ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине
«Сопротивление материалов»

«Статика.

Плоская и пространственная системы сил»

Авторы
Маяцкая И.А.
Языев Б.М.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для изучения методов расчета элементов конструкций по дисциплинам «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов».

Настоящее пособие ставит своей задачей ознакомление студентов, изучающих общий курс сопротивления материалов, с методами анализа конструкций, находящихся в состоянии равновесия под действием плоской и пространственной систем сил.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Авторы

Доцент, кандидат технических наук,
доцент кафедры «Сопротивление материалов»
Маяцкая И.А.

Профессор, доктор технических наук,
профессор кафедры «Сопротивление материалов»
Языев Б.М.

Оглавление

СТАТИКА. ПЛОСКАЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМЫ СИЛ

В инженерной практике расчет конструкций может быть сведен к анализу модели твердого тела, находящегося в состоянии равновесия под действием плоской или пространственной системы сил. Методы статики также используются при расчете деформированного тела в сопротивлении материалов.

1. Основные понятия при расчете равновесия тела, находящегося под действием плоской системы сил

Твердое тело – это элемент конструкции, расстояние между двумя любыми точками которого не меняется.

Сила – это мера механического взаимодействия тел. Сила представляется вектором и характеризуется модулем, направлением (линией действия) и точкой приложения вдоль линии ее действия.

Внешние силы – это силы, с которыми любые другие тела действуют на рассматриваемое тело.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между частями рассматриваемого тела.

Сосредоточенная сила приложена в точке.

Распределенные силы – в плоской статике приложены по какому-либо закону вдоль линии и характеризуется интенсивность q (кН/м). В расчетах распределенная нагрузка заменяется сосредоточенной F_q , которая прикладывается в центре тяжести C и равна ее площади (рис. 1).

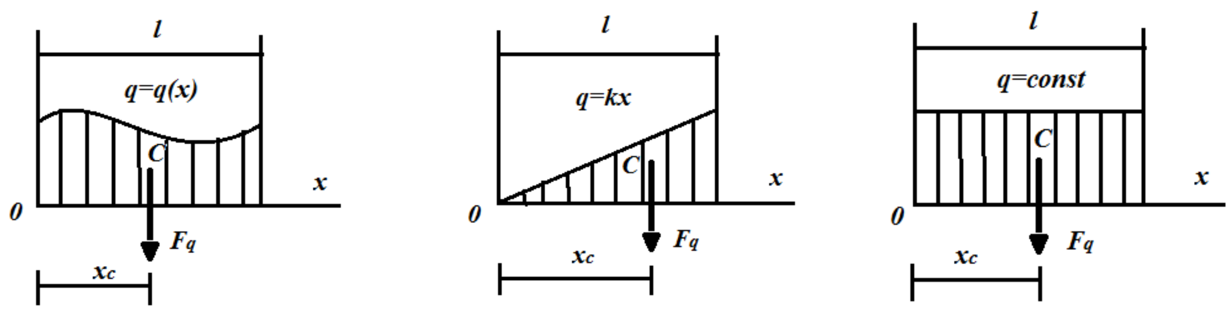


Рис. 1

При $q = q(x)$ получаем $F_q = \int_0^l q(x)dx$; при $q = kx$ имеем $F_q = \frac{1}{2} q_{\max} l$; при $q = const$ сосредоточенная сила равна $F_q = ql$.

Две силы и более, действующих на рассматриваемую конструкцию, образуют систему сил. Их векторная сумма равна главному вектору: $\overline{R} = \sum_k \overline{F}_k$. Если все силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сил.

Проекции сил плоской системы сил на оси координат представлены на рис. 2. $\overline{F}$ – это вектор *AB*.

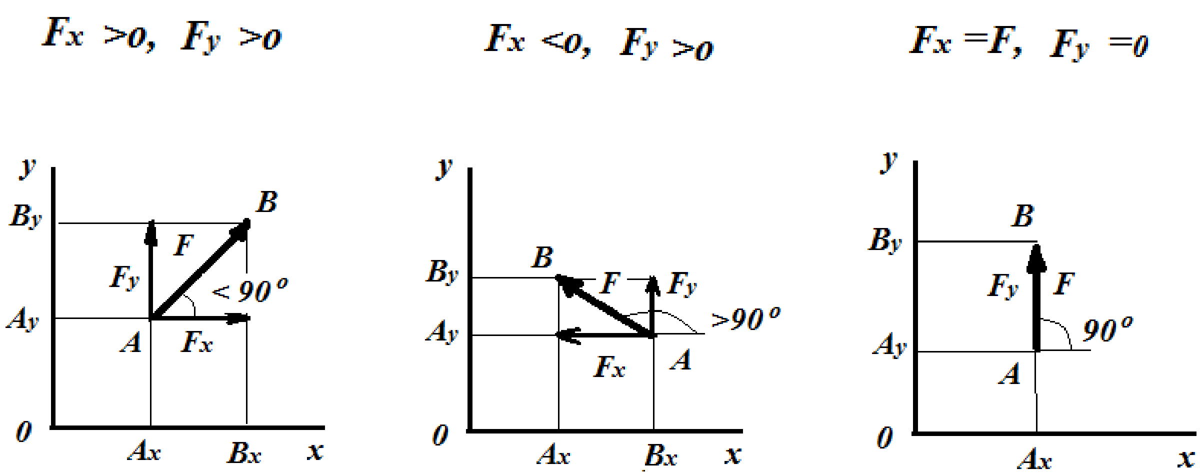


Рис. 2

Проекции этой силы на оси координат равны:

$$F_x = |\overline{F}| \cos\alpha = F \cos\alpha = AB \cos\alpha ;$$

$$F_y = |\overline{F}| \sin\alpha = F \sin\alpha = AB \sin\alpha .$$

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки А в плоской статике является скалярной величиной:

$$M_A = Fh ,$$

где h – это плечо силы $\overline{F}$, которое является кратчайшим расстоянием от точки А до линии действия силы (рис. 3). Момент берется со знаком «+», если сила стремиться повернуть тело относительно точки А против часовой стрелки, в противном случае – со знаком «–».

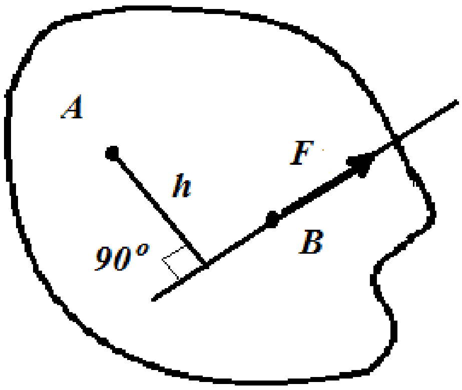


Рис. 3

Пара сил – система из двух параллельных сил, равных по величине, но противоположно направленных (рис. 4). Действие пары сил на тело характеризуется моментом $M(F,F)=Fh$, где h – это плечо пары сил.

