



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

КУРС ЛЕКЦИЙ

по дисциплине
«Строительная механика для архитекторов»

«СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ» - ЧАСТЬ II

Автор
Еремин В.Д.



Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Учебное пособие предназначено для обучающихся всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) архитектурных (технических) направлений подготовки (специальностей), изучающих дисциплину «Строительная механика для архитекторов», в частности, для студентов, обучающихся по направлениям 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство.

Пособие содержит материал для изучения обучающимися основных тем учебной дисциплины «Строительная механика для архитекторов», для закрепления читаемого курса лекций, самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ, подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной (итоговой) аттестации.

Содержание пособия соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования по архитектурным (техническим) направлениям подготовки (специальностям).

Автор

Доцент, кандидат технических наук,
доцент кафедры «Строительная механика и
теория сооружений»

Еремин В.Д.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
Тема 1. Изгиб прямолинейных брусьев	10
1.1. Чистый и плоский поперечный изгибы. Основные определения и понятия.....	10
1.2. Основные типы опор балок.....	12
1.3. Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок.....	14
1.4. Определение опорных реакций в балках.....	16
1.5. Внутренние силовые факторы при изгибе....	22
1.5.1. Основные определения	22
1.5.2. Правила знаков внутренних силовых факторов для балок.....	23
1.6. Дифференциальные зависимости при плоском изгибе.....	25
1.7. Эпюры внутренних силовых факторов. Правила их построения.....	30
1.8. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок.....	32
1.9. Чистый изгиб балки. Основные гипотезы.....	34
1.10. Определение нормальных напряжений.....	37
1.11. Расчет балок на прочность при изгибе.....	44
1.12. Рациональные формы поперечных сечений балок.....	55
1.13. Поперечный изгиб. Касательные напряжения при изгибе.....	57
1.14. Касательные напряжения в балках	

прямоугольного поперечного сечения.....	64
1.15. Касательные напряжения в балках круглого поперечного сечения.....	66
1.16. Касательные напряжения в балках двутаврового поперечного сечения.....	68
1.17. Определение перемещений в балке при изгибе. Деформация балок. Основные понятия и определения.....	74
1.18. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.....	78
1.19. Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки.....	82
1.20. Правила уравнивания одноименных постоянных интегрирования. Правила Клебша.....	87
1.21. Метод начальных параметров.....	90
1.22. Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов.....	98
1.23. Расчет балок на жесткость. Проверка выполнения условия жесткости балки	100
1.24. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Изгиб прямолинейных брусьев».....	101
Тема 2. Пространственное напряженное состояние.....	105
2.1. Понятие о пространственном напряженном состоянии.....	105
2.2. Обобщенный закон Гука.....	107
2.3. Закон Гука для плоского напряженного	

состояния. Объемная деформация.....	110
2.4. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Пространственное напряженное состояние».....	113
Тема 3. Рамы и рамные системы.....	115
3.1. Основные определения и понятия.....	115
3.2. Внутренние силовые факторы в поперечных сечения рамы.....	116
3.3. Правила знаков внутренних силовых факторов для рамы.....	117
3.4. Построение эпюр внутренних усилий (N , Q и M) в простейших рамах.....	118
3.5. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рамы.....	121
3.6. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Рамы и рамные системы».....	123
Перечень рекомендуемых информационных ресурсов.....	125
Рекомендуемая литература.....	125
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	128

ПРЕДИСЛОВИЕ

Строительная механика для архитекторов – дисциплина о прочности, жесткости и надежности отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке архитекторов и инженеров любой специальности.

Строительная механика для архитекторов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами архитектурных (технических) направлений подготовки (специальностей).

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи.

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями, а также обратиться за консультацией к преподавателю.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этой дисциплины, и в то же время необходимости формирования у будущих архитекторов и инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить студентов пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность и жесткость элементов конструкций.

Курс «Строительная механика для архитекторов» традиционно делится на три крупных раздела: «Теоретическая механика», «Соппротивление материалов» и «Строительная механика».

Учебное пособие «Строительная механика для архитекторов» состоит из двух частей.

В первой части пособия рассматривались основные понятия и определения теоретической механики, аксиомы статики, связи и реакции связей, разновидности опор, используемых в плоских расчетных схемах, условия уравновешенности сходящейся системы сил, равновесие плоской системы сил, аналитические уравнения равновесия, а также анализировалось напряженное состояние тела и излагались методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, испытывающих простые виды деформаций (центральное растяжение или сжатие, сдвиг, кручение).

Предлагаемое издание представляет собой вторую

часть учебного пособия «Строительная механика для архитекторов».

В настоящей второй части пособия излагаются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, испытывающих чистый и плоский поперечные изгибы, анализируется пространственное напряженное состояние бруса, а также рассматриваются вопросы построения эпюр внутренних силовых факторов (N , Q и M) в простейших рамах.

Данное пособие содержит материал для изучения обучающимися основных тем следующих учебных дисциплин кафедры: строительная механика для архитекторов; сопротивление материалов, механика и специальные вопросы сопротивления материалов, для закрепления читаемого курса лекций, для подготовки к текущим контролям успеваемости и промежуточной аттестации, для самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной и заочной) архитектурных (технических) направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство.

Положения, сформулированные дисциплиной «Строительная механика для архитекторов», служат основой для изучения обучающимися других важных дисциплин, таких, как архитектурно-строительное проектирование, металлические конструкции, железобетонные



и каменные конструкции, деревянные и пластмассовые конструкции, основания и фундаменты и др.

ТЕМА 1. ИЗГИБ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ БРУСЬЕВ

1.1. ЧИСТЫЙ И ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБЫ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

В строительных конструкциях широко применяются элементы, работающие на изгиб. Характерным признаком изгиба является изменение кривизны продольной оси бруса.

При изгибе первоначально прямая его ось стержня искривляется, а первоначально кривая изменяет свою кривизну.

Определение. Прямой брус (стержень), работающий на изгиб, называется балкой.

Определение. Продольная (геометрическая) ось балки – это линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений балки.

Определение. Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

При изгибе балки продольные волокна, находящиеся на выпуклой части, растягиваются, а находящиеся на вогнутой части – сжимаются. Слой промежуточных волокон, которые, искривляясь, не изменяют своей длины, называется *нейтральным слоем*.

Определение. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной линией* или *нейтральной осью* (нулевой линией).

Определение. Чистым изгибом называется такой

вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только изгибающий момент $M_{изг}$, а остальные внутренние усилия (N , Q , M_k) равны нулю.

В условиях чистого изгиба может находиться вся балка или отдельные ее участки.

При действии на балку системы внешних сил, расположенных в плоскости,

проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения балки, и перпендикулярных к ее продольной оси, в каждом ее сечении могут возникать две внутренние силы – изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Эта плоскость называется *силовой плоскостью*.

Определение. Плоским поперечным изгибом называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают одновременно изгибающий момент $M_{изг}$ и поперечная сила Q , а остальные внутренние усилия (N и M_k) равны нулю.

Определение. Рамой называется геометрически неизменяемая стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой.

Некоторые узлы могут быть шарнирными или, в общем случае, упруго – податливыми. В жестких узлах взаимный поворот примыкающих стержней исключается как до деформаций, так и после деформаций, то

есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными

Определение. Вертикальные элементы рамы называются *стойками*, а горизонтальные или близкие к горизонтальному расположению элементы рамы называются *ригелями*. Точки соединения стоек и ригелей рамы называются *узлами*.

Различают рамы плоские и пространственные. У плоской рамы все геометрические оси ее элементов лежат в одной плоскости, которая совпадает с плоскостью нагрузки и является главной плоскостью для всех элементов рамы.

1.2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ОПОР И БАЛОК

Для того чтобы балка (рама) могла воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями (опорами).

Как известно, существует несколько основных типов опор:

- *Защемление или заделка* (рис. 1.1):

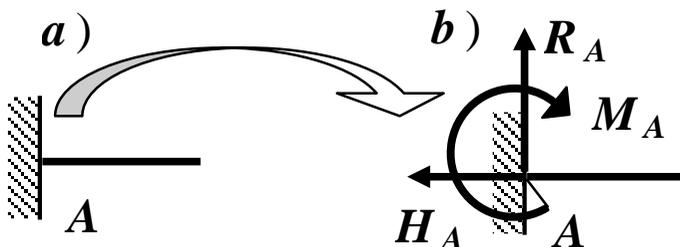


Рис. 1.1. Защемление или заделка

- *Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора* (рис. 1.2):

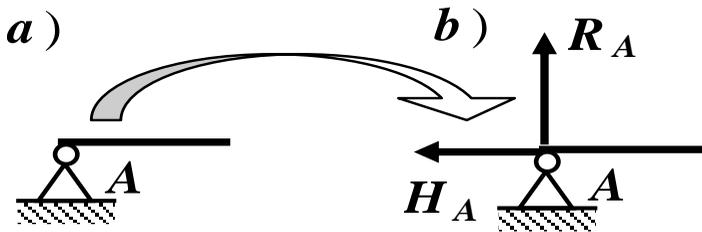


Рис. 1.2. Шарнирно-неподвижная опора

- *Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора* (рис. 1.3):

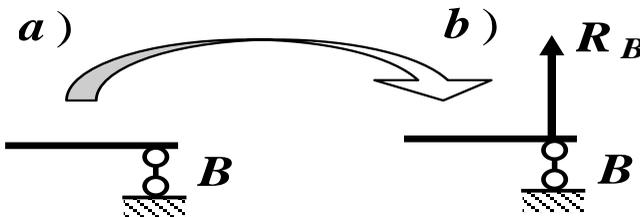


Рис. 1.3. Шарнирно-подвижная опора

Наименьшее число связей, не позволяющих балке (раме) перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.

Рассмотрим различные типы простейших балок, в зависимости от способа их закрепления (рис. 1.4):

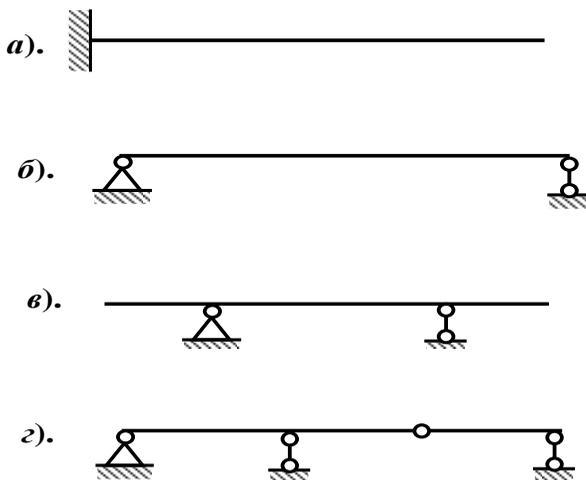


Рис. 1.4. Основные типы простейших балок

- а). Консольная или жестко защемленная балка;
- б). Однопролетная шарнирно-опертая балка /балка на двух опорах/;
- в). Консольная шарнирно-опертая балка;
- г). Многопролетная балка (балка с промежуточным шарниром).

Балки с промежуточным шарниром представляют собой сложную систему, состоящую из нескольких брусьев, соединенных между собой связями, позволяющими поворот сечений брусьев в соединении (в шарнире).

Поэтому, в промежуточном шарнире возникают только вертикальные и горизонтальные реактивные силы, а момент равен нулю.

1.3. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ВНЕШНИХ НАГРУЗОК, ВЫЗЫВАЮЩИХ ИЗГИБ БАЛОК

Деформацию изгиба вызывают внешние нагрузки, действующие перпендикулярно к оси стержня.

На рис. 1.5 показаны различные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб:

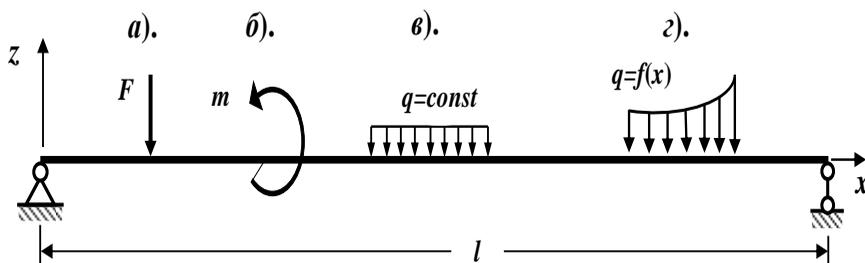


Рис. 1.5. Основные виды внешних нагрузок

a – сосредоточенная сила;

б – сосредоточенная пара сил с моментом *m* (кратко – сосредоточенный момент);

в – равномерно–распределенная нагрузка;

г – неравномерно–распределенная нагрузка.

В зависимости от способа приложения внешних нагрузок различают разные виды изгибов (рис. 1.6):

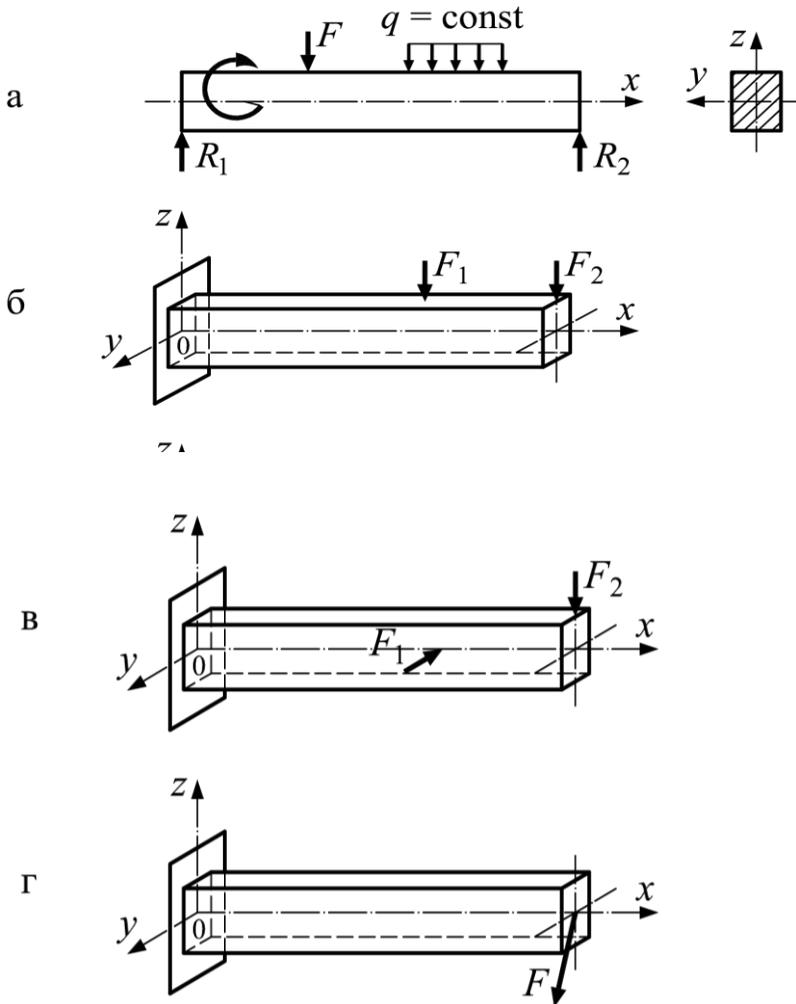


Рис. 1.6. Способы приложения внешних нагрузок

- *плоский изгиб* – все внешние нагрузки расположены в одной плоскости (рис. 1.6, а);
- *плоский прямой изгиб* – если плоскость действия нагрузок (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей сечения (рис. 1.6, б);

- *пространственный изгиб* – нагрузки расположены в разных плоскостях (рис. 1.6, в);
- *плоский косой изгиб* – если плоскость действия нагрузок не проходит ни через одну из главных центральных осей сечения (рис. 1.6, г).

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ В БАЛКАХ

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных комбинациях:

- Первая комбинация:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & - \text{сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum F_z = 0 & - \text{сумма проекций всех сил на} \\ & \text{вертикальную ось } z \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & - \text{сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Уравнение $\sum M_B = 0$ (сумма моментов всех сил относительно точки B равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

- Вторая комбинация:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & - \text{сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & - \text{сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.} \\ \sum M_B = 0 & - \text{сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } B \text{ равна нулю.}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Уравнение $\sum F_z = 0$ (сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

Все неизвестные опорные реакции в многопролетных балках, имеющих промежуточный шарнир, можно определить двумя способами:

1). *Метод моментной точки (способ, учитывающий свойство промежуточного шарнира).*

В этом случае необходимо записать три уравнения равновесия для всей балки и к ним добавить дополнительные уравнения, отражающие свойство промежуточного шарнира, то есть, сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира равна нулю (рис. 1.7):

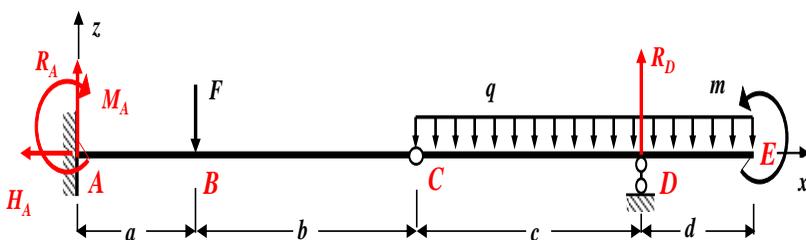


Рис. 1.7. Заданная балка

$\sum F_x = 0$ – сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю;

$\sum M_A = 0$ – сумма моментов всех сил относительно точки A равна нулю.

$\sum M_D = 0$ – сумма моментов всех сил относительно точки D равна нулю.

(1.3)

$\sum M_C^{\text{левых сил}} = 0$ или $\sum M_C^{\text{правых сил}} = 0$ – Сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира равна нулю.

Уравнение $\sum F_z = 0$ (сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

2). Метод построения «поэтажной» схемы балки.

Для удобства расчета и наглядности представления о характере работы отдельных частей многопролетной балки строится ее «поэтажная» схема.

В этом случае заданную балку мысленно разрезают по промежуточному шарниру (промежуточным шарнирам) и выделяют основную балку (их может быть

одна или несколько) и подвесные балки (рис. 1.8):

При этом вначале выделяют основные балки, то есть те, которые способны самостоятельно нести нагрузку, а затем вспомогательные, которые имеют только одну опору или не имеют их вовсе. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры.

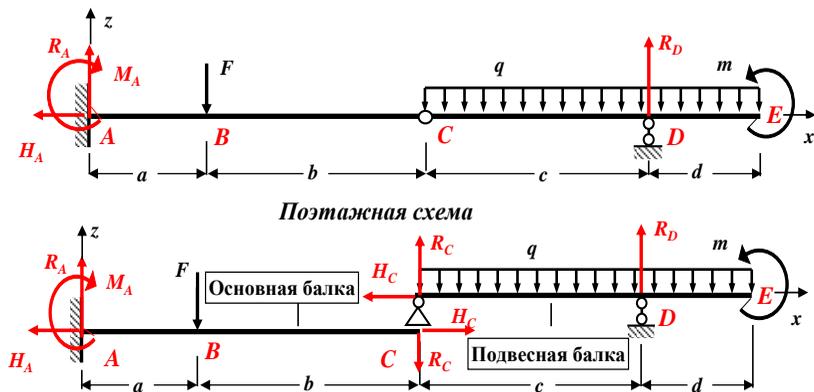


Рис. 1.8. Заданная балка и ее «позтажная» схема

При этом вначале выделяют основные балки, то есть те, которые способны самостоятельно нести нагрузку, а затем вспомогательные, которые имеют только одну опору или не имеют их вовсе. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры.

Таким образом, основными или главными является те балки, которые могут самостоятельно сопротивляться приложенным внешним силам (нести внешнюю нагрузку) после разрезания заданной балки по промежуточным шарнирам, так как они имеют три кинематические связи (балка **ABC** на рис. 1.8).

Остальные балки являются подвесными или второстепенными (балка **CDE** на рис. 1.8).

После построения «поэтажной» схемы, заданную балку с промежуточными шарнирами, можно рассматривать как состоящую из ряда простых балок.

Затем рассчитывают каждую простую балку в отдельности.

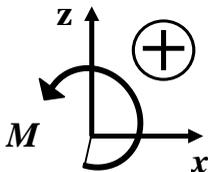
Расчет простых балок производят, начиная с самых верхних подвесных, и последовательно переходя к ниже лежащим балкам.

Расчет простых балок сводится к определению опорных реакций и построению эпюр моментов и поперечных сил.

При расчете ниже лежащих балок необходимо учитывать не только заданную внешнюю нагрузку, которая к ним приложена, но и силы, равные по величине опорным реакциям выше лежащих подвесных балок и противоположно направленные (рис. 1.8).

Таким образом, передача нагрузки с верхних подвесных балок на ниже лежащие осуществляется с помощью условных сосредоточенных сил в промежуточных шарнирах. Эти силы численно равны соответствующим условным опорным реакциям в подвесных балках (рис. 1.8).

Составляя уравнения равновесия (статики), обычно используют следующее правило знаков:



Правило знаков. Горизонтальные и вертикальные силы положительны, если их направления совпадают с направлениями осей x и z .

Положительное направление моментов – против хода часовой стрелки.

Определение. Балки, у которых все опорные реакции могут быть определены только из уравнений равновесия (статики), называются статически определимыми.

1.5. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ ПРИ ИЗГИБЕ

1.5.1. Основные определения

Ранее было установлено, что при действии на балку внешней нагрузки, перпендикулярной к геометрической оси балки и расположенной в одной из главных плоскостей инерции каждого поперечного сечения балки, в ее сечениях, в общем случае, возникают изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Внутренние силовые факторы определяются через внешние силы, действующие на балку, с помощью метода сечений, применение которого позволяет сформулировать общие правила для нахождения указанных внутренних усилий на каждом участке балки.

Определение. Участком называется часть балки, в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия постоянен.

Границами участка являются точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, точки начала и конца распределенной нагрузки.

Суть метода сечений сводится к следующему:

1. Мысленно проводим поперечное сечение, которое разбивает балку на две части.

2. Выбираем ту часть балки, на которую действуют известные нагрузки (наименьшее число известных нагрузок).

3. Составляем выражения для изгибающего момента M , поперечной силы Q и продольной силы N . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определение. Изгибающий момент M в произвольном поперечном сечении балки, численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от проведенного сечения, относительно нейтральной оси этого поперечного сечения (или относительно той точки продольной оси балки, через которую проходит рассматриваемое сечение).

Определение. Поперечная сила Q в произвольном поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на ось, перпендикулярную к геометрической оси балки.

Определение. Продольная сила N в произвольном поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных

по одну сторону от проведенного сечения, на геометрическую ось рассматриваемого элемента балки.

1.5.2. Правила знаков внутренних силовых факторов для балок

Правило знаков. Изгибающий момент M в поперечном сечении балки положителен ($M = +M^{\text{внеш}}$), если момент внешней силы ($M^{\text{внеш}}$) направлен по ходу часовой стрелки – от сечения слева, и против хода часовой стрелки – от сечения справа (рис. 1.9), или *изгибающий момент M считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки* (рис. 1.10).

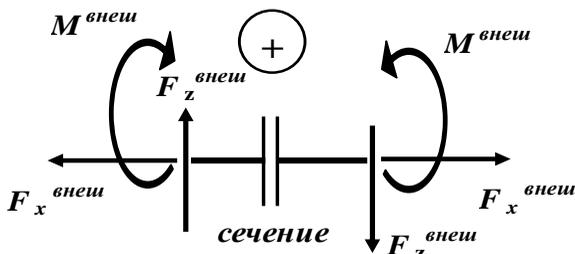


Рис. 1.9. Правила знаков

Правило знаков. Поперечная сила Q в поперечном сечении балки положительная ($Q = +F_z^{\text{внеш}}$), если внешняя сила ($F_z^{\text{внеш}}$) направлена вверх – от сечения слева и вниз – от сечения справа (рис. 1.9), или *поперечная сила Q считается положительной, если внешние силы стремятся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения по ходу часовой стрелки* (рис. 1.10).

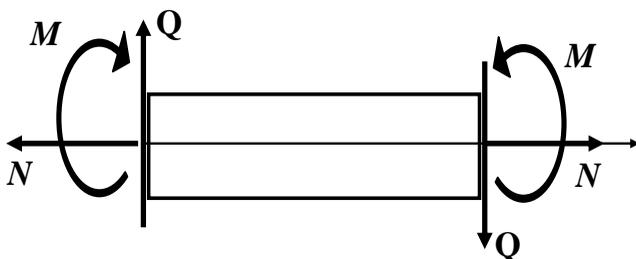


Рис. 1.10. Положительные направления внутренних силовых факторов для балок

Правило знаков. Продольная сила N в поперечном сечении балки положительная ($N = +F_x^{\text{внеш}}$), если внешняя сила ($F_x^{\text{внеш}}$) направлена влево – от сечения слева и вправо – от сечения справа (рис. 1.9), или *продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение (удлинение) рассматриваемой части балки* (рис. 1.10).

Вывод. Изгибающий момент M в поперечном сечении балки считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки, поперечная сила Q считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части балки.

Положительные направления этих силовых факторов показаны на рис. 1.10.

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы для балок отрицательны, если направления этих

силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 1.10:

1.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Изгибающий момент M , поперечная сила Q и интенсивность внешней распределенной нагрузки q связаны между собой определенной зависимостью.

Рассмотрим балку, находящуюся под действием плоской системы сил (рис. 1.11)

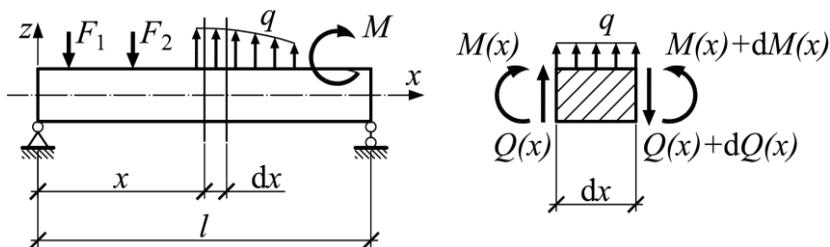


Рис. 1.11. Расчетная схема балки

Двумя поперечными сечениями x и $(x + dx)$ вырежем из балки элемент так, чтобы на него не действовали внешние сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты. Интенсивность внешней распределенной нагрузки на длине dx считаем постоянной.

Действие отброшенных частей заменим внутренними силовыми факторами. Действие левой части заменим изгибающим моментом $M(x)$ и поперечной силой $Q(x)$, которые будем считать положительными.

Аналогично заменим действие правой части моментом $M_1 = M(x) + dM(x)$ и поперечной силой $Q_1 =$

$$=Q_{(x)} + dQ_{(x)}.$$

Так как на длине элемента dx не приложены сосредоточенные силы и моменты, то в эпюрах M и Q не должно быть разрыва, поэтому изгибающий момент и поперечная сила в правом сечении будут отличаться от их значений в левом сечении на величину малых приращений $dM_{(x)}$ и $dQ_{(x)}$.

Вся балка в целом находится в равновесии, следовательно, и ее выделенный элемент dx со всеми приложенными к нему силами также должен находиться в равновесии.

