Для получения новой проекции отрезка опустим из A_1 и B_1 на новую ось x_1 перпендикуляры (линии связи) и отложим на них $Ax_1A_4 = A_2\,Ax$, $Bx_1B_4 = B_2\,Bx$.

Для определения угла (β) наклона прямой AB к фронтальной плоскости проекций, заменяем горизонтальную плоскость проекций (π_1) на π_5 (рис. 111, б), расположив новую плоскость π_5 перпендикулярно к π_2 и параллельно AB, а новую ось x_1 – параллельно A_2B_2. В этом случае $A_5B_5 = AB$ и угол β, образованный A_5B_5 с осью x_1, равен углу наклона прямой AB к плоскости π_2.

Преобразование плоскости общего положения в проецирующую и определение углов наклона ее к плоскостям проекций

ример 4.7. Плоскость λ общего положения, заданную следами, преобразовать в проецирующую и определить углы наклона ее к плоскостям π_1, π_2 (рис. 112).



а) Замена π_2 б) Замена π_1

Рис. 112. Способ перемены плоскостей проекций (плоскость λ)

Характерным признаком проецирующей плоскости на чертеже является перпендикулярность одного из ее следов к оси Ox. Поэтому, если поставлена задача преобразовать плоскость λ во *проецирующую*, то, заменяя π_2 на π_4, новую ось x_1 проводим под прямым углом к $\lambda\pi_1$ (рис. 112, а).

В новой системе плоскостей проекций π_4/π_1 след $\lambda\pi_1$ не изменит своего положения. Новое положение фронтального следа $\lambda\pi_4$ определяем при помощи точки N (N_1, N_2), произвольно взятой на следе $\lambda\pi_2$.

След $\lambda\pi_4$ должен пройти через λx_1 и N_4.

На рис. 112, б плоскость π_1 заменена плоскостью π_5 ($x_1 \perp \lambda\pi_2$), след $\lambda\pi_5$ определен точками λx_1 и M_5. Точка M_5 является новой горизонтальной проекцией точки M в системе π_2/π_5. В результате построений получена *проецирующая* плоскость.

Каждое из выполненных преобразований позволило определить углы наклона плоскости λ к плоскостям проекций: α – угол между λ и π_1 (рис. 112, а), β – угол между λ и π_2 (рис. 112, б).

Определение натуральной величины плоской фигуры

Пример 4.8. Плоскость задана $\triangle ABC$. Преобразовать ее в проецирующую, определить угол α и построить натуральный (истинный) вид треугольника (рис. 113).

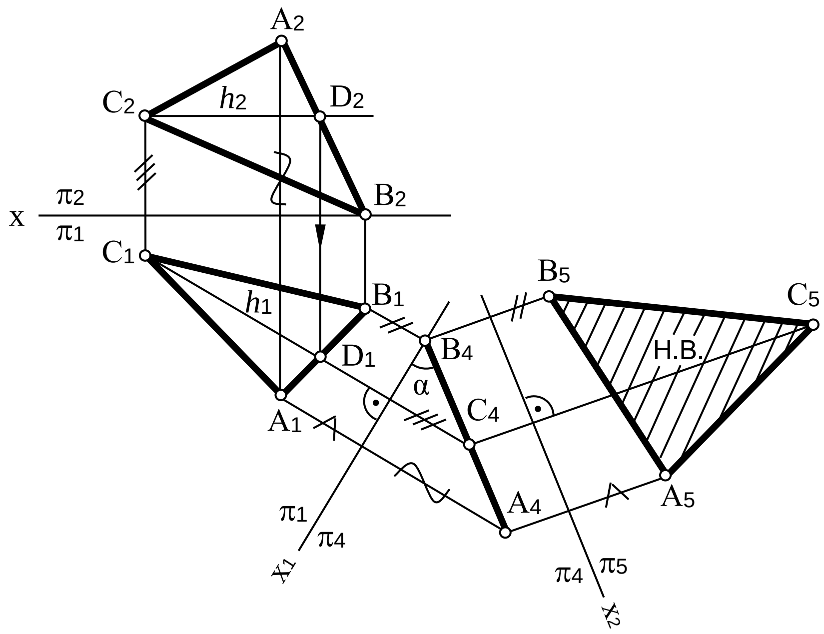


Рис. 113. Способ перемены плоскостей проекций ($\triangle ABC$)

Принимая во внимание, что заданный $\triangle ABC$ является плоскостью общего положения и проецируется с искажением на плоскости проекций π_1, π_2, его размеры определяем с помощью двух перемен плоскостей проекций.

Сначала проводим горизонталь CD (C_1D_1, C_2D_2) и ось Ox_1 перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали (h_1). Построив в системе π_4/π_1 новые проекции вершин треугольника $A_4B_4C_4$, видим, что он спроецировался (*выродился*) на плоскость π_4 в прямую линию. Это и служит признаком того, что в системе π_4/π_1 треугольник расположен в *проецирующей плоскости*. Одновременно определяется искомый угол α, образуемый заданной плоскостью с плоскостью π_1.

Вторым действием для определения истинных размеров и формы треугольника будет переход от системы π_4/π_1 к системе π_4/π_5. Новая плоскость π_5 устанавливается параллельно треугольнику, а это значит, что ось Ox_2 на чертеже надо провести параллельно проекции $A_4B_4C_4$.

Так как треугольник занял положение *плоскости уровня*, то новая проекция $A_5B_5C_5$ определяет натуральную (истинную) величину $\triangle ABC$ – Н.В.$\triangle ABC$.

Если бы по условию задачи требовалось определить угол β, образованный заданной плоскостью с плоскостью π_2, надо было бы преобразовать плоскость треугольника в проецирующую, воспользовавшись фронталью, новую ось Ox_1 провести перпендикулярно к ней. Дальнейшие построения аналогичны предыдущему.

Лекция 6

4.3. Способ плоскопараллельного перемещения

Плоскопараллельное перемещение *параллельно плоскостям проекций является вращением вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости проекций.*

Таким образом, можно применить способ вращения, не задаваясь изображением оси вращения и не устанавливая величины радиуса вращения; достаточно лишь, не изменяя вида и величины одной из проекций рассматриваемой фигуры, переместить эту проекцию в требуемое положение, а затем построить другую проекцию.

Определение натуральной величины прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций π_1, π_2

Пример 4.9. Определить натуральную величину отрезка AB и привести его в положение, перпендикулярное к плоскости π_1 (рис. 114).

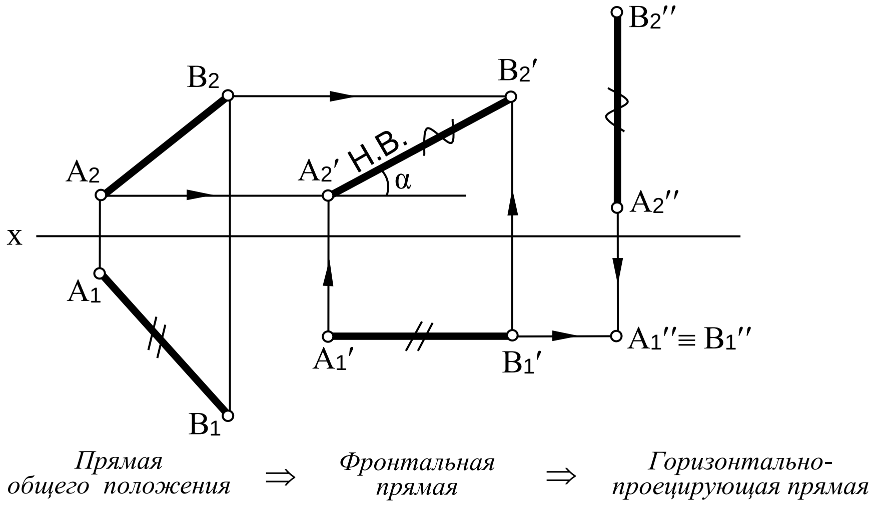


Рис. 114. Способ плоскопараллельного перемещения (прямая AB)

Прямая общего положения AB проецируется с искажением на плоскости π_1 и π_2. При решении задачи выполняем последовательно два перемещения.

Первым действием повернем отрезок вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_1, до положения, параллельного плоскости π_2 (ось вращения на чертеже не показываем), т.е. прямая займет положение *фронтальной прямой*. Так как при таком повороте горизонтальная проекция отрезка не изменяет своей величины, то проекцию $A_1'B_1'$ берем равной A_1B_1 и располагаем параллельно оси Ox, что соответствует параллельности самого отрезка плоскости π_2. На пересечении линий связи находим соответствующую фронтальную проекцию отрезка ($A_2'B_2'$), которая будет являться его натуральной (истинной) величиной (Н.В. AB). Отмечаем $\angle\ \alpha$.

Вторым действием выполняем поворот теперь вокруг оси, перпендикулярной к плоскости π_2, до искомого положения – перпендикулярности прямой AB к плоскости π_1 (эту ось на чертеже также не изображаем), т.е. прямая примет положение *горизонтально-проецирующее*. Располагаем проекцию $A_2''B_2''$, равную $A_2'B_2'$, перпендикулярно оси Ox. По линиям связи определяем горизонтальную проекцию отрезка, которая преобразовывается (вырождается) в точку $A_1''\equiv B_1''$.

Определение натуральной величины плоской фигуры

Пример 4.10. Определить натуральный (истинный) вид $\triangle ABC$, расположенного в плоскости общего положения (рис. 115).

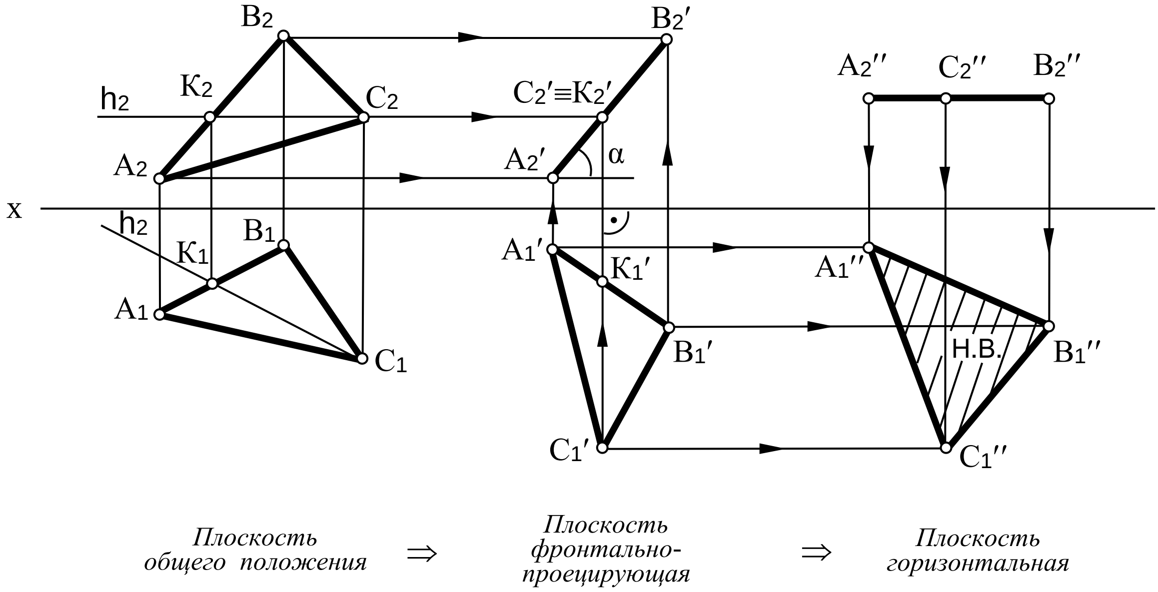


Рис. 115. Способ плоскопараллельного перемещения ($\triangle ABC$)

Так как треугольник ABC является плоскостью общего положения и проецируется с искажением на плоскости проекций π_1 и π_2, то для решения поставленной задачи (определения натуральной величины) нужно выполнить два перемещения.

Сначала в $\triangle ABC$ проводим горизонталь CK (C_1K_1, C_2K_2).

Первым действием треугольнику ABC придаем новое положение, перпендикулярное плоскости π_2, для этого горизонтальную проекцию горизонтали (h_1) C_1K_1 располагаем перпендикулярно к оси Ox и около нее строим ту же горизонтальную проекцию треугольника ($A_1B_1C_1$). В результате перемещения фронтальных проекций (A_2, B_2, C_2) вправо (параллельно оси Ox) треугольник спроецируется на плоскости π_2 в виде прямой $A_2'B_2C_2'$. Таким образом, плоскость треугольника становится *фронтально-проецирующей*. Отмечаем угол α, образуемый заданной плоскостью с плоскостью π_1.

Вторым действием прямую линию ($A_2'C_2'B_2'$) из наклонного положения перемещаем в горизонтальное положение. Перемещением параллельно оси Ox точек A_1', B_1', C_1' на плоскости π_1 до проекционного соответствия с точками A_2'', B_2'', C_2'' на плоскости π_2 определяем натуральную (истинную) величину фигуры треугольника $A_1''B_1''C_1''$, так как плоскость $\triangle ABC$ приняла положение *горизонтальной плоскости.*

4.4. Способ совмещения

Способ совмещения *является частным случаем вращения плоскости, когда за ось вращения принимается горизонтальный или фронтальный след плоскости.*

Способ совмещения применяют для определения действительных размеров плоских фигур, расположенных в плоскостях, заданных следами.

Пример 4.11. Совместить плоскость общего положения δ с π_1, π_2 (рис. 116, 117).

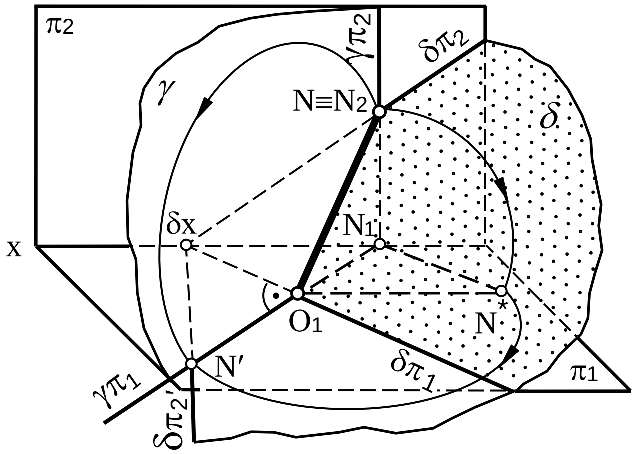
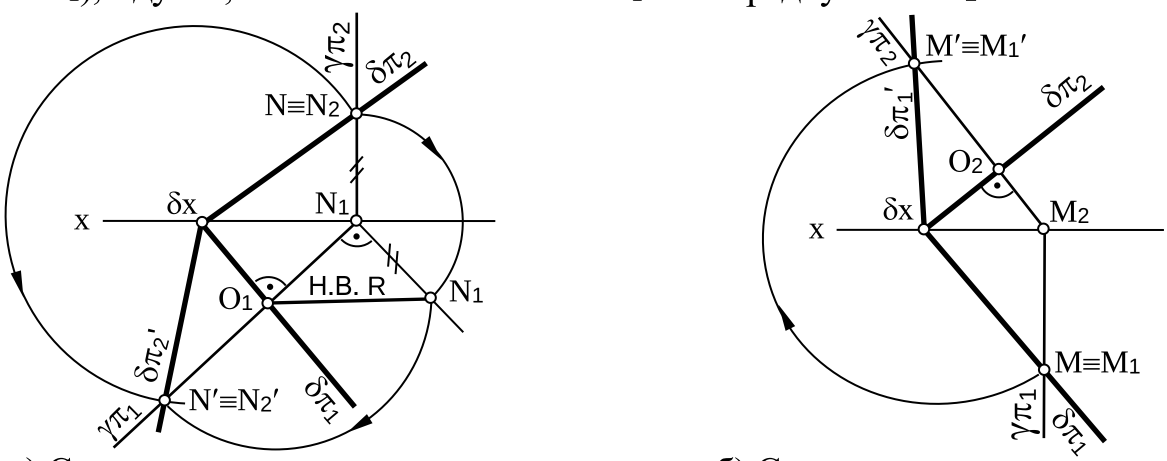


Рис. 116. Способ совмещения (плоскость δ)

Горизонтальный след $\delta\pi_1$ как ось вращения (рис.116) не меняет своего положения. Чтобы построить совмещенное положение фронтального следа, достаточно совместить с плоскостью π_1 точку N (N_1, N_2), лежащую на следе $\delta\pi_2$, второй будет точка схода следов δx, которая при вращении плоскости остается неподвижной. (•) N будет перемещаться по дуге окружности в плоскости γ, перпендикулярной к оси вращения. Центр этой дуги лежит в (•) O. Горизонтальная проекция N_1 будет перемещаться вдоль горизонтального следа $\gamma\pi_1$.