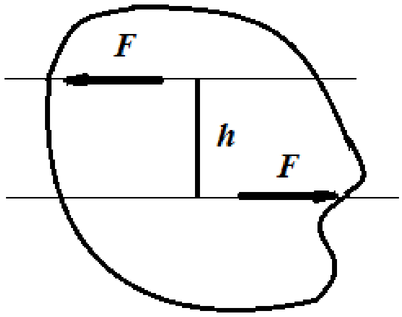


Рис. 4

Момент пары не зависит от положения центра моментов. Главный вектор пары сил равен нулю. Проекция пары сил на любую ось в плоскости пары равна нулю.

Главный момент плоской системы сил – это сумма моментов сил относительно произвольной точки О: $M_O=\sum_k m_O(\overline{F}_k)$. Если заданы моменты пар сил, то надо тоже их учитывать с учетом знака.

Связи – все, что ограничивает возможность перемещения рассматриваемого элемента конструкции. Например, для вала, это подшипники, для двери – петли и т.д. Роль связей могут играть не только какие-то элементы конструкции (шарнирно-неподвижная опора, шарнирно-подвижная опора и другие), но и определенные способы соединения.

Реакция связи – это сила, с которой связь ограничивает перемещение тела или элемента конструкции. Если связь ограничивает линейное перемещение, ее реакцией является сила, если поворот, то это момент.

Реакция связи действует обратно направлению, в котором данная связь ограничивает перемещение тела.

Существует несколько типов связей.

Гладкая поверхность – тип связи образуется за счет касания без трения рассматриваемого твердого тела и опоры (рис. 5). Реакция связи $\overline{N}$ перпендикулярна к общей касательной или по касательной к одной из граничных поверхностей (рис. 6).

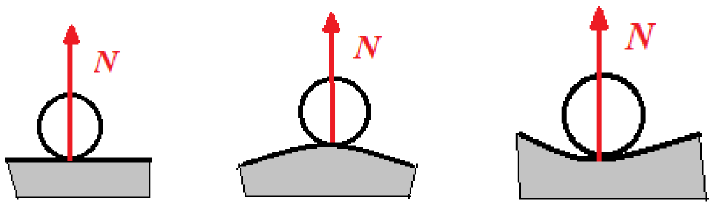


Рис. 5

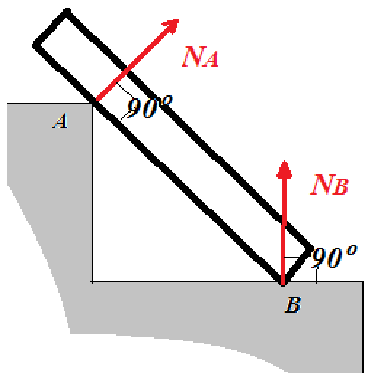
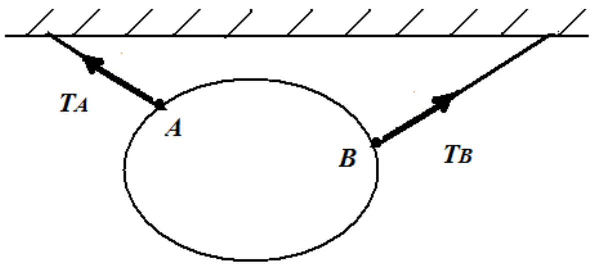


Рис. 6

Нерастяжимая нить – ограничивает перемещение тела вдоль нити и ее реакция $\overline{T}$ направлена вдоль нити (рис. 7). Нить работает только на растяжение.

Осевой шарнир (шарнирно-неподвижная опора) – в плоской статике позволяет телу только поворачиваться тез трения относительно точки А (рис. 8). Реакция этой связи $\overline{R_A}$ проходит через точку А и направлена под некоторым углом. В расчетах эту реакцию обычно заменяют на ее проекции на оси координат $\overline{R_{AX}}$ и $\overline{R_{AY}}$, учитывая, что $\overline{R_A}$ и α определяются по формулам:

$$R_A = \sqrt{R_{AX}{}^2 + R_{AY}{}^2} \quad \text{и} \quad \alpha = arctg\left(\frac{R_{AY}}{R_{AX}}\right).$$



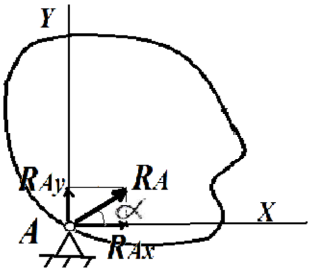
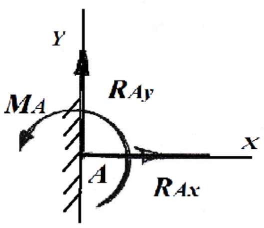


Рис. 7 Рис. 8

Жесткая заделка или защемление (рис. 9) – такую связь можно трактовать как осевой шарнир, который лишен возможности поворачиваться. Поэтому к реакциям $\overline{R_{AX}}$ и $\overline{R_{AY}}$ добавится момент в опоре M_A. Суммарная реакция $\overline{R_A}$ и ее направление также рассчитываются по выше приведенным формулам.

Скользящая заделка (рис. 10) – позволяет телу перемещаться без трения только в одном направлении. В этом случае в опоре возникают $\overline{R_A}$ и M_A. $\overline{R_A}$ – реакция, перпендикулярная направлению возможного перемещения в опоре.

Двойная скользящая заделка не препятствует перемещению вдоль осей и (рис. 10). Ее реакция определяется только моментом в опоре M_A.



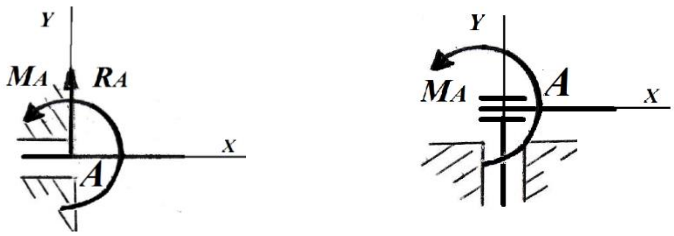


Рис. 9 Рис. 10

Невесомый стержень. Рассмотрим равновесие конструкции, схема которой представлена на рис. 11. Здесь твердое тело нагружено силой $\overline{F}$, соединено с одной стороны шарнирно-неподвижной опорой B, а с другой – невесомым стержнем с осевыми шарнирами в точках A и D.

Такая связь называется невесомым стержнем.

Линия, проходящая через шарниры A и D, называется осью стержня. Реакция стержня приложена в точке A и всегда направлена вдоль его оси. Стержень может работать как на растяжение, так и на сжатие.

Если к стержню AD приложить нагрузку, например, силу (рис. 12), то он утратит роль связи и задача о равновесии твердого тела обратиться в задачу о равновесии системы двух тел, решение которой требует иного решения.