Составим уравнения равновесия:

• Сумма проекций всех сил на вертикальную ось Z равна нулю:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0: \quad Q_{(x)} + q \cdot dx - (Q_{(x)} + dQ_{(x)}) = 0; \quad \rightarrow \\ q \cdot dx - dQ_{(x)} = 0. \end{aligned}$$

Из этого равенства получим:

$$\frac{dQ_{(x)}}{dx} = q \quad (1.4)$$

Следовательно, первая производная от поперечной силы по абсциссе x равна интенсивности распределенной нагрузки в сечении.

• Сумма моментов всех сил относительно центра правого сечения равна нулю:

$$\Sigma M_k = 0: \quad -M_{(x)} - Q_{(x)} \cdot dx - q \cdot dx \frac{dx}{2} + (M_{(x)} + dM_{(x)}) = 0.$$

Отсюда:

$$dM_{(x)} = Q_{(x)} \cdot dx + q \cdot \frac{(dx)^2}{2}.$$

В этом равенстве последнее слагаемое является малой величиной высшего порядка по сравнению с другими членами, поэтому его можно отбросить, тогда получим:

$$dM_{(x)} = Q_{(x)} \cdot dx.$$

Откуда:

$$Q_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx} \quad (1.5)$$

Таким образом, *первая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна поперечной силе.*

Формула (1.4), очевидно, не применима для сечений, в которых приложены внешние сосредоточенные силы. Аналогично формула (1.5) не применима для сечений, в которых приложены внешние сосредоточенные моменты

Из найденных выше двух дифференциальных зависимостей следует третья:

$$\frac{d^2 M_{(x)}}{dx^2} = \frac{dQ_{(x)}}{dx} = q, \quad (1.6)$$

то есть *вторая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна первой производной от поперечной силы или равна интенсивности распределенной нагрузки.*

Выражения (1.4)÷(1.6) представляют собой дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки при изгибе.

Эти формулы были получены русским ученым и инженером Д.И. Журавским. Они используются при анализе различных вопросов, связанных с изгибом балок, в частности, для проверки правильности построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Для отыскания экстремальных значений изгибающих моментов (наибольшего или наименьшего) необходимо первую производную от момента приравнять нулю.

Следовательно, в сечениях, где поперечная сила равна нулю ($Q = 0$), изгибающий момент принимает наибольшее или наименьшее значение ($M_{\text{ЭКСТР}}$).

Можно выписать следующие две зависимости, иллюстрирующие нахождение $Q_{(x)}$ и $q_{(x)}$ по моменту $M_{(x)}$:

1. Поперечная сила $Q_{(x)}$:

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = Q_{(x)}$$

2. Интенсивность распределенной нагрузки $q_{(x)}$:

$$\frac{d^2 M_{(x)}}{dx^2} = \frac{dQ_{(x)}}{dx} = q_{(x)}$$

Эти дифференциальные зависимости справедливы для участков действия сплошной распределенной нагрузки.

Обратные (интегральные) зависимости показывают, что зная интенсивность распределенной нагрузки $q(x)$ и начальные значения Q_0 и M_0 можно определить $Q(x)$ и $M(x)$:

1. Поперечная сила $Q(x)$:

$$Q_{(x)} = Q_0 + \int_0^x q_{(x)} \cdot dx$$

2. Изгибающий момент $M(x)$:

$$M_{(x)} = M_0 + \int_0^x Q_{(x)} \cdot dx$$

В итоге получим уравнение для изгибающего момента $M(x)$ при действии сплошной распределенной нагрузки $q(x)$:

$$M_{(x)} = M_0 + Q_0 \cdot x + \int_0^x dx \int_0^x q_{(x)} \cdot dx$$

1.7. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния балки необходимо знать, как изменяются внутренние усилия (Q и M) по длине балки.

Чтобы иметь наглядное представление об изменении Q и M по длине балки, строят эпюры этих внутренних усилий.

Выражения для поперечной силы и изгибающего момента представляют собой функции координаты x и для них можно построить графики (эпюры) изменения Q и M по длине стержня.

Определение. Графики, изображающие законы изменения Q и M вдоль геометрической оси балки, называются соответственно эпюрой поперечных сил и эпюрой изгибающих моментов.

Ординаты этих эпюр представляют собой численные значения Q и M в соответствующих сечениях балки.

При построении эпюр Q и M в статически определимых системах рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему балки на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает балку на две части.

Выбираем ту часть балки, на которую действует наименьшее число известных нагрузок. Для определения внутренних усилий в сечении совершенно безразлично, какую часть балки рассматривать. Величины внутренних усилий будут одни и те же.

4. Составляем выражения (уравнения), показывающие закон изменения в пределах рассматриваемого участка поперечной силы Q и изгибающего момента M .

При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычисляем численные значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях участка (на его границах). Если функциональная зависимость указанных силовых факторов нелинейная, вычисление производим еще и в промежуточной точке, например, в середине участка или в сечении, где функция достигает экстремального значения.

6. По полученным численным значениям поперечных сил Q и изгибающих моментов M строим эпюры (графики) этих внутренних усилий.

Эпюра каждого внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси балки (рамы). Для балок эпюры располагаются непосредственно под ней.

В проектных строительных организациях при построении эпюр для балок положительные значения поперечных сил Q откладываются вверх от базисной прямой, а отрицательные значения – вниз.

Положительные значения изгибающих моментов M откладываются со стороны «растянутых» волокон, то есть вниз от базисной прямой, а отрицательные значения – со стороны «сжатых» волокон, то есть вверх от базисной прямой.

Таким образом, *эпюра изгибающих моментов M строится на «растянутом» волокне.*

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

7. Делаем проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов.

8. Отмечаем опасные сечения балки, где действуют максимальные (наибольшие) по абсолютной величине значения внутренних силовых факторов.

1.8. КОНТРОЛЬ (ПРОВЕРКИ) ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ БАЛОК

Дифференциальные зависимости Д.И. Журавского между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью внешней распределенной нагрузки определяют связь между эпюрами M и Q , построенными от любой внешней нагрузки. Эта взаимная связь имеет важное практическое значение для контроля правильности выполненного построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре Q возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре Q имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз, имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре M возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому

моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре M имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре M имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила Q положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила Q отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на участках балки, где поперечная сила Q равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ($M = = const$).

- Изгибающий момент M достигает \max или \min ($M_{экстр}$) в тех сечениях балки, где поперечная сила равна нулю ($Q = 0$).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью q , поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов M на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью q отсутствует, поперечная сила Q постоянная ($Q = const$), а эпюра изгибающих моментов M изменяется по линейному закону.

1.9. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ

Ранее было установлено, что при внешней нагрузке, перпендикулярной геометрической оси балки, в каждом ее поперечном сечении может возникать одновременно изгибающий момент и поперечная сила.

Изучение напряженного состояния балки удобнее начинать с частного случая, когда поперечная сила равна нулю, то есть с чистого изгиба.

Рассмотрим деформацию чистого изгиба балки. С помощью эксперимента установлено, что если на боковую поверхность балки из резинового бруса прямоугольного поперечного сечения нанести ортогональную сетку в виде продольных и поперечных прямых, то после деформирования на участке чистого изгиба продольные прямые принимают криволинейное очертание, а поперечные остаются прямыми. При этом сетка остается ортогональной (рис. 1.12).

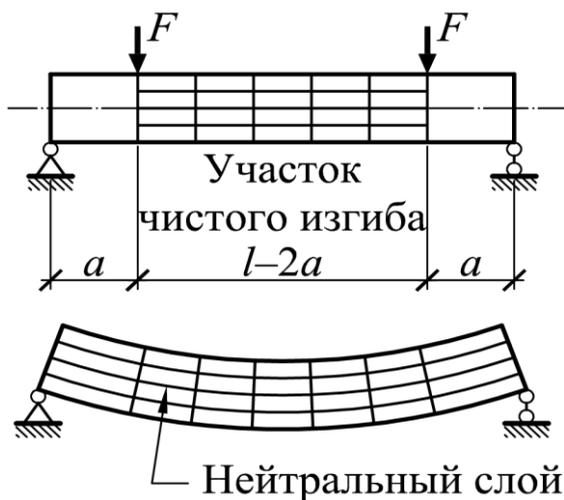


Рис. 1.12. Деформация чистого изгиба балки

Отсюда можно сделать вывод, что угловые деформации в плоскости изгиба отсутствуют, а поперечные сечения балки при изгибе не искривляются.

Из рисунка видно, что продольные волокна балки,

расположенные в нижней ее части, растянуты, а в верхней части – сжаты.

Определение. Граница между растянутыми и сжатыми волокнами называется нейтральным слоем.

Нейтральный слой не испытывает растяжения и сжатия.

Ниже нейтрального слоя в поперечных сечениях действуют растягивающие нормальные напряжения, а выше – сжимающие (рис. 1.12)

Определение. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется нейтральной линией (*нулевой линией*) сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования чистого изгиба балок делают возможным принять следующие гипотезы:

1. *Гипотеза плоских сечений (гипотеза Я. Бернулли).* Поперечные сечения балки, плоские и нормальные к его геометрической оси (нейтральному слою) до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации.

Эта гипотеза равносильна предположению, что при изгибе поперечные сечения поворачиваются на некоторый угол относительно нейтральной линии, а угловые деформации в продольных сечениях балки отсутствуют.

2. *Продольные слои не давят друг на друга* (взаимное давление между продольными слоями отсутствует).

Отсюда следует, что продольные волокна испытывают одноосное (центральное) растяжение или сжатие.

3. Деформации продольных волокон не зависят от их положения по ширине сечения.

Из этого следует, что нормальные напряжения остаются одинаковыми по ширине сечения.

Задача об отыскании закона распределения напряжений по сечению балки является статически неопределимой и для ее решения необходимо дополнительно к уравнениям равновесия привлечь уравнения деформаций, которые можно сформулировать на основании экспериментальных наблюдений.

Вывод формулы для определения нормальных напряжений σ в поперечных сечениях балки проводится по следующей схеме:

1. Рассматривается *статическая сторона* задачи, то есть анализируются уравнения статики.

2. Рассматривается *геометрическая сторона* задачи. На основе опытного изучения данного вида деформации балки и принимаемых гипотез, устанавливаются зависимости между перемещением точек балки и их положением в сечении относительно принятой системы координат.

3. Рассматривается *физическая сторона* задачи – определяется зависимость между напряжениями и деформациями.

4. Производится *синтез уравнений*, то есть их совместное решение.

1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Изучим закон распределения напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе. Будем рассматривать балку с поперечным сечением, обладающим хотя бы одной осью симметрии, которая совпадает с силовой плоскостью.

Так как поперечные сечения симметричны относительно силовой плоскости, то для упрощения примем их прямоугольной формы (рис. 1.13).

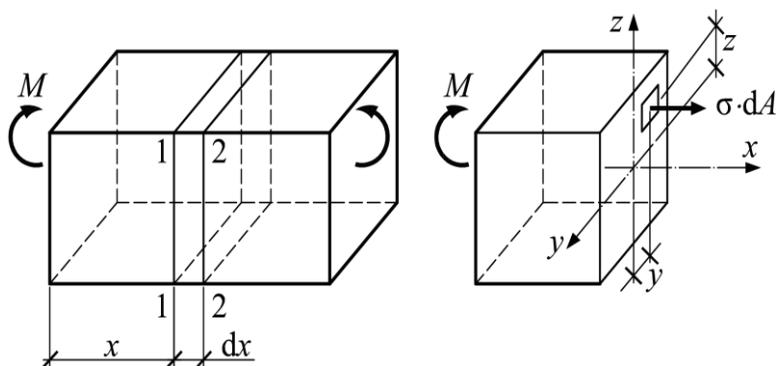


Рис. 1.13. Расчетная схема балки

В плоскости поперечного сечения проведем координатные оси y и z .

Обозначим горизонтальную ось через z , а вертикальную ось через y .

Ось y совместим с силовой линией, а ось z проведем пока на произвольной высоте перпендикулярно оси y .

Изгибающий момент M (силовая плоскость) действует в силовой плоскости xoy . В плоскости поперечного сечения выделим элементарную площадку dA .

При чистом изгибе изгибающий момент M в поперечном сечении балки вызывает нормальные напряжения σ , а касательные напряжения τ равны нулю.

I. Статическая сторона задачи.

Составим уравнения статики:

1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю:

$$\Sigma F_x = 0: \int_A \sigma \cdot dA = 0 \quad (1.7)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно оси z равна нулю:

$$\Sigma M_z = 0: M - \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = 0 \quad (1.8)$$

3. Сумма моментов всех сил относительно оси y равна нулю:

$$\Sigma M_y = 0: \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0 \quad (1.9)$$

II. Геометрическая сторона задачи.

Рассмотрим деформацию той же балки. Выделим из балки сечениями **1-1** и **2-2** элемент длиной dx (рис. 1.14).

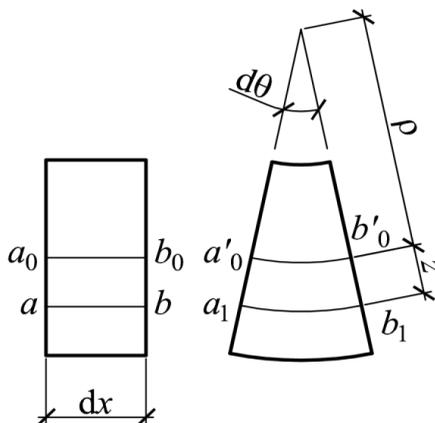


Рис. 1.14. Геометрическая сторона задачи

В результате деформации происходит изменение расстояний между поперечными сечениями – нижние волокна удлиняются, а верхние – укорачиваются. Естественно предположить, что можно найти и такие волокна, длина которых при изгибе не изменяется.

Определение. Совокупность волокон, не изменяющих своей длины при изгибе балки, называется нейтральным слоем.

Волокна, принадлежащие нейтральному слою, до деформации лежат в одной плоскости, а в деформированном состоянии образуют цилиндрическую поверхность.

До и после деформации каждое поперечное сечение пересекается с нейтральным слоем по прямой, которая называется *нейтральной (нулевой) линией сечения*.

При плоском изгибе нейтральный слой перпендикулярен силовой плоскости, а значит и нейтральная линия перпендикулярна силовой линии.

Будем считать, что ось \mathbf{z} совпадает с нейтральной линией. Из рисунка (1.14) имеем:

$$a_0 b_0 \rightarrow a'_0 b'_0 \text{ — с радиусом } \rho;$$

$$ab \rightarrow a_1 b_1 \text{ — с радиусом } \rho + y.$$

Найдем относительное удлинение произвольного волокна \mathbf{ab} :

$$\varepsilon = (a_1 b_1 - ab) / ab;$$

$$a_1 b_1 = (\rho + y) \cdot d\theta; \quad ab = dx. \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon = [(\rho + y)d\theta - dx] / dx.$$

Определим относительное удлинение волокна $a_0 b_0 = dx$, принадлежащее нейтральному слою:

$$a_0 b_0 = a'_0 b'_0 = \rho \cdot d\theta = dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon = [(\rho + y)d\theta - \rho d\theta] / (\rho d\theta) = y / \rho \rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (1.10)$$

III. Физическая сторона задачи

Определим, в каком напряженном состоянии находится произвольное продольное волокно \mathbf{ab} . На торцевой поверхности волокна (в сечении) касательные напряжения $\boldsymbol{\tau}$ равны нулю. Следовательно, в соответствии с законом парности касательных напряжений их нет и в сечениях, параллельных оси балки.

Нормальные напряжения σ_y , выражающие взаимодействие рассматриваемого волокна с соседними волокнами, в силу второй гипотезы равны нулю.

Таким образом, продольное волокно находится в линейном напряженном состоянии. Закон Гука для линейного напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (1.11)$$

IV. Синтез уравнений.

Решая систему уравнений (1.10) и (1.11), получим:

$$\sigma = (E \cdot y) / \rho \rightarrow \sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (1.12)$$

Подставляя выражение (1.12) в уравнение (1.8), получим:

$$M = \int_A \frac{y}{\rho} E \cdot y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E \cdot I_z}{\rho} \rightarrow$$

$$1 / \rho = M / (E I_z) \quad (1.13)$$

Из выражений (1.12) и (1.13), следует:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y \quad (1.14)$$

Положение нейтральной оси (нулевой линии) определим из условия, что продольная сила в поперечном сечении балки при чистом изгибе равна нулю.

Рассмотрев уравнение равновесия (1.7), получим:

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{M}{I_z} y \cdot dA = \frac{M}{I_z} \cdot \int_A y \cdot dA = 0 \rightarrow$$

$$S_z = \int_A y \cdot dA = 0 \rightarrow S_z = 0 \quad (1.15)$$

Статический момент сечения S_z относительно нейтральной оси z равен нулю лишь в том случае, когда эта ось *центральная*.

Рассмотрев уравнение равновесия (1.9), получим:

$$\int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{M}{I_z} \cdot y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow$$

$$\frac{M}{I_z} \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow$$

$$I_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \quad I_{yz} = 0 \quad (1.16)$$

Центробежный момент инерции равен нулю относительно осей y и z лишь в том случае, когда они являются *главными центральными осями инерции*.

Следовательно, ось z (нейтральная линия) проходит, через центр тяжести площади поперечного сечения, так как статический момент $S_z = 0$, а оси y и z – главные центральные оси инерции, так как центробежный момент инерции сечения $I_{yz} = 0$.

Таким образом, мы получили формулу (1.14) для определения нормального напряжения σ при чистом изгибе в произвольной точке поперечного сечения балки с координатой y относительно главных центральных осей.

По формуле (1.14) можно определять абсолютную величину нормального напряжения σ , а его знак устанавливать в зависимости от того, в сжатой или растянутой зоне находится рассматриваемая точка. В этом случае величины M и y берутся по абсолютным значениям.

Если же учитывать знаки изгибающего момента M и координаты y , то формула (1.14) позволяет определять численное значение нормального напряжения σ и его знак.

В этом случае изгибающий момент M считается положительным, если он вызывает растяжение в точках первой четверти поперечного сечения балки.

1.11. РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Опытами установлено, что поперечная сила Q , возникающая в поперечных сечениях балки при плоском поперечном изгибе, мало влияет на нормальные напряжения балок и этим влиянием можно пренебречь.

Следовательно, формула (1.14) для вычисления нормальных напряжений в случае чистого изгиба балки вполне приемлема для расчета всех балок, работающих на изгиб, вызванный действием не только изгибающих моментов, но и поперечных сил.

Определим нормальные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 1.15 ÷ 1.17).

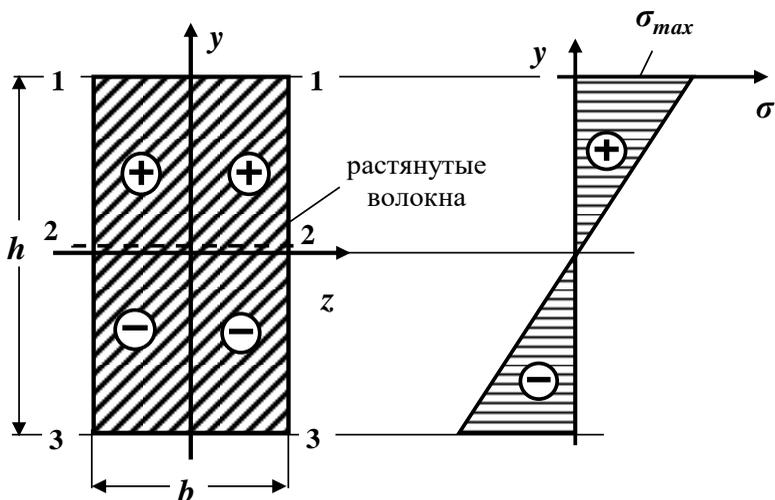


Рис. 1.15. Эпюра нормальных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки

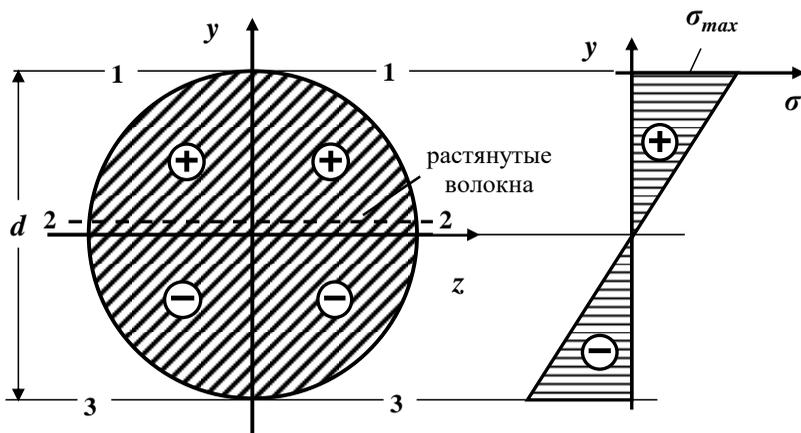


Рис. 1.16. Эпюра нормальных напряжений по высоте круглого поперечного сечения балки

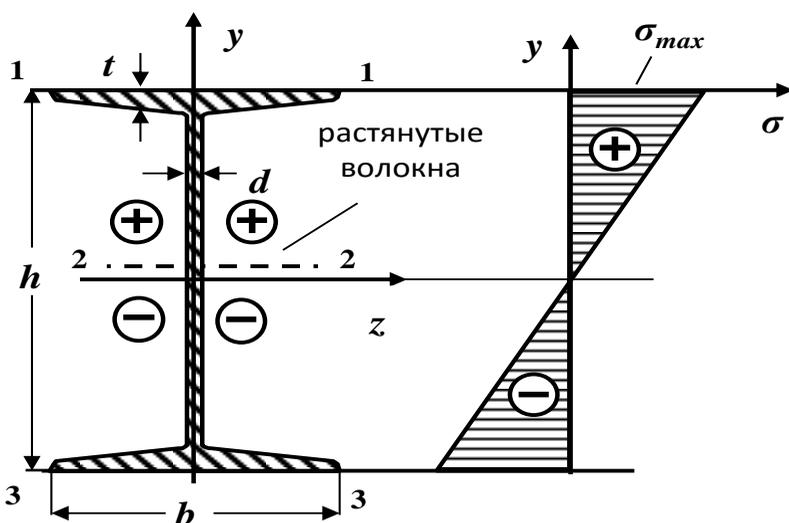


Рис. 1.17. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки

Формула (1.14) для определения нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки с координатой y :

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y$$

показывает, что какую бы форму и размеры ни имело сечение, нормальные напряжения в точках $2 - 2$ поперечного сечения балки, лежащих на главной оси z (на нейтральной оси $y = 0$) равны нулю.

Определение. Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Нейтральная ось при плоском изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярна к силовой плоскости.

Нормальные напряжения линейно возрастают по мере удаления от нейтральной линии. При этом напряжения оказываются постоянными по ширине поперечного сечения (вдоль линии $y = \text{const}$).

Наибольшей величины нормальные напряжения достигают в точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной линии ($y = y_{\max}$):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} \cdot y_{\max}$$

Обозначая

$$\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z,$$

получаем формулу для определения максимальных напряжений в произвольном сечении балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \quad (1.17)$$

В этих формулах:

I_z – главный момент инерции поперечного сечения относительно оси y ;

y_{\max} – максимальное расстояние, измеряемое по оси y от главной оси z до наиболее удаленной точки поперечного сечения;

W_z – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси z .

Определение. Опасными точками поперечного сечения называются точки, напряжения в которых достигают наибольших по величине значений.

Максимальное нормальное напряжение в балке в случае чистого или плоского изгибов возникает в сечении, где изгибающий момент достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором изгибающий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение M_{max} называется опасным сечением балки по нормальным напряжениям.

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки.

Следовательно, наибольшие нормальные напряжения в балке при чистом и плоском изгибах будут равны:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \quad (1.18)$$

Построим эпюры нормальных напряжений σ для некоторых типов поперечных сечений.

Определение. График, изображающий закон изменения нормальных напряжений σ по высоте поперечного сечения, называется эпюрой нормальных напряжений.

Как следует из формулы (1.14), нормальные

напряжения σ зависят линейно от координаты y , следовательно, по высоте поперечного сечения закон изменения нормальных напряжений представляет прямую линию.

На рис. 1.15÷1.17 показаны в общем виде эпюры нормальных напряжений σ для прямоугольного, круглого и двутаврового поперечных сечений балки */для случая растянутых верхних волокон/*.

Размеры элементов конструкций (поперечные сечения и длина) необходимо подбирать такими, чтобы под действием внешних нагрузок они не разрушались и не получали деформаций выше допустимого предела.

В условиях массового строительства также возникает проблема экономии строительных материалов при полной гарантии прочности конструкций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в ее элементах, были ниже предельных значений.

Поэтому при проектировании необходимо правильно установить напряжения, обеспечивающие безопасность конструкции.

В настоящее время применяются, в основном, два метода расчета на прочность: *по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям*. Оба метода преследуют одну цель – обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Первый метод еще недавно широко использовался в строительном деле и частично используется в настоящее время. По этому методу размеры элементов конструкции должны быть такими, чтобы во всех сечениях

напряжения, вызываемые нагрузкой, не превышали допускаемой величины.

Второй, более прогрессивный метод расчета по предельным состояниям был разработан советскими учеными. В настоящее время он является основным методом, применяемым при проектировании сооружений в нашей стране.

Нормами установлены три вида предельных состояний. В сопротивлении материалов рассматривается главным образом первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу допускаемых напряжений* имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (1.19)$$

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу предельных состояний* имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot n}{W_z} \leq R^H \cdot k \cdot m_B \quad (1.20)$$

В этих формулах:

σ_{max} – максимальное нормальное напряжение;

M_{max} – наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

W_z – момент сопротивления поперечного сечения

относительно главной оси z (нейтральная ось);

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение материала элементов конструкции;

R^H – нормативное сопротивление материала элементов конструкции;

n – коэффициент перегрузки;

k – коэффициент однородности материала элементов конструкции;

m_b – коэффициент условий работы элементов конструкции.

Величина допускаемых напряжений $[\sigma]$ назначается в зависимости от материала, из которого изготовлена балка.

Пластичные материалы обладают примерно равными пределами текучести на сжатие и на растяжение, поэтому:

$$[\sigma_c] = [\sigma_p] = [\sigma].$$

Для хрупких материалов, у которых прочность на сжатие выше, чем на растяжение, допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, как правило, не равны между собой $[\sigma_c] \geq [\sigma_p]$ и, поэтому, необходимо записывать два условия прочности:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{M_{max}}{I_z} \cdot y_{max_p} \leq [\sigma_p]; \\ \sigma_{max} &= \frac{M_{max}}{I_z} \cdot y_{max_c} \leq [\sigma_c],\end{aligned}\quad (1.21)$$

где:

y_{max_p} и y_{max_c} – расстояния (координаты) от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон.

Величина R , равная

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B, \quad (1.22)$$

называется *расчетным сопротивлением* материала элементов конструкции.