При совмещении (•) N с плоскостью π_1 дуга окружности, описанная радиусом ON в плоскости γ, пересечет плоскость π_1 в (•) N' на расстоянии от центра вращения, равном радиусу вращения ON. Радиус вращения (рис. 116) есть гипотенуза прямоугольного треугольника NO_1N_1.

Таким образом, совмещенное положение N' (рис. 117, а) можно получить как пересечение прямой линии, проведенной из (•) N_1 перпендикулярно к $\delta\pi_1$ ($\gamma\pi_1 \perp \delta\pi_1$), с дугой, описанной в плоскости π_1 из δx радиусом δxN_2.



а) Совмещение плоскости с π_1 б) Совмещение плоскости с π_2

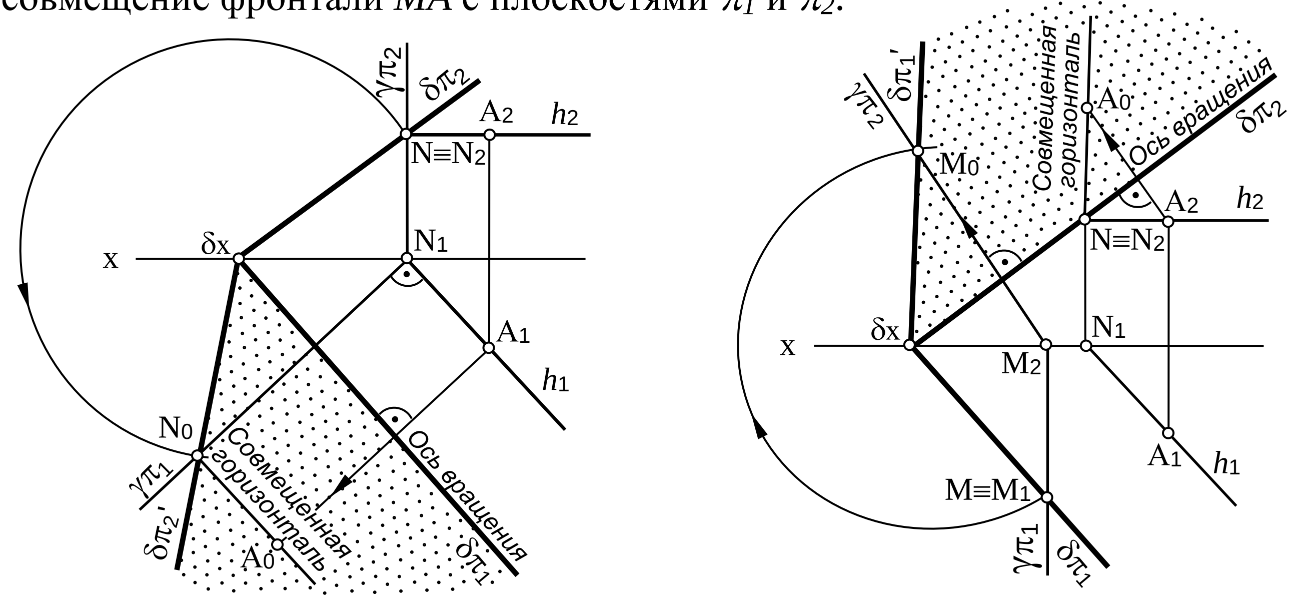
Рис. 117. Способ совмещения (плоскость δ)

При совмещении плоскости δ с π_2 за ось вращения принимается $\delta\pi_2$. Совмещенное положение горизонтального следа устанавливается при помощи (•) M (рис. 117, б), взятой на горизонтальном следе $\delta\pi_1$.

Горизонтали и фронтали на совмещенном положении плоскости

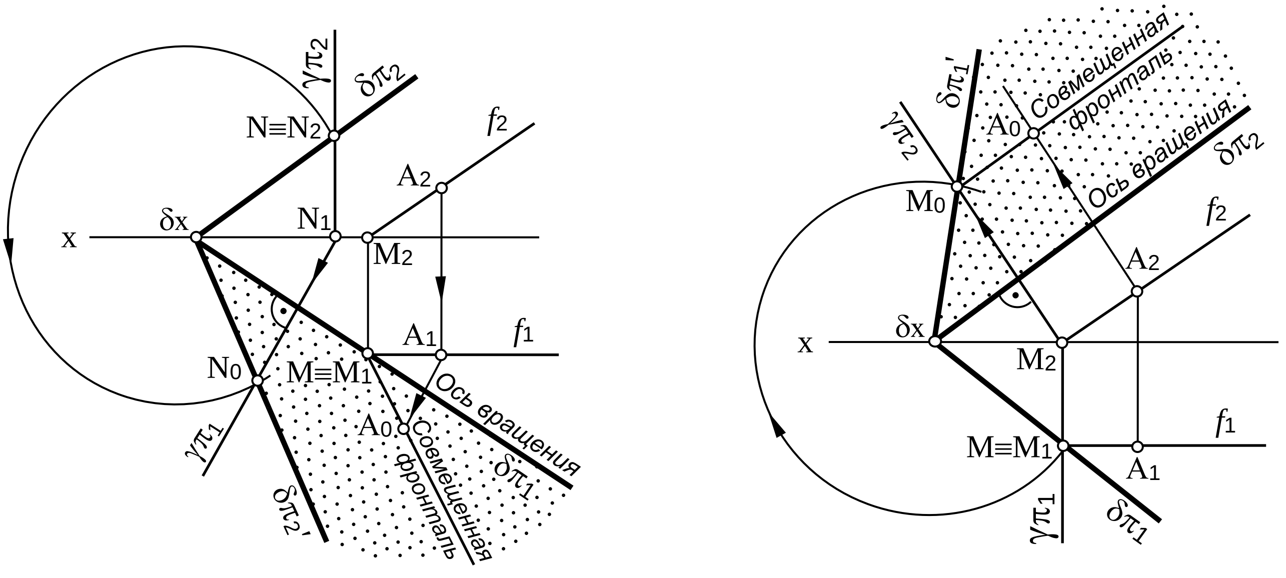
Свойство горизонталей и фронталей плоскости сохраняется и при совмещении их с плоскостями проекций: *совмещенная горизонталь параллельна горизонтальному следу плоскости, совмещенная фронталь параллельна фронтальному следу плоскости.*

На рис. 118 показано совмещение горизонтали NA, а на рис. 119 – совмещение фронтали MA с плоскостями π_1 и π_2.



а) с π_1 б) с π_2

Рис. 118. Совмещение горизонтали



а) с π_1 б) с π_2

Рис. 119. Совмещение фронтали

Точка A_0, совмещенная с плоскостью π_1 и π_2, определяется пересечением совмещенной горизонтали N_0A_0 (или фронтали M_0A_0) с прямой, проведенной из точки A_1 (или A_2) перпендикулярно $\delta\pi_1$ ($\delta\pi_2$).

Определение натуральной величины плоской фигуры

Пример 4.12. Определить натуральную (истинную) фигуру $\triangle ABC$, лежащего в плоскости общего положения ω (рис. 120).

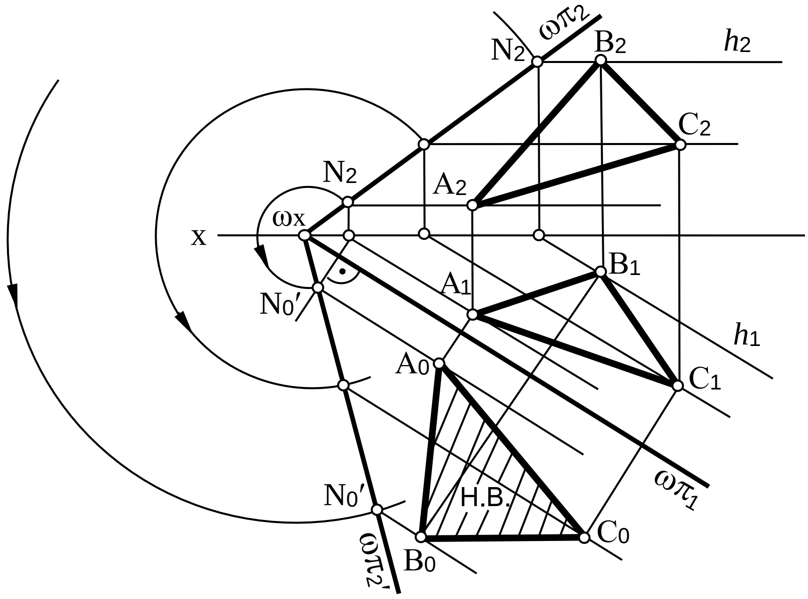


Рис. 120. Способ совмещения ($\triangle ABC$)

Плоскость $\triangle ABC$ является плоскостью общего положения и проецируется с искажением на плоскости проекций π_1, π_2.

Проведем через вершины треугольника горизонтали и совместим плоскость ω с горизонтальной плоскостью проекций (π_1). При совмещении с плоскостью π_1 горизонтали сохраняют положение, параллельное следу $\omega\pi_1$. Точки A_1, B_1, C_1 займут положение A_0, B_0, C_0 на совмещенных горизонталях в их пересечении с соответствующими перпендикулярами к следу $\omega\pi_1$, проведенными из точек A_1, B_1, C_1. Получившаяся при этом фигура $A_0B_0C_0$ равна натуральной (истинной) величине $\triangle ABC$ (Н.В. $\triangle ABC$).

На основании разобранного примера, повторив построения в обратном порядке, можно решить обратную задачу восстановления точек или фигур из совмещенного положения в первоначальное. Эта задача именуется ***способом подъема геометрических элементов в пространство***.

Вопросы для самоконтроля к теме 4

1. С какой целью используют способы преобразования чертежа в начертательной геометрии?
2. Что отличает способ вращения от способа замены плоскостей проекций?
3. В чем отличие способа вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскости проекций, от способа плоскопараллельного перемещения?
4. В чем состоит принцип преобразования чертежа способом вращения?
5. Что такое центр вращения точки при повороте ее вокруг некоторой оси?
6. Какую прямую принимают за ось вращения?
7. Что представляет собой плоскость вращения точки, как она расположена относительно оси вращения?
8. Что такое радиус вращения точки?
9. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения и углы наклона этой прямой к плоскостям проекций π_1, π_2 способом вращения?
10. Как найти натуральную величину плоской фигуры общего положения способом вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций?
11. Как найти натуральную величину плоской фигуры общего положения способом вращения вокруг горизонтали?
12. Как осуществить вращение плоскости, заданной следами?
13. Как преобразовать плоскость общего положения, заданную следами, в проецирующую способом вращения?
14. В чем заключается принцип преобразования ортогональных проекций способом замены плоскостей проекций?
15. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения и углы наклона этой прямой к плоскостям проекций π_1, π_2 способом перемены плоскостей проекций?
16. Как найти натуральную величину плоской фигуры общего положения способом перемены плоскостей проекций?
17. Как преобразовать плоскость общего положения, заданную следами, в проецирующую способом перемены плоскостей проекций?
18. В чем состоит принцип преобразования ортогональных проекций способом плоскопараллельного перемещения?
19. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения и углы наклона этой прямой к плоскостям проекций π_1, π_2 способом плоскопараллельного перемещения?
20. Как найти натуральную величину плоской фигуры общего положения способом плоскопараллельного перемещения?
21. В чем заключается принцип преобразования чертежа способом совмещения?
22. Как строится горизонталь и фронталь на совмещенном положении плоскости?
23. Как определить натуральную величину плоской фигуры общего положения способом совмещения?
24. Что представляет собой способ подъема элементов в пространство?

Лекция 7

Тема 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Геометрические тела, с которыми приходится встречаться в инженерной практике, могут быть разделены на два класса:

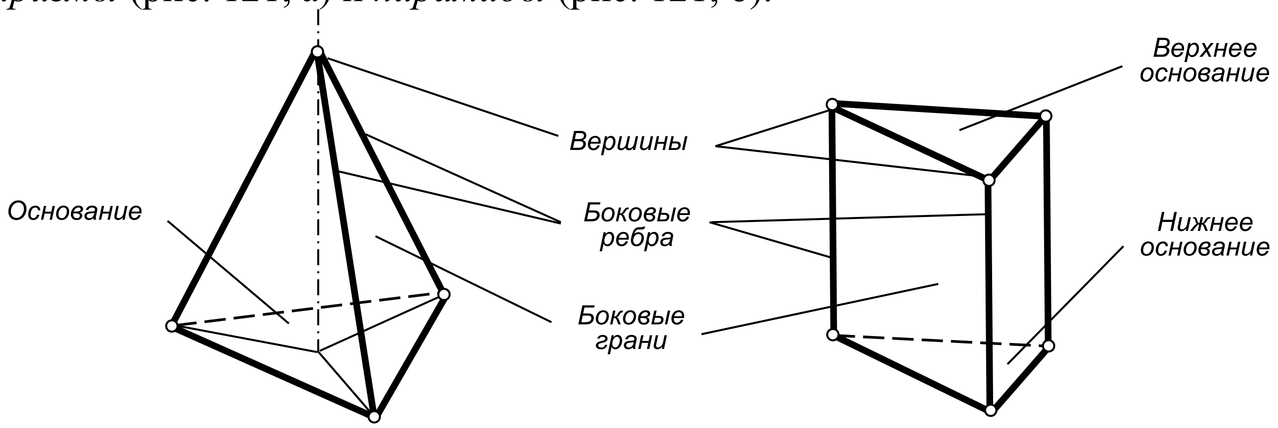
1. Геометрические тела с многогранными поверхностями, так называемые *многогранники*.
2. Геометрические тела с кривыми поверхностями.

5.1. Многогранники

Многогранником называется геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскостями.

Элементами многогранника являются вершины, ребра и грани. Плоские фигуры, ограничивающие многогранник (отсеки плоскостей), называются *гранями*. Грани пересекаются между собой по прямым линиям, которые называются *ребрами* многогранника. Ребра пересекаются в точках – *вершинах* многогранника.

Из многогранников наибольший практический интерес представляют *призмы* (рис. 121, а) и *пирамиды* (рис. 121, б).



а) Пирамида б) Призма

Рис. 121. Многогранники

Пирамида – это многогранник, одна грань которого – многоугольник, а остальные (боковые) грани – треугольники с общей вершиной (рис. 121, а).

Пирамиду называют *правильной*, если основанием ее является правильный многоугольник, боковые грани – равнобедренные треугольники, а высота пирамиды (перпендикуляр, опущенный из вершины на основание) проходит через центр этого многоугольника.

Пирамида называется *усеченной*, если вершина ее отсекается плоскостью, пересекающей все ребра, исходящие из этой вершины.

Призма – это многогранник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все боковые грани – прямоугольники или параллелограммы (рис. 121, б).

Призму называют *прямой*, если ребра ее перпендикулярны к плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, призму называют *параллелепипедом*.

5.1.1. Построение проекций многогранников

Чтобы выполнить построение ортогональных проекций многогранника, достаточно построить проекции его вершин. Соединив вершины прямыми линиями, получим проекции ребер и граней многогранника.