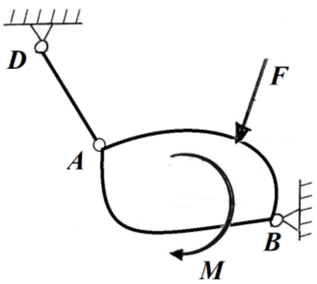


Рис. 11

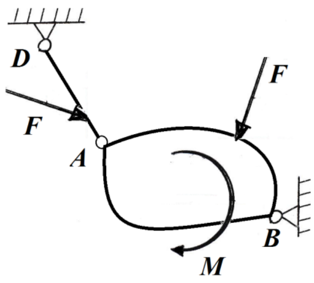


Рис. 12

Свободное твердое тело – это тело, возможность перемещения которого не ограничена связями. Если на тело наложены связи, то оно называется несвободным.

2. Уравнения равновесия твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил

Свободное твердое тело находится в равновесии, если главный вектор и главный момент действующей на тело плоской системы сил одновременно равны нулю:

$$\overline{R} = \sum_k \overline{F}_k = 0 \quad \text{и} \quad M_O = \sum_k m_O\left(\overline{F}_k\right) = 0 .$$

Существуют три типа уравнений равновесия плоской системы сил.

Вариант 1.

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad \sum_k F_{ky} = 0; \quad \sum_k m_O\left(\overline{F}_k\right) = 0 .$$

В качестве центра O в уравнении моментов можно принять любую точку.

Вариант 2.

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad \sum_k m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0; \quad \sum_k m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 .$$

Точки A и B выбираются произвольно, но прямая AB не должна быть перпендикулярна оси x.

Вариант 3.

$$\sum_k m_A(\overline{F}_k) = 0\,; \quad \sum_k m_B(\overline{F}_k) = 0\,; \quad \sum_k m_C(\overline{F}_k) = 0\,.$$

Точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

Все три варианта условий равновесия содержат по три уравнения, что позволяет решать задачи с тремя неизвестным. Такие задачи называются статически определимыми. При количестве неизвестных более трех система становится статически неопределимой и решение задачи методами теоретической механики невозможно. Такие задачи решаются методами сопротивления материалов.

В качестве центра моментов целесообразно выбирать ту точку, в которой сходятся направления как можно больше неизвестных сил.

Одну из координатных осей следует проводить так, чтобы она была перпендикулярна к возможно большему количеству неизвестных сил.

3. Последовательность решения задач плоской статики

При решении задач на равновесие тела, находящегося под действием плоской системы сил необходимо придерживать следующей последовательности:

1. Для реальной конструкции нужно составить расчетную схему и выделить на ней ту часть, которую будем рассматривать как находящееся в равновесие твердое тело.
2. Изобразить на схеме все активно действующие силы, пары сил и моменты.
3. Условно освободить рассматриваемое твердое тело от всех связей, заменив их соответствующими реакциями.
4. Выбрать систему координат и центр (или центры) моментов.
5. Для полученной расчетной схемы свободного твердого тела составить уравнения равновесия (один из трех вариантов условий равновесия).
6. Решая полученную систему уравнений, найти неизвестные реакции связей.
7. Сделать проверку, составив уравнение равновесие, например, уравнение моментов относительно другой точки. В результате должен получиться тождественный ноль.

4. Примеры решения задач плоской статики

Рассмотрим несколько примеров, в которых в одной и той же конструкции рассматриваются разные виды ее закрепления. К ней приложены: сосредоточенные силы, распределенная нагрузка и сосредоточенные моменты.

4.1. Произвольная система сил

Рассмотрим несколько примеров (рис. 13 – 16), в которых к одной и той же жесткой конструкции одинаково приложены: сосредоточенная сила, распределенная нагрузка с интенсивностью q и пара сил с моментом M. В каждом из вариантов исследуемая конструкция закреплена различными типами связей. Нужно найти неизвестные реакции и провести анализ.

Дано: $AB = 1{,}2 м$; $AC = 0{,}8 м$; $AD = 0{,}4 м$; $DE = 0{,}4 м$; $F = 15 кН$; $M = 2 кН \cdot м$; $q = 5 кН/м$; $\alpha = 60°$; $\beta = 45°$.

<u>Пример 1.</u>

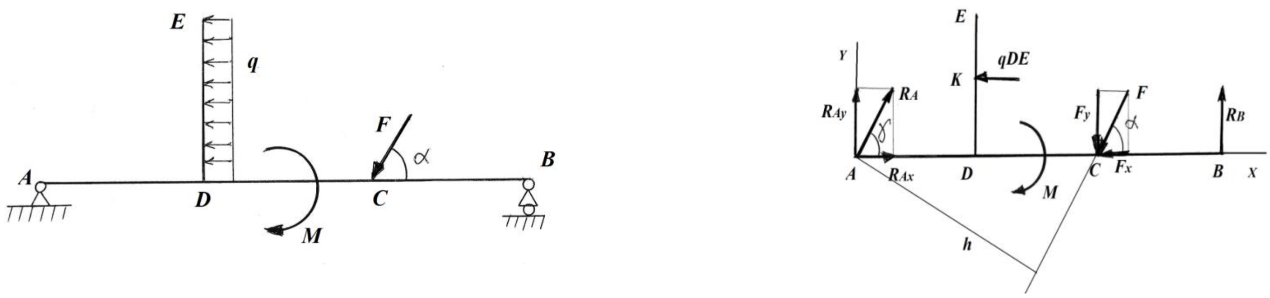


Рис. 13

Прежде всего, заменим распределенную нагрузку интенсивностью q сосредоточенной силой qDE, которая должна быть приложена в точке К.

В точке А имеется связь в виде шарнирно-неподвижной опоры. Реакцию в этом осевом шарнире можно разложить на $\overline{R}_{AX}$ и $\overline{R}_{AY}$. В точке В связь представлена шарнирно-подвижной опорой с реакцией $\overline{R}_B$, направление которой перпендикулярно гладкой поверхности, по которой перемещается данная опора. Ось x направлена вдоль АВ. Реакции $\overline{R}_{AY}$ и $\overline{R}_B$ перпендикулярны оси x и поэтому их проекции на нее обратятся в ноль.

Итак, в результате получается три неизвестных: $\overline{R}_{AX}$, $\overline{R}_{AY}$ и $\overline{R}_{B}$. Следовательно, задача статически определима.

Заменяем связи их реакциями и составляем уравнения равновесия свободного твердого тела.

Сумма проекций сил на ось x:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - qDE - F\cos\alpha = 0.$$

Сумма проекций сил на ось y:

$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - F\sin\alpha + R_B = 0.$$

В качестве центра моментов принимается точка А, так как через нее приходят две неизвестные силы: $\overline{R}_{AX}$ и $\overline{R}_{AY}$, что упрощает само уравнение моментов. В результате получаем:

$$\sum_k m_A\left(\overline{F}_k\right) + \sum_k M_k = 0; \quad qDE \cdot DK - Fh + R_B AB - M = 0,$$

где $h = AC\sin\alpha$ – плечо силы относительно точки А; DK и AB – соответственно плечи сил qDE и $\overline{R}_B$.