Пользуясь условием прочности при чистом и плоском изгибах по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (1.19) и методу предельных состояний (1.20), можно решать применительно к изгибу известные нам три типа задач:

1). Проектный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка и материал элементов конструкции ($[\sigma]$ или R^H). По заданной нагрузке определяют наибольший изгибающий момент M_{max} (по эпюре изгибающих моментов) и из условия прочности (1.19) или (1.20) находят величину требуемого момента сопротивления поперечного сечения по формулам:

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$W_z^{треб} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \quad (1.23)$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$W_z^{треб} \geq \frac{M_{max} \cdot n}{R^H \cdot k \cdot m_B} \quad (1.24)$$

По полученной величине требуемого момента сопротивления $W_z^{\text{треб}}$ подбирают размеры поперечных сечений балки таким образом, чтобы действительный момент сопротивления W_z примерно равнялся требуемому:

$$W_z \approx W_z^{\text{треб}}.$$

Как известно, момент сопротивления W_z для простых поперечных сечений определяется по формулам через размеры сечения или по сортаментам для прокатных профилей.

Подбор сечения производят следующим образом:

- если балка проектируется из прокатного профиля, то необходимый номер профиля берется по таблицам сортамента прокатных сталей в зависимости от величины требуемого момента сопротивления $W_z^{\text{треб}}$;
- в случае подбора круглого сплошного сечения балки диаметром d , известно, что момент сопротивления W_z определяется по формуле:

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Приравнивая $W_z \approx W_z^{\text{треб}}$, находят требуемый диаметр балки:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z^{\text{треб}}}{\pi}}.$$

• в случае подбора прямоугольного поперечного сечения балки размером $b \times h$, предварительно задаются соотношением $\beta = h / b$, то есть $h = \beta \cdot b$.

Известно, что момент сопротивления W_z для прямоугольного поперечного сечения балки определяется по формуле:

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (\beta \cdot b)^2}{6} = \frac{\beta^2 \cdot b^3}{6}.$$

Приравнивая $W_z \approx W_z^{\text{треб}}$, находят требуемые размеры балки:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_z^{\text{треб}}}{\beta^2}}; \rightarrow h = \beta \cdot b.$$

2). Определение допустимой нагрузки (несущей способности). В этом случае известны размеры поперечного сечения (W_z) и материал элементов конструкции ($[\sigma]$ или R^m).

Из условия прочности (1.19) или (1.20) находят наибольшую допустимую величину изгибающего момента:

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_z \cdot [\sigma]. \quad (1.25)$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$M_{max} = [M_{max}] \leq W_z \cdot R^H \cdot k \cdot m_B \cdot 1/n. \quad (1.26)$$

По найденному допускаемому значению изгибающего момента $[M_{max}]$ определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

3). Проверочный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка, размеры поперечного сечения (W_z) и материал элементов конструкции ($[\sigma]$ или R^H).

Требуется определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в элементах конструкции, и сравнить с допускаемым напряжением или расчетным сопротивлением, то есть проверить выполнение условия прочности (1.19) или (1.20):

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot n}{W_z} \leq R^H \cdot k \cdot m_B.$$

1.12. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БАЛОК

Характер распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях балки позволяет сделать выводы о рациональной форме поперечного сечения при чистом и плоском изгибах.

В отличие от центрального растяжения (сжатия)

напряжения в сечении распределяются неравномерно. Материал, расположенный у нейтрального слоя, нагружен незначительно.

Поэтому, в целях экономии материала и снижения веса конструкции, для стержней, работающих на изгиб, следует выбирать такие формы сечения, чтобы значительная часть материала была наиболее удалена от нейтральной линии.

Идеальным является сечение, изображенное на рисунке (1.18).

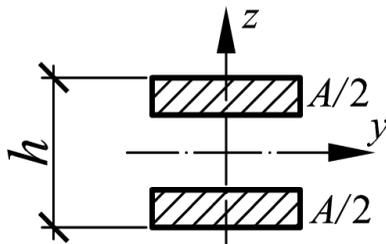


Рис. 1.18. Идеальное сечение

Из практически встречающихся профилей наиболее близко к идеальному сечению – это двутавровое сечение.

Несущая способность балки определяется выражением (1.25) или (1.26):

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$M_{max} = [M_{max}] \leq W_z \cdot [\sigma].$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$M_{max} = [M_{max}] \leq W_z \cdot R^H \cdot k \cdot m_B \cdot 1/n.$$

Расход же материала пропорционален площади сечения A . Следовательно, чем больше отношение W_z/A , тем больший изгибающий момент выдерживает сечение с заданной площадью.

Отношение $k = W_z/A$ можно принять за критерий, оценивающий качество формы поперечного сечения.

Рассмотрим несколько видов поперечных сечений (рис. 1.19).

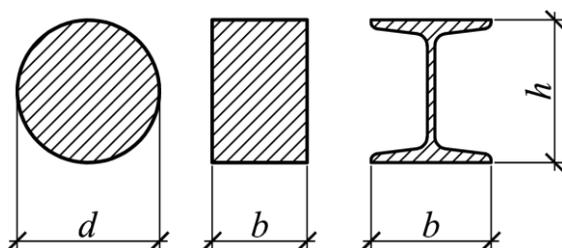


Рис. 1.19. Типы поперечных сечений
– для круглого сечения:

$$k = \frac{\frac{\pi d^3}{32}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{8} = 0,125d = (0,125h);$$

– для прямоугольного сечения :

$$k = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6} = 0,167h;$$

– для двутаврового сечения:

$$k = (0,29 \div 0,31) \cdot h.$$

1.13. Поперечный изгиб. Касательные напряжения при изгибе

В отличие от чистого изгиба при плоском поперечном изгибе в сечении балки возникает не только изгибающий момент M , но и поперечная сила Q .

Поэтому при плоском изгибе в поперечных сечениях балки наряду с нормальными напряжениями σ , вызванными изгибающим моментом, возникают и касательные напряжения τ , вызванные поперечными силами.

Вследствие сдвигов гипотеза плоских сечений при плоском изгибе нарушается, плоские до деформации сечения слегка искривляются.

Исследования этого вопроса показали, что влияние указанного эффекта на величину нормальных напряжений невелико и поэтому влиянием сдвигов на закон распределения нормальных напряжений при плоском (поперечном) изгибе пренебрегают.

Таким образом, гипотеза плоских сечений распространяется и на плоский поперечный изгиб.

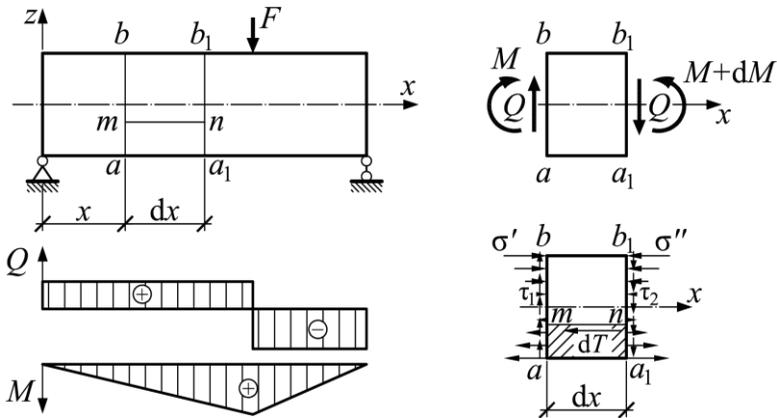
Задача определения напряжений в поперечных сечениях балки статически неопределима и требует рассмотрения трех сторон задачи (статической, геометрической и физической).

Однако иногда можно принять такие гипотезы о распределении напряжений, при которых задача становится статически определимой и отпадает необходимость в привлечении геометрических и физических сторон задачи.

Для определения касательных напряжений в случае плоского поперечного изгиба примем следующие гипотезы:

1. Направления всех касательных напряжений в сечении параллельны поперечной силе, которая является их равнодействующей.
2. Касательные напряжения равномерно распределены по ширине сечения балки [**при $b \ll h$**].
3. Величина нормальных напряжений принимается как при чистом изгибе, то есть выполняется гипотеза плоских сечений.

Проведем вывод формулы касательных напряжений при плоском изгибе на примере балки прямоугольного поперечного сечения шириной ***b*** (рис. 1.20).



1.20. Вывод формулы касательных напряжений при изгибе

Для вывода формулы касательных напряжений вырежем из балки двумя сечениями $a - b$ и $a_1 - b_1$ элементарный элемент длиной dx (рис. 1.20).

В сечении $a - b$ изгибающий момент вызывает нормальные напряжения σ' , а поперечная сила вызывает касательные напряжения $\tau_1 = \tau$.

В сечении $a_1 - b_1$ изгибающий момент вызывает нормальные напряжения σ'' , а поперечная сила вызывает касательные напряжения τ_2 .

Для определения касательных напряжений в плоскости сечения, расположенной параллельно нейтральному слою, разрежем вырезанную часть балки плоскостью $m - n$ и отбросим верхнюю часть.

Действие отброшенной части на оставшуюся нижнюю часть (заштрихованная часть, рис. 1.20) заменим предполагаемой сдвигающей силой dT (рис. 1.21).

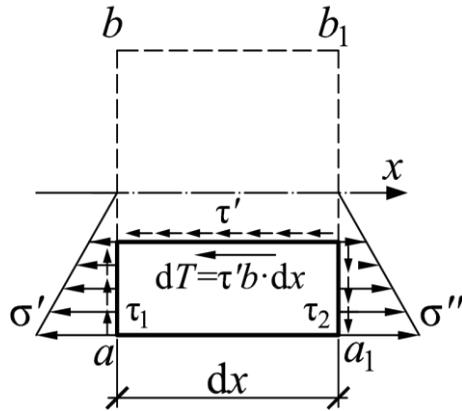


Рис. 1.21. Выделенный элементарный элемент балки

Таким образом, на передней, задней и нижней гранях отсеченной части выделенного элемента (заштрихованная часть, рис. 1.20) нет напряжений, так как эти грани свободны от поверхностной нагрузки.

По боковым граням отсеченной части выделенного элемента (сечения $a - b$ и $a_1 - b_1$) действуют нормальные напряжения σ' и σ'' , вызванные изгибающими моментами, и касательные напряжения τ_1 и τ_2 , вызванные поперечными силами (рис. 1.21).

В плоскости сечения, расположенной параллельно нейтральному слою, действует сдвигающая сила $dT = \tau' \cdot b \cdot dx$ (рис. 1.21).

Составим уравнение равновесия (уравнения статики):

$$\sum x = 0. \rightarrow -\tau' \cdot b \cdot dx - \int_{A_{\text{омс}}} \sigma' \cdot dA + \int_{A_{\text{омс}}} \sigma'' \cdot dA = 0,$$

Нормальные напряжения, действующие на гранях выделенного элемента, равны:

$$\sigma' = My / I_z; \quad \sigma'' = (M + dM)y / I_z .$$

Подставив в уравнение равновесия, получим:

$$-\tau' b dx - \int_{A_{омс}} \frac{M \cdot y}{I_z} dA + \int_{A_{омс}} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA = 0 .$$

$$\rightarrow -\tau' \cdot b \cdot dx + \frac{dM}{I_z} \cdot S_z^{омс} = 0. \rightarrow \tau' = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_z^{омс}}{b \cdot I_z}$$

Так как

$$dM / dx = Q ,$$

то

$$\tau' = \frac{Q \cdot S_z^{омс}}{b \cdot I_z} .$$

На основании закона парности касательных напряжений имеем:

$$\tau' = \tau = \frac{Q \cdot S_z^{омс}}{b \cdot I_z}$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{отс}}{b(y) \cdot I_z} \quad (1.27)$$

Полученное выражение представляет собой формулу Д.И. Журавского для определения касательных напряжений в произвольной точке поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе.

В этой формуле:

Q – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_z^{\text{отс}}$ – абсолютное значение статического момента «отсеченной» части поперечного сечения балки относительно нейтральной оси (главной оси z);

$b(y)$ – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки;

I_z – главный момент инерции поперечного сечения балки.

y – координата точки поперечного сечения, в которой определяется касательное напряжение.

Определение. «Отсеченной» частью поперечного сечения балки называется часть поперечного сечения, расположенная по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси (главной оси z).

Таким образом, *касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе равно произведению поперечной силы Q , действующей в рассматриваемом сечении балки, на статический момент $S_z^{\text{отс}}$ части поперечного сечения, лежащей выше (или ниже) рассматриваемого слоя, относительно нейтральной оси, деленному на ширину $b(y)$ слоя поперечного сечения и на главный момент инерции I_z всего сечения относительно нейтральной оси.*

В любом поперечном сечении балки статический момент отсеченной части $S_z^{\text{отс}}$ для самых отдаленных от нейтральной оси (главной оси z) точек сечения равен нулю, поэтому касательные напряжения τ в них равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси (главной оси z), $S_z^{\text{отс}} = S_z^{1/2} = S_{\text{max}}$, следовательно, касательные напряжения в них достигают максимальных значений (*опасные точки*).

Здесь $S_z^{1/2}$ – статический момент половины поперечного сечения.

Определение. Сечение, в котором поперечная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение Q_{max} , называется опасным сечением балки по касательным напряжениям.

Таким образом, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки.*

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} \cdot S_z^{1/2}}{b(y) \cdot I_z}. \quad (1.28)$$

Рассмотрим распределение касательных напряжений при изгибе по высоте некоторых типов поперечных сечений (эпюры τ).

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения.

Определение. График, изображающий закон изменения напряжений τ по высоте поперечного сечения, называется эпюрой касательных напряжений.

Из формулы (1.27) видно, что касательные напряжения в балке изменяются по высоте поперечного сечения по тому же закону, что $\frac{S_z^{\text{отс}}}{b(y)}$.

1.14. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В прямоугольном сечении $b(y) = b = \text{const}$, поэтому закон распределения будет таким же, что и для статического момента «отсеченной» части поперечного сечения $S_z^{\text{отс}}$:

$$S_z^{\text{отс}} = \int_y^{\frac{h}{2}} b \cdot y \cdot dy = b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Следовательно, касательные напряжения в произвольной точке прямоугольного поперечного сечения балки с координатой y вычисляются по формуле:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{отс}}}{b(y) \cdot I_z} = \frac{6Q}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (1.29)$$

Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте прямоугольного поперечного сечения изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 1.22).

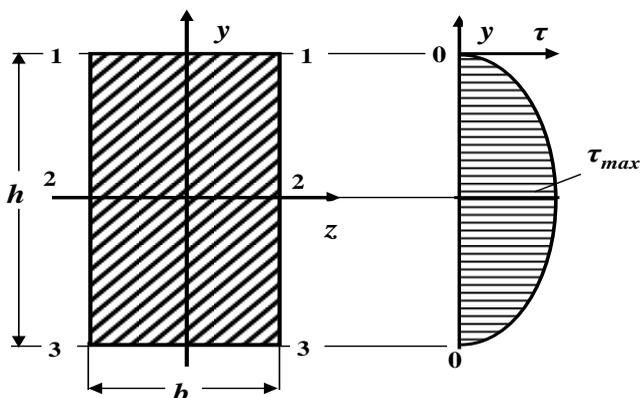


Рис. 1.22. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения балки

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1–1** и **3–3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (**при $y = \pm \frac{h}{2}$**), касательные напряжения равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2–2** (**при $y = 0$**), возникают наибольшие касательные напряжения (*опасные точки*).

Следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (1.30)$$

В этой формуле:

τ_{max} – максимальное касательное напряжение;

Q – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = b \cdot h$ – площадь прямоугольного поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (1.30) подставить $Q = Q_{max}$:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{A}. \quad (1.31)$$

На рис. 1.22 показан общий вид эпюры касательных напряжений τ для прямоугольного поперечного сечения балки.

1.15. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКАХ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Предполагается, что вертикальные проекции касательных напряжений равномерно распределены по ширине круглого сечения. Эти составляющие касательного напряжения определяются по формуле (1.27). Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте круглого поперечного сечения также изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1–1**, **2–2** и **3–3** (рис. 1.23).

В точках круглого поперечного сечения, лежащих на линиях **1–1** и **3–3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (*при $y = \pm \frac{d}{2}$*), касательные напряжения равны нулю, так как $S_z^{отс} = 0$.

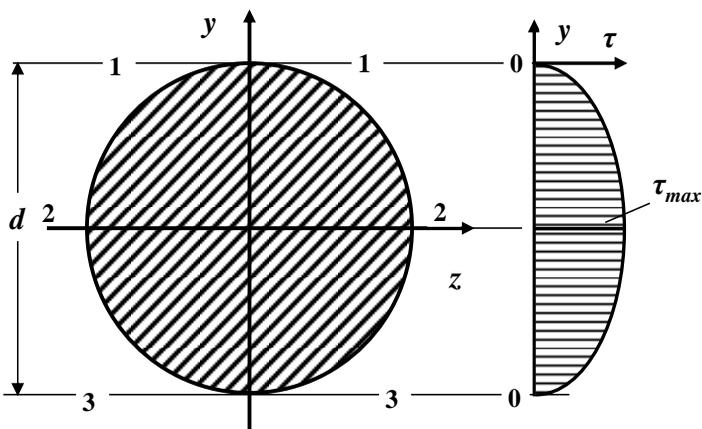


Рис. 1.23. Эпюра касательных напряжений для круглого поперечного сечения балки

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2 – 2** (*при $y = 0$*), возникают наибольшие касательные напряжения (*опасные точки*), так как

$$S_z^{\text{отс}} = S_z^{1/2} = S_{\text{max}}$$

Здесь $S_z^{1/2}$ – статический момент половины поперечного сечения относительно нейтральной оси (главной оси **z**).

Максимальное касательное напряжение для круглого поперечного сечения балки можно вычислить по формуле:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A} \cdot \quad (1.32)$$

В этой формуле:

τ_{max} – максимальное касательное напряжение;

Q – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \text{ – площадь круглого поперечного сечения}$$

балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (1.32) подставить $Q = Q_{max}$:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{max}}{A}. \quad (1.33)$$

На рис. 1.23 показан общий вид эпюры касательных напряжений τ для круглого поперечного сечения балки.

1.16. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКАХ ДВУТАВРОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Характерной особенностью этого сечения является резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки двутавра к его полке.

При определении касательных напряжений в **полке** двутавра необходимо иметь в виду, что для их определения нельзя использовать формулу Д.И. Журавского (1.27), так как предположение о равномерности распределения касательных напряжений по ширине полки здесь не выполняется.

Таким образом, вопрос о величине и законе распределения касательных напряжений в полках двутавра остается неразрешенным.

Однако, ввиду того, что в этих сечениях касательные напряжения невелики, то их обычно не вычисляют.

Значительно больший интерес представляют касательные напряжения в **стенке** двутавра, так как, в основном, поперечную силу воспринимает стенка.

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д.И. Журавского (1.27):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{отс}}}{b(y) \cdot I_z}$$

Для этого обычно определяют численные значения касательных напряжений в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях **4–4**, **2–2** и **5–5** **стенки двутавра** (рис. 1.24).

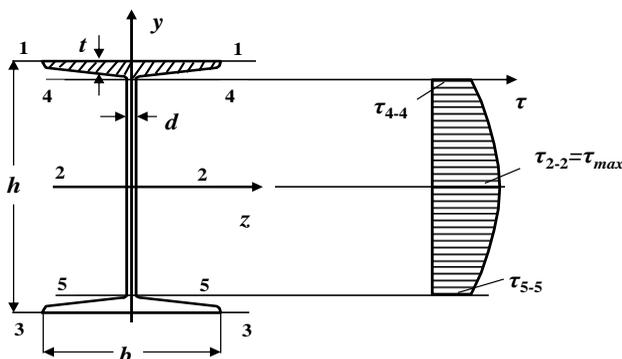


Рис. 1.24. Эпюра касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения балки

Максимальные касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии **2 – 2** (на главной оси **z**) двутавра (*опасные точки*), поэтому для поперечного сечения балки из двутавра $b(y) = d$ (рис. 1.24).

Отсеченная часть фигуры, в этом случае, – верхняя половина поперечного сечения, поэтому

$$S_z^{\text{отс}} = S_z^{1/2},$$

где:

$S_z^{1/2}$ – статический момент половины сечения относительно главной оси **z**.

(Для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте – см. прил.).

Для определения касательных напряжений в точках, лежащих на линиях **4 – 4** и **5 – 5**, находят статический момент полки (отсеченная часть сечения – заштрихованная полочка двутавра, рис. 1.24):

$$S_z^{\text{отс}} = S_z^{\text{полки}} = S_z^{1/2} - S_z^{1/2 \text{стенки}} = S_z^{1/2} - d \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right) = S_z^{1/2} - \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right)^2.$$

По полученным численным значениям τ в сечениях **2 – 2**, **4 – 4** и **5 – 5** строят эпюру касательных напряжений по высоте *стенки* двутавра (рис. 1.24).

При рассмотрении касательных напряжений в полках, как было указано выше, уже нельзя предполагать,

что касательные напряжения равномерно распределены по ширине b полки.

Например, видно, что при $y = \pm [h/2 - t]$ касательные напряжения на нижней грани верхней полки и на верхней грани нижней полки должны быть равны нулю, в то время как в месте соединения полки со стенкой эти напряжения не равны нулю.

Следовательно, применение формулы Д.И. Журавского для определения касательных напряжений в полке приводит к ошибочным, по существу, результатам. Можно лишь утверждать, что при небольшой толщине полки касательные напряжения в полке весьма малы.

В то же время в месте резкого изменения ширины сечения возникает значительная концентрация напряжений. На практике в прокатных двутавровых балках в вершинах входящих углов делаются закругления, снижающие концентрацию напряжений.

Таким образом, величина касательных напряжений в районе границы полки и стенки не может быть точно установлена методами сопротивления материалов.

Для определения горизонтальных составляющих касательных напряжений в точках полки можно воспользоваться формулой Д.И. Журавского, принимая в ней за $S_z^{отс}$ статический момент относительно нейтральной оси части полки, а за b_y – толщину полки t (рис. 1.25).

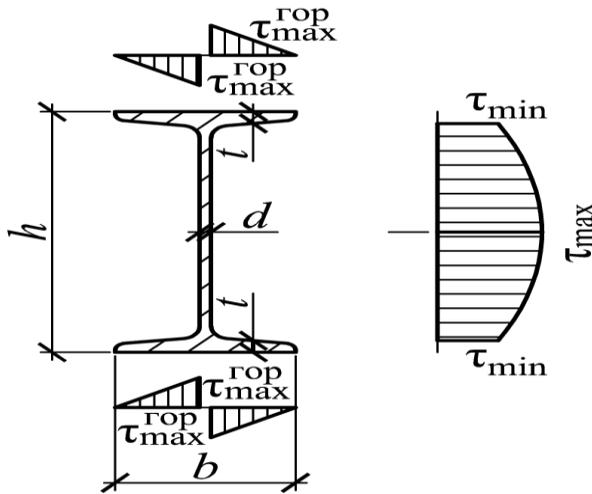


Рис. 1.25. Эпюры касательных напряжений для стенки и полки двутаврового поперечного сечения балки

В результате получим:

$$S_z^{\text{отс}} = t \cdot [(b/2) - z] \cdot (h - t)/2.$$

Касательные напряжения будут равны:

$$\tau^{\text{зоп}} = \frac{Q \cdot t}{t \cdot I_z} \cdot \left(\frac{b}{2} - z\right) \cdot \left(\frac{h - t}{2}\right) = \frac{Q}{2I_z} \cdot \left(\frac{b}{2} - z\right) \cdot (h - t).$$

Таким образом, $\tau^{\text{зоп}}$ изменяется в пределах полки по линейному закону.

Максимальное значение $\tau^{\text{зоп}}$ принимает при $z = = d/2$:

$$\tau_{\text{max}}^{\text{зоп}} = \frac{Q}{2I_z} \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right) (h - t) = \frac{Q}{4I_z} \cdot (b - d) \cdot (h - t).$$

В балках сплошного сечения чаще всего величина касательных напряжений по сравнению с нормальными напряжениями невелика, и большей частью производить проверку прочности балки по касательным напряжениям нет необходимости.

В коротких балках, сильно нагруженных вблизи опор, и в балках тонкостенного профиля касательные напряжения могут иметь сравнительно большую величину.

Поэтому на практике обычно подбирают размеры поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям, а затем уже проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение балки условию прочности по касательным напряжениям.

В этом случае проверка прочности по методу допускаемых касательных напряжений производится по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y} \leq [\tau], \quad (1.34)$$

где:

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Для стальных балок обычно принимают допускаемое касательное напряжение

$$[\tau] \approx 0,6 \cdot [\sigma].$$

1.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКЕ ПРИ ИЗГИБЕ. ДЕФОРМАЦИЯ БАЛОК. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В предыдущих параграфах были рассмотрены вопросы, относящиеся к расчету балок на прочность.

Однако, в большом количестве случаев практического расчета стержневых и рамных систем, работающих на изгиб, необходимо также производить их расчет на жесткость.

Под расчетом на жесткость понимается оценка упругой податливости плоских стержневых систем под действием нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать допускаемых величин.

Для выполнения таких расчетов необходимо научиться вычислять перемещения поперечных сечений плоских стержневых систем под действием любой внешней нагрузки. Кроме этого, перемещения приходится определять и при расчете статически неопределимых конструкций.

Под действием внешних нагрузок балка деформируется и ее ось искривляется (рис. 1.26).





Рис. 1.26. Деформация балки при изгибе

Определение. Плоская кривая, форму которой принимает ось балки при изгибе, называется изогнутой осью, или упругой линией.

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей.

Пренебрегая деформациями сдвига, можно считать угол поворота поперечного сечения балки φ равным углу между касательной, проведенной к изогнутой оси балки в этом сечении, и недеформированной осью балки, то есть углу поворота оси балки.

Допущение о малости перемещения позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной (геометрической) оси недеформируемого бруса (рис. 1.26).

Определение. Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному геометрической оси балки, называется прогибом балки в данном сечении и обозначается буквой δ .

Определение. Наибольший прогиб называется стрелой прогиба и обозначается буквой f .

Прогибы балки малы по сравнению с ее длиной, а поэтому их принято изображать в более крупном масштабе, чем длину оси.

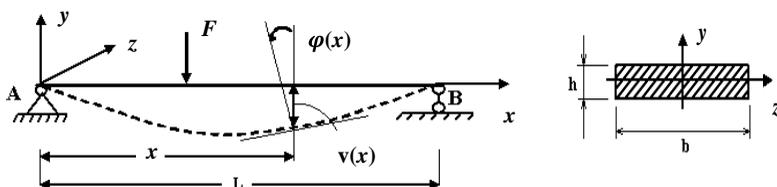
Длина оси балки при изгибе остается неизменной, так как ось расположена в нейтральном слое, а нормальные напряжения в поперечных сечениях балки на уровне нейтрального слоя равны нулю.

Искривление оси балки вызывает не только прогибы, но и смещения точек оси балки по горизонтали.

Эти смещения, как правило, весьма малы не только с длиной балки, но и с прогибами ее оси; поэтому ими при расчете пренебрегают.

Определение. Угол φ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Таким образом, при изгибе балок точки ее геометрической оси (x) получают вертикальные перемещения или прогибы (v), а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей (z) на угол φ (рис. 1.27).