Пример 5.1. Построить проекции правильной четырехугольной пирамиды *SABCD*, поставленной на плоскость общего положения γ. Заданы центр квадрата – основания пирамиды – точка *O*, сторона основания пирамиды *a* и высота пирамиды *H* (рис. 122).

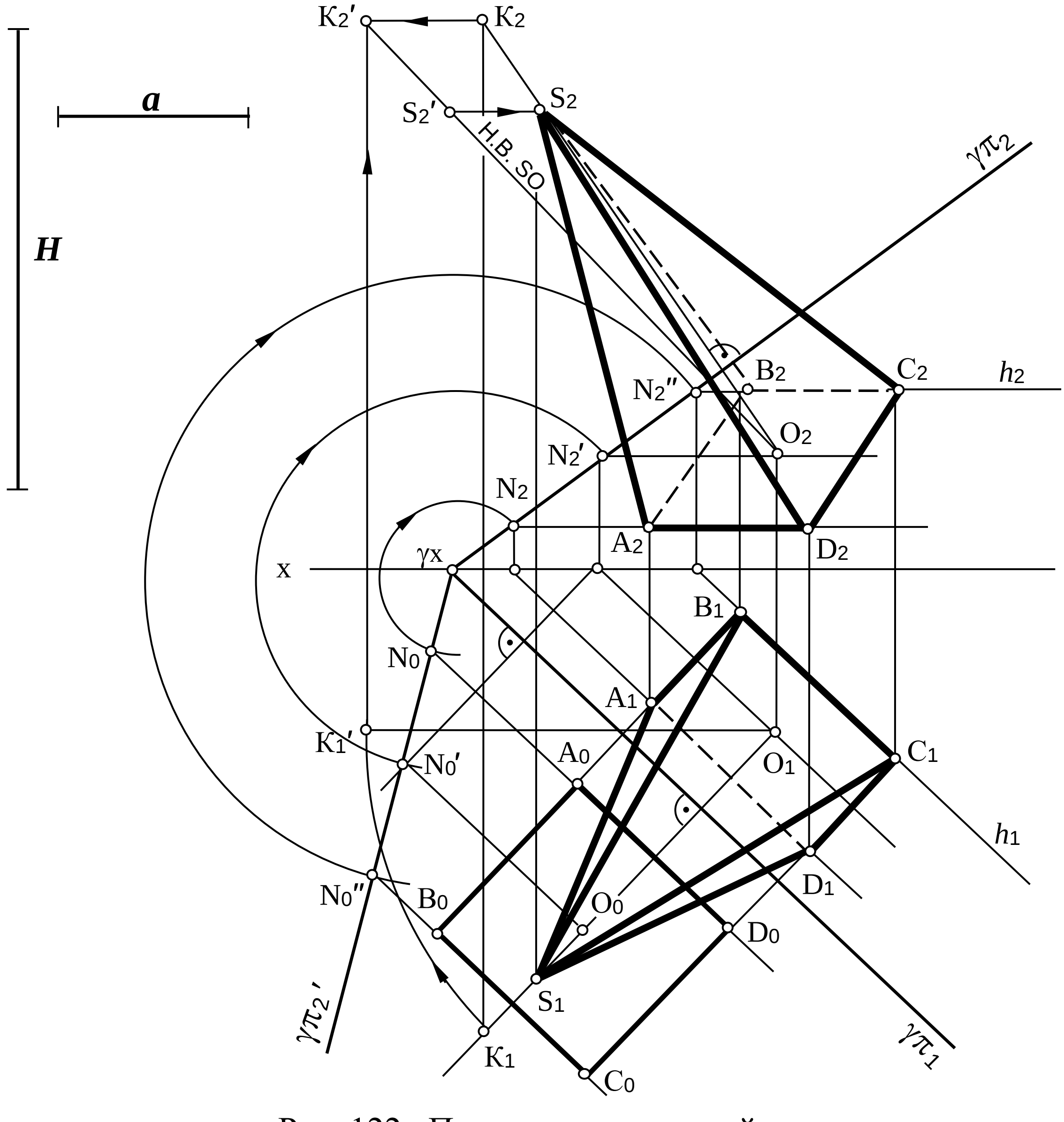


Рис. 122. Построение проекций пирамиды

Вначале совместим плоскость γ с плоскостью π_1, построим в ней по заданному положению точки *O* (O_1, O_2) основание пирамиды $A_0B_0C_0D_0$ – квадрат со стороной *a*.

Через вершины квадрата $A_0B_0C_0D_0$ и его центр O_0 проведем совмещенные с плоскостью π_1 горизонтали N_0D_0, $N_0'O_0$ и $N_0''C_0$, и способом подъема точек в пространство построим проекции $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ основания пирамиды.

Чтобы построить вершину пирамиды *S*, восставим в точке *O* перпендикуляр к плоскости γ и на нем возьмем отрезок *OK* произвольной длины ($O_1K_1 \perp \gamma\pi_1$, $O_2K_2 \perp \gamma\pi_2$). Затем отрезок *OK* вращением вокруг оси, перпендикулярной к π_1, приведем в положение, параллельное плоскости π_2, и на проекции O_2K_2' отложим отрезок O_2S_2', равный заданной высоте пирамиды *H* (Н.В. *SO*). Отметив точку S_2', вернем перпендикуляр в первоначальное положение, получив проекции S_1 и S_2 вершины пирамиды. Проекции пирамиды построим, соединив S_1 и S_2 с вершинами соответствующих проекций основания.

Видимость ребер определяем методом конкурирующих точек.

5.1.2. *Пересечение многогранника прямой линией*

Прямая, пересекающая поверхность геометрического тела, имеет с этой поверхностью две общие точки – *точку входа* и *точку выхода*.

Задача определения точек пересечения прямой с поверхностью геометрического тела решается аналогично задаче нахождения точки пересечения прямой и плоскости.

Пример 5.2. Построить точки пересечения прямой общего положения *EF* с поверхностью неправильной четырехугольной пирамиды *SABCD* (рис. 123).

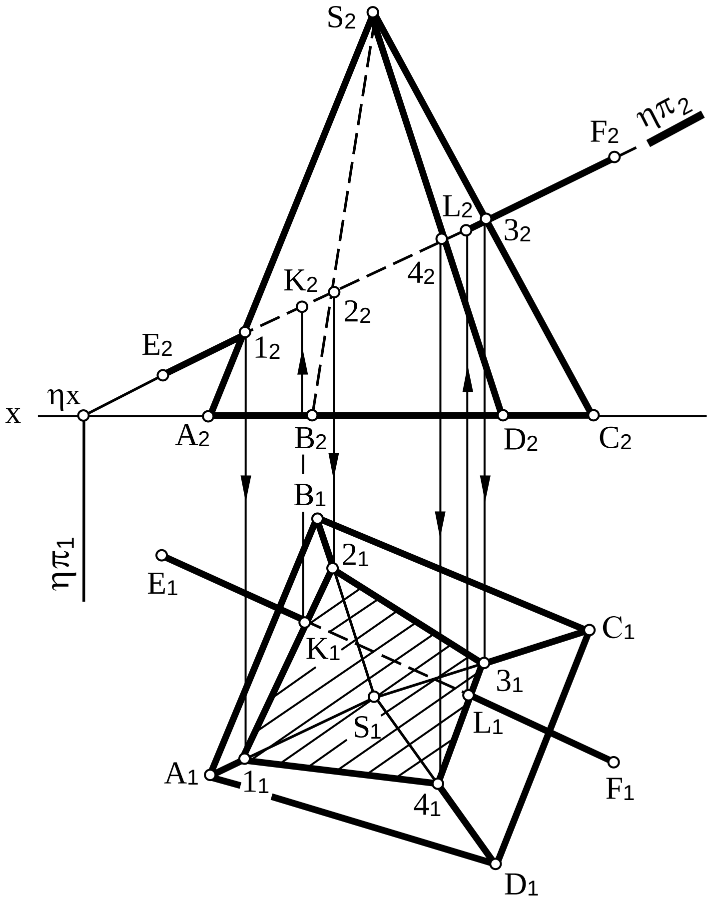


Рис. 123. Пересечение пирамиды прямой линией

Определяем точки пересечения *L* и *K* прямой *EF* (E_1F_1, E_2F_2) с поверхностью пирамиды *SABCD*. Проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость η ($\eta\pi_1$, $\eta\pi_2$), пересекающую поверхность пирамиды по четырехугольнику *1-2-3-4*. Искомые точки *L* (L_1, L_2) и *K* (K_1, K_2) определяем на пересечении прямой *EF* со сторонами (*1-2* и *3-4*) четырехугольника сечения. Сначала определяем горизонтальные проекции точек (L_1, K_1), а затем по линиям связи находим фронтальные проекции точек (L_2, K_2) на фронтальной проекции прямой E_2F_2.

5.1.3. Пересечение многогранника плоскостью частного положения

Сечение многогранника плоскостью представляет собой плоскую фигуру, ограниченную замкнутой ломаной линией, многоугольник, вершины которого (точки пересечения ребер с секущей плоскостью) расположены на ребрах многогранника, а стороны (линии пересечения граней с секущей плоскостью) – на его гранях.

Пример 5.3. Построить проекции и натуральную величину фигуры сечения правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* фронтально-проецирующей плоскостью β (рис. 124).

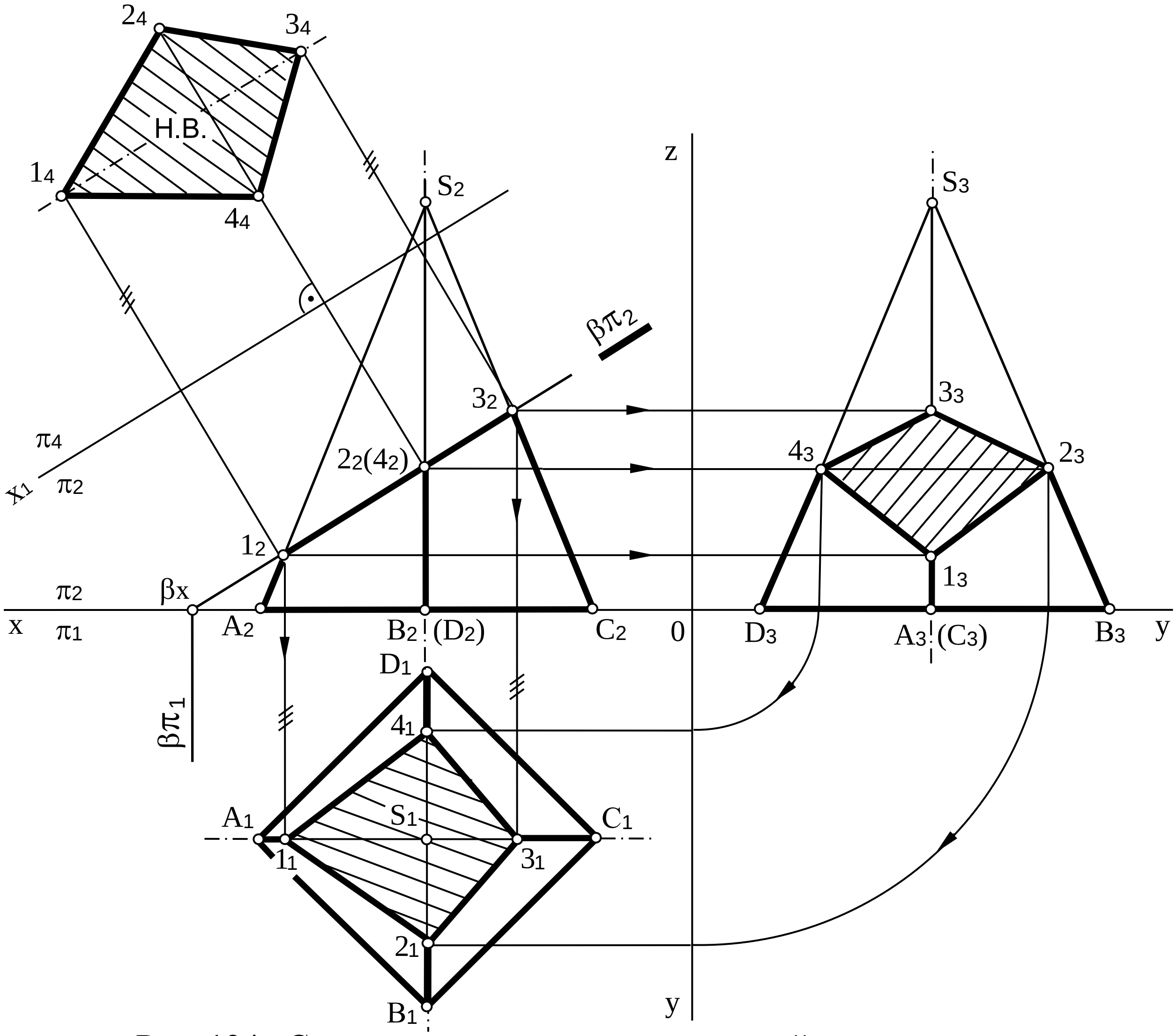


Рис. 124. Сечение пирамиды проецирующей плоскостью

Фронтально-проецирующая плоскость β пересекает четыре боковых ребра пирамиды. Фигурой сечения будет четырехугольник, фронтальная проекция ($1_2 2_2 3_2 4_2$) которого совпадает с фронтальным следом $\beta\pi_2$ (отрезок прямой), так как он обладает собирательным свойством и все фронтальные проекции точек, принадлежащих фигуре сечения (1_2, 2_2, 3_2, 4_2), должны лежать на нем в точках пересечения с соответствующими ребрами. Горизонтальная ($1_1 2_1 3_1 4_1$) и профильная ($1_3 2_3 3_3 4_3$) проекции фигуры сечения будут являться искаженными четырехугольниками, величина которых меньше истинного значения фигуры в пространстве. Натуральную (истинную) величину (Н.В.) фигуры сечения находим способом замены плоскостей проекций (рис. 124) или способом вращения.

5.1.4. Пересечение многогранника плоскостью общего положения

Пример 5.4. Построить проекции и натуральную величину фигуры сечения неправильной трехугольной пирамиды *SABC* плоскостью общего положения δ (рис. 125), а также полную развертку поверхности с нанесением линии сечения (рис. 126).