Сила $\overline{F}$ и момент M стремятся повернуть конструкцию относительно точки А по часовой стрелке, поэтому соответствующие члены в этом уравнении приняты со знаком «–». Реакция $\overline{R}_B$ и сила qDE создают моменты, направленные против часовой стрелки, поэтому они приняты со знаком «+».

Решая уравнения равновесия, находим:

$$R_B = \frac{-qDE \cdot DK + Fh + M}{AB} = 10кН;$$

$$R_{Ax} = qDE + F\cos\alpha = 9{,}5кН;$$

$$R_{Ay} = F\sin\alpha - R_B = 3кН.$$

Модуль реакции опоры А равен:

$$R_{Ax} = \sqrt{R_{Ax}{}^2 + R_{Ax}{}^2} = 9{,}96кН.$$

И угол между этой реакции и осью x определяется по формуле:

$$\gamma = arctg\left(R_{Ay}/R_{Ax}\right) = 18^\circ.$$

Можно упростить составление уравнения моментов, если предварительно разложить силы на составляющие вдоль осей координат. Например, для силы $\overline{F}$ получаются две проекции:

$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y,$$

где $F_x = F\cos\alpha$ и $F_y = F\sin\alpha$.

Так как $m_A(\overline{F}_x) = 0$ и $m_A(\overline{F}_y) = -F\sin\alpha \cdot AC = 0$, получается тоже самое уравнение моментов.

Для проверки результатов можно найти сумму моментов относительно другой точки, например, точки С. Затем нужно подставить найденные реакции в это уравнение. Должен получиться тождественный ноль.

$$\sum_k m_C(\overline{F}_k) + \sum_k M_k = 0; \ qDE \cdot DK - R_{Ay}AC + R_B CB - M = 0, 0 \equiv 0.$$

<u>Пример 2.</u>

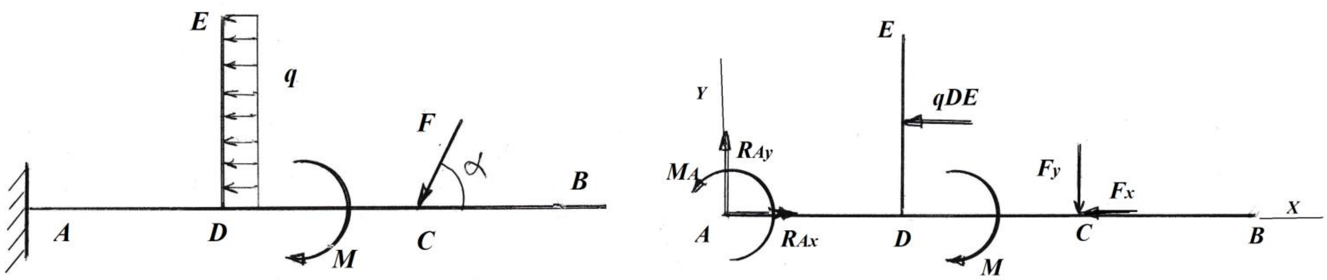


Рис. 14

В данном варианте конструкция имеет связь в точке А в виде жесткой заделки или защемления. В этой опоре будет реакция $\overline{R}_A$, которая имеет две составляющие $\overline{R}_{AX}$ и $\overline{R}_{AY}$, и момент M_A. Ось х направим вдоль направления АВ. В результате имеем три неизвестные реакции: $\overline{R}_{AX}$ и $\overline{R}_{AY}$, и M_A. Задача статически определима.

Составим уравнения равновесия для данной системы сил:

Сумма проекций сил на ось х:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - qDE - F\cos\alpha = 0.$$

Сумма проекций сил на ось y:

$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - F\sin\alpha = 0.$$

В качестве центра моментов принимается точка A, так как моменты неизвестных реакций $\overline{R}_{AX}$ и $\overline{R}_{AY}$ относительно нее равны нулю. В результате получаем:

$$\sum_k m_A\left(\overline{F}_k\right) + \sum_k M_k = 0; \quad qDE \cdot DK - Fh + M_A - M = 0,$$

Решая эту систему уравнений, определяем неизвестные реакции в опоре A:

$$R_{Ax} = qDE - F\cos\alpha = 9{,}5 кH;$$

$$R_{Ay} = F\sin\alpha = 13 кH;$$

$$M_A = -qDE \cdot DK + Fh + M = 12 кHм.$$

Положительное значение момента в точке *A* говорит о том, что в действительности он направлен в эту сторону.

Модуль реакции опоры A равен:

$$R_{Ax} = \sqrt{R_{Ax}^{\ 2} + R_{Ax}^{\ 2}} = 16{,}1 кH.$$

И угол между этой реакции и осью x определяется по формуле:

$$\gamma = arctg\left(R_{Ay} / R_{Ax}\right) = 36°.$$

Можно также сделать проверку правильности нахождения неизвестных параметров. Например, найти сумму моментов относительно другой точки D.

<u>Пример 3.</u>

С левой стороны рассматриваемой конструкции находится опора в виде скользящей заделки, которая имеет две реакции: силу $\overline{R}_A$ и момент M_A (рис. 15). В точке B тело соединено с помощью невесомого стержня (конструктивный элемент *BO*), который имеет реакцию связи $\overline{R}_B$. Реакция последнего проходит под углом $45°$ к направлению AB.

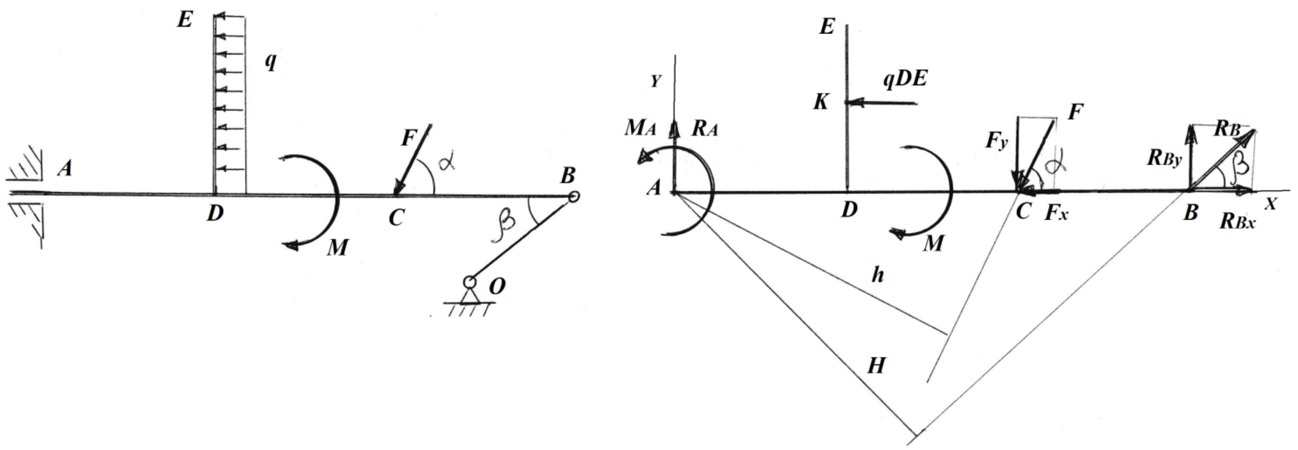


Рис. 15

Поскольку направления реакций $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ указаны, то имеем три неизвестных параметра: $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$ и M_A. Задача статически определима.

Заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной силой и связи их реакциями. Ось x проводим вдоль АВ и центр моментов принимаем в точке А.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad -qDE - F\cos\alpha - R_B\cos\beta = 0.$$

$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad R_A - F\sin\alpha - R_B\sin\beta = 0.$$

$$\sum_k m_A(\overline{F}_k) + \sum_k M_k = 0; \quad qDE \cdot DK - Fh + M_A - M - R_B \cdot H = 0,$$

где $H = AB\sin\beta$ – плечо реакции $\overline{R}_B$ относительно точки А.

Последнее уравнение можно было получить, разложив предварительно силу $\overline{F}$ и реакцию $\overline{R}_B$ на соответствующие составляющие. Можно упростить составление уравнения моментов, если предварительно разложить силы на составляющие вдоль осей координат.

Например, для силы $\overline{F}$ получаются две проекции:

$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y,$$

где $F_x = F\cos\alpha$ и $F_y = F\sin\alpha$.

Например, для реакции $\overline{R}_B$ получаются две проекции:

$$\overline{R}_B = \overline{R}_{Bx} + \overline{R}_{By},$$

где $R_{Bx} = R_B\cos\beta$ и $R_{By} = R_B\sin\beta$.

Решая уравнения равновесия, получим неизвестные реакции:

$$R_B = \frac{-qDE - F\cos\alpha}{\cos\beta} = -13{,}4\kappa H\,;$$

$$R_A = F\sin\alpha + R_B\sin\beta = 3{,}5\kappa H\,;$$

$$M_A = -qDE\cdot DK + Fh + M + R_B\cdot H = 0{,}6\kappa H\,.$$

Отрицательное значение реакции $\overline{R}_B$ говорит о том, что в действительности она направлена в противоположную сторону. Далее можно сделать проверку правильности, как это показано в примерах 1 и 2.

Анализ полученных систем уравнений в примерах 1 – 3 показывает, что число реакций в опорах совпадает с числом уравнений плоской системы сил (три уравнения).

<u>Пример 4.</u>

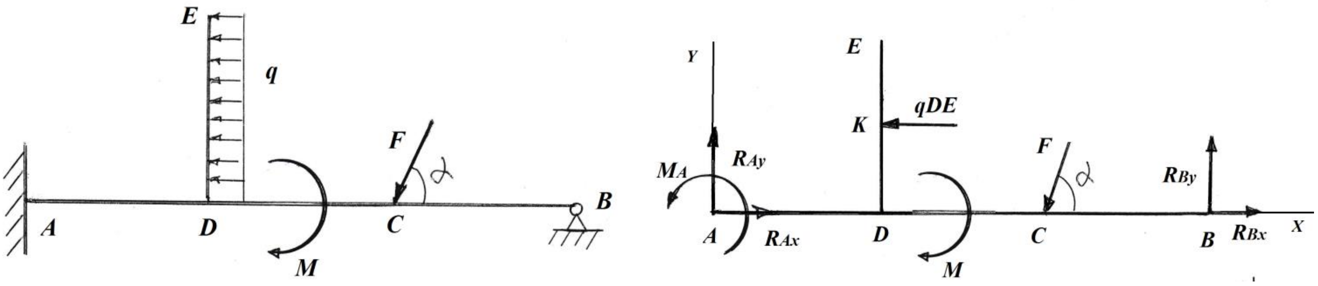


Рис. 16

Рассмотрим схему, в которой конструкция имеет связь в точке А в виде жесткой заделки или защемления, а в точке В – шарнирно-неподвижная опора. В опоре А будет реакция $\overline{R}_A$, которая имеет две составляющие, и момент M_A. В опоре В будет реакция $\overline{R}_B$, которая тоже имеет две составляющие. Ось х направим вдоль направления АВ, а ось у – перпендикулярно АВ.

Уравнения равновесия будут иметь следующий вид.

Сумма проекций сил на ось х:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - qDE - F\cos\alpha + R_{Bx} = 0\,.$$

Сумма проекций сил на ось у:

$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - F\sin\alpha + R_{By} = 0\,.$$

В качестве центра моментов принимается точка А, так как моменты неизвестных реакций $\overline{R}_{AX}$ и $\overline{R}_{AY}$ относительно нее равны нулю. В результате получаем:

$$\sum_k m_A(\overline{F}_k) + \sum_k M_k = 0; \quad qDE \cdot DK - Fh + M_A - M + R_{By} AB = 0,$$

Здесь пять неизвестных реакций опор, а в нашей задаче рассматривается тело, нагруженное плоской системой сил. Для такой системы можно составить только три уравнения. В результате получается задача дважды статически неопределимая (5–3=2).

Решение этой задачи методами теоретической механики невозможно, поэтому надо применять методы сопротивления материалов.

4.2. Система параллельных сил

Если на свободное твердое тело действует плоская система параллельных сил $\overline{F}_k$, то всегда можно выбрать декартовы координаты, одна из осей которых перпендикулярна силам $\overline{F}_k$ и сумма их проекций на эту ось будет равна нулю. Тогда условия равновесия сведутся к двум уравнениям:

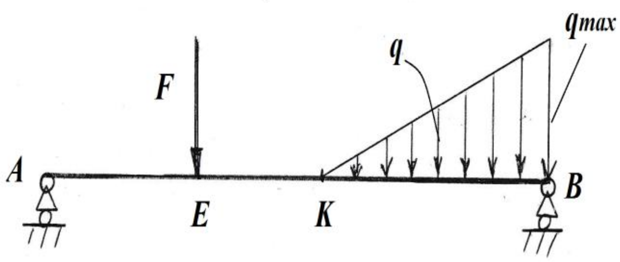
$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad \sum_k m_A(\overline{F}_k) + \sum_k M_k = 0 \quad \text{или}$$

$$\sum_k m_A(\overline{F}_k) + \sum_k M_k = 0; \quad \sum_k m_B(\overline{F}_k) + \sum_k M_k = 0.$$

Следовательно, плоская система параллельных сил статически определима, если в ней не более двух неизвестных.

<u>Пример 5.</u>

Опирающаяся на два катка балка АВ (рис. 17) нагружена силой $F = 2кН$ и распределенной нагрузкой, меняющейся линейно $0 \le q \le q_{\max} = 4кН/м$. Найти реакции связей, если $AB = 2м$; $AE = 0{,}6м$; $BK = 0{,}9м$.