1.27. Деформация балки при изгибе

Определение. Прогибы (v) и углы поворота (φ) часто называют линейными и угловыми перемещениями соответственно.

Правило знаков. Прогиб (v) считается положительным, если он происходит вверх – в сторону положительной оси ординат y .

Правило знаков. Угол поворота (φ) считается положительным, если поперечное сечение поворачивается против хода часовой стрелки.

Ось абсцисс x направлена слева направо (на рис. 1.27 $v(x) < 0$, а $\varphi(x) > 0$).

Прогибы балок измеряются в единицах длины (сантиметрах или миллиметрах), а углы поворота – в градусах или радианах.

Здесь и далее начало отсчета для координат x , y и z выбирается на левом конце балки.

Теория деформации балок, изучаемая в курсе сопротивления материалов, основывается на следующих предположениях (гипотезах):

1. Материал балки подчиняется закону Гука ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), то есть напряжения в балке не выходят за предел пропорциональности.

2. Размеры поперечных сечений балки невелики по сравнению с ее длиной.

3. Прогибы балки (v) малы по сравнению с ее длиной L /расстоянием между опорами балки/, то есть отношение наибольшего прогиба f к длине пролета L балки устанавливается в следующих пределах:

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000'}$$

где:

L – длина пролета балки (для консолей пролет L равен удвоенному вылету консоли).

4. Углы поворота поперечных сечений (φ) не превышают 1° :

$$|\varphi_{max}| \leq 1^\circ \approx 0,0175 \text{ рад.}$$

1.18. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Выберем прямоугольную систему координат $хоу$ с началом на левом конце оси балки. Ось x направим вправо (вдоль недеформированной оси балки), а ось y – вверх (рис. 1.27).

При таких условиях уравнение $v = f(x)$ представляет собой уравнение кривой, по которой изогнется ось балки под нагрузкой. Это и будет уравнение изогнутой оси балки.

Касательная к изогнутой оси балки в рассматриваемом сечении составляет с осью x угол φ , то есть угол поворота поперечного сечения относительно первоначального положения.

Первая производная $\frac{dv}{dx}$ от $v = f(x)$ представляет собой тангенс угла φ между осью x и касательной к упругой линии:

$$v'(x) = tg \varphi (x),$$

Практически углы φ весьма малы. Они, как правило, менее 0,01 радиана, поэтому, в связи с малостью деформаций балок, можно считать, что:

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi,$$

следовательно, можно записать, что:

$$v'(x) = \operatorname{tg}\varphi(x) \approx \varphi(x).$$

то есть:

$$\varphi = \frac{dv}{dx} \quad (1.35)$$

Угол поворота φ поперечного сечения балки равен первой производной по x от прогиба v в этом сечении.

Для определения деформации балки в ее произвольном сечении необходимо получить уравнение упругой линии $v = f(x)$.

Исходя из физической природы изогнутой оси балки, можно считать, что упругая линия должна быть непрерывной и гладкой (без изломов) кривой.

Следовательно, на протяжении всей оси балки должны быть непрерывны функция $v = f(x)$ и ее первая производная.

Плоскости двух смежных поперечных сечений деформированной балки, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , пересекаются в центре кривизны участка dx оси балки.

Расстояние ρ от центра кривизны до оси балки называется радиусом кривизны оси.

При определении напряжений в случае чистого изгиба была получена формула кривизны (1.13):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_Z'} \quad (1.36)$$

выражающая связь между радиусом кривизны оси балки, изгибающим моментом в поперечном сечении балки и жесткостью поперечного сечения при изгибе.

Определение. Величина $E \cdot I_Z'$, характеризующая сопротивляемость балки изменению ее первоначальной формы, называется жесткостью балки при изгибе.

Пренебрегая незначительным влиянием поперечной силы на величину деформаций, будем полагать эту формулу действительной и в общем случае плоского изгиба.

Из курса математического анализа известно уравнение кривизны плоской кривой:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.37)$$

Подставляя выражение (1.36) в формулу (1.37), получим:

$$\frac{M}{E \cdot I_Z} = \pm \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.38)$$

Мы получили точное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки.

Так как угол φ менее 0,01 радиана, то величиной $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 0,0001$ можно пренебречь.

Тогда уравнение (1.38) принимает вид:

$$\frac{M}{E \cdot I_z} = \pm \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.39)$$

или

$$v'' = \pm \frac{M}{E \cdot I_z} \quad (1.40)$$

Мы получили приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки.

Правило знаков для изгибающего момента установлено независимо от направления координатных осей (изгибающий момент M в поперечном сечении балки считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки).

Вторая же производная положительна, если в сторону положительного направления оси y обращена вогнутость кривой, и отрицательна – если выпуклость кривой (рис. 1.28)

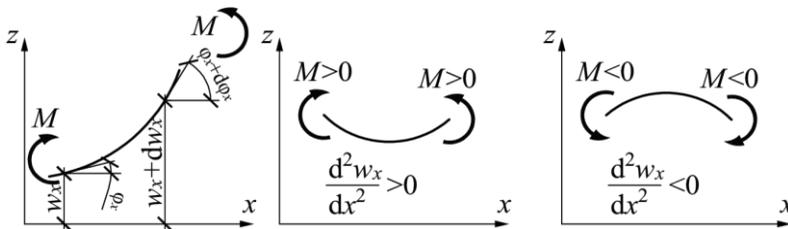


Рис. 1.28. Деформация балки при изгибе

При принятом правиле знаков для изгибающего момента, положительной второй производной соответствует положительный момент, а поэтому в формуле (1.40):

$$v'' = \pm \frac{M}{E \cdot I_z}$$

необходимо брать знак «плюс»:

$$E I_z \cdot v'' = + M \quad (1.41)$$

Полученное уравнение называется основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

Уравнение изогнутой оси балки (1.40) иногда удобно записать в иной форме, считая заданным не изгибающий момент M , а интенсивность внешней распределенной нагрузки.

Известно, что (1.6):

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2}.$$

В результате получим:

$$E I_z \cdot v''' = \frac{dM_{(x)}}{dx} = Q_{(x)}; \quad E I_z \cdot v^{IV} = \frac{dQ_{(x)}}{dx} = q_{(x)}.$$

1.19. МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Этот метод заключается в том, что для каждого участка балки составляют выражение изгибающего момента, которое подставляют в *основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки* (1.41), и интегрируют два раза.

Проинтегрировав выражение (1.41) /для балки постоянного поперечного сечения/, получим уравнение углов поворота сечений балки:

$$EI_z \cdot v' = \int M \cdot dx + C .$$

Интегрируя второй раз, получаем уравнение прогибов (уравнение упругой линии):

$$EI_z \cdot v = \int dx \int M \cdot dx + C \cdot x + D .$$

При этом после каждого интегрирования появится некоторая постоянная величина и, следовательно, окончательный результат будет содержать *две постоянные неизвестные величины*.

Неизвестные произвольные постоянные интегрирования **C** и **D** определяют из граничных условий (*из условий закрепления балки*) и на границах смежных участков.

Граничные условия отражают характер закрепления (опирания) концов балки и состояются относительно прогибов и углов поворота.

Так, например, для шарнирно опертой балки (рис. 1.29) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах:

$$v_B = 0 \text{ и } v_D = 0 \quad (1.42)$$

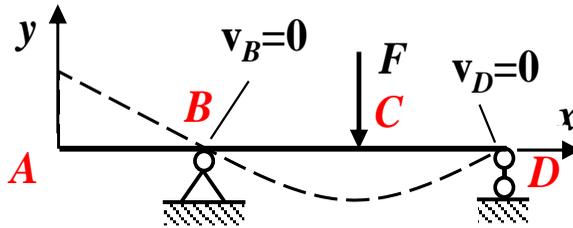


Рис. 1.29. Шарнирно опертая балка

Для жестко защемленной балки (рис. 1.30) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке:

$$v_A = 0 \text{ и } \varphi_A = 0 \quad (1.43)$$

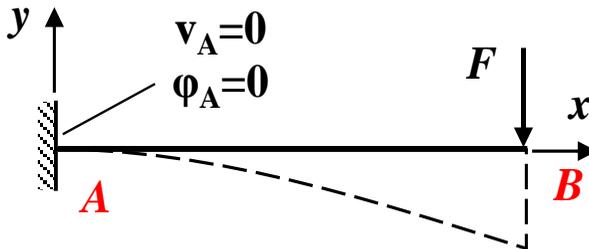


Рис. 1.30. Жестко защемленная балка

На границах двух смежных участков (рис. 1.31) прогиб и угол поворота для левого и правого участков равны между собой:

$$v_{лев} = v_{прав} ; \quad \varphi_{лев} = \varphi_{прав} \quad (1.44)$$

В каждом конкретном случае необходимо выбрать то или иное граничное условие.

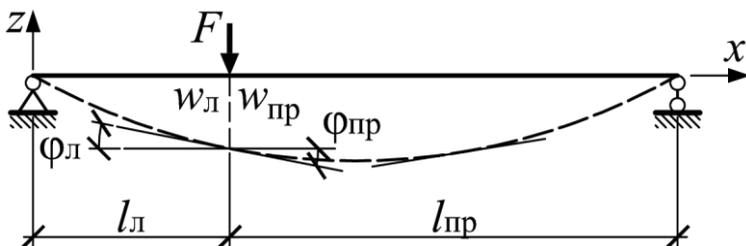


Рис. 1.31. Граничные условия на смежных участках

Рассмотрим балку, жестко заделанную правым концом и нагруженную на свободном конце сосредоточенной силой F , линия действия которой совпадает с вертикальной главной осью поперечного сечения балки (рис. 1.32).

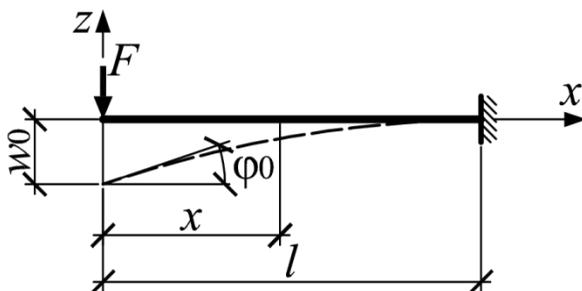


Рис. 1.32. Схема деформации консольной балки

Определим прогиб и угол поворота поперечного сечения балки на ее свободном левом конце

Балка имеет один участок.

Изгибающий момент в сечении балки с абсциссой x равен:

$$M = -F \cdot x.$$

Подставив это выражение в дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (1.41), получим:

$$EI_z \cdot v'' = -F \cdot x.$$

Проинтегрируем это уравнение дважды:

$$EI_z v' = EI_z \varphi = -F(x^2/2) + C; \quad EI_z v = -F(x^3/6) + Cx + D$$

Постоянные интегрирования C и D определим из условий закрепления правого конца балки. Здесь (при $x = l$) прогиб v_l и угол поворота сечения φ_l равны нулю.

Подставим значения $x = l$ в выражения для v и φ , получим значения постоянных интегрирования и уравнения для определения углов поворота и прогибов для этой балки:

$$C = \frac{F \cdot l^2}{2}; \quad D = \frac{F \cdot l^3}{3}. \quad \rightarrow$$

$$\varphi = \frac{F}{2} \cdot (l^2 - x^2); \quad v = \frac{F}{6} \cdot (2l^3 - 3l^2 x + x^3) \quad (1.45)$$

По этим уравнениям можно определить прогиб v и угол поворота φ любого поперечного сечения этой балки.

Прогиб свободного конца балки и угол поворота сечения ($x = 0$) будут равны:

$$v_{(0)} = v_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EI_z}; \quad (1.46)$$

$$v'_{(0)} = \varphi_{(0)} = \frac{Fl^2}{2EI_z}. \quad (1.47)$$

Сравнивая выражения для **C** и **D** (1.45) с выражениями для прогиба и угла поворота в начальном сечении ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$) видим, что **C** равно начальному углу поворота, а **D** равно начальному прогибу (с множителем EI_z).

Таков физический смысл произвольных постоянных интегрирования на участке, примыкающему к началу координат, для любой балки при произвольной нагрузке.

Если на балку будут действовать несколько внешних сил, приложенных в разных ее сечениях, то применяя этот метод к отдельным участкам балки, получим в результате систему уравнений с большим числом неизвестных **C_i** и **D_i**.

1.20. ПРАВИЛА УРАВНИВАНИЯ ОДНОИМЁННЫХ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ПРАВИЛА КЛЕБША

Если балка имеет несколько участков, то для каждого из них выражения для изгибающего момента будут различными.

Следовательно, для каждого участка должно быть составлено и дважды проинтегрировано дифференциальное уравнение упругой линии балки. При этом на

каждом участке будет по две неизвестных постоянных интегрирования C_i и D_i .

Для их определения к двум опорным условиям балки должны быть добавлены условия плавного и непрерывного сопряжения участков балки между собой.

Эти дополнительные условия выражают отсутствие разрывов и изломов упругой линии балки на границах участков (1.44).

Применяя правила Клебша можно добиться равенства между собой одноименных постоянных интегрирования на всех соседних участках.

То есть:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n; \quad D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D_n \quad (1.48)$$

Для уравнивания между собой одноименных постоянных интегрирования на всех соседних участках необходимо непременно выполнить следующие требования Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси y (v) – вверх.

2. При включении в уравнение внешнего сосредоточенного момента M_n его необходимо умножать на множитель $(x-a)^0$, равный единице. Здесь a координата сечения, в котором приложен сосредоточенный момент.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений на всех участках балки выполняется без раскрытия скобок, то есть по новой переменной $(x-a)$.

Следовательно, выражение $F \cdot (x - a_n) \cdot dx$ заменяется выражением $F \cdot (x - a_n) \cdot d(x - a_n)$.

Отсюда,

$$\int F(x - a_n) dx = \int F(x - a_n) d(x - a_n) = \frac{F \cdot (x - a_n)^2}{2} + C.$$

Выражение $M_n \cdot dx$ заменяется выражением $M_n \cdot (x - a_n)^0 \cdot d(x - a_n)$.

Отсюда,

$$\int M_n dx = \int M_n (x - a_n)^0 d(x - a_n) = M_n (x - a_n) + C.$$

4. При действии на балку распределенной нагрузки, не достигающей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого концевого сечения, одновременно уравновешивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано на рис. 1.33:

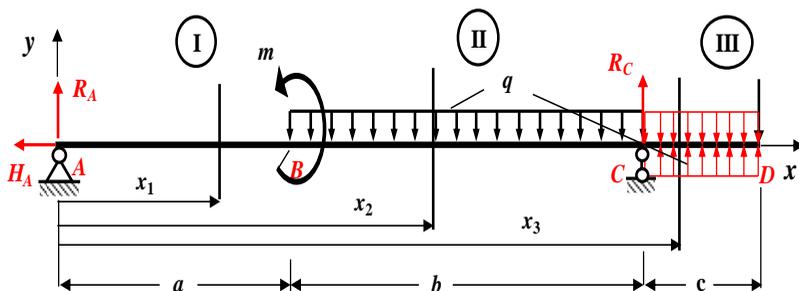


Рис. 1.33. Требования Клебша

Для расчета балок на жесткость (определение перемещений в плоских стержневых системах) в курсе сопротивления материалов обычно изучают метод начальных параметров и метод Мора (интеграл Мора) с использованием Правила Верещагина (правила «перемножения» эпюр).

Метод начальных параметров удобно применять в том случае, когда необходимо определить перемещения в нескольких сечениях балки.

Основным недостатком этого метода является то, что его можно применять только для расчета балок.

Метод Мора, в отличие от метода начальных параметров, является универсальным. Его можно применять для определения перемещений любых объектов – балок, плоских и пространственных рам, арок и др.

1.21. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси для балок с большим количеством участков сопряжено с большими трудностями. Задача определения прогибов и углов поворота может быть значительно упрощена, если применять так называемое универсальное уравнение изогнутого бруса (метод начальных параметров).

Академиком А.Н. Крыловым подобная задача была решена в общем виде для балки, условно нагруженной всеми возможными типами внешних нагрузок.

Метод начальных параметров не требует составления выражений изгибающих моментов и дифференцирования уравнений. Число неизвестных постоянных, подлежащих определению, не превышает двух, независимо от числа участков балки.

По методу начальных параметров прогиб в любом сечении балки определяется через перемещения и силовые факторы, взятые в начале координат, с учетом приложенной к балке нагрузки.

Рассмотрим балку постоянного поперечного сечения ($E \cdot I_z = \text{const}$), загруженную произвольной внешней нагрузкой (рис. 1.34).

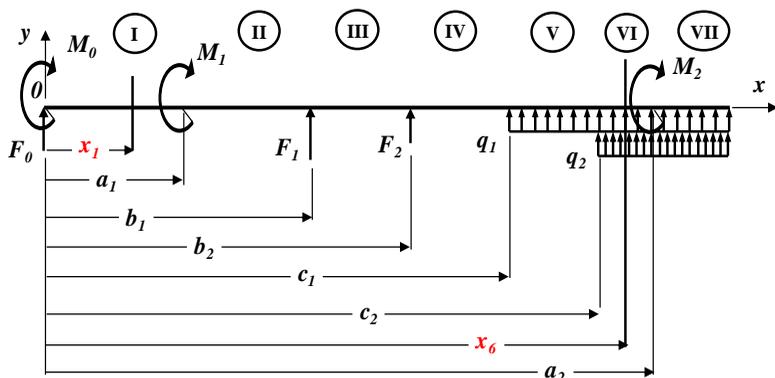


Рис. 1.34. Балка постоянного поперечного сечения

Правило знаков. Условимся считать направления внешних нагрузок, показанных на рис. 1.34, положительными.

Будем выполнять требования Клебша.

Разобьем балку на ряд участков таким образом, чтобы на протяжении каждого участка изгибающий момент выражался с помощью непрерывной функции.

Рассмотрим первый участок, прилегающий к началу координат.

1 участок: $0 \leq x_1 \leq a_1$ (начало отсчета на левой границе участка).

Составляем выражение для изгибающего момента:

$$M_1 = M(x_1) = M_0 + F_0 \cdot x_1$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для этого участка балки имеет вид:

$$v_1'' = \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{M_1}{EI_z}$$

Следовательно,

$$v_1'' = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 + F_0 \cdot x_1]$$

Проинтегрируем это уравнение дважды:

$$v_1' = \varphi(x_1) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot x_1 + F_0 \cdot \frac{x_1^2}{2}] + C_1;$$

$$v_1 = v(x_1) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot \frac{x_1^2}{2} + F_0 \cdot \frac{x_1^3}{6}] + C_1 \cdot x_1 + D_1$$

Подставив $x_1 = 0$ в выражения для v_1' и v_1 , получим значения произвольных постоянных интегрирования:

$$v_1' = \varphi(0) = \varphi_0 = C_1,$$

то есть:

$$C_1 = \varphi_0. \quad (1.49)$$

Аналогично,

$$v_1 = v(0) = v_0 = D_1,$$

то есть:

$$D_1 = v_0. \quad (1.50)$$

В этих формулах:

v_0 и φ_0 – прогиб и угол поворота поперечного сечения, расположенного в начале координат (в крайнем левом сечении балки).

Аналогично рассмотрим еще один произвольный участок балки, например **б – й** участок.

б участок: $c_2 \leq x_6 \leq a_2$ (начало отсчета на левой границе участка).

Составляем выражение для изгибающего момента:

$$\begin{aligned} M_6 = M(x_6) = & M_0 + F_0 \cdot x_6 + M_1 \cdot (x_6 - a_1)^0 + \\ & + F_1 \cdot (x_6 - b_1) + F_2 \cdot (x_6 - b_2) + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^2}{2} + \\ & + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^2}{2}. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для этого участка балки имеет вид:

$$v_6'' = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 + F_0 \cdot x_6 + M_1 \cdot (x_6 - a_1)^0 + F_1 \cdot (x_6 - b_1)]$$

$$+ F_2 \cdot (x_6 - b_2) + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^2}{2} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^2}{2}].$$

Проинтегрируем это уравнение дважды:

$$\begin{aligned} v_1' &= \varphi(x_6) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot x_6 + F_0 \cdot \frac{x_6^2}{2} + M_1 \cdot (x_6 - a_1) + \\ &+ F_1 \cdot \frac{(x_6 - b_1)^2}{2} + F_2 \cdot \frac{(x_6 - b_2)^2}{2} + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^3}{6} + \\ &+ q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^3}{6}] + C_6; \\ v_1 &= v(x_6) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot \frac{x_6^2}{2} + F_0 \cdot \frac{x_6^3}{6} + M_1 \cdot \frac{(x_6 - a_1)^2}{2} \\ &+ F_1 \cdot \frac{(x_6 - b_1)^3}{6} + F_2 \cdot \frac{(x_6 - b_2)^3}{6} + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^4}{24} + \\ &+ q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^4}{24}] + C_6 \cdot x_6 + D_6. \end{aligned}$$

Так как мы выполнили все требования Клебша, то имеем право записать, учитывая (1.49) и (1.50), что:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = \dots = C_6 = \dots = C_n = \varphi_0; \quad D_1 = D_2 = \dots \\ = D_6 = \dots = D_n = v_0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

Следовательно, окончательно для ***n*-го** участка балки можно записать, расставив слагаемые в правой части в порядке возрастания степени:

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0 + \varphi_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2EI_z} + F_0 \cdot \frac{x^3}{6EI_z} + \sum M_i \cdot \\ &\cdot \frac{(x - a_i)^2}{2EI_z} + \sum F_j \cdot \frac{(x - b_j)^3}{6EI_z} + \sum q_k \cdot \frac{(x - c_k)^4}{24EI_z} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Мы получили универсальное уравнение изогнутой оси балки, выраженное через начальные параметры z_0 , φ_0 , M_0 и P_0 .

Так как

$$\Phi = \frac{dv}{dx'}$$

то, продифференцировав это универсальное уравнение изогнутой оси балки по x , получим универсальное уравнение для углов поворота:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi_0 + M_0 \cdot \frac{x}{EI_z} + F_0 \cdot \frac{x^2}{2EI_z} + \sum M_i \cdot \frac{(x - a_i)}{EI_z} + \\ + \sum F_j \cdot \frac{(x - b_j)^2}{2EI_z} + \sum q_k \cdot \frac{(x - c_k)^3}{6EI_z}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

В этих формулах:

$v(x)$ – величина прогиба в произвольном сечении балки на расстоянии x от начала отсчета;

v_0 , φ_0 – прогиб и угол поворота поперечного сечения балки в начале системы координат (кинематические начальные параметры);

M_0 , F_0 – сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат (статические начальные параметры);

M_i – сосредоточенный момент на расстоянии $a_i > 0$ от начала координат;

F_j – сосредоточенная сила на расстоянии $b_j > 0$ от начала координат;

q_k – интенсивность распределенной нагрузки, которая начинается на расстоянии $c_k \geq 0$ от начала координат;

$E \cdot I_z$ – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Статические начальные параметры M_0 и F_0 (сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат) могут быть известны (внешняя нагрузка) или должны быть определены из условий статики (опорные реакции).

Неизвестные кинематические начальные параметры v_0 и φ_0 определяются из условий закрепления балки (кинематические граничные условия).

Кинематические граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и состояются относительно прогибов и углов поворота.

Так, например, для шарнирно опертой балки (рис. 1.35) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах:

$$v_A = 0 \text{ и } v_B = 0$$

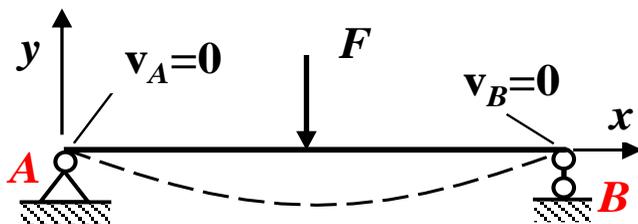


Рис. 1.35. Шарнирно опертая балка

Для жестко защемленной балки (рис. 1.36) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке:

$$v_A = 0 \text{ и } \varphi_A = 0$$

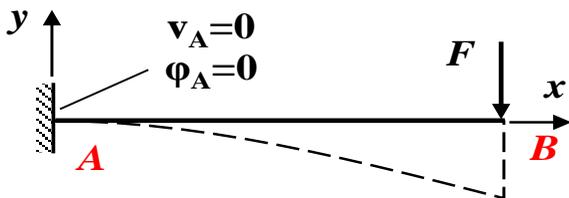


Рис. 1.36. Жестко защемленная балка

Таким образом, для определения прогибов и углов поворота в произвольных поперечных сечениях балок методом начальных параметров достаточно лишь знаний величин прогиба v_0 и угла поворота φ_0 в начале системы координат, то есть так называемых кинематических начальных параметров.

Поэтому данный метод называется *методом начальных параметров*.

Применение метода начальных параметров требует неперемещения выполнения следующих требований Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси y (v) – вверх.

2. При действии распределенной нагрузки, не достигающей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого концевое сечения, одновременно уравновешивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано на рис. 1.33.

Нагрузки (M_0 , F_0 , M_j , F_j , q_k) считаются положительными, если они направлены так, как показано на рис. 1.37, и отрицательными – в противном случае.

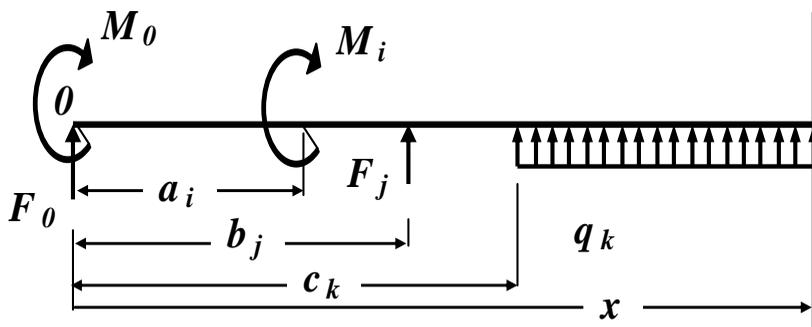


Рис. 1.37. Правила знаков метода начальных параметров

После того, как будут найдены все начальные параметры, можно написать окончательные уравнения прогибов, а продифференцировав их, и углов поворота для каждого участка балки.

Придавая величине x ряд значений, и вычисляя в соответствующих характерных точках численные значения прогибов и углов поворота, можно построить *эпюры прогибов и углов поворота оси балки*.

1.22. Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов

Из теории изгиба балок известно, что величины Q , M , φ и v связаны между собой дифференциальными зависимостями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{M(x)}{EI_z}, & \frac{dv}{dx} &= \varphi(x); & \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= \frac{Q(x)}{EI_z}, \\ & & & & \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{M(x)}{EI_z} \end{aligned} \quad (1.54)$$

На основании этих зависимостей строятся правила построения и контроля эпюр углов поворота и прогибов:

1. Если изгибающий момент на каком-то участке балки положительный ($M > 0$), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз.

2. Если изгибающий момент на каком-то участке балки отрицательный ($M < 0$), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

3. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ($M = 0$) /при смене знака/ или имеет «скачок» /при смене знака/, то на эпюре прогибов в этом сечении наблюдаем точку перегиба (т.п.).