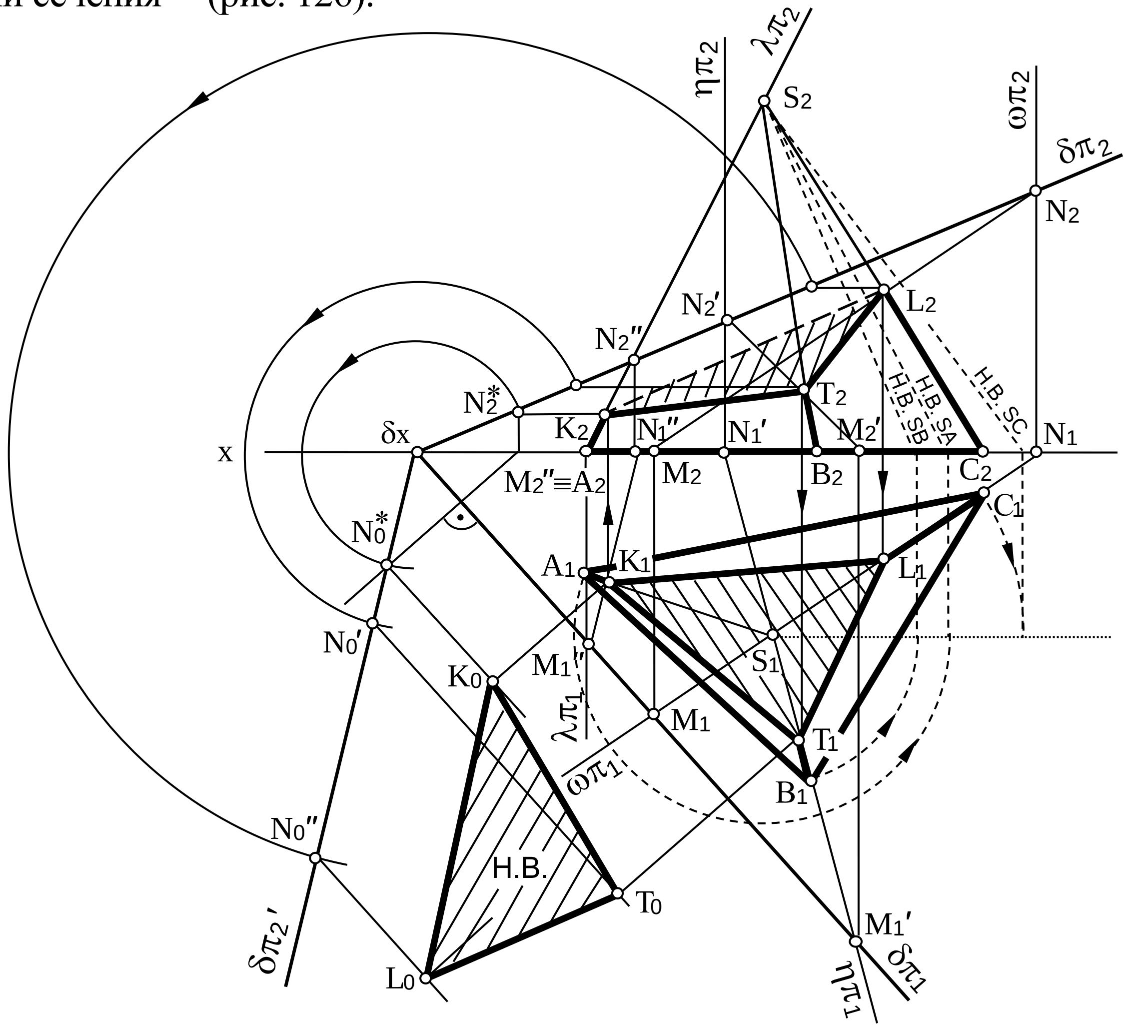


Рис. 125. Сечение пирамиды плоскостью общего положения

Чтобы построить фигуру сечения, определим точки пересечения ребер с плоскостью δ. Для этого заключаем ребро *SC* в горизонтально-проецирующую плоскость ω, которая пересечет плоскость δ по линии *MN* (M_1N_1, M_2N_2). В пересечении фронтальной проекции ребра S_2C_2 с построенной фронтальной проекцией линии пересечения плоскостей M_2N_2 получим фронтальную проекцию точки пересечения ребра *SC* с плоскостью δ – L_2. Горизонтальную проекцию (L_1) получим обычным проецированием. Аналогично определена и точка *T* (T_1, T_2) пересечения ребра *SB* с плоскостью δ с использованием горизонтально-проецирующей плоскости η.

Для нахождения точки встречи ребра *SA* с плоскостью δ вводим фронтально-проецирующую плоскость λ. Фронтальная проекция линии пересечения ($M_2''N_2''$) этой плоскости с плоскостью δ совпадает с проекцией S_2A_2. Пересечение горизонтальной проекции ($M_1''N_1''$) линии пересечения плоскостей *M ''N ''* ($M_1''N_1''$, $M_2''N_2''$) с горизонтальной проекцией ребра S_1A_1 дает горизонтальную проекцию точки *K* (K_1) встречи ребра *SA* с плоскостью δ. Соединив точки K_1, L_1, T_1 и K_2, L_2, T_2, получим горизонтальную и фронтальную проекции фигуры сечения.

Натуральную (истинную) величину (Н.В.) фигуры сечения ($K_0L_0T_0$) определяем способом совмещения плоскости δ с плоскостью π_1.

5.1.5. *Развертка поверхности многогранника*

Разверткой поверхности многогранника называется плоская фигура, полученная совмещением всех его граней с плоскостью чертежа. Площадь полученной фигуры равна поверхности развернутого многогранника.

Каждый многогранник имеет несколько вариантов развертки.

Построение развертки боковой поверхности пирамиды сводится к последовательному построению по трем сторонам треугольников, каждый из которых равен натуральной величине соответствующей боковой грани пирамиды (рис. 126) – *способ триангуляции*.

Для построения развертки пирамиды *SABC*, изображенной на рис. 126, определим натуральные (истинные) размеры ребер методом вращения, повернув их вокруг оси, совпадающей с высотой пирамиды (рис. 125), до положения, параллельного плоскости π_2. Таким образом, получим на фронтальной проекции их натуральные величины в виде отрезков (Н.В. *SA,* Н.В. *SB,* Н.В. SC), рис. 125. Можно определить Н.В. ребер и способом перемены плоскостей проекций.

С помощью засечек циркулем отложим в плоскости чертежа натуральные размеры ребер, построив по трем сторонам *SA*, *SC* и *AC* грань пирамиды *SAC* и пристроим к ней последовательно смежные грани *SCB* и *SBA*. Полученная фигура *SABCA* будет разверткой боковой поверхности пирамиды. Для получения полной развертки поверхности пирамиды необходимо пристроить натуральную величину основания пирамиды, которая равна горизонтальной проекции $A_1B_1C_1$. Затем на развертку нанесем линию пересечения с плоскостью δ. Для этого на ребрах S_0A_0, S_0B_0, S_0C_0 отметим точки K_0, L_0, T_0, в которых секущая плоскость пересекает ребра пирамиды, и, соединив их, в результате получим линию сечения ($K_0L_0T_0K_0$) на развертке.

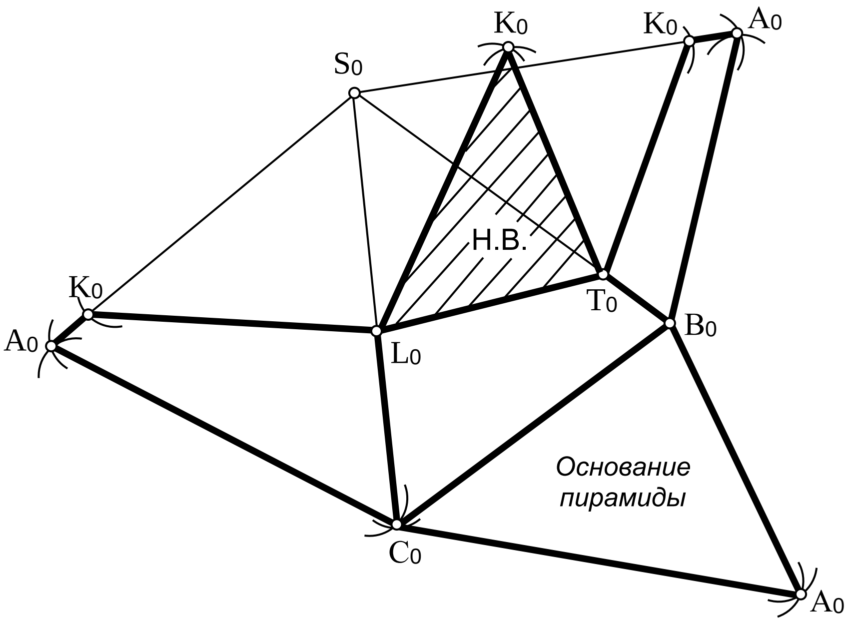


Рис. 126. Развертка поверхности пирамиды

Лекция 8

5.2. Криволинейные тела. Тела вращения

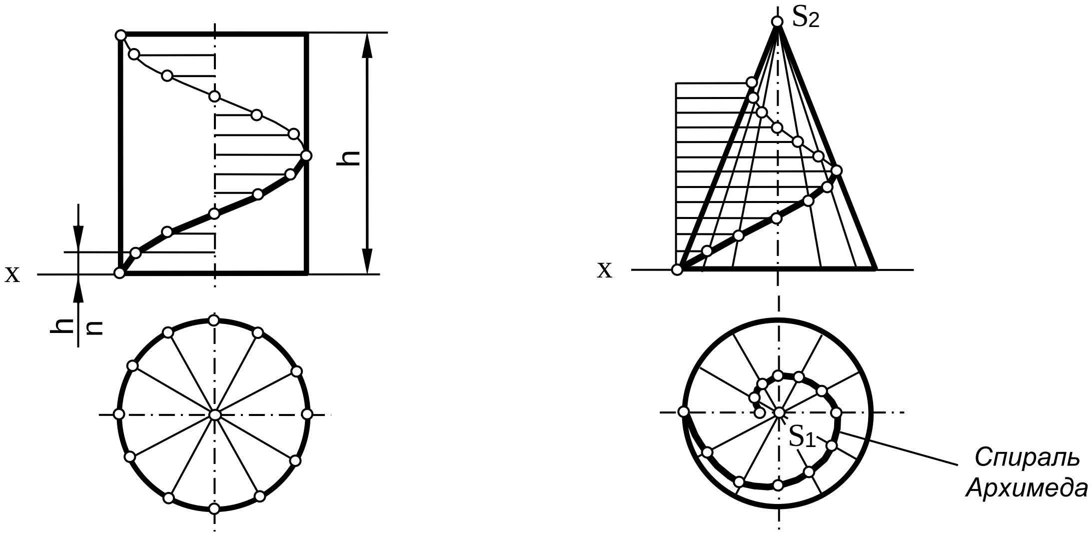
5.2.1. Кривые линии

Кривые линии могут быть ***плоские***, т.е. такие, которые всеми своими точками лежат в одной плоскости (окружность, эллипс, парабола и др.), и ***пространственные***, т.е. такие, которые не могут быть совмещены с плоскостью всеми своими точками (винтовая линия).

Цилиндрическую винтовую линию можно рассматривать как траекторию движения точки *A*, которая равномерно вращается вокруг оси и одновременно равномерно перемещается вдоль образующей (рис. 127, а).

Различают *правую* и *левую* винтовую линии. Расстояние *h*, на которое точка *A* переместится за один оборот вдоль образующей, называется *шагом винтовой линии*.

Конической винтовой линией называют траекторию точки, которая движется равномерно по образующей конуса вращения, а образующая совершает вращательное движение вокруг оси конуса с постоянной угловой скоростью (рис. 127, б).



а) Цилиндрическая б) Коническая

Рис. 127. Пространственные винтовые линии

5.2.2. Кривые поверхности

Криволинейными телами называются геометрические тела, образованные кривыми поверхностями.

Кривая поверхность в начертательной геометрии представляет собой совокупность последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону. Линия, образующая своим движением поверхность, называется *образующей*. Образующая может быть *прямой* и *кривой*.

Кривые поверхности по виду образующей делят на два класса:

1. *Линейчатые поверхности*, образованные движением прямой линии (цилиндр, конус, косая плоскость, коноид, цилиндроид, винтовые поверхности).

2. *Нелинейчатые поверхности*, образованные движением кривой линии (шар, тор, эллипсоид, гиперболоид и параболоид вращения).

Линейчатые поверхности делятся, в свою очередь, на *развертываемые* (цилиндр, конус) и *неразвертываемые*, или *косые* (косая плоскость, коноид, цилиндроид, винтовые поверхности).

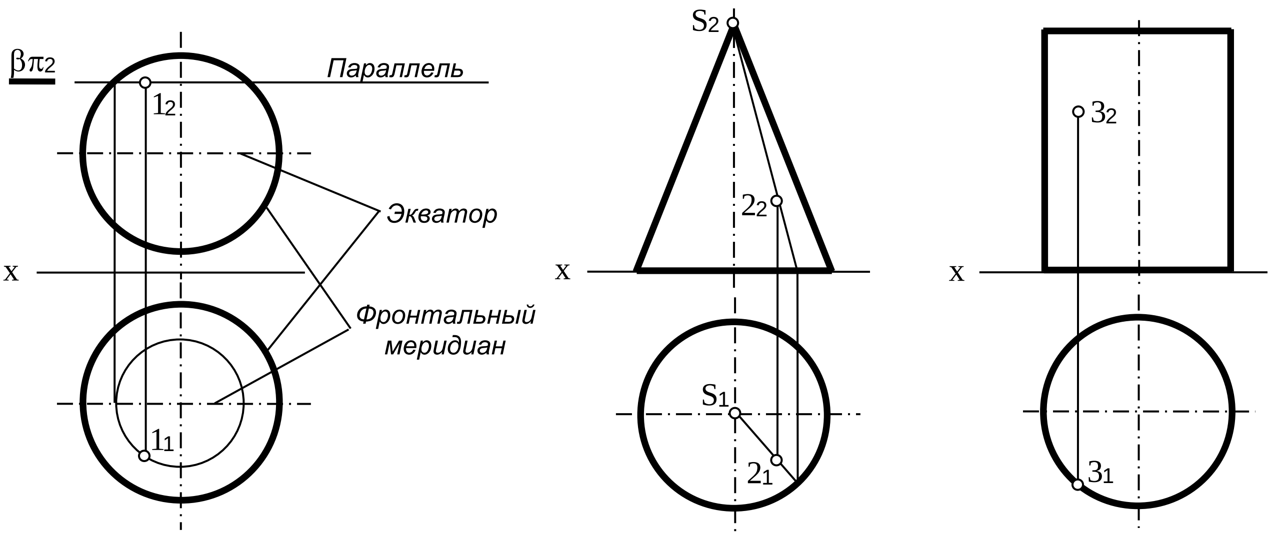
К кривым поверхностям относятся *поверхности вращения*, которые образуются вращением некоторой линии около неподвижной прямой, называемой осью поверхности. Каждая точка этой образующей описывает около оси окружность и, следовательно, любая плоскость, перпендикулярная к оси, пересечет поверхность вращения по окружности.

Сфера *(шаровая поверхность)* образуется вращением окружности вокруг ее диаметра (рис. 128, а). Проекциями ее являются окружности.

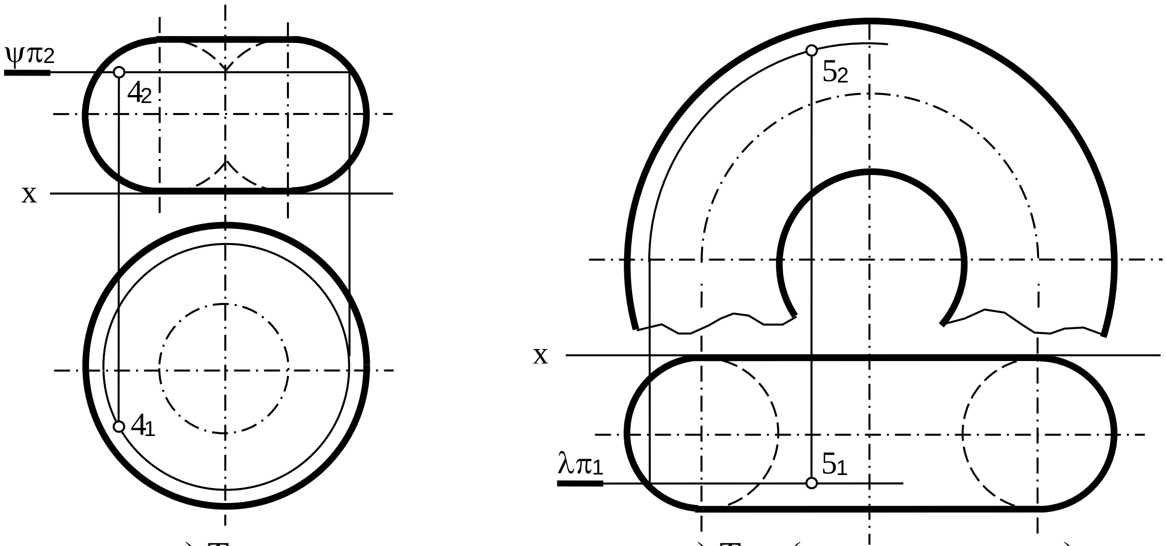
Конус вращения – частный случай конической поверхности, когда направляющая – окружность, а вершина конуса находится на перпендикуляре к плоскости окружности, восставленном из ее центра (рис. 128, б).

Цилиндр вращения – частный случай цилиндрической поверхности, когда направляющая – окружность, а образующая – прямая линия, перпендикулярная к плоскости этой окружности (рис. 128, в).