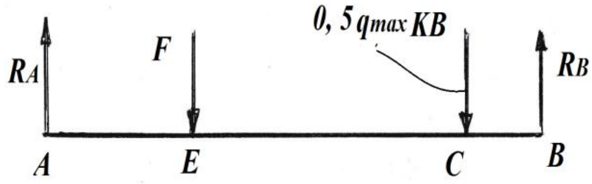


Рис. 17

Обе связи относятся к типу «гладкая поверхность» и их реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ перпендикулярны АВ. Распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $\frac{1}{2}q_{\max}BK = 1{,}8\kappa H$. Точка С приложения этой силы определяется соотношением $CB = 0{,}3\textit{м}$.

Заменяя связи их реакциями, получаем схему нагружения, показанную на рис. 17. Следовательно, свободное твердое тело (балка АВ) нагружено системой параллельных сил. Направляя ось x вдоль АВ и принимая за центр моментов точку А, запишем условия равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad R_A - \frac{1}{2}q_{\max}BK - F + R_B = 0.$$

$$\sum_k m_A\left(\overline{F}_k\right) + \sum_k M_k = 0; \quad -\frac{1}{2}q_{\max}BK \cdot AC - FAA + R_B AB = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{\frac{1}{2}q_{\max}BK \cdot AC + FAA}{AB} = 2{,}13\kappa H;$$

$$R_A = \frac{1}{2}q_{\max}BK + F - R_B = 1{,}67\kappa H.$$

Делать заключение о том, что тело находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил можно только после замены связей их реакциями. На рис. 18 показан случай, когда балка находится под действием параллельных сил, а замена связей реакциями показывает, что тело находится под действием плоской системы сил.

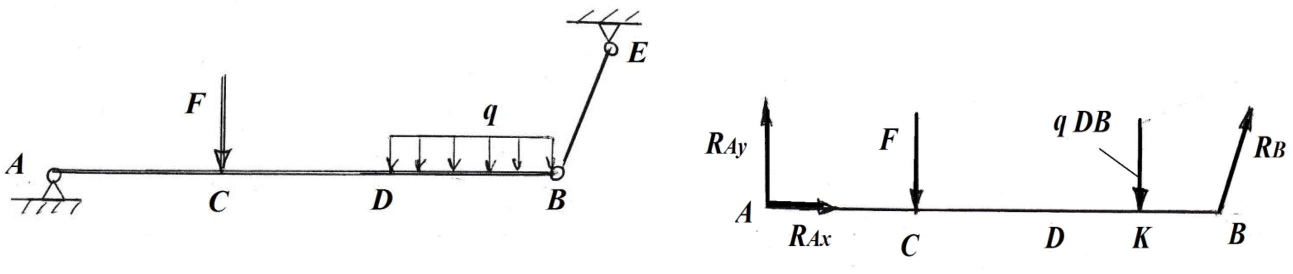


Рис. 18

4.3. Система сходящихся сил

Если за центр моментов принять точку, в которой сходятся силы плоской системы сил, то уравнения равновесия примут следующий вид:

$$\sum_k F_{kx} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_k F_{ky} = 0 .$$

Сходящаяся в точке плоская система сил статически определима, если в ней не более двух неизвестных.

Пример 6.

Барабан опирается на ролики А и В (рис. 19). Сила веса барабана $G = 15 кН$, определяющие положение роликов углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 30°$. Найти реакции связей в точках А и В. Трением пренебречь.

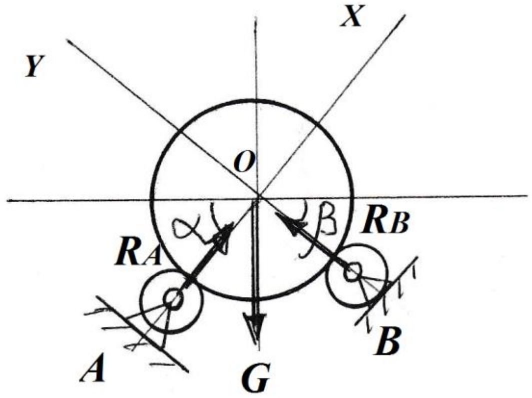


Рис. 19

Заменяя связи их реакциями, получаем систему сходящихся сил в точке О. Введем декартову систему координат с осями х и у. Направим ось х по направлению реакции $\overline{R}_A$. Запишем уравнения равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad R_A - G\cos\beta = 0$$

$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad R_B - G\cos\alpha = 0.$$

Откуда,

$$R_A = G\cos\beta = 13кН;$$
$$R_B = G\cos\alpha = 7{,}5кН.$$

5. Основные понятия при расчете равновесия тела, находящегося под действием пространственной системы сил

5.1. Система сходящихся сил в пространстве

Пусть на тело действуют силы, линии действия которых расположены в пространстве и пересекаются в одной точке О (рис. 20). Перенеся силы вдоль линий действия в эту точку и сложив их последовательно по правилу параллелограмма (вектор OD сумма всех векторов на рис. 21), найдем равнодействующую данной системы:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4.$$

Для системы сходящихся сил:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k.$$

Результат сложения векторов не зависит от последовательности их сложения. Можно построить силовой многоугольник OABCD. Для этого нужно от конца вектора отложить вектор и так далее, пока не будут отложены все силы. Для нахождения равнодействующей системы сил нужно соединить начало первого вектора с концом последнего вектора.

Равнодействующая системы сходящихся сил равна их геометрической сумме.

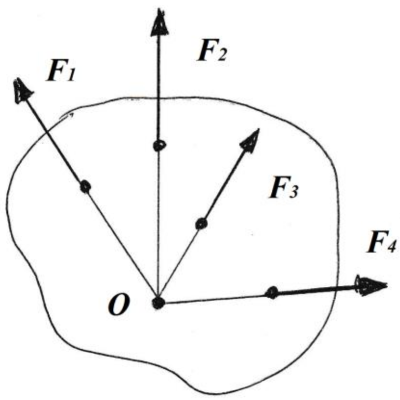


Рис. 20

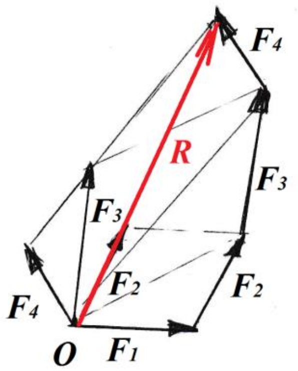


Рис. 21

Аналитический способ решения задач статики основывается на представлении вектора силы в виде трех его составляющих на оси координат (рис. 22):

$$\overline{F} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k} \text{ ,}$$

$$F_x = F\cos\alpha\,;\; F_y = F\cos\beta\,;\; F_z = F\cos\gamma\,;$$

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}} \text{ .}$$

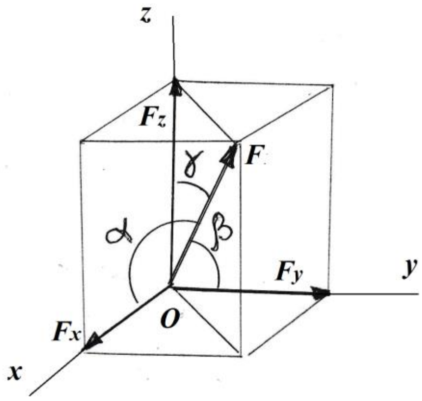


Рис. 22

Если равнодействующая равна $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$, то ее проекции на оси декартовой системы координат равны:

$$R_x = \sum F_{kx} \;\;; \qquad R_y = \sum F_{ky}\,; \quad R_z = \sum F_{kz} \;\; .$$

Таким образом, проекция вектора равнодействующей системы сил на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций всех сил на эту же ось.