4. Если угол поворота в каком-то сечении балки равен нулю ($\varphi = 0$) /при смене знака/, то на эпюре прогибов этом сечении наблюдаем точку экстремума (т.э.).

5. Если поперечная сила на каком-то участке балки положительная ($Q > 0$), то эпюра углов поворота

на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз. Если поперечная сила на каком-то участке балки отрицательная ($Q < 0$), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

6. Если поперечная сила в каком-то сечении балки равна нулю ($Q = 0$) /при смене знака/ или имеет «скачок» /при смене знака/, то на эпюре углов поворота в этом сечении балки наблюдаем точку перегиба (т.п.).

7. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ($M = 0$) /при смене знака/ или имеет «скачок» /при смене знака/, то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку экстремума (т.э.).

8. Если на эпюре изгибающих моментов в каком-то сечении балки наблюдается «скачок», то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку излома (т.и.).

1.23. РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЕСТКОСТЬ. ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ БАЛКИ

Определение. Сечение, в котором перемещение (прогиб балки) принимает максимальное по абсолютной величине значение, называется опасным сечением балки из условия жесткости.

Условие жесткости при изгибе имеет вид:

$$f \leq [f]. \quad (1.55)$$

Здесь:

f – стрела прогиба (максимальное по абсолютной величине значение прогиба);

$[f]$ – величина допускаемого прогиба.

Для проверки выполнения условия жесткости балки из эпюры прогибов определяется в опасном сечении балки максимальное по абсолютной величине значение прогиба $|v_{max}| = f$, которое подставляется в условие (1.55).

Величина допускаемого прогиба $[f]$ для реальных сооружений приведена в СНиП (СП) и может изменяться в довольно широком диапазоне:

$$[f] = \frac{L}{100} \div \frac{L}{1000'}$$

где

L – длина пролета (для консолей пролет L равен удвоенному вылету консоли).

Обычно условие жесткости балки (1.55) выполняется.

В противном случае, из условия жесткости $f \leq [f]$ необходимо определить величину $I_z^{треб}$ и подобрать новые размеры поперечного сечения балки.

Чтобы одновременно выполнялись условие прочности и условие жесткости, необходимо окончательно выбрать большее сечение.

1.24. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ «ИЗГИБ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ БРУСЬЕВ»

1. Какой вид деформации называется чистым изгибом?
2. Какой вид деформации называется плоским поперечным изгибом?
3. Что происходит с продольными волокнами материала при изгибе?
4. На какие три типа делятся опоры балок?
5. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки?
6. Что называется поперечной силой в данном сечении балки?
7. Что называется изгибающим моментом в данном сечении балки?
8. Как определяется знак поперечной силы и изгибающего момента в поперечном сечении балки?
9. Для чего строятся эпюры внутренних усилий при изгибе?
10. Как определяются границы участков балки?
11. Приведите дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью внешней распределенной нагрузки.
12. В каком случае на эпюре поперечных сил наблюдается «скачок» и чему он равен?
13. Сформулируете правило «скачков» на эпюре изгибающих моментов.
14. Как изменяется поперечная сила и изгибающий момент на участках балки, где отсутствует внешняя распределенная нагрузка?

15. По какому закону изменяются поперечная сила и изгибающий момент на участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка?

16. При каком значении поперечной силы изгибающий момент в сечении балки принимает экстремальное значение?

17. Что называется силовой плоскостью (силовой линией)?

18. Что называется нейтральной линией?

19. Назовите гипотезы, которые принимаются для вывода формулы нормальных напряжений при чистом плоском изгибе.

20. Как определяется опасное сечение балки по нормальным напряжениям?

21. Какая формула для определения нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения балки.

22. Как определяются опасные точки поперечного сечения балки по нормальным напряжениям?

23. Напишите условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.

24. Эпюра нормальных напряжений при изгибе. Как с помощью этой эпюры определить напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки?

25. Какие гипотезы используются при выводе формулы касательных напряжений при изгибе?

26. Напишите формулу Журавского для определения касательных напряжений при изгибе.

27. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях балки прямоугольной формы, для стенки двутавра?
28. Напишите условие прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при плоском изгибе.
29. Какие перемещения получают поперечные сечения балок при плоском изгибе?
30. Что называется упругой линией (изогнутой осью) балки?
31. Что называется прогибом балки?
32. Что называется углом поворота поперечного сечения балки?
33. Запишите дифференциальную зависимость между прогибом и углом поворота сечений балки.
34. Напишите приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
35. Что называется жесткостью балки?
36. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления прогибов по методу начальных параметров.
37. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления углов поворота сечений по методу начальных параметров.
38. Из каких условий определяются неизвестные начальные параметры балки?
39. Назовите основные правила контроля правильности построенных эпюр φ и \mathbf{V} .

ТЕМА 2. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

2.1. ПОНЯТИЕ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Взаимодействие между частями элемента конструкции можно охарактеризовать величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке элемента. Эти величины зависят от направления сечения, проведенного через данную точку.

Определение. Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется напряженным состоянием в этой точке.

Определение. Если через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, в которой нормальные и касательные напряжения были бы равны нулю, то в этой точке имеется пространственное (трехосное) напряженное состояние.

В курсе теории упругости доказывается, что при пространственном (трехосном) напряженном состоянии через каждую точку всегда можно провести три площадки, по которым касательные напряжения равны нулю.

Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие по ним, – *главными напряжениями*.

Все три главные площадки взаимно перпендикулярны.

Наибольшее (в алгебраическом смысле) главное напряжение принято обозначать σ_1 , следующее по величине σ_2 , а наименьшее σ_3 , то есть:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2.1)$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_{max}; \quad \sigma_3 = \sigma_{min} \quad (2.2)$$

Нормальные напряжения по любым другим площадкам, проходящим через данную точку, имеют промежуточные значения между σ_1 и σ_3 .

Аналитически напряжения σ_α и τ_α в любой площадке определяются по формулам, вывод которых приведен в курсе теории упругости:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3 \quad (2.3)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2} \quad (2.4)$$

В этих формулах:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормальями к главным площадкам.

Если по формуле (2.3) определить нормальные напряжения σ_x, σ_y и σ_z по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам и сложить их значения, то сумма этих напряжений будет равна сумме главных напряжений:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.5)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная.*

2.2. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Формулы относительных деформаций бруса, полученные для случая его центрального растяжения (сжатия), можно обобщить на случай пространственного (трехосного) напряженного состояния ($\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ и $\varepsilon' = \mu \cdot \varepsilon$).

Для этого выделим из тела элементарный параллелепипед (с бесконечно малыми размерами ребер), грани которого совпадают с главными площадками (рис 2.1).

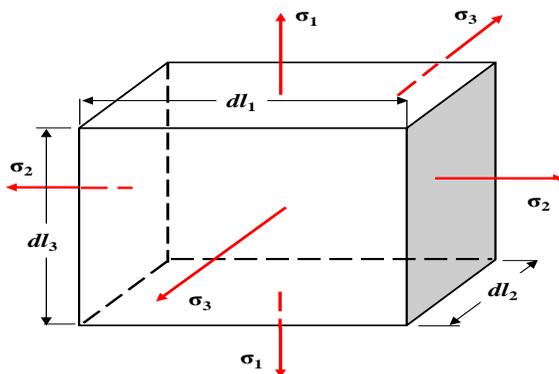


Рис. 2.1. Элементарный параллелепипед

Обозначим σ_1 , σ_2 и σ_3 главные направления, а

ε_1 , ε_2 и ε_3 относительные деформации ребер параллелепипеда, параллельных этим направлениям.

Значения ε_1 , ε_2 и ε_3 определим на основании принципа независимости действия сил, последовательно рассматривая влияние напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 .

В результате воздействия напряжений σ_1 относительные деформации будут равны:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = -\mu \cdot \varepsilon_{11} = -\frac{\mu \sigma_1}{E} \quad (2.6)$$

Первый индекс при ε указывает направление относительной деформации, а второй – причину деформации. Так, например, ε_{21} является относительной деформацией в направлении σ_2 , вызванной напряжением σ_1 .

Аналогично, от воздействия σ_2 и σ_3 получим:

$$\varepsilon_{12} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{32} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = -\mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E} \quad (2.8)$$

Относительные деформации, вызванные одновременным воздействием напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 , равны:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33}$$

После замены относительных деформаций их выражениями (2.6 – 2.8) формулы примут вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (2.9)$$

Аналогичные формулы можно получить и для случая, когда грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (2.10)$$

где:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения, действующие по боковым граням элементарного параллелепипеда;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – относительные деформации его ребер.

Выражения (2.9) и (2.10) устанавливают связь между деформациями и напряжениями при пространственном (трехосном) напряженном состоянии, поэтому носят название *обобщенного закона Гука*.

Замечание. Эти формулы применимы при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

2.3. ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ. ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Связь между напряжениями и деформациями определяется природой сопротивления тела деформациям и, таким образом, имеет *физический* характер. Физическая сторона сопротивления материалов базируется на гипотезе о линейной зависимости между компонентами деформаций и компонентами напряжений в изотропном упруго – деформируемом твердом теле и опирается на следующие факты, наблюдаемые в опытах с образцами из изотропных материалов:

- при осевой деформации призматического, в частности круглого цилиндрического, образца не происходит изменения первоначально прямых углов между линейными элементами, из которых один совпадает с осью призмы, а второй лежит в поперечном сечении, то есть в процессе осевой деформации образец, изготовленный из изотропного материала, не перекашивается;

- при осевой деформации круглого цилиндрического образца происходит и поперечная его деформация (одинаковая во всех поперечных направлениях), составляющая от продольной деформации долю, определяемую коэффициентом Пуассона μ ;

- при чистом сдвиге изменение углов между гранями элементарного параллелепипеда в плоскостях, параллельных одной координатной плоскости, не сопровождается изменением углов между остальными гра-

ниями, а сдвиги не сопровождаются изменением линейных размеров ребер, то есть сдвиги не связаны с линейной деформацией.

Аналитически эти зависимости описываются уравнениями, называемыми обобщенным законом Гука (2.10):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}$$

В случае плоского напряженного состояния в формулах обобщенного закона Гука необходимо положить:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0; \quad \varepsilon_y = 0 \quad (2.11)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot \sigma_z] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot \sigma_x]\end{aligned} \quad (2.12)$$

Если полученные равенства решить относительно напряжений, то получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_z); \\ \sigma_z &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_z + \mu \cdot \varepsilon_x)\end{aligned} \quad (2.13)$$

Выделим в окрестности некоторой точки тела до

его деформации элементарный параллелепипед с ребрами dl_1, dl_2, dl_3 так, чтобы его грани совпали с главными площадками (рис. 2.2):

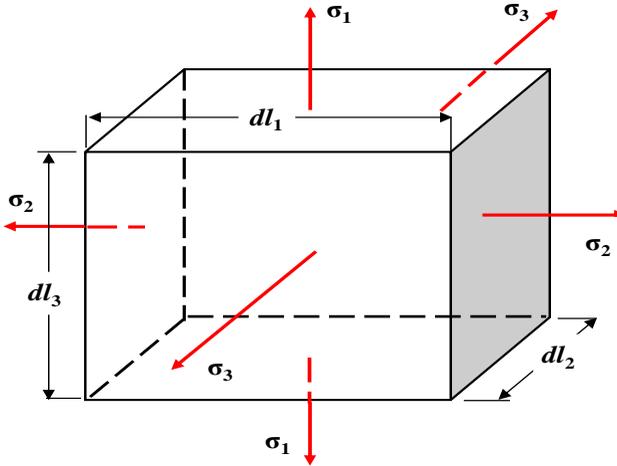


Рис. 2.2. Элементарный параллелепипед

Первоначальный объем элементарного параллелепипеда будет равен:

$$dV = dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3$$

После деформации длина всех ребер параллелепипеда изменится и станет равной:

$$dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1); \quad dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2); \quad dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3)$$

Объем параллелепипеда после деформации будет равен:

$$dV_1 = [dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1)] \cdot [dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2)] \cdot [dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3)] =$$

$$= dV(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3).$$

Так как величины деформаций малы, то их произведениями можно пренебречь по сравнению с самими величинами. Тогда

$$dV_1 = dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема составит с учетом (2.9):

$$\Theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \rightarrow \Theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.14)$$

Мы получили формулу (2.14) для вычисления объемной деформации.

2.4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ «ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ»

1. Что называется напряженным состоянием в точке?
2. Что называется пространственным (трехосным) напряженным состоянием?
3. Какие площадки называются главными?

4. Какие напряжения называются главными?
5. По каким формулам определяются численные значения нормальных и касательных напряжений по наклонным площадкам при пространственном (трехосном) напряженном состоянии?
6. Напишите формулы обобщенного закона Гука.
7. Напишите формулу закона Гука для плоского напряженного состояния.
8. По какой формуле определяется объемная деформация?

ТЕМА 3. РАМЫ И РАМНЫЕ СИСТЕМЫ

3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Определение. Рамой называется геометрически неизменяемая стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой.

Некоторые узлы могут быть шарнирными или, в общем случае, упруго – податливыми. В жестких узлах взаимный поворот примыкающих стержней исключается как до деформаций, так и после деформаций, то есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Определение. Вертикальные элементы рамы называются *стойками*, а горизонтальные или близкие к горизонтальному расположению элементы рамы называются *ригелями*. Точки соединения стоек и ригелей рамы называются *узлами*.

Различают рамы плоские и пространственные.

У плоской рамы все геометрические оси ее элементов лежат в одной плоскости, которая совпадает с плоскостью нагрузки и является главной плоскостью для всех элементов рамы.

Ось рамы представляет собой ломаную линию, однако каждый прямолинейный участок ее можно рассматривать как балку. Поэтому, чтобы построить какую-либо эпюру для рамы, необходимо построить ее для каждого отдельного стержня (каждой отдельной балки), входящего (входящей) в состав рамы.

3.2. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ РАМ

Внутренние силы, возникающие в любом поперечном сечении стержня плоской рамы, в общем случае приводятся к трем внутренним силовым факторам: продольной силе N , поперечной силе Q и изгибающему моменту M .

Следовательно, для рам необходимо строить эпюры M , Q и N .

Внутренние силовые факторы определяются через внешние силы, действующие на раму, с помощью метода сечений, применение которого позволяет сформулировать общие правила для нахождения указанных внутренних усилий на каждом участке рамы.

Определение. Изгибающий момент (M) в произвольном поперечном сечении рамы численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от проведенного сечения, относительно нейтральной оси этого поперечного сечения (то есть, относительно той точки продольной оси рамы, через которую проходит рассматриваемое сечение).

Определение. Поперечная сила (Q) в произвольном поперечном сечении рамы численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на ось, перпендикулярную к геометрической оси рассматриваемого элемента рамы.

Определение. Продольная сила (M) в произвольном поперечном сечении рамы численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на геометрическую ось рассматриваемого элемента рамы.

3.3. ПРАВИЛА ЗНАКОВ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ РАМ

Правила знаков внутренних силовых факторов (продольной силы N , поперечной силы Q и изгибающего момента M) для горизонтальных участков рамы (ригели) остаются такими же, что и для балок.

Для получения правила знаков внутренних силовых факторов для вертикальных участков рамы (стоек) сведем их к горизонтальным путем условного поворота рамы (стоек) по ходу часовой стрелки.

Таким образом, при определении внутренних силовых факторов в каждом элементе рамы (стойки и ригели) будем пользоваться следующими правилами знаков:

- изгибающий момент (M) считается положительным, если он вызывает растяжение *нижних* волокон рамы (для ригелей) и *правых* волокон рамы (для стоек);
- поперечная сила (Q) считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы (стойки и ригели) по ходу часовой стрелки;
- продольная сила (N) считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части рамы (стойки и ригели).

Положительные направления внутренних силовых факторов для элементов рамы (узла в виде креста) показаны на рисунке

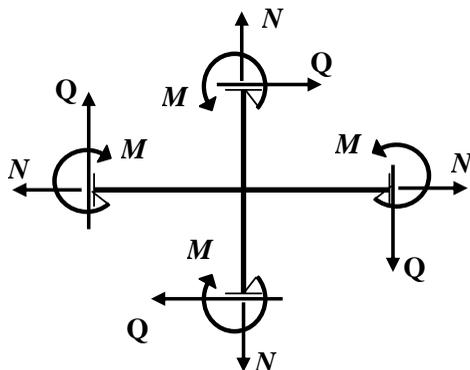


Рис.1. Правило знаков

3.4. . ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ПРОСТЕЙШИХ РАМАХ

Для исследования напряженного состояния рамы необходимо знать, как изменяются внутренние усилия по участкам рамы.

Определение. Участком называется часть рамы, в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия постоянен.

Границами участка являются узлы рамы, точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, точки начала и конца распределенной нагрузки.

Чтобы иметь наглядное представление об изменении N , Q и M по участкам рамы, строят эпюры этих внутренних усилий.

Определение. Графики, изображающие законы изменения N , Q и M по участкам рамы, называют соответственно эпюрой продольных сил, эпюрой поперечных сил и изгибающих моментов.

Ординаты этих эпюр представляют собой величины N , Q и M в соответствующих сечениях рамы.

При построении эпюр N , Q и M в рамах рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определить обычными методами статики опорные реакции.
2. Разбить расчетную схему рамы на участки.
3. Применить метод сечений, проведя поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает раму на две части.

Выбрать ту часть рамы, на которую действуют известные нагрузки.

Для определения внутренних усилий в сечении совершенно безразлично, какую часть рамы рассматривать. Величины внутренних усилий будут одни и те же.

4. Составить выражения (уравнения), дающие закон изменения в пределах рассматриваемого участка изгибающего момента (M) поперечной силы (Q) и продольной силы (N).

При этом руководствуются определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычислить численные значения продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях участка (на его границах). Если функциональная зависимость указанных

силовых факторов нелинейная, вычисление производятся еще и в промежуточной точке, например, в середине участка или в сечении, где функция достигает экстремального значения.

6. По полученным численным значениям продольных сил (M), поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M) строят эпюры (графики) этих внутренних усилий.

Эюра каждого внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси участка рамы.

Для каждого отдельного элемента рамы принимается своя система координат. Ординаты эпюр откладываются перпендикулярно к оси участка рамы. Положительные ординаты N и Q обычно откладываются с внешней стороны рамы, а отрицательные – с внутренней.

Эюра моментов в рамах, как и в обычных балках, строится на растянутом волокне.

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

7. Делаются проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов.

8. Отмечают опасные сечения рамы, где действуют максимальные (наибольшие) по абсолютной величине значения внутренних силовых факторов.

3.5. КОНТРОЛЬ (ПРОВЕРКИ) ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ РАМ

Построенные эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов в раме проверяются по правилам контроля для прямолинейных балок.

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для ригелей рамы делаются слева направо, а для стоек – снизу вверх:

- «Скачки» на эпюре Q возможны только в тех сечениях рамы, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе.

Если эта внешняя сила в ригеле направлена вверх, то на эпюре Q имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз – имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре M возможны только в тех сечениях рамы, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту.

Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре M в ригеле имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре M в ригеле имеется «скачок» вверх.

- На участках рамы, на которых поперечная сила Q положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках рамы, где поперечная сила Q отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на

участках рамы, где поперечная сила Q равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ($M = const$).

- Изгибающий момент M достигает **max** или **min** ($M_{экстр.}$) в тех сечениях рамы, где поперечная сила равна нулю ($Q = 0$).

- На участках рамы, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью q , поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов M на этом участке ограничена кривой.

- На участках рамы, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью q отсутствует, поперечная сила Q постоянная ($Q = const$), а эпюра изгибающих моментов M изменяется по линейному закону.

Кроме этого в раме необходимо проверить равновесие всех узлов.

Эта проверка состоит в том, что вырезанный узел под действием приложенных к нему всех внешних сосредоточенных нагрузок (сосредоточенных сил и моментов), а также внутренних силовых факторов (поперечные силы, продольные силы и изгибающие моменты) должен находиться в равновесии.

Для этого вырезают узел и прикладывают к нему внешние сосредоточенные нагрузки (сосредоточенные силы и моменты, если они приложены к узлу), а также внутренние силовые факторы (поперечные, продольные силы и изгибающие моменты), которые выражают действие отброшенных частей рамы на узел (по эпюрам M , Q и N).

Составляют три уравнения равновесия (статики), которые должны быть равны нулю:

$\Sigma F_x = 0$ – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю;

$\Sigma F_z = 0$ – Сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю;

$\Sigma M_A = 0$ – Сумма моментов всех сил относительно узла равна нулю.

3.6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ «РАМЫ И РАМНЫЕ СИСТЕМЫ»

1. Какая геометрически неизменяемая стержневая система называется рамой?

2. Какие элементы рамы называются ригелем и стойкой?

3. Что называется узлом рамы?

4. Какие типы рам Вы знаете?

5. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях рамы?

6. Чему равна продольная сила в данном сечении рамы?

7. Чему равна поперечная сила в данном сечении рамы?

8. Чему равен изгибающий момент в данном сечении рамы?

9. Правило знаков продольной, поперечной сил и изгибающего момента в поперечном сечении рамы?

10. Что называется эпюрами внутренних усилий при изгибе?

11. Для чего строятся эпюры внутренних усилий при изгибе?
12. Что называется участком рамы?
13. Как определяются границы участков рамы?
14. План построения эпюр N , Q и M в рамах?
15. Проверки правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам?

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. ЭБС «Znaniium.com».
2. НЭБ eLibrary.ru.
3. ЭБС НТБ ДГТУ.
4. СКИФ ДГТУ.
5. ЭБС «Университетская библиотека online».
6. ЭБС IPRbooks.
7. Справочный модуль «Энциклопедии ZNANIUM.com».
8. ЭБС «BOOK.ru».
9. БД «Электронная библиотека технического вуза. Консультант студента».
10. БД «Book on Lime».
11. ЭБС «ЮРАЙТ».

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов. /А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): учебник /В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. – М.: Изд-во АСВ, 2012. – 251 с.
3. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100.– М.: ИНФРА – М, 2010. – 323 с.

4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) / Г.С. Варданян, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; под ред. Г.С. Варданяна. – М.: ИНФРА–М, 2011. – 480 с.

5. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть I): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2018. – 124 с.

6. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть II): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2018. – 160 с.

7. Еремин В.Д., Стрельников Г.П. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Построение эпюр внутренних силовых факторов в балках и плоских рамах. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2019. – 125 с.

8. Еремин В.Д., Стрельников Г.П. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Расчет балок на прочность. – Ростов-на Дону: ДГТУ. 2020. – 100 с.

9. Еремин В.Д., Аваков А.А., Чепурненко А.С. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Расчет балок и плоских рам на жесткость. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2021. – 162 с.

10. Еремин В.Д., Литвинов С.В., Притыкин А.И. Специальные вопросы сопротивления материалов. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2023. – 225 с.

11. Михайлов А.М. Сопротивление материалов: учебник для студентов высших учебных заведений / А.М. Михайлов. – М.: Издательский центр «Академия», – 2009. – 448 с.

12. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 20-е изд. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.

13. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов /В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 591 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

1. Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240–97

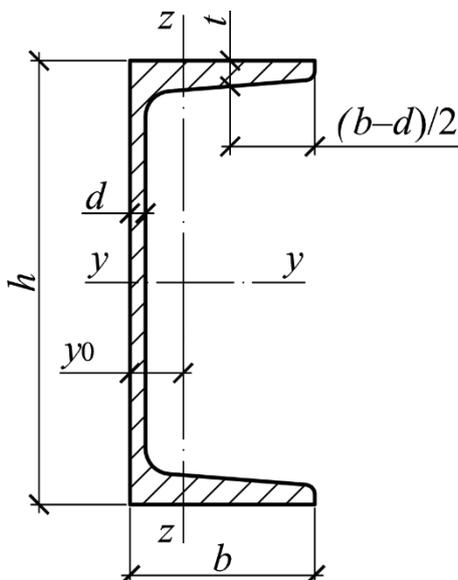


Рис. П 1.1. Швеллер с уклоном внутренних граней полки

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

h — высота (швеллера);

b — ширина полки;

d — толщина стенки;

t — толщина полки;

y_0 — расстояние от оси $z-z$ до наружной грани стенки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

W — момент сопротивления;

i — радиус инерции;

S_y — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м швеллера вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной $7,85 \text{ г/см}^3$

Таблица П1.1

Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	S_y , см ³	I_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	y_0 , см	Масса 1 п. м, кг
5У	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,84
6,5У	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8У	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10У	100	46	4,5	7,6	10,9	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12У	120	52	4,8	7,8	13,3	304,0	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,40
14У	140	58	4,9	8,1	15,6	491,0	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,30
16У	160	64	5,0	8,4	18,1	747,0	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,20
16аУ	160	68	5,0	9,0	19,5	823,0	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,30
18У	180	70	5,1	8,7	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,30
18аУ	180	74	5,1	9,3	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,40
20У	200	76	5,2	9,0	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,40
22У	220	82	5,4	9,5	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,00
24У	240	90	5,6	10,0	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,00
27У	270	95	6,0	10,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,70
30У	300	100	6,5	11,0	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,80
33У	330	105	7,0	11,7	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,50
36У	360	110	7,5	12,6	43,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,90
40У	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,30

2. Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок по ГОСТ Р 57837–2017 (выборка)

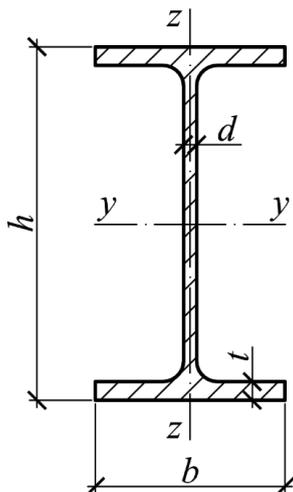


Рис. П1.2. Двутавр стальной горячекатаный с параллельными гранями полок

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

h — высота (двутавра);

b — ширина полки;

d — толщина стенки;

t — толщина полки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

W — момент сопротивления;

i — радиус инерции;

S — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7,85 г/см³.