Тор образуется вращением круга вокруг его хорды (*закрытый*), рис. 128, г или вокруг оси, не пересекающей круга, но лежащей в его плоскости; в этом случае тор называется *круговым кольцом* (*открытый*), рис. 128, д.



а) Шар б) Конус в) Цилиндр



г) Тор д) Тор (круговое кольцо)

Рис. 128. Поверхности вращения

5.2.3. *ФИГУРЫ СЕЧЕНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

В результате пересечения поверхности тела плоскостью получается замкнутая кривая или ломаная линия (одна или несколько).

В зависимости от направления секущей плоскости в сечении прямого кругового конуса можно получить такие фигуры (рис. 129, 130):

1. *Точку S*, когда плоскость проходит через вершину и не встречает образующих.

2. *Одну образующую* (прямую), когда плоскость касается конуса по образующей.

3. *Две образующие* (прямые) или *треугольник*, когда плоскость проходит через вершину конуса и пересекает основание (вырожденная гипербола, прямолинейное сечение).

4. *Окружность* – секущая плоскость перпендикулярна оси вращения конуса и параллельна основанию (частный случай эллипса).

5. *Эллипс* (*полный* или *усеченный*) – секущая плоскость наклонена к оси конуса и пересекает все его образующие. *Усеченный* эллипс получается тогда, когда секущая плоскость пересекает основание.

6. *Параболу* – секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса.

7. *Гиперболу* – секущая плоскость параллельна двум образующим конуса.

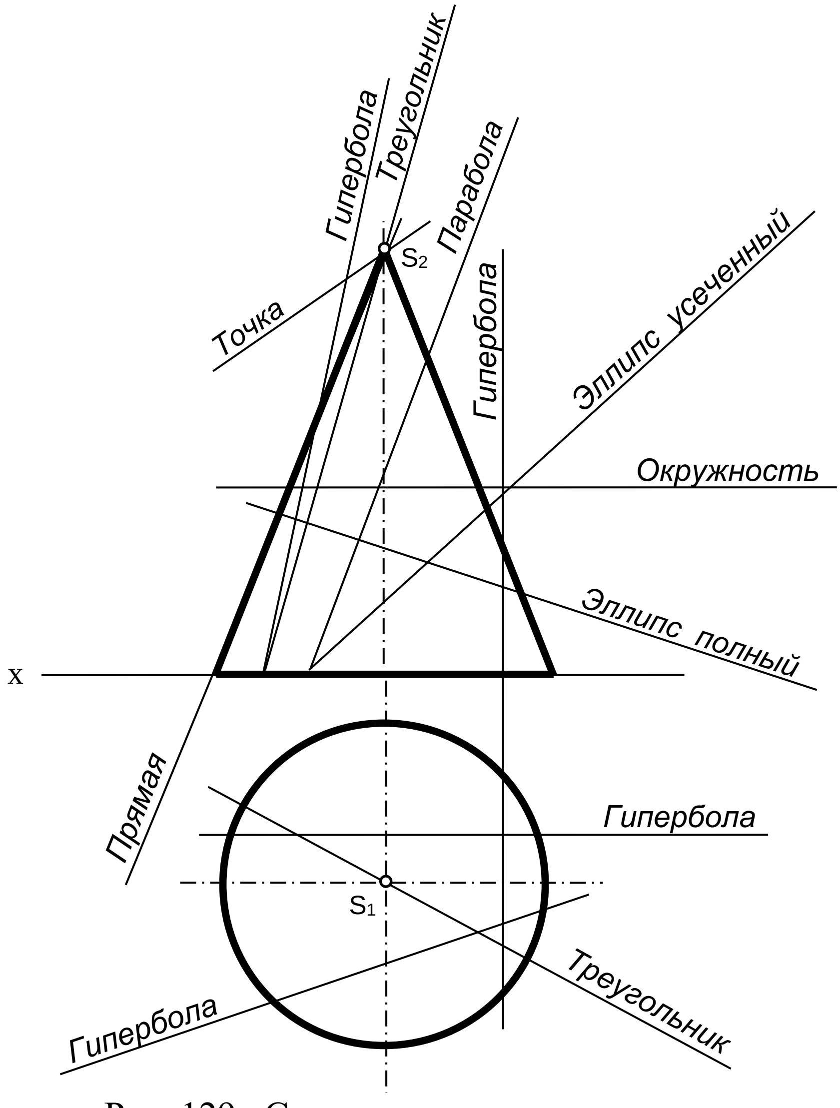
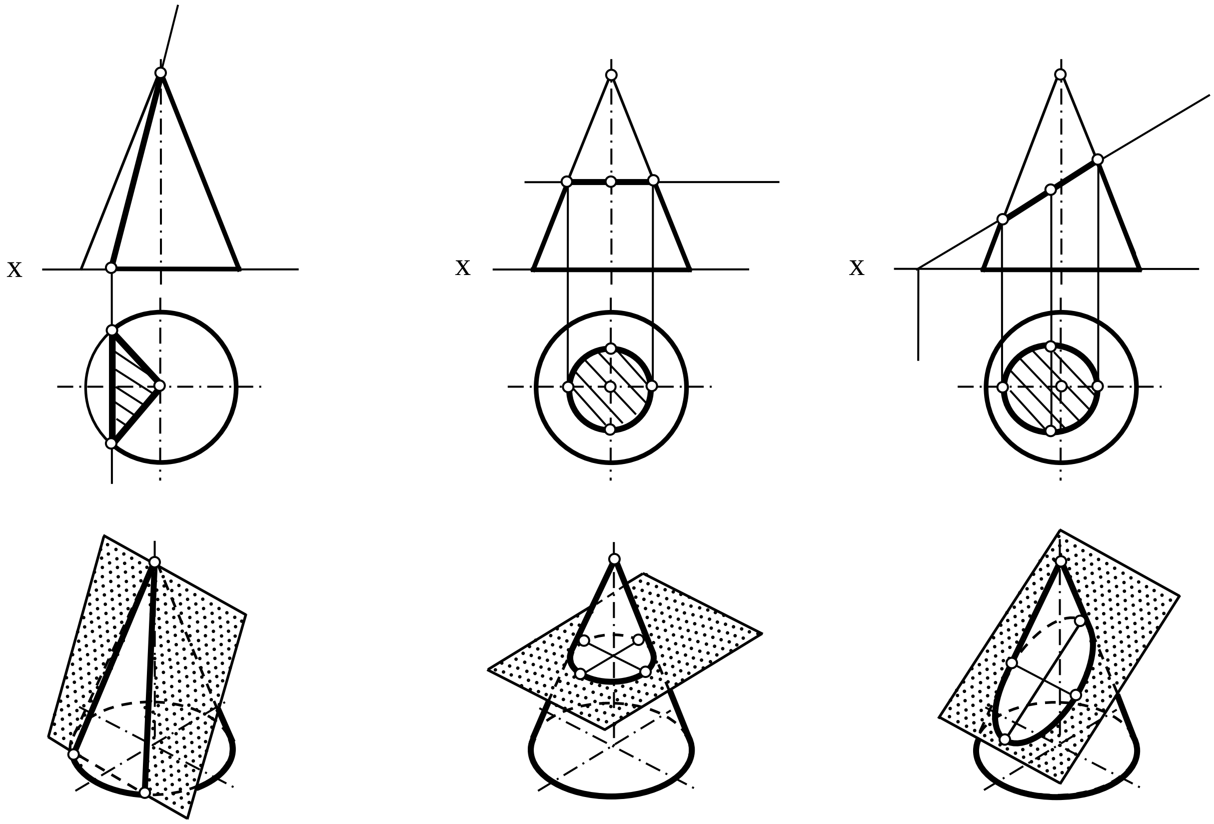
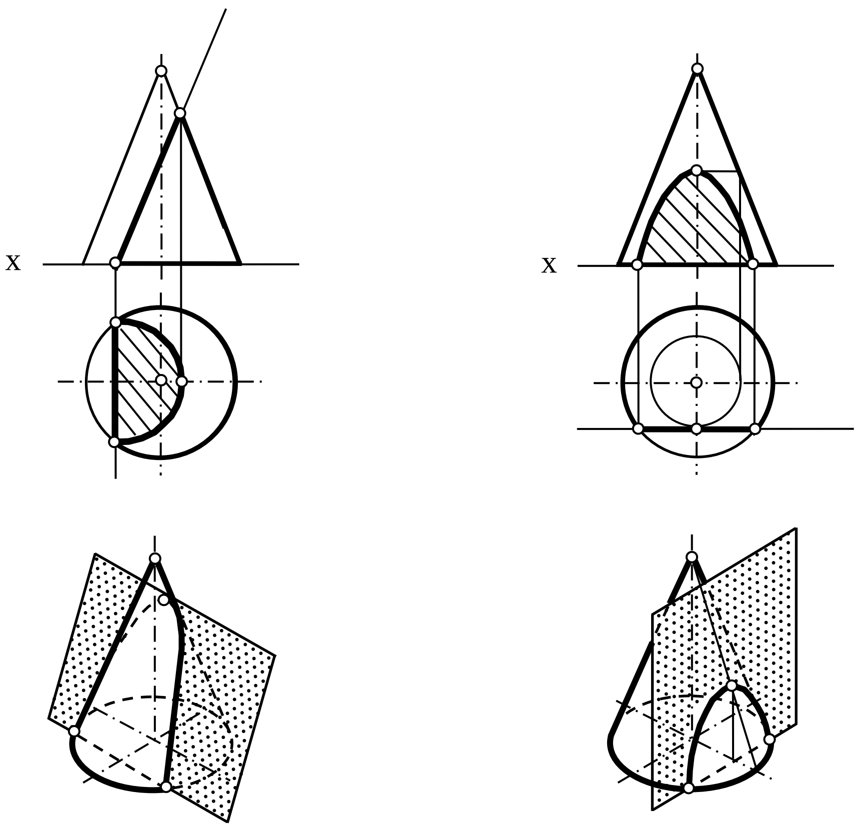


Рис. 129. Сечение конуса плоскостью



а) Треугольник б) Окружность в) Эллипс



г) Парабола д) Гипербола

Рис. 130. Плоские прямолинейная (а) и криволинейные (б-д) фигуры сечения

5.2.4. *Пересечение боковой поверхности прямого кругового конуса прямой линией*

Задача на определение точек пересечения прямой линии с кривой поверхностью решается в той же последовательности, что и с поверхностью многогранника, с той лишь разницей, что в данном случае рекомендуется применять в качестве вспомогательных плоскостей плоскости общего положения, пересекающие поверхности тел по образующим.

Пример 5.5. Определить точки пересечения прямой общего положения *AB* с поверхностью прямого кругового конуса (рис. 131).

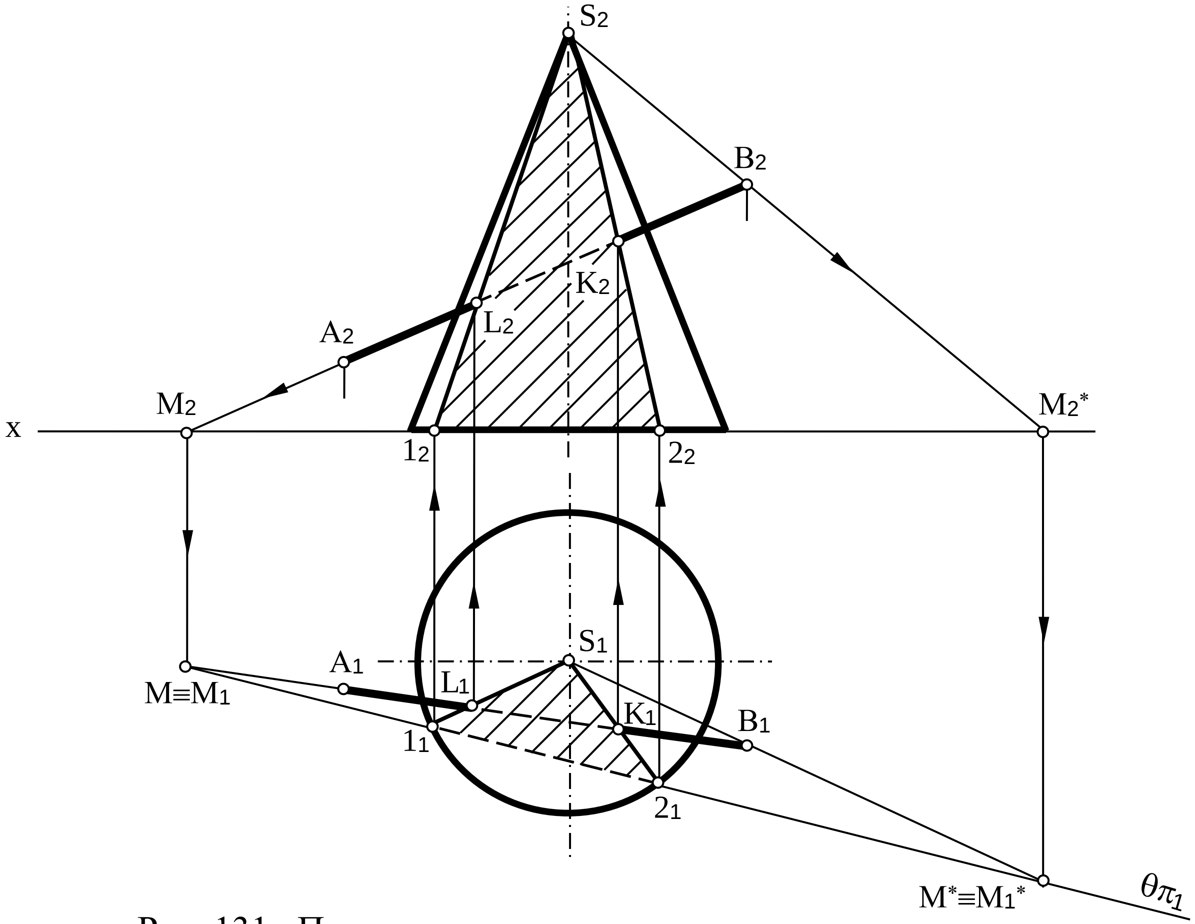


Рис. 131. Прямая, пересекающая поверхность конуса

Отметим, что наиболее простой фигурой сечения плоскостью, проходящей через вершину конуса, будет треугольник. Для определения точек пересечения *K* и *L* прямой *AB* с поверхностью конуса проводим дополнительную плоскость общего положения θ, определяющуюся двумя пересекающимися прямыми *SB* и *AB* и проходящую через вершину *S*. Вспомогательная плоскость θ пересекает конус по треугольнику *1S2*. Чтобы определить горизонтальный след $\theta\pi_1$, вначале определяем горизонтальный след *M* (M_1, M_2) прямой *AB*, а также горизонтальный след M^* (M_1^*, M_2^*) прямой *SB*. Затем, учитывая, что следы прямых, принадлежащих плоскости, лежат на одноименных следах этой плоскости, соединяем точки *M* и M^* прямой линией, получаем горизонтальный след $\theta\pi_1$ плоскости θ. На пересечении прямой *AB* с образующими *S1* и *S2*, ограничивающими контур фигуры сечения, будут лежать искомые точки *K* и *L*.

5.2.5. Пересечение прямого кругового конуса плоскостью частного положения

Пример 5.6. Построить сечение конуса фронтально-проецирующей плоскостью γ и найти натуральную величину фигуры сечения (рис. 132).