Модуль равнодействующей равен

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}}\ .$$

Ее направление можно определить через направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R};\qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R};\quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}\ .$$

Система сходящихся сил в пространстве будет находиться в равновесии, если равнодействующая этих сил равна нулю, силовой многоугольник должен быть замкнутым.

Условия равновесия в векторной и аналитической форме имеют вид:

$$\overline{R} = 0 \quad \text{или} \quad \sum F_{kx} = 0\ ;\quad \sum F_{ky} = 0;\quad \sum F_{kz} = 0\ .$$

5.2. Момент силы относительно точки и относительно оси в пространстве

<u>Момент силы относительно точки.</u>

Моментом силы $\overline{F}$ относительно точки О (рис. 23) называется вектор $\overline{M}_O(\overline{F})$, приложенный в точке О перпендикулярно плоскости треугольника ОАВ и равный:

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}\ ,$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки О в точку приложения силы, в точку А.

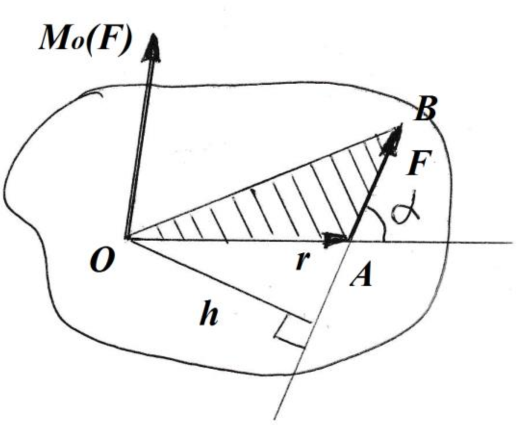


Рис. 23

Модуль этого момента $\overline{M}_O(\overline{F})$ равен произведению модуля силы $\overline{F}$ на расстояние от точки О до линии действия этой силы (на плечо *h*):

$$\left|\overline{M}_O(\overline{F})\right| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin\alpha = Fh \, .$$

Момент силы относительно точки равен нулю, когда линия действия силы проходит через эту точку.

Если на тело действует система сил $\overline{F}_k$ (рис. 24), то вектор, равный сумме моментов всех сил относительно точки О, называется главным моментом системы сил относительно точки О:

$$\overline{L}_O = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k \, .$$

Если все силы приложены в одной точке (рис. 25), то

$$\overline{L}_O = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k = \overline{r} \times \overline{R} \, .$$

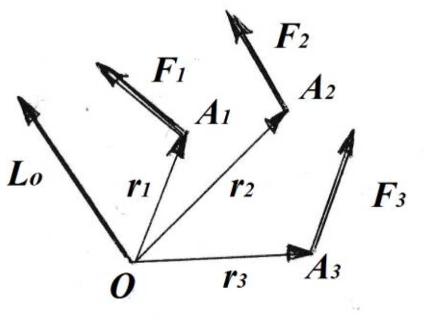


Рис. 24

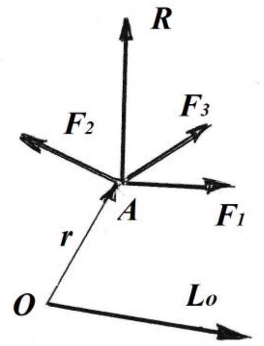


Рис. 25

Это и есть теорема Вариньона.

Момент равнодействующей сил относительно какой-то точки равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

<u>Момент силы относительно оси.</u>

Моментом силы $\overline{F}$ относительно оси называется проекция векторного момента этой силы, взятого относительно любой точки оси, на эту ось,:

$$M_z(\overline{F}) = (\overline{r} \times \overline{F})_z \, .$$

Можно дать и другие определения.

Моментом силы $\overline{F}$ относительно оси Oz (рис. 26) называется момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси Oz, взятый относительно точки O_1 пересечения оси с плоскостью П.

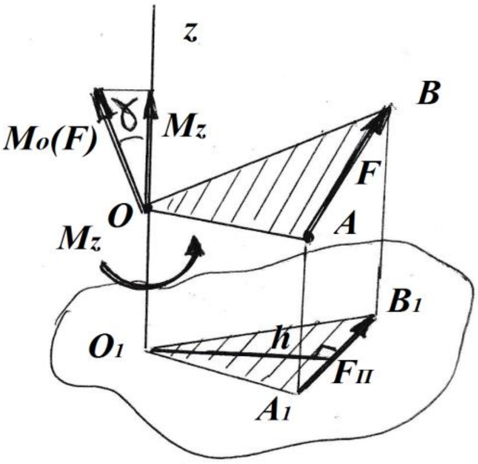


Рис. 26

Этот момент определяется по формуле:

$$M_z\left(\overline{F}\right) = \pm F_П h = M_{O_1}\left(\overline{F}_П\right)$$

или $M_z\left(\overline{F}\right) = \left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right| \cos\alpha$.

Знак «+» берется, если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, стремится вращать тело вокруг оси противоположно часовой стрелки, и знак «–» в противном случае.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает ось или сила и ось параллельны, находятся в одной плоскости.

<u>Момент силы относительно осей декартовой системы координат.</u>

Момент $\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)$ относительно начала координат (рис. 27) можно представить в виде:

$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right) = M_x\left(\overline{F}\right)\overline{i} + M_y\left(\overline{F}\right)\overline{j} + M_z\left(\overline{F}\right)\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

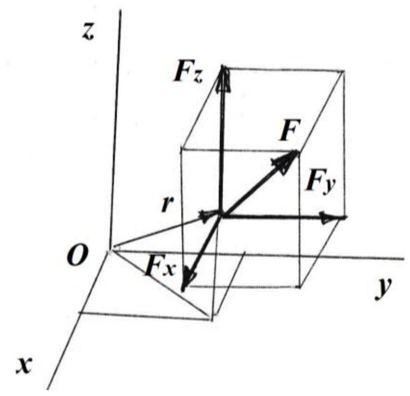


Рис. 27

Раскрывая этот определитель, находим проекции момента силы на оси декартовой системы координат:

$$M_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y;$$
$$M_y(\overline{F}) = zF_x - xF_z;$$
$$M_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x.$$

6. Уравнения равновесия твердого тела, находящегося под действием пространственной системы сил

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием пространственной системы сил, необходимо, чтобы главный вектор и главный момент этой системы были равны нулю:

$$\overline{R} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{L}_O = 0.$$

В результате получаем следующие уравнения:

$$\sum F_{kx} = 0\,; \quad \sum F_{ky} = 0\,; \quad \sum F_{kz} = 0\,;$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0; \quad \sum M_y(\overline{F}_k) = 0; \quad \sum M_z(\overline{F}_k) = 0.$$

7. Последовательность решения задач пространственной статики

Для решения задач пространственной статики целесообразно следующая последовательность действий:

1. Выбрать тело или систему тел, равновесие которых нужно рассмотреть.
2. Нужно освободить конструкцию от связей, заменив действие связей силами.
3. Составить уравнения равновесия.
4. Решить эту систему и найти неизвестные реакции связей.
5. По результатам расчета провести анализ полученных решений, сравнив с реальным представлением о распределении сил.