Таблица П1.2

Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	Масса 1 п. м, кг	I_y , см ⁴	W_y , см ³	S_y , см ³	i_y , см	I_z , см ⁴	W_z , см ³	S_z , см ³	i_z , см
Тип Б – балочные нормальные двутавры														
10Б1	100	55	4,1	5,7	10,3	8,10	171	34,2	19,7	40,7	15,9	5,79	4,57	12,4
12Б1	117,6	64	3,8	5,1	11,0	8,70	257	43,8	24,9	48,3	22,4	7,00	5,49	14,3
12Б2	120	64	4,4	6,3	13,2	10,4	318	53	30,4	49,0	27,7	8,65	6,79	14,5
14Б1	137,4	73	3,8	5,6	13,4	10,5	435	63,3	35,8	57,0	36,4	9,98	7,76	16,5
14Б2	140	73	4,7	6,9	16,4	12,9	541	77,3	44,2	57,4	44,9	12,3	9,62	16,5
16Б1	157	82	4	5,9	16,2	12,7	689	87,8	49,6	65,3	54,4	13,3	10,4	18,3
16Б2	160	82	5	7,4	20,1	15,8	869	109	61,9	65,8	68,3	16,7	13,1	18,4
18Б1	177	91	4,3	6,5	19,6	15,4	1063	120	67,7	73,7	81,9	18,0	14,0	20,5
18Б2	180	91	5,3	8	24,0	18,8	1317	146	83,2	74,2	101	22,2	17,3	20,5
20Б0	198	99	4,5	7	23,2	18,2	1582	160	89,9	82,6	114	23,0	17,9	22,1
20Б1	200	100	5,5	8	27,2	21,3	1844	184	105	82,4	134	26,8	21,0	22,2
20Б2	203	101	6,5	9,5	32,2	25,3	2218	219	125	83,0	164	32,5	25,5	22,6
20Б3	208	102	8	12	40,2	31,6	2853	274	158	84,2	214	41,9	33,0	23,0
25Б1	248	124	5	8	32,7	25,7	3537	285	160	104	255	41,1	31,8	27,9
25Б2	250	125	6	9	37,7	29,6	4052	324	183	104	294	47,0	36,6	27,9
25Б3	255	126	7,5	11,5	47,6	37,4	5238	411	234	105	385	61,1	47,7	28,4
25Б4	260	127	9	14	57,7	45,3	6481	499	286	106	480	75,6	59,2	28,9
30Б1	298	149	5,5	8	40,8	32,0	6318	424	238	124	442	59,3	45,9	32,9
30Б2	300	150	6,5	9	46,8	36,7	7209	481	271	124	508	67,7	52,6	32,9
30Б3	305	151	8	11,5	58,7	46,1	9255	607	344	126	662	87,7	68,3	33,6
30Б4	310	152	9,5	14	70,8	55,6	11381	734	419	127	822	108	84,6	34,1
35Б1	346	174	6	9	52,7	41,4	11094	641	358	145	792	91	70,1	38,8
35Б2	350	175	7	11	63,1	49,6	13559	775	434	147	984	113	86,8	39,5
35Б3	355	176	8,5	13,5	77,1	60,5	16797	946	534	148	1229	140	108	39,9
35Б4	361	177	10	16,5	92,9	72,9	20720	1148	651	149	1529	173	134	40,6
40Б1	396	199	7	11	72,2	56,6	20019	1011	564	167	1447	145	112	44,8
40Б2	400	200	8	13	84,1	66,0	23704	1185	663	168	1736	174	134	45,4
40Б4	412	202	11	19	120,1	94,3	35197	1709	967	171	2616	259	200	46,7
45Б1	446	199	8	12	84,3	66,2	28697	1287	725	185	1580	159	123	43,3
45Б2	450	200	9	14	96,8	76,0	33451	1487	840	186	1872	187	145	44,0
45Б3	456	201	10,5	17	115,4	90,6	40710	1786	1013	188	2308	230	179	44,7
45Б4	462	202	12	20	134,2	105	48197	2087	1189	190	2757	273	213	45,3
50Б1	492	199	8,8	12	92,4	73	36842	1498	853	200	1582	159	125	41,4
50Б2	496	199	9	14	101	80	41869	1688	957	203	1845	185	145	42,7
50Б3	500	200	10	16	114	90	47846	1914	1088	205	2141	214	167	43,3
50Б4	508	201	12	20	140	110	59954	2360	1349	207	2718	270	212	44,1
50Б5	516	202	15	24	171	134	73345	2843	1643	207	3316	328	260	44,1
55Б1	543	220	9,5	13,5	113	89	55677	2051	1165	222	2406	219	172	46,1
55Б2	547	220	10	15,5	125	98	62784	2296	1301	224	2761	251	197	47,1
55Б3	553	221	12	18,5	149	117	75321	2724	1554	225	3343	303	238	47,4
55Б4	560	222	14	22	175	137	89907	3211	1842	227	4032	363	287	48,0
60Б1	596	199	10	15	120	95	68716	2306	1325	239	1980	199	158	40,5
60Б2	600	200	11	17	134	106	77632	2588	1489	240	2278	228	181	41,2

№	h, мм	b, мм	d, мм	t, мм	A, см ²	Масса 1 п. м, кг	I _y , см ⁴	W _y , см ³	S _y , см ³	i _y , см	I _z , см ⁴	W _z , см ³	S _z , см ³	i _z , см
60Б3	604	201	12,5	19	151	119	87472	2896	1675	240	2587	257	205	41,4
60Б4	612	202	15	23	182	143	106510	3481	2027	242	3183	315	253	41,8
70Б1	691	260	12	15,5	165	129	125922	3645	2095	276	4557	351	277	52,6
70Б2	697	260	12,5	18,5	184	144	145904	4187	2393	282	5438	418	328	54,4
70Б3	702	261	14,5	21	210	165	167085	4760	2736	282	6248	479	378	54,5
70Б4	710	262	17	25	248	195	199680	5625	3249	284	7531	575	456	55,1
Тип Ш – балочные широкополочные двутавры														
20Ш0	190	149	5	7	31,1	24,4	2080	219	121	81,8	387	51,9	39,8	35,3
20Ш1	194	150	6	9	39,0	30,6	2690	277	154	83,0	507	67,6	51,9	36,1
20Ш2	199	151	7,5	11,5	49,4	38,8	3502	352	198	84,2	661	87,6	67,3	36,6
20Ш3	204	152	9	14	59,9	47,0	4362	428	243	85,4	821	108	83,2	37,1
20Ш4	211	155	11	17,5	75,1	58,9	5697	540	311	87,1	1089	141	108	38,1
20Ш5	218	157	13	21	90,3	70,9	7118	653	381	88,8	1359	173	134	38,8
20Ш6	228	159	16	26	112,3	88,2	9313	817	486	91,1	1750	220	171	39,5
25Ш0	240	174	6	9	46,8	36,8	4981	415	230	103	792	91	70	41,1
25Ш1	244	175	7	11	56,2	44,2	6121	502	279	104	984	113	86	41,8
25Ш2	249	176	8,5	13,5	68,6	53,8	7625	612	344	105	1229	140	107	42,3
25Ш3	256	177	10,5	17	85,7	67,3	9819	767	436	107	1575	178	137	42,9
25Ш4	264	182	13	21	108	84,4	12751	966	556	109	2116	233	180	44,4
25Ш5	274	184	16	26	133	105	16478	1203	704	111	2710	295	228	45,1
25Ш6	286	186	19	32	163	128	21288	1489	885	114	3449	371	288	45,9
30Ш0	290	199	7	10	61	48	9430	650	361	124	1316	132	102	46,3
30Ш1	294	200	8	12	72	57	11338	771	430	125	1603	160	123	47,1
30Ш2	300	201	9	15	87	69	14210	947	530	128	2034	202	155	48,3
30Ш3	306	203	11	18	106	83	17455	1141	645	129	2515	248	191	48,8
30Ш4	314	206	13	22	129	101	21967	1399	798	131	3214	312	241	50,0
30Ш5	326	208	16	28	162	128	29038	1782	1032	134	4213	405	313	50,9
30Ш6	342	210	20	36	208	163	39316	2299	1357	137	5580	531	412	51,8
35Ш1	334	249	8	11	83	65	17107	1024	566	143	2835	228	174	58,4
35Ш2	340	250	9	14	102	80	21677	1275	706	146	3651	292	223	60,0
35Ш3	347	252	11	17,5	126	99	27535	1587	886	148	4675	371	284	60,9
35Ш4	354	254	13	21	151	118	33692	1904	1072	150	5746	452	347	61,8
35Ш5	364	258	16	26	188	147	43231	2375	1354	152	7458	578	445	63,1
35Ш6	376	260	19	32	229	180	54967	2924	1688	155	9399	723	557	64,1
35Ш7	392	262	23	40	285	224	71815	3664	2150	159	12031	918	710	65,0
40Ш1	383	299	9,5	12,5	113	89	30554	1596	881	165	5576	373	285	70,3
40Ш2	390	300	10	16	136	107	38674	1983	1094	169	7208	481	367	72,8
40Ш3	397	302	12	19,5	165	129	47846	2410	1340	170	8962	594	453	73,7
40Ш4	406	304	14,5	24	202	159	60107	2961	1662	173	11254	740	566	74,6
40Ш5	418	309	17,5	30	252	198	77867	3726	2115	176	14776	956	733	76,5
40Ш6	430	311	21	36	303	238	96432	4485	2578	178	18086	1163	893	77,2
40Ш7	446	313	25	44	369	290	122544	5495	3205	182	22547	1441	1109	78,2
45Ш2	446	302	13	21	184	145	66379	2977	1662	190	9656	639	490	72,4
45Ш3	452	304	15	24	211	166	77051	3409	1916	191	11258	741	569	73,0
45Ш4	464	308	18	30	262	206	98963	4266	2421	194	14640	951	731	74,7
45Ш5	476	310	21	36	313	246	121722	5114	2932	197	17919	1156	891	75,7
45Ш6	492	312	25	44	381	299	153856	6254	3634	201	22342	1432	1107	76,6

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	Масса 1 п. м, кг	I_y , см ⁴	W_y , см ³	S_y , см ³	i_y , см	I_z , см ⁴	W_z , см ³	S_z , см ³	i_z , см
50Ш1	482	300	11	15	146	114	60367	2505	1396	204	6764	451	348	68,2
50Ш2	487	300	14,5	17,5	176	138	71863	2951	1667	202	7898	527	409	66,9
50Ш3	493	300	15,5	20,5	199	156	83437	3385	1913	205	9251	617	479	68,2
50Ш4	499	300	16,5	23,5	221	174	95278	3819	2161	207	10605	707	548	69,2
50Ш5	508	302	19	28	261	205	114960	4526	2579	210	12895	854	663	70,3
50Ш6	518	310	22	33	310	243	140248	5415	3107	213	16443	1061	825	72,9
50Ш7	532	312	26	40	373	293	174204	6549	3798	216	20336	1304	1017	73,8
50Ш8	548	314	30	48	443	348	214880	7842	4598	220	24896	1586	1240	75,0
60Ш1	582	300	12	17	174	137	102710	3530	1981	243	7670	511	396	66,3
60Ш2	589	300	16	20,5	217	171	126193	4285	2439	241	9259	617	484	65,3
60Ш3	597	300	18	24,5	252	198	150035	5026	2870	244	11069	738	579	66,2
60Ш4	605	300	20	28,5	287	226	174450	5767	3305	246	12881	859	674	67,0
60Ш5	616	302	23	34	338	265	210467	6833	3941	249	15687	1039	817	68,1
60Ш6	630	315	27	41	413	324	266240	8452	4907	254	21476	1364	1074	72,1
60Ш7	644	317	31	48	481	378	318172	9881	5788	257	25654	1619	1279	73,0
60Ш8	664	319	36	58	574	451	394964	11897	7048	262	31634	1983	1572	74,2
70Ш1	692	300	13	20	211	166	172424	4983	2814	286	9025	602	468	65,3
70Ш2	698	300	15	23	243	190	198780	5696	3233	286	10383	692	540	65,4
70Ш3	707	300	18	27,5	289	227	239021	6762	3867	288	12424	828	650	65,6
70Ш4	715	300	20,5	31,5	329	259	275127	7696	4426	289	14242	949	749	65,8
70Ш5	725	300	23	36,5	376	295	319782	8822	5099	292	16514	1101	870	66,3
70Ш6	740	313	27	44	458	360	403258	10899	6335	297	22622	1446	1144	70,3
70Ш7	758	315	32	53	549	431	496467	13099	7693	301	27823	1767	1406	71,2
70Ш8	780	317	38	64	660	518	616075	15797	9390	305	34322	2165	1734	72,1
Тип К – колонные двутавры														
15К1	147	149	6	8,5	34,2	26,8	1367	186	104	63,3	469	63,0	48,1	37,1
15К2	150	150	7	10	40,1	31,5	1641	219	123	64,0	563	75,1	57,4	37,5
15К3	155	151	8,5	12,5	49,8	39,1	2118	273	156	65,2	718	95,2	72,8	38,0
15К4	160	152	10	15	59,6	46,8	2629	329	190	66,4	880	116	88,7	38,4
15К5	166	153	12	18	71,7	56,3	3291	397	232	67,7	1077	141	108	38,8
20К1	196	199	6,5	10	52,7	41,4	3846	393	216	85,4	1314	132	100	50,0
20К2	200	200	8	12	63,5	49,9	4716	472	263	86,2	1602	160	122	50,2
20К3	204	201	9	14	73,6	57,8	5602	549	308	87,3	1897	189	144	50,8
20К4	210	201	10,5	17	88,3	69,3	6963	663	377	88,8	2304	229	175	51,1
20К5	214	202	12	19	99,3	78,0	7970	745	427	89,6	2614	259	198	51,3
20К6	220	202	14	22	115	90,3	9488	863	500	90,8	3028	300	229	51,3
20К7	226	203	16	25	131	103	11137	986	578	92,2	3493	344	264	51,6
20К8	234	203	18	29	151	118	13375	1143	679	94,2	4054	399	307	51,8
25К1	246	249	8	12	79,7	62,6	9171	746	411	107	3090	248	189	62,3
25К2	250	250	9	14	92,2	72,4	10833	867	480	108	3649	292	222	62,9
25К6	267	253	14	22,5	147	116	18593	1393	794	112	6081	481	367	64,3
25К7	274	258	16	26	172	135	22417	1636	942	114	7453	578	441	65,9
25К8	281	259	18	29,5	195	153	26170	1863	1083	116	8557	661	505	66,3
25К9	288	260	20	33	218	171	30129	2092	1229	118	9686	745	570	66,6
25К10	298	261	23	38	252	198	36112	2424	1443	120	11288	865	663	67,0
30К1	298	299	9	14	111	87	18849	1265	695	130	6241	417	317	75,1
30К2	300	300	10	15	120	94	20410	1361	751	131	6755	450	342	75,1

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	Масса 1 п. м, кг	I_y , см ⁴	W_y , см ³	S_y , см ³	i_y , см	I_z , см ⁴	W_z , см ³	S_z , см ³	i_z , см
30K3	300	305	15	15	135	106	21535	1436	807	126	7105	466	358	72,6
30K4	304	301	11	17	135	106	23380	1538	853	132	7733	514	390	75,7
30K5	308	301	12	19	150	117	26363	1712	954	133	8643	574	437	76,0
30K8	316	357	14,5	23	206	162	38174	2416	1353	136	17452	978	742	92,0
30K9	322	358	16	26	232	182	43983	2732	1542	138	19896	1112	843	92,6
30K10	328	359	18	29	260	204	50114	3056	1739	139	22381	1247	947	92,9
30K11	334	360	20	32	287	225	56488	3383	1940	140	24907	1384	1052	93,1
30K12	341	361	22	35,5	318	250	64159	3763	2176	142	27866	1544	1175	93,5
30K13	350	362	24	40	357	280	74377	4250	2481	144	31664	1749	1332	94,2
30K14	356	371	27	43	395	310	83543	4693	2761	145	36650	1976	1507	96,4
30K15	364	372	30	47	433	340	93889	5159	3063	147	40396	2172	1659	96,5
30K16	374	373	33	52	480	377	107317	5739	3442	150	45069	2417	1848	96,9
30K17	384	374	36	57	526	413	121512	6329	3832	152	49817	2664	2040	97,3
30K18	396	375	39	63	581	456	139425	7042	4307	155	55520	2961	2269	97,8
30K19	408	385	43	69	650	510	162282	7955	4913	158	65824	3419	2623	100,6
30K20	422	387	47	76	718	564	187072	8866	5535	161	73672	3807	2924	101,3
30K21	440	389	52	85	804	632	221339	10061	6361	166	83732	4305	3311	102,0
35K1	342	348	10	15	139	109	31248	1827	1001	150	10542	606	460	87,1
35X1,5	346	349	11	17	156	123	35711	2064	1136	151	12051	691	524	87,8
35K2	350	350	12	19	174	137	40295	2303	1273	152	13586	776	589	88,4
35K3	355	351	13,5	21,5	196	154	46231	2605	1449	153	15507	884	671	88,8
35K4	360	352	15	24	219	172	52354	2909	1628	155	17460	992	754	89,3
35K5	365	353	16,5	26,5	242	190	58667	3215	1810	156	19445	1102	838	89,6
35K6	369	360	18	28,5	265	208	64961	3521	1992	157	22183	1232	938	91,5
35K7	376	361	20	32	297	233	74399	3957	2256	158	25120	1392	1061	92,0
35K8	382	362	22	35	325	256	82895	4340	2492	160	27709	1531	1168	92,3
35K9	389	363	24	38,5	358	281	93053	4784	2767	161	30738	1694	1294	92,7
35K10	396	364	26,5	42	392	308	103737	5239	3054	163	33820	1858	1422	92,9
35K11	404	374	29	46	438	344	118982	5890	3458	165	40183	2149	1645	95,8
35K12	414	375	32	51	486	381	135721	6557	3887	167	44924	2396	1836	96,2
35K13	424	376	35	56	534	419	153322	7232	4326	169	49742	2646	2031	96,5
35K14	434	377	38	61	582	457	171810	7918	4777	172	54638	2899	2228	96,9
35K16	458	392	46	73	719	565	227053	9915	6094	178	73567	3753	2892	101
35K17	472	393	50	80	788	619	258357	10947	6797	181	81287	4137	3192	102
35K18	488	394	55	88	868	682	296560	12154	7630	185	90174	4577	3539	102
35K19	506	395	60	97	957	751	342452	13536	8592	189	100238	5075	3930	102
35K20	520	409	65	104	1057	830	392963	15114	9664	193	119353	5836	4520	106
35K21	540	411	71	114	1162	912	454051	16817	10870	198	132896	6467	5018	107
35K22	562	413	77	125	1276	1002	526660	18742	12243	203	148011	7168	5569	108
35K23	580	426	84	134	1407	1105	606878	20927	13778	208	174272	8182	6363	111
35K24	604	430	92	146	1546	1214	704826	23339	15522	214	195580	9097	7088	112
40K1	394	398	11	18	187	147	56145	2850	1559	173	18923	951	720	101
40K2	400	400	13	21	219	172	66621	3331	1836	175	22413	1121	850	101
40K3	406	403	16	24	255	200	78039	3844	2140	175	26200	1300	989	101
40K4	414	405	18	28	295	232	92771	4482	2513	177	31027	1532	1166	102
40K4,5	420	403	20	31	326	256	103630	4935	2786	178	33850	1680	1280	102
40K5	429	400	23	35,5	370	291	120290	5608	3198	180	37915	1896	1447	101

<i>N^o</i>	<i>h</i> , <i>мм</i>	<i>b</i> , <i>мм</i>	<i>d</i> , <i>мм</i>	<i>t</i> , <i>мм</i>	<i>A</i> , <i>см²</i>	<i>Масса</i> <i>1 п. м, кг</i>	<i>I_y</i> , <i>см⁴</i>	<i>W_y</i> , <i>см³</i>	<i>S_y</i> , <i>см³</i>	<i>i_y</i> , <i>см</i>	<i>I_z</i> , <i>см⁴</i>	<i>W_z</i> , <i>см³</i>	<i>S_z</i> , <i>см³</i>	<i>i_z</i> , <i>см</i>
40K6	438	370	25	40	390	306	128432	5865	3382	182	33829	1829	1401	93
40K7	448	371	28	45	438	344	148100	6612	3849	184	38380	2069	1587	94
40K8	458	372	31	50	487	382	168699	7367	4327	186	43006	2312	1777	94
40K9	470	373	35	56	547	430	194740	8287	4921	189	48585	2605	2007	94
40K10	484	374	39	63	615	483	226538	9361	5621	192	55132	2948	2276	95
40K11	494	392	43	68	691	543	261627	10592	6403	195	68535	3497	2701	100
40K12	510	393	48	76	773	607	303779	11913	7287	198	77250	3931	3044	100
40K13	528	394	53	85	864	678	354176	13416	8303	203	87133	4423	3431	100
40K14	548	395	59	95	966	758	414487	15127	9481	207	98243	4974	3869	101
40K15	564	410	65	103	1081	849	482318	17104	10812	211	119193	5814	4525	105
40K16	588	412	72	115	1210	950	569247	19362	12395	217	135225	6564	5121	106
40K17	616	414	80	129	1359	1067	679973	22077	14322	224	154172	7448	5823	107
40K18	638	430	87	140	1520	1193	800682	25100	16420	230	187579	8725	6820	111
40K19	668	435	96	155	1696	1332	952173	28508	18869	237	215398	9903	7756	113

3. Уголки стальные горячекатаные равнополочные по ГОСТ 8509–93

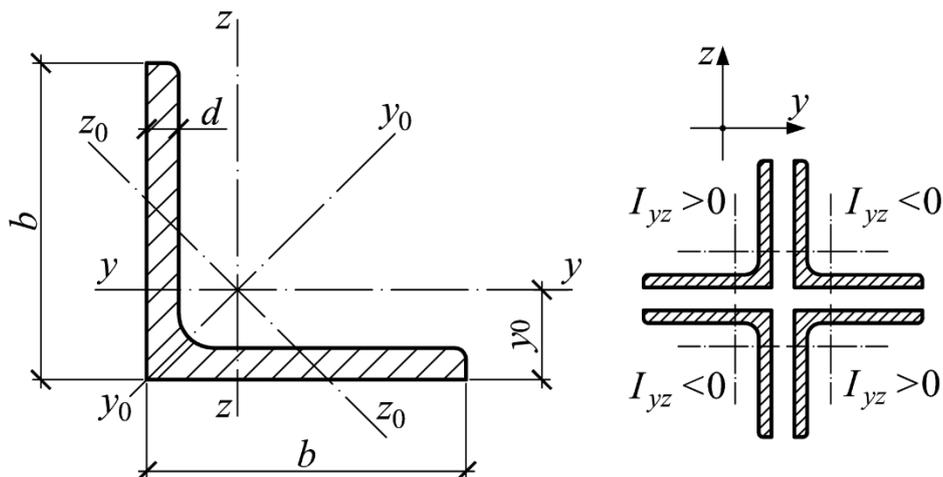


Рис. П1.3. Уголок стальной горячекатаный равнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства уголка:

b — ширина полки;

d — толщина полки;

t — толщина полки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

y_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;

I_{yx} — центробежный момент инерции;

i — радиус инерции.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м равнополочного уголка вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7,85 г/см³.

Уголки стальные горячекатаные равнополочные

№	b , мм	d , мм	A , см ²	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	I_{y0} , см ⁴	i_{y0} , см	I_{z0} , см ⁴	W_{z0} , см ³	i_{z0} , см	I_{yz} , см ⁴	U_0 , см	Масса 1 п. м, кг
2	20	3	1,13	0,4	0,28	1	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
2	20	4	1,46	0,5	0,37	1	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,46	1	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
2,5	25	4	1,86	1,03	0,59	1	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,58	1	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,67	1	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
3	30	4	2,27	1,84	0,87	1	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
3,2	32	3	1,86	1,77	0,77	1	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
3,2	32	4	2,43	2,26	1,00	1	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	0,93	1	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
3,5	35	4	2,67	3,01	1,21	1	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
3,5	35	5	3,28	3,61	1,47	1	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,22	1	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
4	40	4	3,08	4,58	1,60	1	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
4	40	5	3,79	5,53	1,95	1	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
4,5	45	3	2,65	5,13	1,56	1	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
4,5	45	4	3,48	6,63	2,04	1	10,5	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
4,5	45	5	4,29	8,03	2,51	1	12,7	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,94	2	11,3	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
5	50	4	3,89	9,21	2,54	2	14,6	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
5	50	5	4,80	11,2	3,13	2	17,8	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
5,6	56	5	5,41	16,0	3,96	2	25,4	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	4,09	2	29,9	2,45	7,81	3,26	1,25	11,0	1,69	3,90
6,3	63	5	6,13	23,1	5,05	2	36,8	2,44	9,52	3,87	1,25	13,7	1,74	4,81
6,3	63	6	7,28	27,1	5,98	2	42,9	2,43	11,2	4,44	1,24	15,9	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	5,67	2	46,0	2,72	12,0	4,53	1,39	17,0	1,88	4,87
7	70	5	6,86	31,9	6,27	2	50,7	2,72	13,2	4,92	1,39	18,7	1,90	5,38
7	70	6	8,15	37,6	7,43	2	59,6	2,71	15,5	5,66	1,38	22,1	1,94	6,39
7	70	7	9,42	43,0	8,57	2	68,2	2,69	17,8	6,31	1,37	25,2	1,99	7,39
7	70	8	10,7	48,2	9,68	2	76,4	2,68	20,0	6,99	1,37	28,2	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	7,21	2	62,7	2,91	16,4	5,74	1,49	23,1	2,02	5,80
7,5	75	6	8,78	46,6	8,57	2	73,9	2,90	19,3	6,62	1,48	27,3	2,06	6,89
7,5	75	7	10,2	53,3	9,89	2	84,6	2,89	22,1	7,43	1,47	31,2	2,10	7,96
7,5	75	8	11,5	59,8	11,2	2	94,9	2,87	24,8	8,16	1,47	35,0	2,15	9,02
7,5	75	9	12,8	66,1	12,4	2	104,7	2,86	27,5	8,91	1,46	38,6	2,18	10,07
8	80	5,5	8,63	52,7	9,03	2	83,6	3,11	21,8	7,10	1,59	30,9	2,17	6,78
8	80	6	9,38	57,0	9,80	2	90,4	3,11	23,5	7,60	1,58	33,4	2,19	7,36
8	80	7	10,9	65,3	11,3	2	104	3,09	27,0	8,55	1,58	38,3	2,23	8,51
8	80	8	12,3	73,4	12,8	2	116	3,08	30,3	9,44	1,57	43,0	2,27	9,65
9	90	6	10,6	82,1	12,5	3	130	3,50	34,0	9,88	1,79	48,1	2,43	8,33
9	90	7	12,3	94,3	14,5	3	150	3,49	38,9	11,2	1,78	55,4	2,47	9,64
9	90	8	13,9	106	16,4	3	168	3,48	43,8	12,3	1,77	62,3	2,51	10,9
9	90	9	15,6	118	18,3	3	186	3,46	48,6	13,5	1,77	68,0	2,55	12,2
10	100	6,5	12,8	122	16,7	3	193	3,89	50,7	13,4	1,99	71,4	2,68	10,1
10	100	7	13,8	131	17,9	3	207	3,88	54,2	14,1	1,98	76,4	2,71	10,8
10	100	8	15,6	147	20,3	3	233	3,87	60,9	15,7	1,98	86,3	2,75	12,3
10	100	10	19,2	179	25,0	3	284	3,84	74,1	18,5	1,96	110	2,83	15,1
10	100	12	22,8	209	29,5	3	331	3,81	86,8	21,1	1,95	122	2,91	17,9
10	100	14	26,3	237	33,8	3	375	3,78	99,3	23,5	1,94	138	2,99	20,6
10	100	16	29,7	264	38,0	3	416	3,74	111,6	25,8	1,94	152	3,06	23,3
11	110	7	15,2	176	21,8	3	279	4,29	72,7	17,4	2,19	106	2,96	11,9
11	110	8	17,2	198	24,8	3	315	4,28	81,8	19,3	2,18	116	3,00	13,5
12,5	125	8	19,7	294	32,2	4	467	4,87	122	25,7	2,49	172	3,36	15,5
12,5	125	9	22,0	327	36,0	4	520	4,86	136	28,3	2,48	192	3,40	17,3
12,5	125	10	24,3	360	39,7	4	571	4,84	149	30,5	2,47	211	3,45	19,1