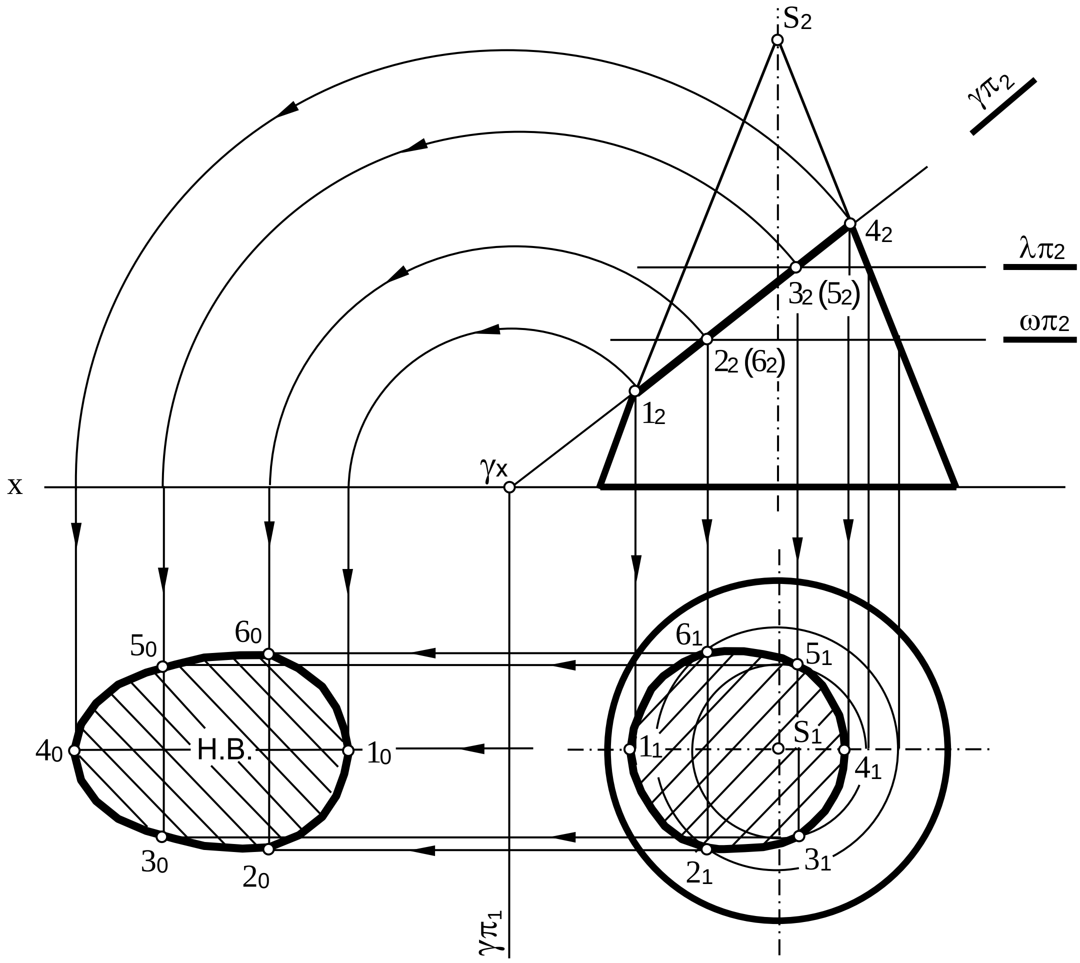


Рис. 132. Сечение конуса фронтально-проецирующей плоскостью

В данном примере секущая фронтально-проецирующая плоскость γ пересекает все образующие конуса, что говорит о том, что искомая фигура сечения ограничена эллипсом, лежащим на боковой поверхности конуса. Фронтальная проекция этого сечения $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2$ есть отрезок *1-4* прямой линии, совпадающей с фронтальным следом $\gamma\pi_2$, так как он обладает собирательным свойством. Характерные (*опорные*) точки *1* (низшая) и *4* (наивысшая) эллипса лежат в пересечении крайних (*очерковых*) образующих конуса с секущей плоскостью γ. Промежуточные точки *2, 3, 5* и *6* построены по признаку принадлежности точек поверхности конуса с использованием горизонталей (окружностей), образованных при пересечении конуса дополнительными горизонтальными секущими плоскостями λ (точки *3* и *5*) и ω (точки *2* и *6*). После проведенных построений соединяем плавной кривой горизонтальные проекции точек 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1 и 6_1.

Методом вращения (совмещения фронтального следа плоскости $\gamma\pi_2$ с π_1) определяем натуральную величину (Н.В.) фигуры сечения (эллипса) $1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0$.

5.2.6. Пересечение прямого кругового конуса плоскостью общего положения

Пример 5.7. Построить проекции фигуры сечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения β (рис. 133) и дать развертку боковой поверхности с нанесением линии сечения (рис. 134)

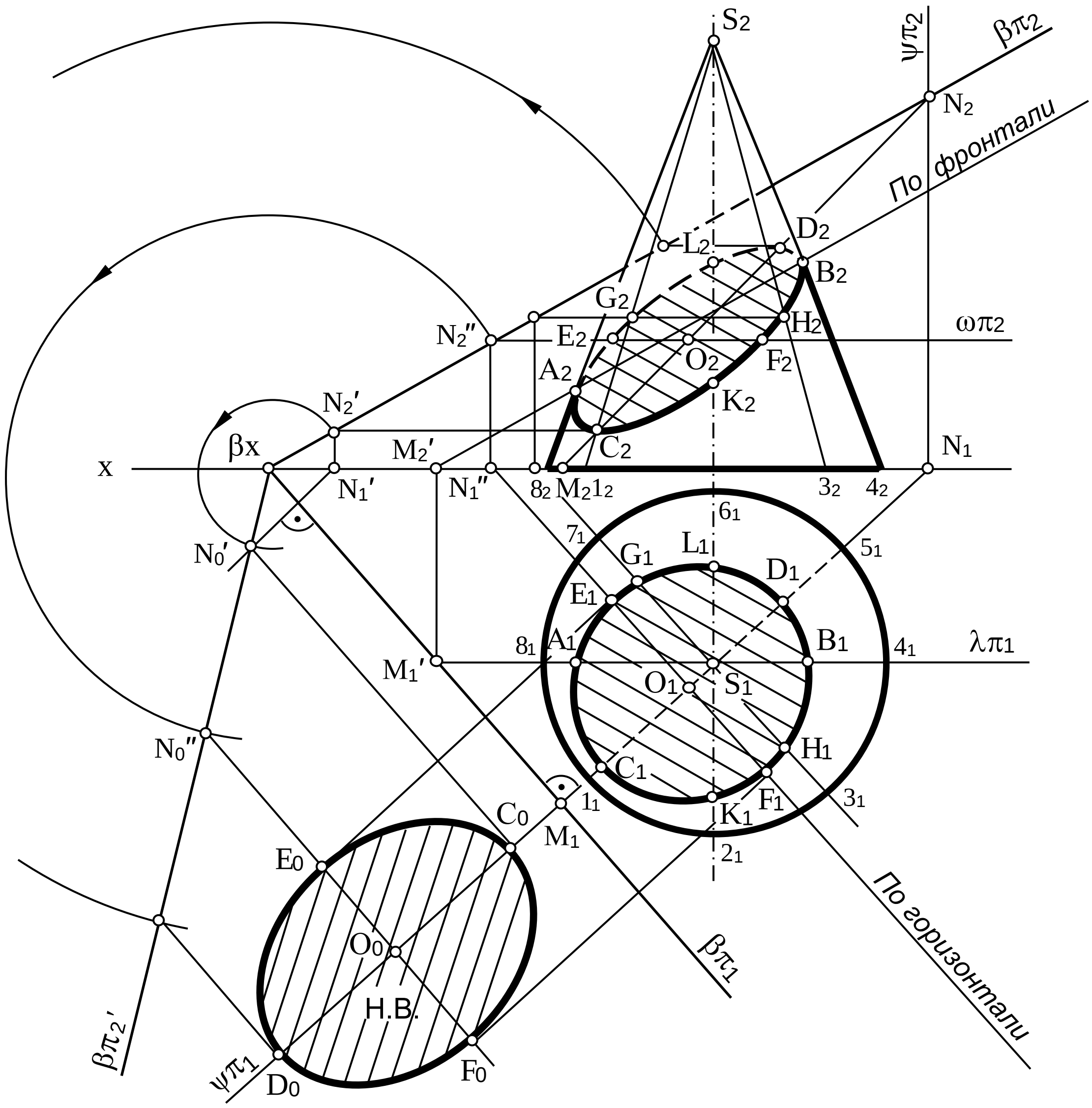


Рис. 133. Сечение конуса плоскостью общего положения

Заданная секущая плоскость β пересекает конус по эллипсу. Определяем характерные (*опорные*) точки: высшую и низшую точки, определяющие большую ось эллипса *CD*; точки *E* и *F*, определяющие малую ось эллипса; точки *A* и *B*, разграничивающие видимость линии пересечения; точки *K* и *L*, наиболее и наименее удаленные от плоскости π_2.

Разделим основание конуса на 8 равных частей, а затем для определения высшей и низшей точек сечения через ось конуса перпендикулярно следу $\beta\pi_1$ проведем вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость ψ ($\psi\pi_1$, $\psi\pi_2$). Эта плоскость рассекает конус по двум образующим *S1* и *S5*, а плоскость β – по линии *MN*, которая в пересечении с образующей *S1* даст низшую точку *C*, а с образующей *S5* – высшую точку *D*. Отрезок *CD* (C_1D_1, C_2D_2) является большой осью эллипса.

Для построения проекции малой оси эллипса проведем горизонтальную плоскость ω ($\omega\pi_2$) через точку O (O_1, O_2) – середину большой оси, разделив CD пополам. Плоскость ω рассечет конус по окружности, а плоскость ψ – по горизонтали, которая в пересечении с окружностью даст точки E и F. Проекция E_1F_1 представляет натуральную величину малой оси эллипса.

Точки, разграничивающие видимость, определяем с помощью фронтальной плоскости λ ($\lambda\pi_1$), проведенной через ось и *очерковые* (крайние правую и левую) образующие конуса. Плоскость λ пересекает заданную плоскость β по фронтали, проходящей через точку M' (M_1', M_2').

Фронталь пересекает очерковые образующие конуса $S8$ и $S4$ в точках A и B, которые делят фронтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

Для нахождения промежуточных точек (G и H) линии удобно пользоваться горизонтальными вспомогательными плоскостями типа ω, которые располагаем между высшей и низшей точками сечения.

Натуральный вид сечения найдем совмещением секущей плоскости β с π_1.

5.2.7. Развертка поверхности тел вращения

Разверткой поверхности конуса называют плоскую фигуру, полученную путем совмещения кривой поверхности конуса с плоскостью.

Развертка боковой поверхности конуса вращения представляет собой сектор круга, радиус которого равен длине образующей конуса L, а длина дуги равна длине окружности основания конуса (рис. 134).

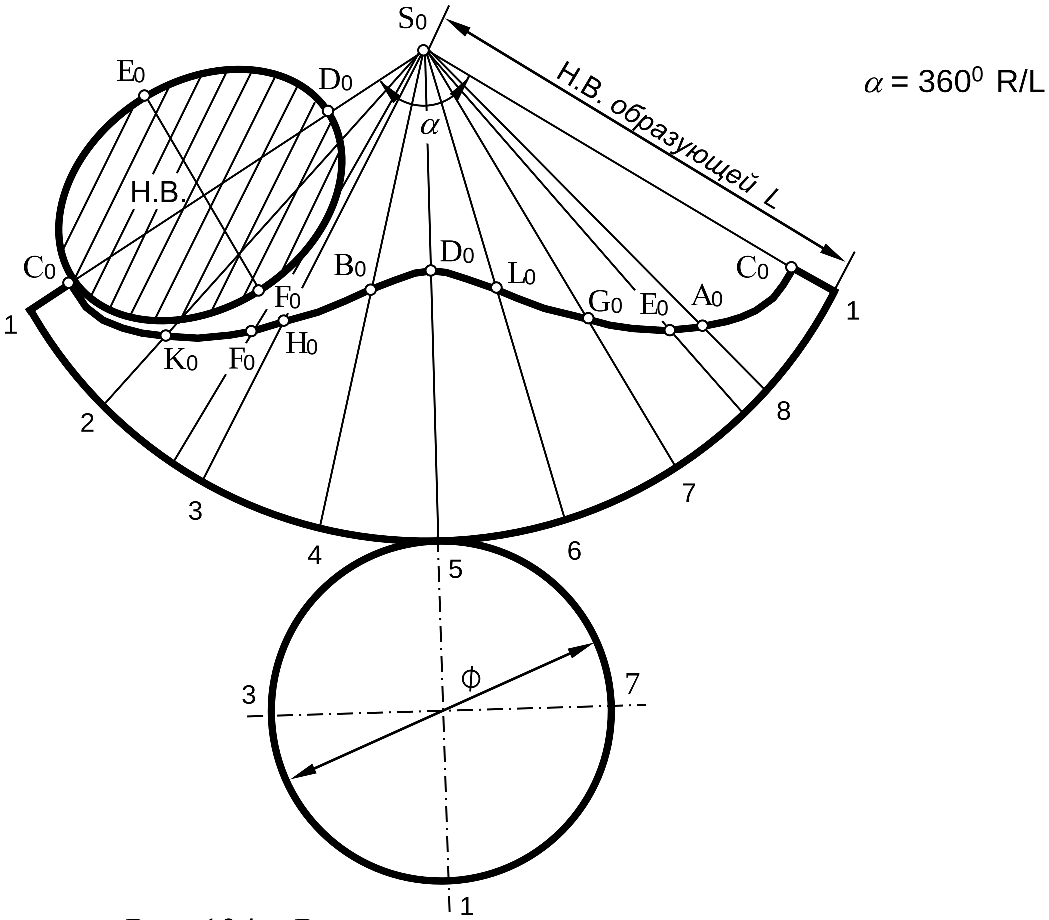


Рис. 134. Развертка поверхности конуса

Выполняем построение полной развертки (рис. 134) усеченной части (большей) поверхности конуса, разрезая конус по образующей *1S*.

Обычно, чтобы избежать вычислений, связанных с определением длины дуги сектора, в основание конуса вписывают правильный 8-угольник (рис. 133, 134) или 12-угольник и затем, описав из произвольной точки S_0 дугу радиуса *L*, засекают циркулем последовательно 8 (или 12) дуг, хорды которых равны стороне 8-угольника (12-угольника).

Таким образом, развертку боковой поверхности прямого кругового конуса заменяют с достаточной для практики точностью разверткой *n*-гранной пирамиды, вписанной в данный конус.

Точки *A* и *B* (*опорные* точки), лежащие на крайних (*очерковых*) образующих, переносят на развертку непосредственно, так как прямые *S-8* и *S-4* – фронтальные, а отрезки S_2A_2 и S_2B_2 выражают натуральные (истинные) величины отсеченных отрезков образующих (величины *L*).

Для определения натуральных величин отрезков при построении остальных (*промежуточных*) точек сечения можно использовать метод вращения, метод прямоугольного треугольника или метод замены плоскостей проекций.

Используя *метод вращения*, надо образующие, на которых эти точки лежат, предварительно повернуть вокруг оси до положения, параллельного π_2 (фронтальной плоскости проекций), т.е. до совпадения с образующей S_24_2 или S_28_2, и взять расстояния от вершины конуса до соответствующих точек.

Переносим последовательно длины всех отрезков на развернутую боковую поверхность конуса. Затем концы этих отрезков соединяем плавной кривой, которая является *линией сечения*. В результате получаем развертку усеченного конуса. Пристраиваем к развертке нижнее основание конуса (окружность) и верхнее основание (эллипс) – Н.В. сечения конуса.

Лекция 9

5.3. Взаимное пересечение поверхностей геометрических тел

Пересекаясь между собой, поверхности тел образуют общую линию пересечения, называемую *линией пересечения.*

Для построения линии пересечения двух поверхностей необходимо найти ряд общих точек, принадлежащих поверхностям, а затем соединить эти точки в определенной последовательности.

В случае пересечения многогранников линия пересечения будет представлять собой *пространственную ломаную* замкнутую линию, в случае пересечения двух кривых поверхностей – *пространственную кривую*.

Различают два вида пересечения поверхностей в зависимости от взаимного расположения пересекающихся тел: *полное* и *неполное*.

Полное ("*проницание*"), когда все образующие или ребра одной поверхности соответственно пересекаются с другой поверхностью, т.е. одно тело проходит через другое, целиком проницает его. В этом случае линия пересечения представляет собой две замкнутые линии: *контур входа* одного тела в другое и *контур выхода* из него.

Неполное ("*врезывание*"), когда часть образующих или ребер боковых поверхностей не участвуют в пересечении, т.е. одно тело не полностью проходит через другое тело. В этом случае линия пересечения образует одну пространственную замкнутую линию.

Общий способ построения линии пересечения двух поверхностей носит название *способа вспомогательных секущих поверхностей* или *способа посредников*. В качестве вспомогательных могут быть взяты плоскости частного и общего положения, шаровые поверхности и т.д. (рис. 135).

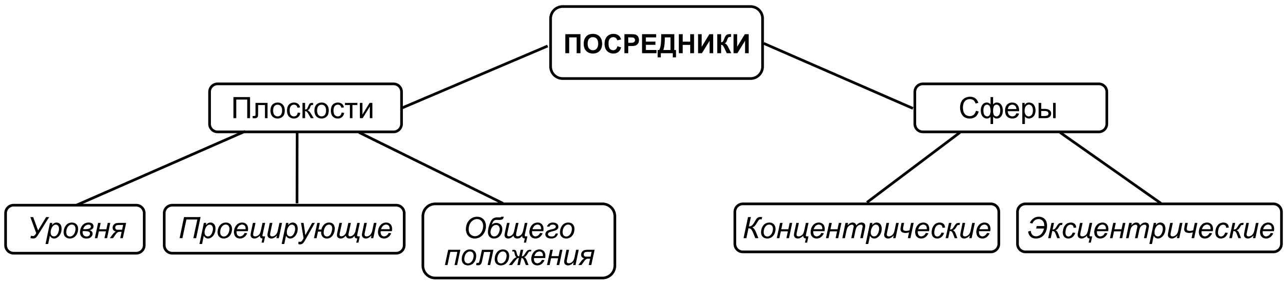


Рис. 135. Вспомогательные секущие поверхности

Обычно построение линии пересечения начинают с определения *характерных* (*опорных или особых*) точек. К ним относятся точки, расположенные на *очерковых* образующих поверхностей, которые обычно делят линию пересечения на видимую и невидимую части (границы видимости линий пересечения на плоскостях π_1, π_2 и π_3). Нужно определить также *экстремальные* точки – *высшую* и *низшую* точки кривой, *крайние* – *правую* и *левую* точки, а также точки *перегиба* кривой и точки *наибольшей ширины* кривой. При пересечении поверхностей вращения это еще и точки пересечения главных меридианов и экваторов. Все остальные точки будут *промежуточными*.

Определив указанным приемом необходимое количество точек, соединяют их в одну или две замкнутые линии.

5.3.1. Пересечение поверхностей многогранников

Два многогранника могут пересекаться по одной или двум *пространственным ломаным замкнутым* линиям, для построения которых находят сначала точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Построенные точки соединяют в определенном порядке прямыми; получается ломаная линия, звенья которой представляют собой линии пересечения граней одного многогранника с гранями другого. Эта замкнутая ломаная и будет линией пересечения двух многогранников.

При построении линии пересечения поверхностей, ограниченных плоскостями, следует держаться следующего правила: соединять прямыми можно только те точки, которые лежат на одних и тех же гранях первого и второго многогранников.

Следует также иметь в виду, что видимыми линиями в каждой проекции будут линии пересечения видимых граней.

Задача на построение линии пересечения двух многогранников сводится к решению задачи на пересечение прямой линии с многогранником.

Полное пересечение многогранников

Пример 5.8. Построить линию пересечения прямой призмы *DEF*, стоящей на плоскости π_1, с пирамидой *SABC* (рис. 136).

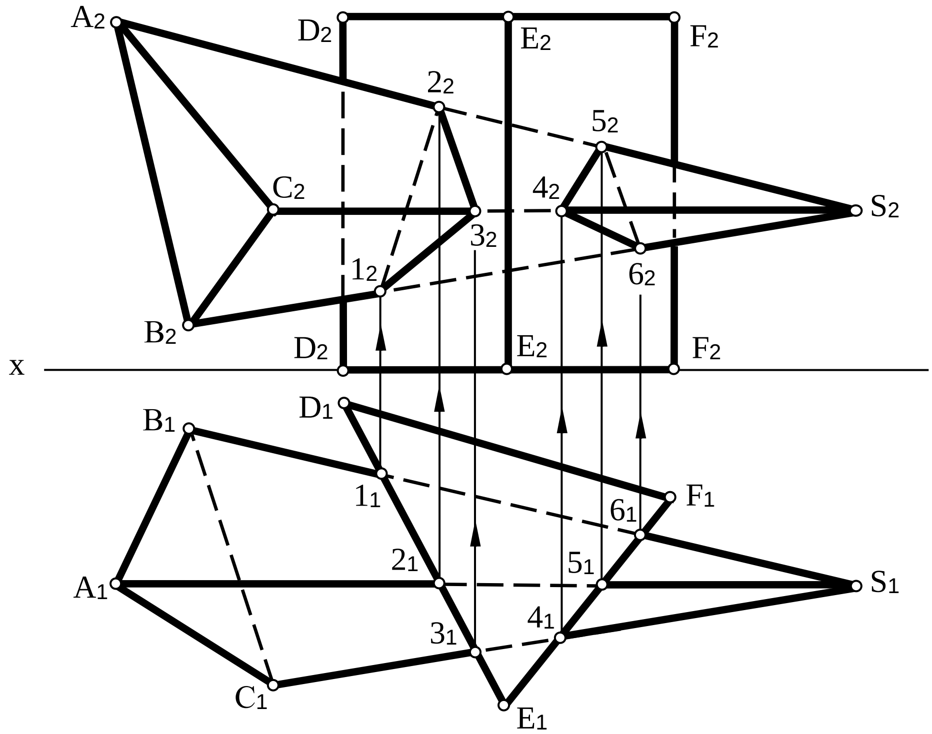


Рис. 136. Полное пересечение ("*проницание*")

Боковая поверхность призмы – горизонтально-проецирующая, поэтому горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией этой поверхности. На горизонтальных проекциях ребер призмы видно, что вершины *D*, *E*, *F* расположены вне контура горизонтальной проекции пирамиды, следовательно, не пересекают поверхности пирамиды.

Отметив горизонтальные проекции 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1 точек пересечения ребер пирамиды *SA*, *SB*, *SC* с гранями призмы, находим их фронтальные проекции 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2 при помощи вертикальных линий связи на фронтальных проекциях ребер.

Теперь соединим точки (с учетом видимости), лежащие на одной и той же грани, прямыми в следующем порядке: 1_2 - 2_2 (невидима), 2_2 - 3_2, 3_2 - 1_2 – ломаная замкнулась. Теперь вторая ломаная 4_2 - 5_2, 5_2 - 6_2 (невидима), 6_2 - 4_2. Таким образом, мы получим две замкнутые линии: 4_2 - 5_2 - 6_2 - 4_2 – ломаную линию *входа* пирамиды в призму и 1_2 - 2_2 - 3_2 - 1_2 – *выхода* из нее пирамиды.

Неполное пересечение многогранников

Пример 5.9. Построить линию пересечения пирамиды *SABCD*, стоящей на плоскости π_1, и прямой призмы (рис. 137).

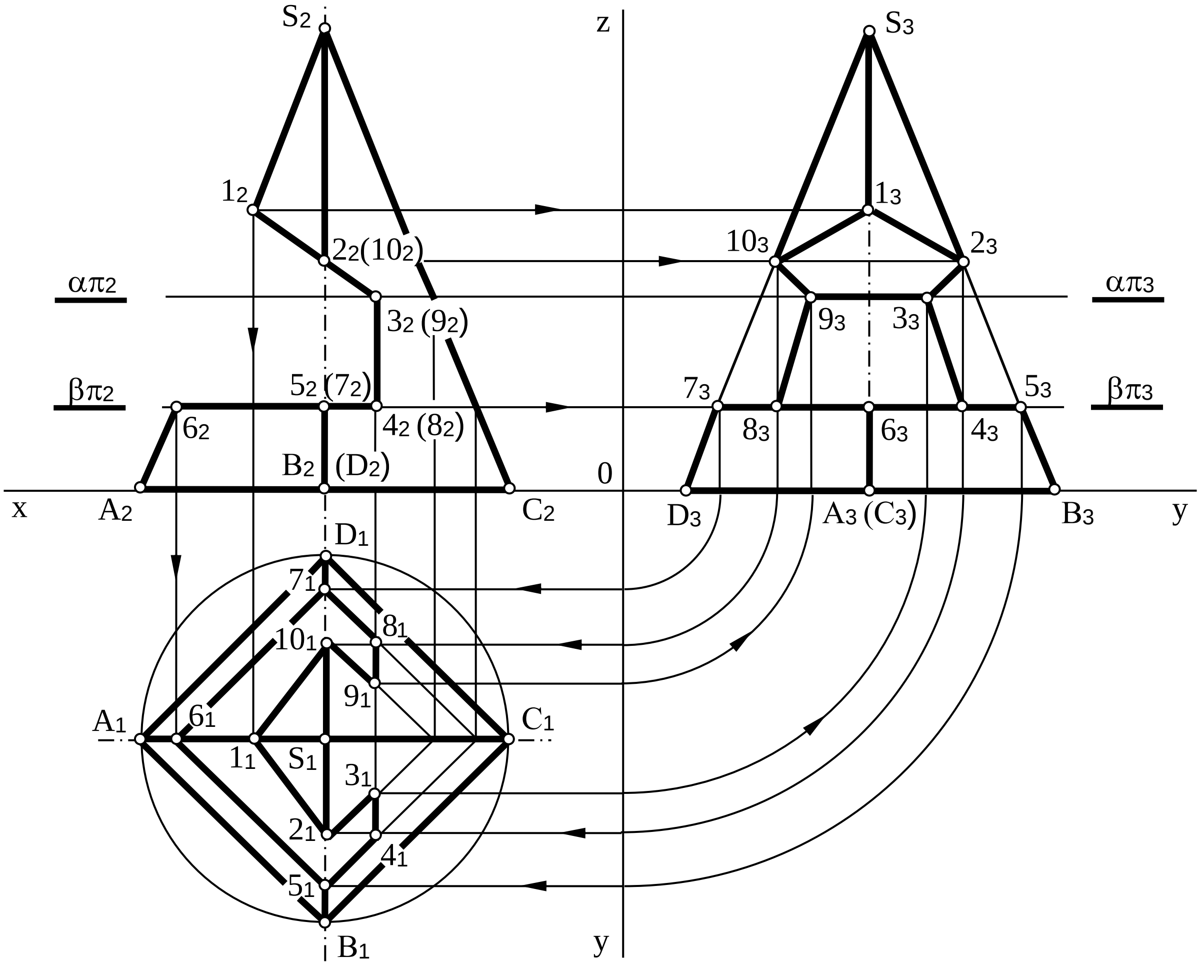


Рис. 137. Неполное пересечение ("*врезывание*")

Так как точки *1* и *6* лежат на ребре *SA* пирамиды *SABCD*, то обычным проецированием по 1_2 и 6_2 определяем 1_1 и 6_1. Для нахождения точек *7* и *10*, *2* и *5*, лежащих на ребрах *SD* и *SB*, проводим горизонтальные линии связи на профильную проекцию пирамиды, где расположатся 7_3, 10_3, 2_3, 5_3.

Чтобы найти точки *3* и *9*, *4* и *8*, вводим вспомогательные секущие горизонтальные плоскости α и β и определяем проекции 3_1, 9_1, 4_1, 8_1 по признаку принадлежности точек поверхности пирамиды с использованием горизонталей.

Построенные таким образом точки соединяем в нужной последовательности отрезками прямых, получается пространственная замкнутая ломаная линия *1-2-3-4-5-6-7-8-9-10*.

Для удобства проекции призмы после построения на чертеже не указываем.

5.3.2. *Пересечение поверхностей криволинейных тел*

Для построения линии пересечения кривых поверхностей применяют вспомогательные секущие поверхности-посредники, *плоские* (чаще всего плоскости уровня) и *сферические*.

Линия пересечения кривых поверхностей обычно является *пространственной замкнутой кривой*. Однако в некоторых частных случаях в пересечении могут получаться *плоские кривые* (эллипсы, окружности и др.).

При построении линии пересечения кривых поверхностей соединяют между собой точки, лежащие на соседних образующих.

Вспомогательные секущие плоскости (плоскости уровня)

Пример 5.10. Построить линию пересечения двух цилиндров разных диаметров с осями, пересекающимися под прямым углом (рис. 138).

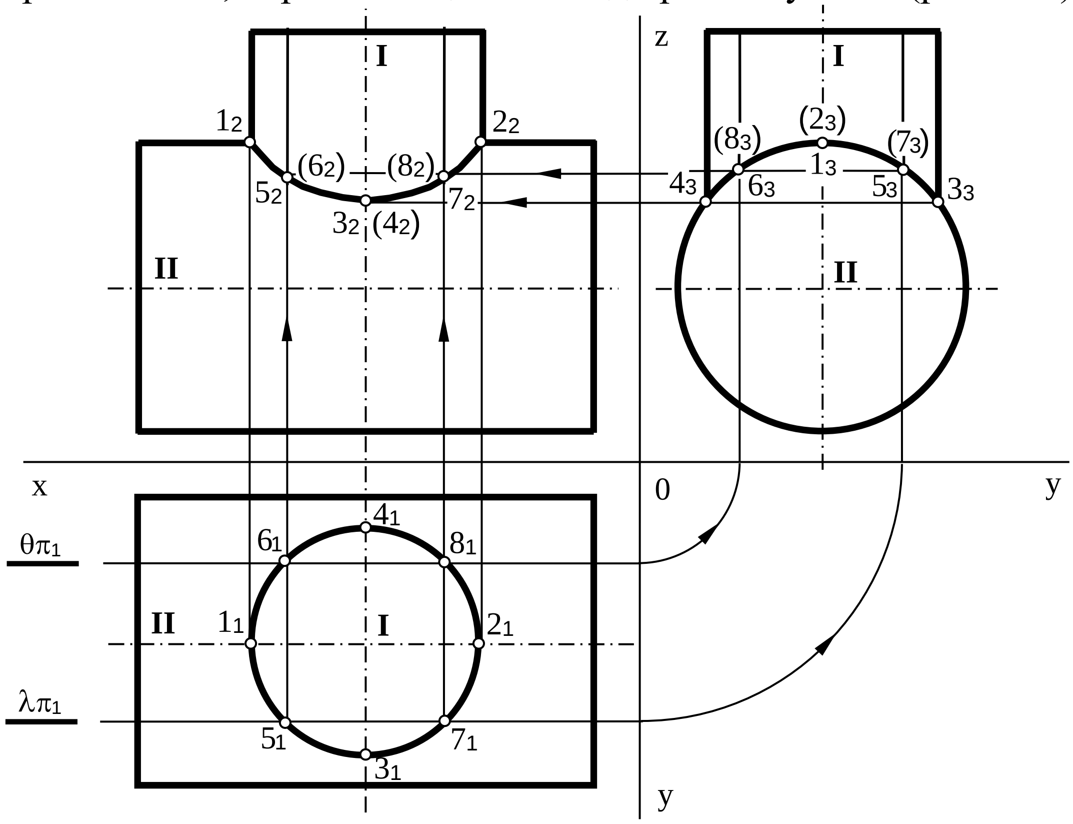


Рис. 138. Метод секущих плоскостей-посредников

Отметим, что обе поверхности I и II цилиндров – проецирующие, и в этом случае проекция линии пересечения, представляющая собой пространственную кривую, совпадает со следом – проекцией такой поверхности (окружностью), т.е. горизонтальная и профильная проекции линии пересечения совпадают с соответствующими проекциями I и II цилиндров.