№	b , мм	d , мм	A , см ²	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	I_{y0} , см ⁴	i_{y0} , см	I_{z0} , см ⁴	W_{z0} , см ³	i_{z0} , см	I_{yz} , см ⁴	Y_0 , см	Масса 1 п. м, кг
12,5	125	12	28,9	422	47,1	4	670	4,82	174	34,9	2,46	248	3,53	22,7
12,5	125	14	33,4	482	54,2	4	764	4,78	200	39,1	2,45	282	3,61	26,2
12,5	125	16	37,8	539	61,1	4	853	4,75	224	43,1	2,44	315	3,68	29,7
14	140	9	24,7	466	45,6	4	739	5,47	192	35,9	2,79	274	3,76	19,4
14	140	10	27,3	512	50,3	4	814	5,46	211	39,1	2,78	301	3,82	21,5
14	140	12	32,5	602	59,7	4	957	5,43	248	45,0	2,76	354	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	66,2	5	1229	6,25	319	52,5	3,19	455	4,30	24,7
16	160	11	34,4	844	72,4	5	1340	6,24	348	56,5	3,18	496	4,35	27,0
16	160	12	37,4	913	78,6	5	1450	6,23	376	60,5	3,17	537	4,39	29,4
16	160	14	43,6	1046	90,8	5	1662	6,20	431	68,2	3,16	615	4,47	34,2
16	160	16	49,1	1175	103	5	1866	6,17	485	75,9	3,14	690	4,55	38,5
16	160	18	54,8	1290	114	5	2061	6,13	537	82,1	3,13	771	4,63	43,0
16	160	20	60,4	1419	126	5	2248	6,10	589	90,0	3,12	830	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	92	6	1933	7,06	500	72,9	3,59	716	4,85	30,5
18	180	12	42,2	1317	100	6	2093	7,04	540	78,2	3,58	776	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	125	6	2896	7,84	749	98,7	3,99	1073	5,37	37,0
20	200	13	50,9	1961	134	6	3116	7,83	805	105	3,98	1156	5,42	39,9
20	200	14	54,6	2097	144	6	3333	7,81	861	112	3,97	1236	5,46	42,8
20	200	16	62,0	2363	163	6	3755	7,78	970	124	3,96	1393	5,54	48,7
20	200	20	76,5	2871	200	6	4860	7,72	1182	147	3,93	1689	5,70	60,1
20	200	25	94,3	3466	246	6	5494	7,63	1438	173	3,91	2028	5,89	74,0
20	200	30	111,5	4020	289	6	6351	7,55	1698	193	3,89	2332	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	175	7	4470	8,60	1159	139	4,38	1655	5,91	47,4
22	220	16	68,6	3175	199	7	5045	8,58	1306	153	4,36	1869	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	258	8	7492	9,78	1942	203	4,98	2775	6,75	61,6
25	250	18	87,7	5247	289	8	8337	9,75	2158	223	4,96	3089	6,83	68,9
25	250	20	97,0	5765	319	8	9160	9,72	2370	243	4,94	3395	6,91	76,1
25	250	22	106	6270	348	8	9961	9,69	2579	261	4,93	3691	7,00	83,3
25	250	25	120	7006	392	8	11126	9,64	2887	287	4,91	4119	7,11	94,0
25	250	28	133	7717	434	8	12244	9,59	3190	312	4,90	4527	7,23	105
25	250	30	142	8177	462	8	12965	9,56	3389	328	4,89	4788	7,31	111
25	250	35	164	9281	530	8	14683	9,47	3879	366	4,87	5402	7,53	129

4. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные по ГОСТ 8510– 86

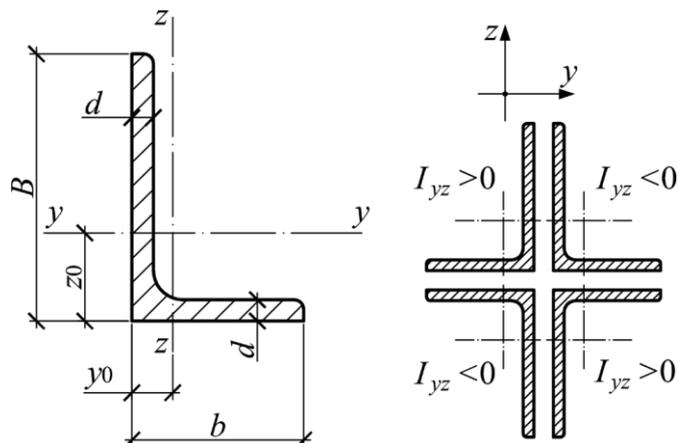


Рис. П1.4. Уголок стальной горячекатаный неравнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства уголка:

h — высота (уголка);

b — ширина полки;

d — толщина стенки;

t — толщина полки;

y_0 — расстояние от оси z – z до наружной грани стенки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

W — момент сопротивления;

i — радиус инерции;

S_y — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и справочные величины вычислены по номинальным размерам. При вычислении массы 1 м уголка плотность стали принята равной 7,85 г/см³.

Таблица П1.4

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

№	B, мм	b, мм	d, мм	A, см ²	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	I _z , см ⁴	W _z , см ³	i _z , см	γ ₀ , см	Z ₀ , см	I _{yz} , см ⁴	tga	Масса 1 п. м, кг
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2*	30	20	3	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
3/2*	30	20	4	1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
3,2/2	32	20	4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
4/2,5	40	25	4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,63	1,37	1,22	0,281	1,94
4/2,5	40	25	5	3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,66	1,41	1,44	0,374	2,37
4/3*	40	30	4	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	0,78	1,28	1,68	0,544	2,26
4/3*	40	30	5	3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	0,82	1,32	2,00	0,539	2,46
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
4,5/2,8	45	28	4	2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
5/3,2	50	32	4	3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	0,76	1,65	2,59	0,401	2,40
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
5,6/3,6	56	36	5	4,41	13,8	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/4,0	63	40	4	4,04	16,3	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
6,3/4,0	63	40	5	4,98	19,9	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
6,3/4,0	63	40	6	5,90	23,3	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
6,3/4,0	63	40	8	7,68	29,6	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03
6,5/5*	65	50	5	5,56	23,4	5,20	2,05	12,1	3,23	1,47	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36
6,5/5*	65	50	8	8,62	35,0	7,99	2,02	18,9	4,93	1,44	1,37	2,12	13,6	0,570	6,77
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	5,88	2,23	9,1	2,62	1,27	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	6,81	2,39	12,5	3,25	1,43	1,17	2,39	12	0,436	4,79
7,5/5	75	50	6	7,25	40,9	8,08	2,38	14,6	3,85	1,42	1,21	2,44	14,1	0,435	5,69
7,5/5	75	50	7*	8,37	46,8	9,31	2,36	16,6	4,43	1,41	1,25	2,48	16,2	0,435	6,57
7,5/5	75	50	8	9,47	52,4	10,5	2,35	18,5	4,88	1,40	1,29	2,52	17,8	0,430	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,6	7,71	2,56	12,7	3,28	1,41	1,13	2,60	13,2	0,387	4,49
8,5	80	50	6	7,55	49,0	9,15	2,55	14,9	3,88	1,40	1,17	2,65	15,5	0,386	5,92
8/5	80	50	6	8,15	52,1	9,42	2,53	25,2	5,58	1,76	1,49	2,47	21,0	0,547	6,39
8/6*	80	60	7	9,42	59,6	10,9	2,52	28,7	6,43	1,75	1,53	2,52	24,0	0,546	7,39
8/6*	80	60	8	10,7	66,9	12,4	2,50	32,2	7,26	1,74	1,57	2,56	26,8	0,544	8,37
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	10,7	2,88	19,7	4,53	1,58	1,26	2,92	20,5	0,384	6,17
9/5,6	90	56	6	8,54	70,6	11,7	2,88	21,2	4,91	1,58	1,28	2,95	22,2	0,384	6,70
9/5,6	90	56	8	11,2	90,9	15,2	2,85	27,1	6,39	1,56	1,36	3,04	28,3	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6	9,58	98,3	14,5	3,20	30,6	6,27	1,79	1,42	3,23	31,5	0,393	7,53
10/6,3	100	63	7	11,1	113	16,8	3,19	35,0	7,23	1,78	1,46	3,28	36,1	0,392	8,70
10/6,3	100	63	8	12,6	127	19,0	3,18	39,2	8,17	1,77	1,50	3,32	40,5	0,391	9,87
10/6,3	100	63	10	15,5	154	23,3	3,15	47,2	9,99	1,75	1,58	3,40	48,6	0,387	12,14
10/6,5*	100	65	7	11,2	114	16,9	3,19	38,3	7,70	1,85	1,52	3,24	38,0	0,415	8,81
10/6,5*	100	65	8	12,7	128	19,1	3,18	43,0	8,70	1,84	1,56	3,28	42,6	0,414	9,99
10/6,5*	100	65	10	15,7	156	23,5	3,15	51,7	10,6	1,82	1,64	3,37	51,2	0,410	12,3
11/7	110	70	6,5	11,5	142	19,1	3,53	45,6	8,42	2,00	1,58	3,55	46,8	0,402	8,98
11/7	110	70	8	13,9	172	23,2	3,51	54,6	10,2	1,98	1,64	3,61	55,9	0,400	10,9
12,5/8	125	80	7	14,1	227	26,7	4,01	73,7	11,9	2,29	1,80	4,01	74,7	0,407	11,0
12,5/8	125	80	8	16,0	226	30,3	4,00	81,0	13,5	2,28	1,84	4,05	84,1	0,406	12,6
12,5/8	125	80	10	19,7	312	37,3	3,98	100	16,5	2,26	1,92	4,14	102	0,404	15,5
12,5/8	125	80	12	23,4	365	44,1	3,95	117	19,5	2,24	2,00	4,22	118	0,400	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	38,3	4,49	120	17,2	2,58	2,03	4,49	121	0,411	14,1
14/9	140	90	10	22,2	444	47,2	4,47	146	21,1	2,58	2,12	4,58	147	0,409	17,5
16/10	160	100	9	22,9	606	56,0	5,15	186	24,0	2,85	2,24	5,19	194	0,391	18,0
16/10	160	100	10	25,3	667	61,9	5,13	204	26,4	2,84	2,28	5,23	213	0,390	19,9
16/10	160	100	12	30,0	784	73,4	5,11	239	31,2	2,82	2,36	5,32	249	0,388	23,6
16/10	160	100	14	34,7	897	84,7	5,08	272	35,9	2,80	2,43	5,40	282	0,385	27,3
18/11	180	110	10	28,3	952	78,6	5,80	276	32,3	3,12	2,44	5,88	295	0,376	22,2
18/11	180	110	12	33,7	1123	93,3	5,77	324	38,2	3,10	2,52	5,97	348	0,374	26,4
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	107	6,45	446	46,0	3,58	2,79	6,50	465	0,392	27,4
20/12,5	200	125	12	37,9	1568	117	6,43	482	49,9	3,57	2,83	6,54	503	0,392	29,7
20/12,5	200	125	14	43,9	1801	135	6,41	551	57,4	3,54	2,91	6,62	575	0,390	34,4
20/12,5	200	125	16	49,8	2026	152	6,38	617	64,8	3,52	2,99	6,71	643	0,388	39,1

* Уголки изготавливают по требованию потребителя

5. Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239–89

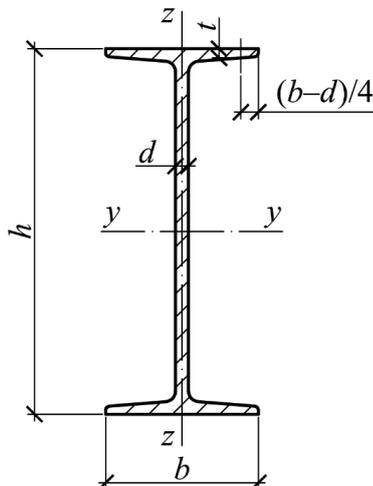


Рис. 1.5. Двутавр стальной горячекатаный

Внимание! ГОСТ утратил силу на территории Российской Федерации с 30 ноября 2018 года в связи с изданием Приказа Росстандарта от 30.11.2018 № 1047ст. Взамен введен ГОСТ Р 57837–2017.

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

h — высота (двутавра);

b — ширина полки;

d — толщина стенки;

t — толщина полки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

W — момент сопротивления;

i — радиус инерции;

S — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7,85 г/см³.

Таблица П1.5

Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ утратил силу на территории РФ)

№	<i>h</i>, мм	<i>b</i>, мм	<i>d</i>, мм	<i>t</i>, мм	<i>A</i>, см²	<i>Масса</i> 1 п. м, кг	<i>I_y</i>, см⁴	<i>W_y</i>, см³	<i>i_y</i>, см	<i>S_y</i>, см³	<i>I_z</i>, см⁴	<i>W_z</i>, см³	<i>i_z</i>, см
10	100	55	4,5	7,20	12	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,30	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,50	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,80	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,10	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,40	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,70	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,50	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,80	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,0	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

Принятые обозначения:

A — площадь фигуры;

y, z — главные оси;

I_y, I_z — моменты инерции;

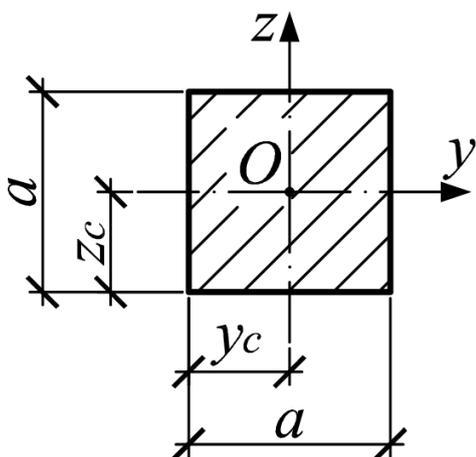
I_{yz} — центробежный момент инерции;

W_y, W_z — моменты сопротивления;

i_y, i_z — радиусы инерции.

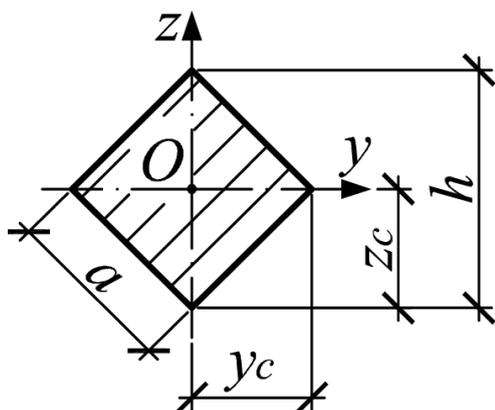
Значок «*» у момента сопротивления W приводится для наиболее удалённых волокон от центра тяжести сечения.

Квадрат



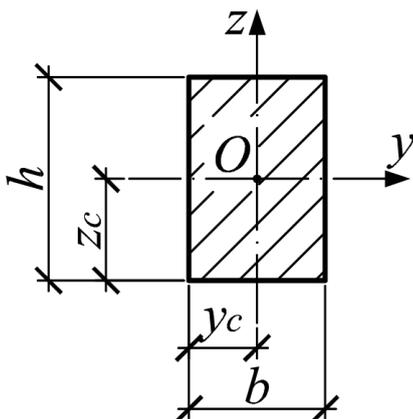
$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{a}{2}; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12}; \\
 W_y &= W_z = \frac{a^3}{6}; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0,289a
 \end{aligned}$$

Квадрат, поставленный на ребро



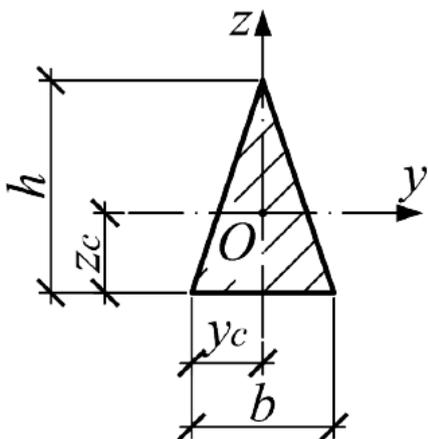
$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0,71a; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}; \quad I_{yz} = 0 \\
 W_y &= W_z = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0,289a.
 \end{aligned}$$

Прямоугольник



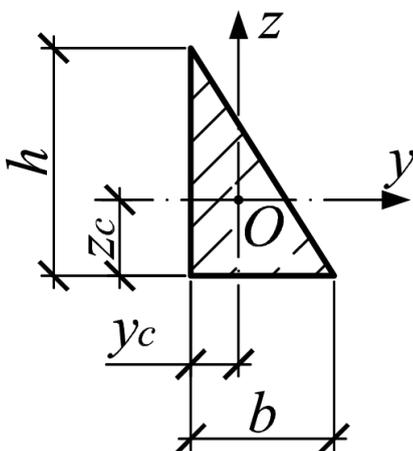
$$\begin{aligned}
 A &= b \cdot h; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{2}; \\
 I_y &= \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad I_{yz} = 0; \\
 W_y &= \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_z = \frac{h \cdot b^2}{6}; \\
 i_y &= 0,289h; \quad i_z = 0,289b
 \end{aligned}$$

Равнобедренный треугольник



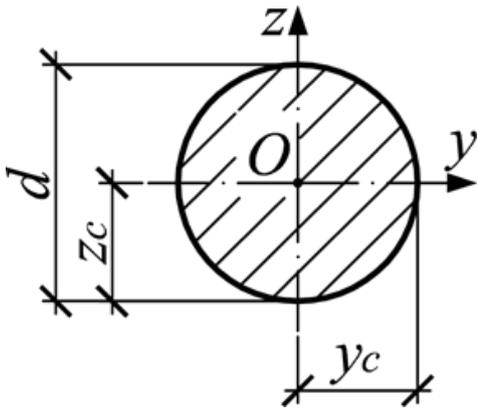
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{b \cdot h}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{b \cdot h^3}{36}; \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{48}; \quad I_{yz} = 0; \\
 W_{y*} &= \frac{b \cdot h^2}{24}; \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{2\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

Прямоугольный треугольник



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{b \cdot h}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{3}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{b \cdot h^3}{36}; \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}; \\
 I_{yz} &= \pm \frac{b^2 \cdot h^2}{72}; \\
 W_{y*} &= \frac{b \cdot h^2}{24}; \quad W_{z*} = \frac{h \cdot b^2}{24}; \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{3\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Круг



$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad y_c = z_c = \frac{d}{2};$$

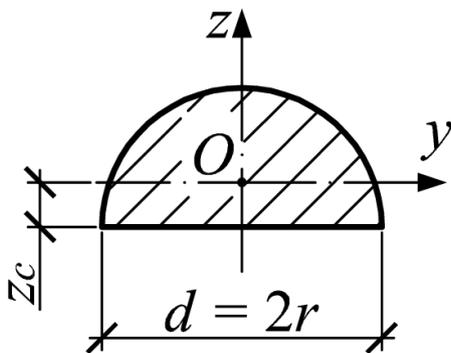
$$I_y = I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4};$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot r^3}{4};$$

$$i_y = i_z = \frac{d}{4} = \frac{r}{2};$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Полукруг



$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{8} = \frac{\pi \cdot r^2}{2};$$

$$y_c = \frac{d}{2} = r; \quad z_c = \frac{2d}{3\pi} = \frac{4r}{3\pi};$$

$$I_y = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right); \quad I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{128} = \frac{\pi \cdot r^4}{8};$$

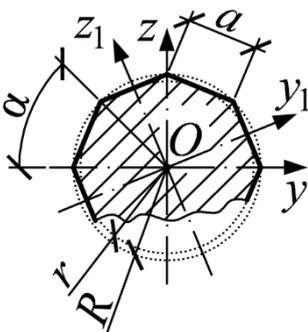
$$I_{yz} = 0;$$

$$W_{y*} = 0,0239d^3;$$

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{64} = \frac{\pi \cdot r^3}{8};$$

$$i_y \approx 0,132d; \quad i_z = \frac{d}{4}.$$

Правильный многоугольник с n сторонам



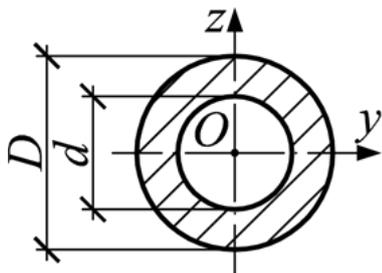
$$A = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \alpha = n r^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{n a r}{2};$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha};$$

$$I_y = I_z = \frac{n a r}{48} (6R^2 - a^2) = \frac{n a r}{96} (12r^2 + a^2);$$

$$I_{yz} = 0; \quad i_y = i_z = \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}}.$$

Кольцо



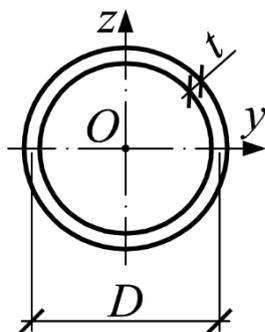
$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} (1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D};$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4);$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4);$$

$$i_y = i_z = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Тонкое кольцо $t \ll D$



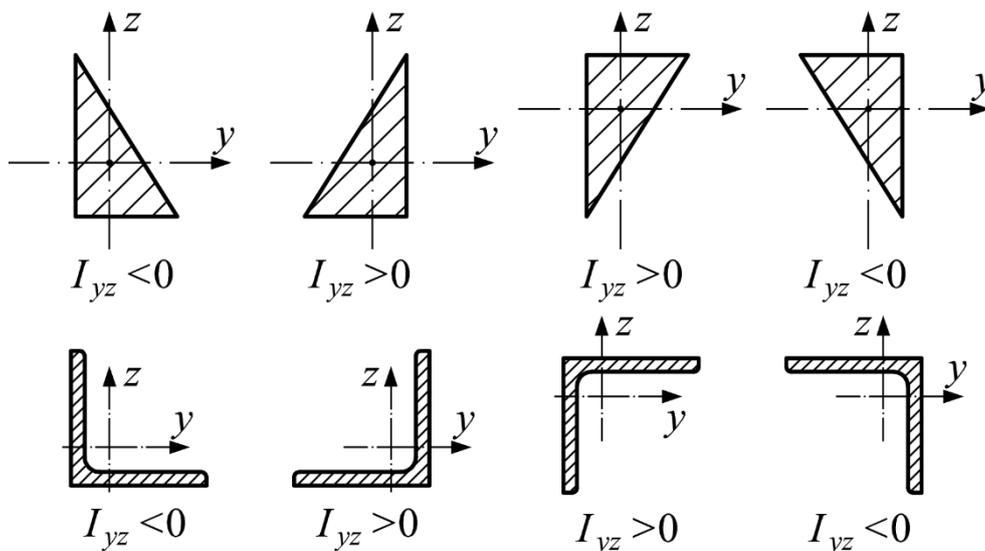
$$A = \pi dt;$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot t}{4} \approx 0,3926D^3t;$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot t}{4} \approx 0,7853D^2t;$$

$$i_y = i_z = 0,353D.$$

Правило знаков для центробежного момента инерции



ПЕРЕВОД ЕДИНИЦ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

1. Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами

Величина	Единица измерения		Соотношение единиц
	по СНиП	в системе СИ	
Сила, нагрузка, вес	Килограмм - сила (кгс); тонна - сила (тс)	ньютон (Н); килоньютон (кН)	1 кгс = 9,8 Н \approx 10 Н; 1 тс \approx 10000 Н = = 10 кН
Линейная нагрузка, поверхностная нагрузка	Килограмм - сила на метр (кгс/м); тонна - сила на метр (тс/м); килограмм - сила на квадратный метр (кгс/м ²); тонна - сила на квадратный метр (тс/м ²)	ньютон на метр (Н/м); килоньютон на метр (кН/м); ньютон на квадратный метр (Н/м ²); килоньютон на квадратный метр (кН/м ²)	1 кгс/м \approx 10 Н/м; 1 тс/м \approx 10 кН/м; 1 кгс/м ² \approx 10 Н/м ² ; 1 тс/м ² \approx 10 кН/м ²
Напряжение, давление, модуль упругости	Килограмм - сила на квадратный миллиметр (кгс/мм ²); килограмм - сила на квадратный сантиметр (кгс/см ²); тонна - сила на квадратный метр (тс/м ²).	паскаль (Па) (1 Па \approx 0,1 миллиметра водного столба); мегапаскаль (МПа)	1 кгс/мм ² \approx \approx 10 ⁷ Па = 10 Мпа; 1 кгс/см ² \approx \approx 10 ⁵ Па = 0,1 Мпа; 1 тс/м ² \approx 10 ⁴ Па = = 10 кПа
Момент силы	Килограмм - сила метр (кг·м); тонна - сила метр (тс·м)	Ньютон - метр (Н·м); Килоньютон - метр (кН·м)	1 кгс м \approx 10 Н м; 1 тс м \approx 10 кН м

$$1 \text{ м} = 10^2 \text{ см};$$

$$1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2;$$

$$1 \text{ м}^3 = 10^6 \text{ см}^3;$$

$$1 \text{ м}^4 = 10^8 \text{ см}^4;$$

$$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м};$$

$$1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$1 \text{ см}^4 = 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$1 \text{ Н} = 10^{-3} \text{ кН};$$

$$1 \text{ Н} = 10^{-6} \text{ МН};$$

$$1 \text{ кН} = 10^{-3} \text{ МН};$$

$$1 \text{ тс} = 10 \text{ кН};$$

$$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н};$$

$$1 \text{ МН} = 10^3 \text{ Н}^2;$$

$$1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н};$$

$$1 \text{ кгс} = 10 \text{ Н};$$

$$1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$1 \text{ кПа} = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2};$$

$$1 \text{ МПа} = 1 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2};$$

$$1 \text{ МН} = 100 \text{ тс};$$

$$1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па};$$

$$1 \text{ кПа} = 10^{-3} \text{ МПа};$$

$$1 \text{ МПа} = 10^3 \text{ кПа};$$

$$1 \text{ МПа} = 10 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2};$$

$$1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 10 \text{ МПа}.$$

2. Механические характеристики материалов

Материал	E , МПа	G , МПа	α , $\frac{1}{\text{рад}}$	γ , $\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$
Сталь	$2,06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78,5
Медь прокатная	$1,1 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$165 \cdot 10^{-7}$	88,9
Серый чугун	$1,18 \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	$100 \cdot 10^{-7}$	68,0 ÷ 74,0
Дерево вдоль волокон	$1 \cdot 10^4$	$0,055 \cdot 10^4$	$20 \div 40 \cdot 10^{-7}$	5,5 ÷ 7,4

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Обозначения:

E — модуль упругости при растяжении материала;

G — модуль упругости при сдвиге;

ν — коэффициент Пуассона;

α — температурный коэффициент линейного расширения;

γ — объёмный вес.

ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ БАЛОК

1. Правила построения и контроля эпюр (метод начальных параметров)

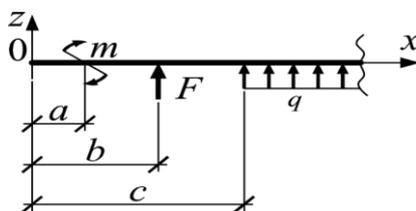


Рис. ПЗ.1. К методу начальных параметров:
положительное направление внешних нагрузок

Универсальные уравнения метода начальных параметров имеют вид:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[\sum m(x-a) + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} \right];$$

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[\sum m \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} \right];$$

где

E – модуль упругости балки;

I – момент инерции балки относительно оси y ;

a – расстояние от начала координат до точки приложения изгибающего момента m ;

b – расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы F ;

c – расстояние от начала координат до начала распределённой нагрузки q .

Использование приведённых уравнений может быть возможно при соблюдении двух из четырёх правил Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят.

2. При действии на балку распределённой нагрузки, не доходящей до правого конца балки, её необходимо продолжить до правого концевое сечения, одновременно уравновешивая её противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности.

Дифференциальная зависимость между внутренними силовыми факторами может быть записана:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^3\varphi}{dx^3} = EI \frac{d^4w}{dx^4}.$$

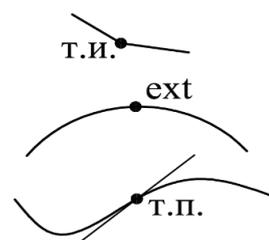
Следовательно, правила построения эпюр углов поворота и прогибов могут быть сформулированы следующим образом:

1. На участке, где эпюра поперечных сил Q положительна, эпюра углов поворота φ имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра поперечных сил q отрицательная, эпюра углов поворота φ имеет выпуклость вверх.
2. В точке, где эпюра поперечных сил Q проходит через ноль или происходит скачок через ноль, на эпюре углов поворота φ в этом месте точка перегиба (т. п.).
3. В точке, где эпюра изгибающего момента M проходит через ноль, на эпюре углов поворота φ в этом месте экстремум (ext).
4. В точке, где на эпюре изгибающего момента M наблюдается скачок, на эпюре углов поворота φ точка излома (т. и.).
5. На участке, где эпюра изгибающего момента M положительна, эпюра прогибов w имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра изгибающего момента M отрицательная, эпюра прогибов w имеет выпуклость вверх.
6. В точке, где эпюра изгибающего момента M проходит через ноль или происходит скачок через ноль, на эпюре прогибов w в этом месте точка перегиба (т. п.).
7. В точке, где эпюра углов поворота φ проходит через ноль, на эпюре прогибов w в этом месте экстремум (ext).

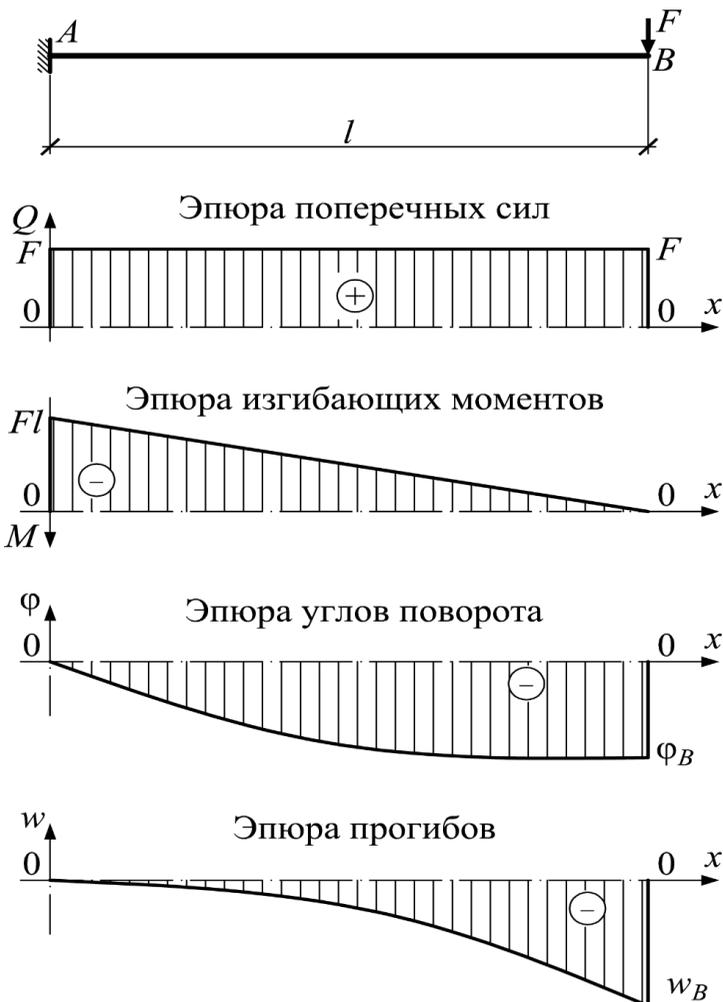
Сокращённо данные правила могут быть представлены графически:

Нагрузка	$\Downarrow q$	$\downarrow F$	$\leftarrow m$	\bigcirc	0	—		
Q					ext	0		
M					т.п.	ext	0	
φ						т.п.	ext	0
w							т.п.	ext

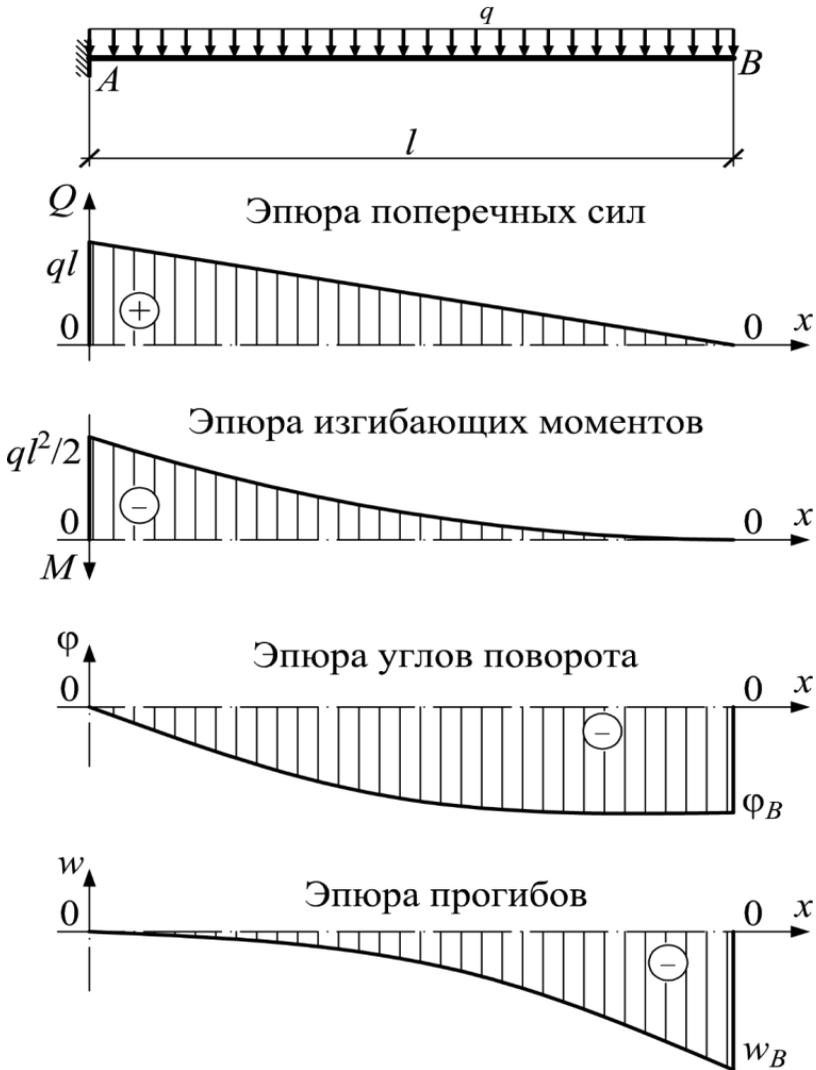
где — парабола;
 — излом;
 — скачок;
 ext — экстремум;
 т.п. — точка перегиба.



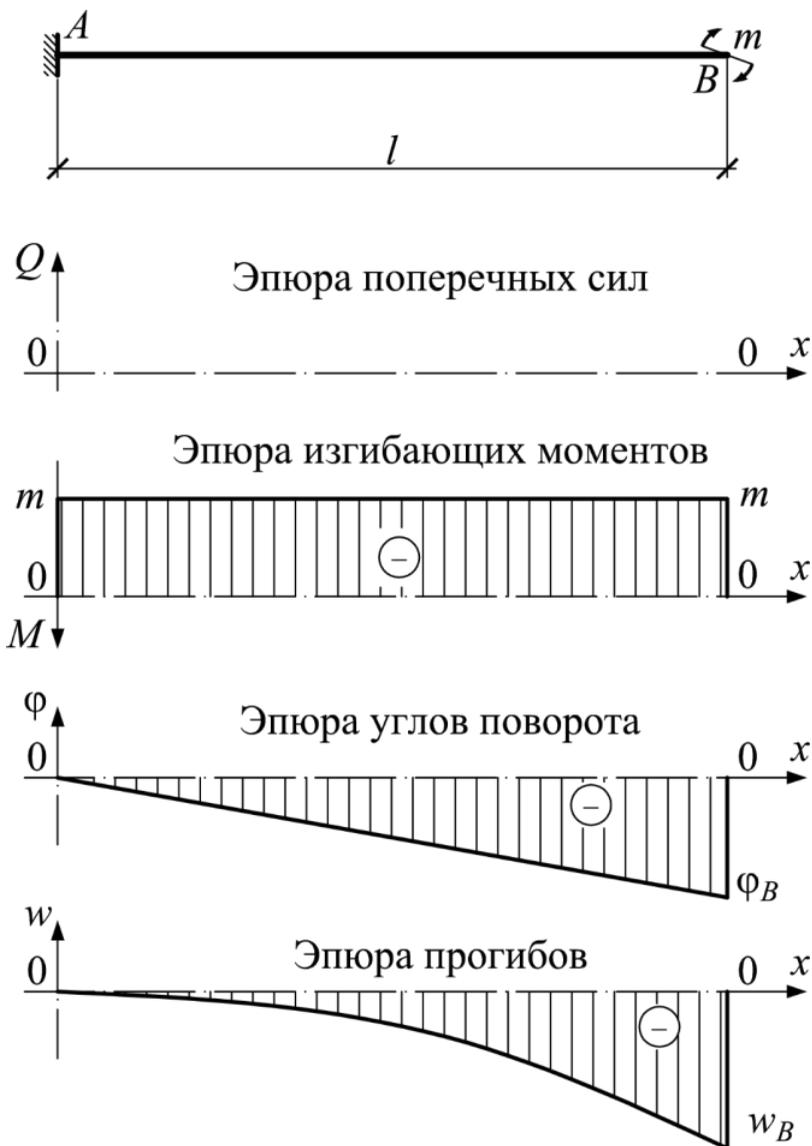
2. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок



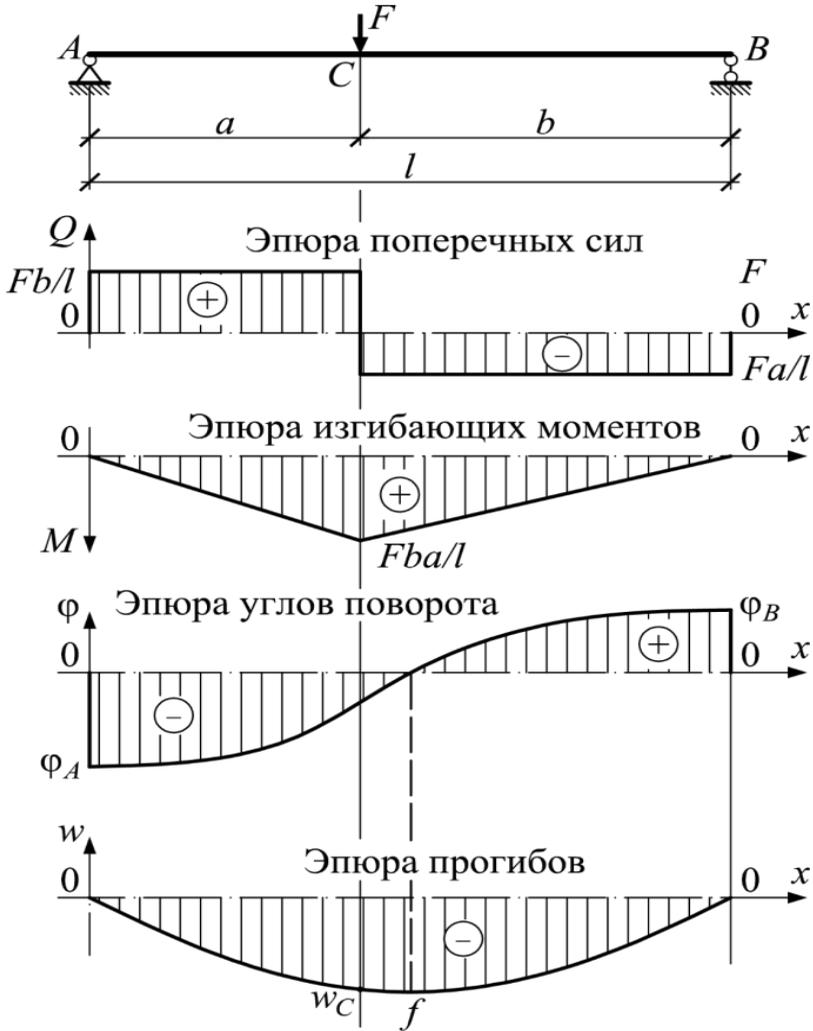
$$\varphi_B = -\frac{1 Fl^2}{2 EI}; \quad w_B = w_{max} = -\frac{1 Fl^3}{3 EI};$$



$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI}; \quad w_B = w_{max} = -\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$



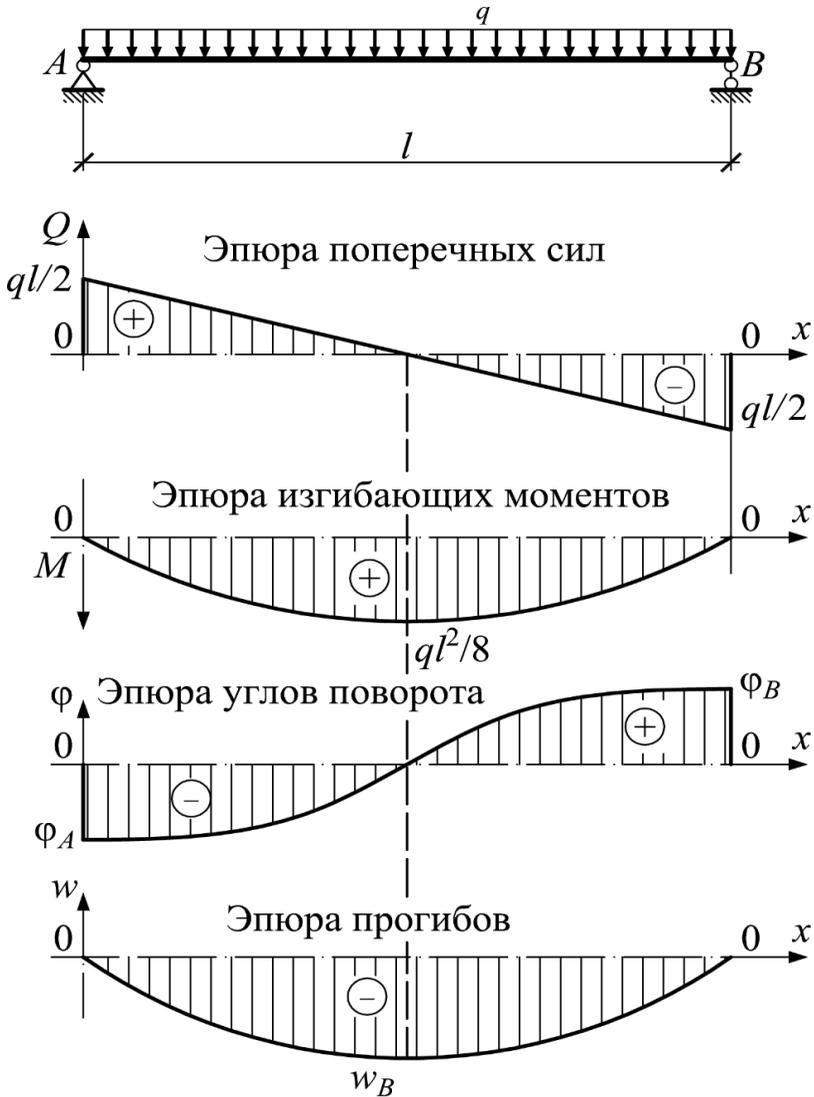
$$\varphi_B = -\frac{ml}{EI}; \quad w_B = w_{max} = -\frac{1}{2} \frac{ml^2}{EI}.$$



$$f = w_{max} = w_C = -\frac{1}{48} \frac{Fl^2}{EI}, \quad \text{при } x = a = b = \frac{l}{2};$$

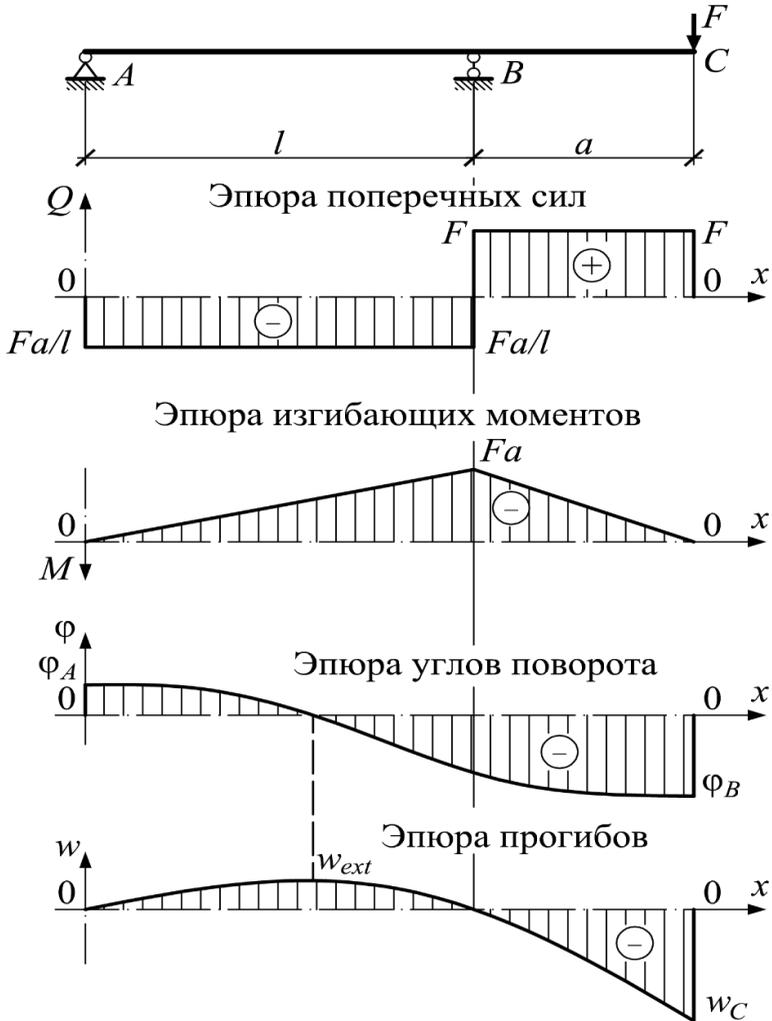
$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{Fba}{EI} (a + 2b); \quad \varphi_B = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} (l^2 - a^2);$$

$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F}{EI} \frac{(ab)^2}{l}, \quad \text{при } x = a.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI};$$

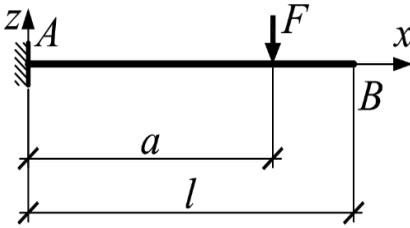
$$w_{max} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad \text{при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{F a l}{E I}; \quad \varphi_C = -\frac{1}{6} \frac{F a}{E I} (2l + 3a);$$

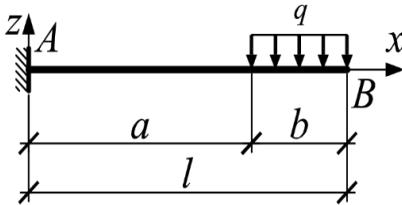
$$w_{ext} = 0,0642 \frac{F a l^2}{E I}, \quad \text{при } x = 0,578l;$$

$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F a^2}{E I} (l + a).$$



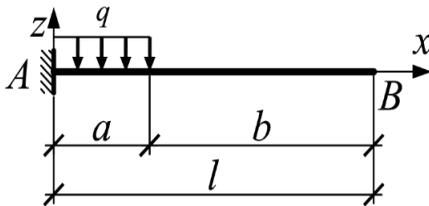
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{F a^2}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{6} \frac{F a^2}{EI} (3l - a).$$



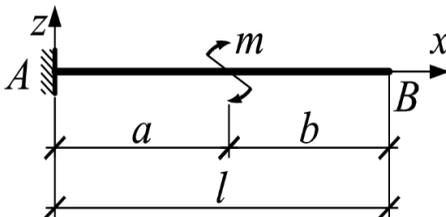
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{q l^3}{EI} \left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right);$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{q l^4}{EI} \left(3 - 3 \frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4}\right).$$



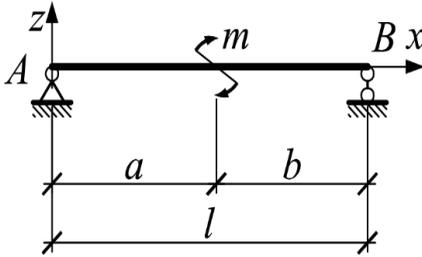
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{q a^3}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI} (4l - a).$$



$$\varphi_B = -\frac{m a}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{2} \frac{m a (l + b)}{EI}.$$

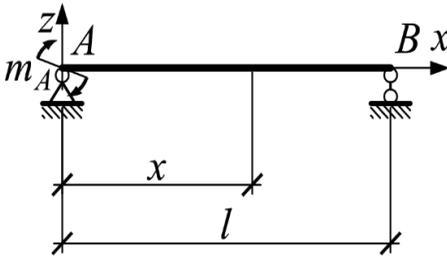


$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{ml}{EI} \left(1 - 3 \frac{b^2}{l^2}\right);$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ml}{EI} \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right);$$

$$w(a) = -\frac{1}{3} \frac{mab}{EI} \left(\frac{a-b}{l}\right)$$

при $x = a$.

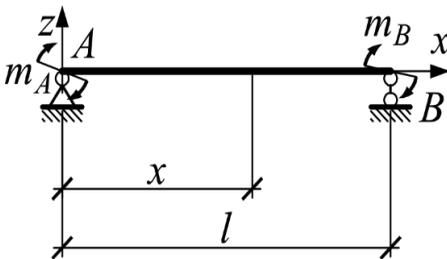


$$\varphi_A = -\frac{1}{3} \frac{ml}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ml}{EI};$$

$$w_{max} = -0,0642 \frac{ml^2}{EI};$$

$$w = -\frac{1}{16} \frac{ml^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$

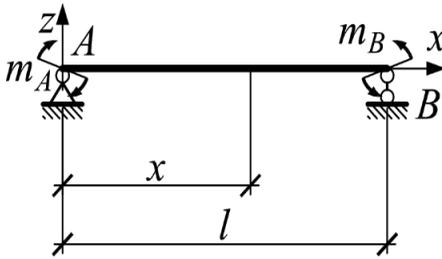


$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

$$w_{max} = -\frac{1}{16} \frac{(m_A + m_B)l^2}{EI}$$

при $x = \frac{l}{2}$.

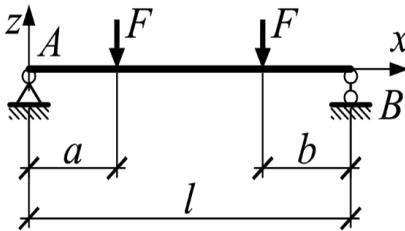


$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

$$w_{max} = -\frac{1}{16} \frac{(m_A - m_B) l^2}{EI}$$

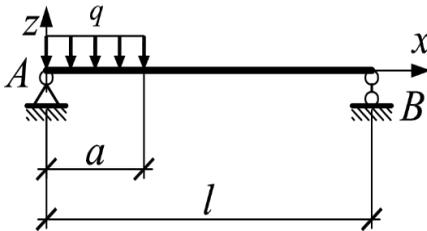
при $x = \frac{l}{2}$.



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{2} \frac{F a}{EI} (l - a);$$

$$w_{max} = -\frac{1}{24} \frac{F l^3}{EI} \left(3 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right)$$

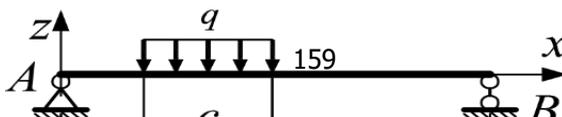
при $x = \frac{l}{2}$;



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a}{2l} \right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{12} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a}{2l^2} \right);$$

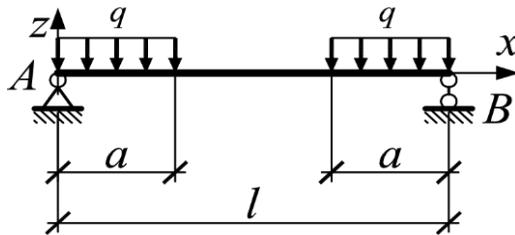
$$w = -\frac{1}{24} \frac{a^3 b}{EI} \left(4 - 3 \frac{a}{l} \right);$$



$$\varphi_A = \frac{1}{24} \frac{qac}{EI} [4a(l+a) - c^2];$$

$$w = -\frac{1}{6} \frac{qc}{EI} \left[\frac{ab}{l} \left(2al - 2a^2 - \frac{c}{4} \right) + \frac{c^3}{64} \right]$$

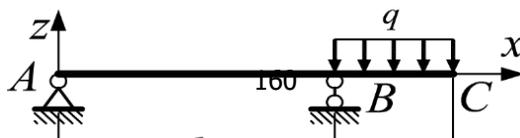
при $x = a$.



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{12} \frac{qa^2}{EI} (3l - 2a);$$

$$w_{max} = -\frac{1}{48} \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{a^2}{l^2} \right)$$

при $x = \frac{l}{2}$.



$$\varphi_A = -\frac{1}{12} \frac{qa^2l}{EI}; \quad \varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{qa^2l}{EI};$$

$$\varphi_C = -\frac{1}{6} \frac{qa^2}{EI} (a + l);$$

$$w_C = -\frac{1}{24} \frac{qa^2}{EI} (4l + 3a);$$

$$w_{max} = 0,0321 \frac{qa^2l^2}{EI}$$

$$\text{при } x = 0,577l.$$