Точки *1, 2, 3* и *4* являются *опорными* точками линии пересечения. Верхние точки линии пересечения *1* и *2* (*точки видимости* и перехода через контур II цилиндра для фронтальной проекции) определяем как пересечение контурных образующих I цилиндра с верхней (*очерковой*) образующей II (в той же фронтальной проекции). Фронтальные проекции 3_2 и 4_2 низшей точки *3* и ближайшей к плоскости π_2 точки *4* находим непосредственно по их профильным проекциям 3_3 и 4_3 при помощи горизонтальных линий связи на пересечении с фронтальной проекцией оси малого цилиндра.

Чтобы определить фронтальные проекции промежуточных точек 5_2, 6_2, 7_2, 8_2 на π_2 воспользуемся вспомогательными фронтальными плоскостями θ и λ, которые пересекают заданные цилиндры по образующим, проецирующимся на плоскости π_2 и π_3 в очерковые линии. В пересечении соответствующих образующих получим точки *5, 6, 7, 8*. Найденные фронтальные проекции соединяем плавной кривой с учетом видимости. На фронтальной проекции точки невидимой части линии совпадают с точками видимой части.

Вспомогательные шаровые поверхности

Две соосные поверхности вращения пересекаются по параллелям (окружностям), которые описывают точки пересечения их меридианов.

Различают две разновидности способа сфер: способ *концентрических сфер*, когда все сферы-посредники строятся из общего центра; способ *эксцентрических сфер*, когда построение ведется из различных центров.

1. Метод концентрических сфер

Применение вспомогательных ***концентрических сфер*** для построения линии пересечения поверхностей основано на свойстве сферы пересекаться с поверхностью вращения по окружности, если центр сферы расположен на оси поверхности вращения, это возможно при соблюдении следующих условий:

1.) Обе поверхности должны быть поверхностями вращения.

2.) Оси заданных поверхностей должны пересекаться между собой.

3.) Обе оси должны быть параллельны одной из плоскостей проекций.

Пример 5.11. Построить линию пересечения конуса и цилиндра (рис. 139).

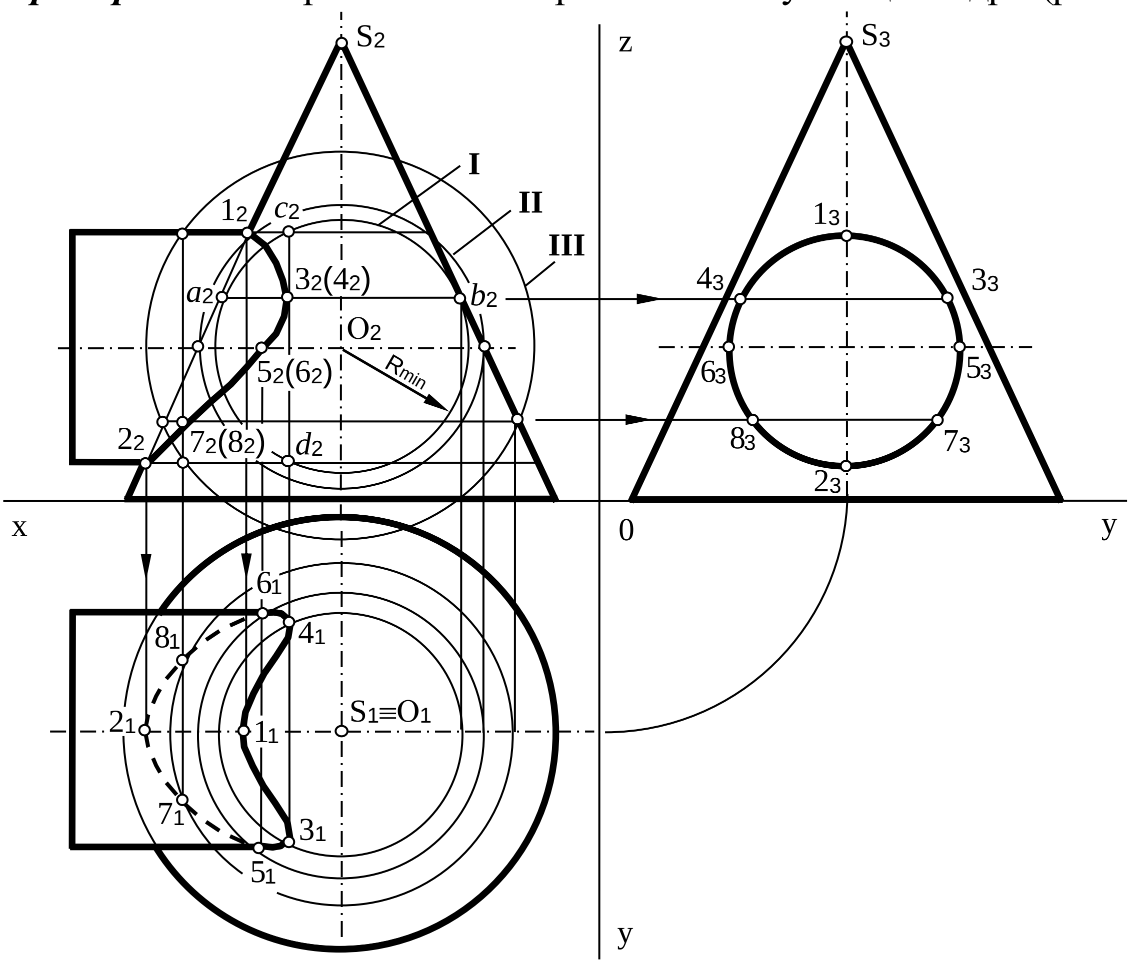


Рис. 139. Метод концентрических сфер

На рис. 139 даны конус и цилиндр, их оси пересекаются в точке O, причем ось конуса перпендикулярна плоскости π_1, а ось цилиндра параллельна плоскостям π_1 и π_2. Все сферы с центром в точке O пересечения осей заданных поверхностей вращения пересекают эти поверхности по параллелям.

Как и в других случаях, прежде всего отметим точки, определяемые без дополнительных построений. Это высшая *1* и низшая *2 опорные* точки линии пересечения, положение которых устанавливаем по фронтальной проекции.

Для нахождения остальных точек линии пересечения применяем концентрические сферы с центром в точке O пересечения осей. Размеры сфер могут быть выбраны в определенных пределах. Наименьшей является сфера, касающаяся одной из заданных поверхностей и пересекающая вторую. В данном случае наименьшей оказывается сфера I радиуса $R_{\min}$. Она касается поверхности конуса по окружности, проецирующейся на плоскость π_2 в прямую a_2b_2, и пересекает цилиндр по окружности, фронтальной проекцией которой является прямая c_2d_2. В пересечении этих прямых находим фронтальные проекции 3_2 и 4_2 *крайних* правых точек линии пересечения. Горизонтальные проекции 3_1 и 4_1 этих точек находим на горизонтальной проекции окружности, по которой сфера I касается поверхности конуса.

Сферу II проводим с таким расчетом, чтобы получить точки видимости *5* и *6* на горизонтальной проекции. Сфера должна пересекать конус по окружности, лежащей в осевой плоскости цилиндра. Диаметр этой окружности равен диаметру сферы. Сфера II позволяет найти еще две точки.

Промежуточные точки *7* и *8* искомой линии пересечения находим при помощи сферы III. Ее радиус должен быть меньше расстояния между точками O_2 и 2_2. Пересекающиеся оси образуют общую плоскость симметрии поверхностей, поэтому линия их пересечения симметрична относительно этой плоскости. Она проецируется на плоскость π_2 в виде *разомкнутой* кривой, а на плоскость π_1 – в виде симметричной *замкнутой* кривой, часть которой, расположенная ниже точек 5 и 6, показана линией невидимого контура.

2. Метод эксцентрических сфер

Способ вспомогательных ***эксцентрических сфер*** заключается в использовании сфер, имеющих различные центры. Этот способ применяется при определении точек линии пересечения поверхностей вращения с поверхностью, несущей на себе непрерывное множество окружностей. Обе поверхности должны иметь общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций (как и в способе концентрических сфер). Вспомогательные эксцентрические сферы пересекаются с данными поверхностями по окружностям.

Введение эксцентрических сферических посредников расширяет область применения способа сфер, так как одно из ограничивающих условий может быть снято. Так, вместо поверхностей вращения можно брать поверхности, содержащие круговые сечения (тор, наклонный цилиндр, трехосный эллипсоид, конус второго порядка и др.).

Пример 5.12. Построить линию пересечения открытого тора и цилиндра (рис. 140).

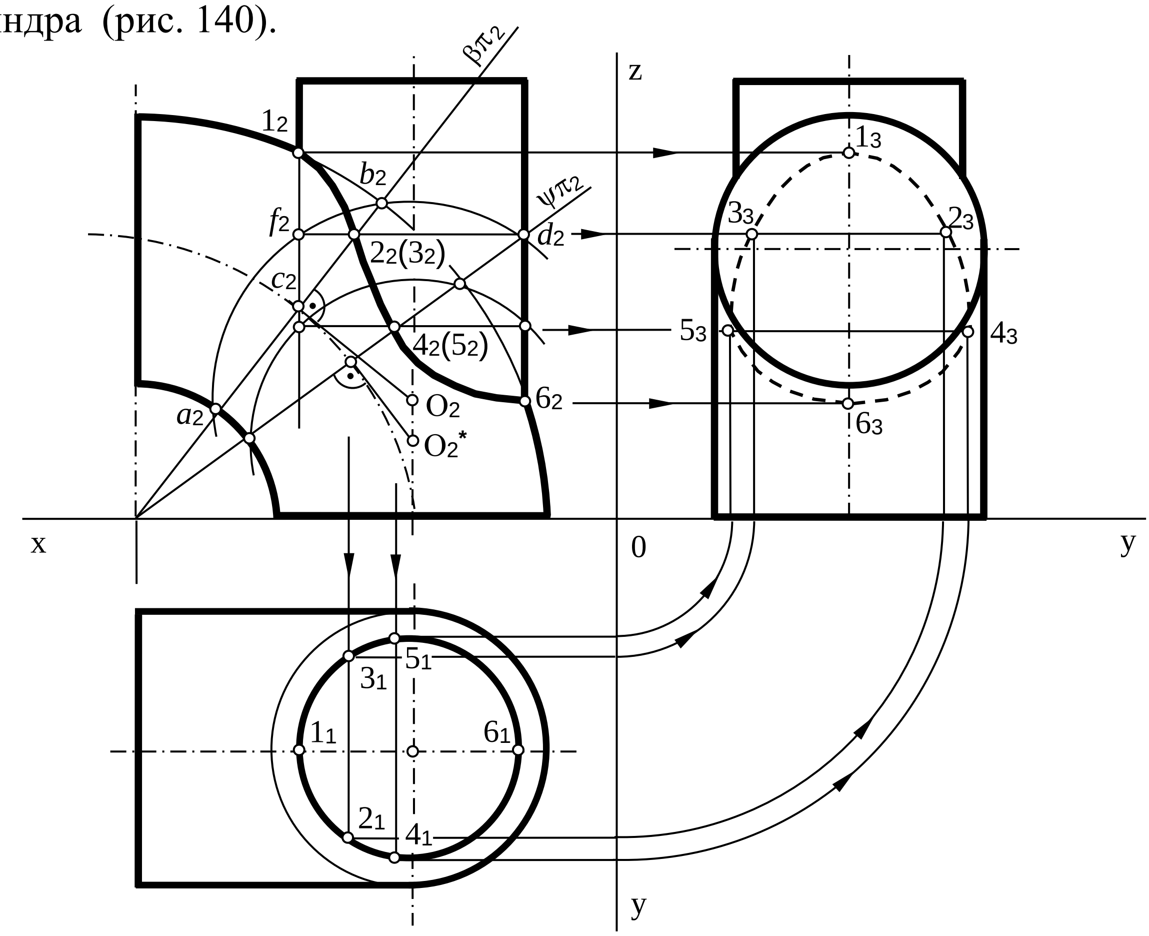


Рис. 140. Метод эксцентрических сфер

Высшую 1_2 и низшую 6_2 *опорные* точки (точки пересечения фронтальных меридианов) определяем непосредственно (без дополнительных построений) из чертежа на пересечении очерковых образующих цилиндра с очерковой образующей тора, так как они лежат в общей фронтальной плоскости.

Для определения *промежуточных* (произвольных) точек применяем *скользящие сферы*. Выбирая секущие эксцентрические сферы других радиусов с различными положениями центров на оси поверхности вращения (цилиндра), получим ряд точек искомой линии пересечения поверхностей. Количество вводимых вспомогательных сфер зависит от требуемой точности построения линии пересечения.

Через ось тора проводим случайную фронтально-проецирующую плоскость β. Эта плоскость пересекает тор по окружности диаметра a_2b_2 с центром в точке c_2. Из точки c_2 восставляем перпендикуляр к следу $\beta\pi_2$ до пересечения с осью цилиндра в точке O_2. Из этой точки как из центра проводим сферу радиусом O_2a_2, которая пересечет цилиндр по окружности диаметра f_2d_2. Пересечение линий f_2d_2 и a_2b_2 дает пару промежуточных точек кривой (2_2, 3_2).

Проводя вторую вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость ψ, определяем пару точек 4_2, 5_2 и т.д. Полученные точки соединяем плавной кривой.

Вопросы для самоконтроля к теме 5

1. Какие существуют геометрические тела?
2. Что представляет собой многогранник?
3. Что называется призмой?
4. Что называется пирамидой?
5. Где располагаются вершины, ребра и грани многогранников?
6. Какие многогранники называют правильными?
7. Как построить проекции многогранников?
8. Как определить точки пересечения (входа и выхода) пирамиды прямой линией?
9. Что представляет собой сечение многогранника плоскостью и как определить фигуру, получаемую при пересечении пирамиды плоскостью?
10. Как определить точки, лежащие на поверхности многогранника?
11. Что представляет собой развертка поверхности пирамиды? Какими данными необходимо располагать при построении развертки?
12. Каким образом на развертку пирамиды наносится линия пересечения?
13. Как определить видимость ребер многогранника в проекциях?
14. Какими способами можно найти натуральную величину сечения тел плоскостью?
15. Какие существуют кривые линии?
16. Что представляет собой кривая поверхность?
17. Что называется поверхностью вращения и как она образуется?
18. Какие кривые линии (фигуры) получаются при пересечении поверхности кругового конуса плоскостями частного положения?
19. Как находят точки пересечения прямой общего положения с кривой поверхностью (поверхностью конуса)?
20. Что представляет собой общий прием построения линии - пересечении плоскости с поверхностью вращения?
21. Как определить точки, лежащие на кривой поверхности (сфере, конусе, торе, цилиндре)?
22. Как строят развертку поверхности усеченного прямого кругового конуса? Как нанести на развертку точки, лежащие на поверхности конуса?
23. Что называется цилиндром? Назовите его основные элементы.
24. Что называется конусом? Назовите основные элементы конуса.
25. Как образуется сфера? Назовите основные элементы сферы.
26. Что называется тором? Назовите различные виды тóровой поверхности.
27. Как проводится построение линии пересечения многогранников?
28. Какие применяются способы для построения линии пересечения кривых поверхностей (тел вращения)?
29. Какие точки линии пересечения называются "опорными", "крайними", "промежуточными"?
30. Чем отличается "проницание" от "врезывания" при пересечении одной поверхности другой?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М.: Наука, 1988, 272 с.
2. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1983, 240 с.
3. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. М.: Высш. шк., 1985, 288 с.
4. Крылов Н.Н. и др. Начертательная геометрия. М.: Высш. шк., 1990, 240 с.
5. Винницкий И.Г. Начертательная геометрия. М.: Высш. шк., 1975, 271 с.
6. Кириллов А.Ф. Черчение и рисование. М.: Высш. шк., 1980, 375 с.
7. Хаскин А.М. Черчение. М.: Высш. шк., 1975, 440 с.
8. Борисов Д.М. Черчение с основами начертательной геометрии. М.: Просвещение, 1978, 352 с.
9. Власов М.П. Инженерная графика. М.: Машиностроение, 1979, 279 с.
10. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1978, 376 с.