8. Примеры решения задач пространственной статики

Пример 7.

На конструкцию, представленную на рис 28, действуют сила $\overline{F}$ и сила тяжести $\overline{G}$. Дано $F = 10кН$, $G = 20кН$, $CD \perp Bx$, $\overline{F} \parallel Bx$.

Реакции опор (B – петля, A – шаровой шарнир, CD – невесомый стержень) показаны на расчетной схеме.

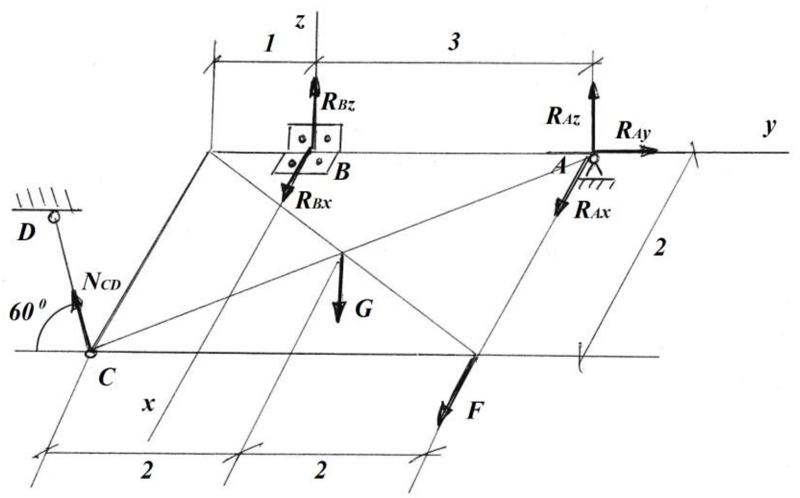


Рис. 28

Составим уравнения равновесия для рассматриваемой системы сил в пространстве.

Уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} + F = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - N_{CD}\cos 60° = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; \; R_{Az} + R_{Bz} - G + N_{CD}\sin 60° = 0.$$

Уравнения моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0; \quad R_{Az}\cdot 3 - N_{CD}\sin 60°\cdot 1 = 0;$$
$$\sum M_y(\overline{F}_k) = 0; \quad -N_{CD}\sin 60°\cdot 2 + G\cdot 1 = 0;$$
$$\sum M_z(\overline{F}_k) = 0; \quad -R_{Ax}\cdot 3 - N_{CD}\cos 60°\cdot 2 = 0.$$

Находим неизвестные реакции опор:

$$N_{CD} = \frac{G\cdot 1}{\sin 60°\cdot 2} = 11{,}55\kappa H;$$
$$R_{Ax} = \frac{-N_{CD}\cos 60°\cdot 2}{3} = -3{,}85\kappa H;$$
$$R_{Az} = \frac{N_{CD}\sin 60°\cdot 1}{3} = 3{,}33\kappa H;$$
$$R_{Ay} = N_{CD}\cos 60° = 5{,}77\kappa H;$$
$$R_{Bx} = -R_{Ax} - F = -6{,}15\kappa H;$$
$$R_{Bz} = -R_{Az} + G - N_{CD}\sin 60° = 6{,}93\kappa H.$$

Найдем модули реакций в опорах А и В:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}{}^2 + R_{Ay}{}^2 + R_{Az}{}^2} = 7{,}69\kappa H;$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}{}^2 + R_{By}{}^2} = 9{,}27\kappa H.$$

Пример 8.

На конструкцию, представленную на рис. 29, действуют силы $\overline{F}$ и $\overline{P}$, а также вес шкива $\overline{G}$. В точках А и В заданы подшипники и на рис. 29 показана расчетная схема.

Дано $F = 15кН$, $P = 12кН$, $G = 12кН$, $r = 0{,}5м$ $\overline{F} \text{II} Az$, $\overline{P} \text{II} Ax$.

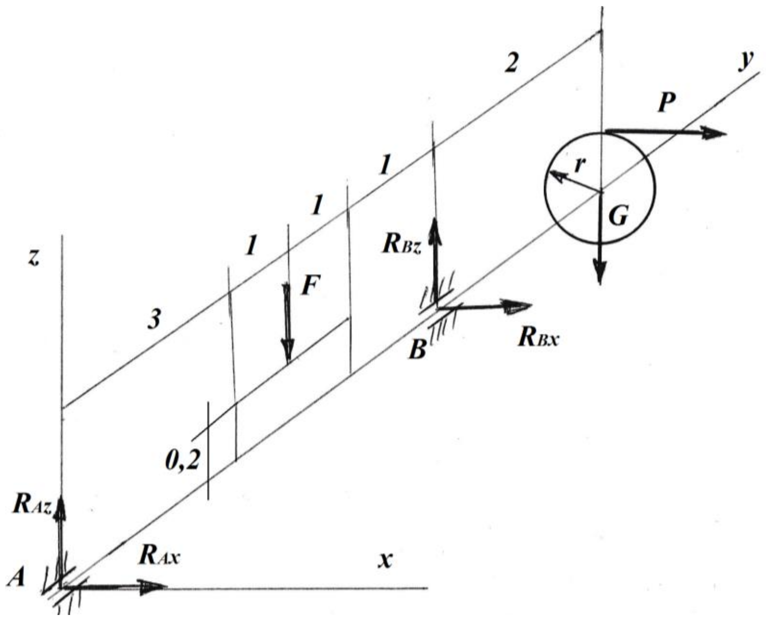


Рис. 29

Составим уравнения равновесия для рассматриваемой системы сил в пространстве.

Уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} + P = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad 0 \equiv 0$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad R_{Az} + R_{Bz} - G - F = 0$$

Уравнения моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum M_x\left(\overline{F}_k\right) = 0; \quad R_{Az} \cdot 6 - F \cdot 4 - G \cdot 8 = 0;$$

$$\sum M_y\left(\overline{F}_k\right) = 0; \quad 0 \equiv 0;$$

$$\sum M_z\left(\overline{F}_k\right) = 0; \quad -R_{Bx} \cdot 6 - P \cdot 8 = 0.$$

Находим неизвестные реакции опор:

$$R_{Ax} = 4кН\ ; \quad R_{Az} = 1кН\ ; \quad R_{Bx} = -16кН\ ; \quad R_{Bz} = 26кН\ .$$

Найдем модули реакций в подшипниках А и В:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}{}^2 + R_{Az}{}^2} = 4{,}12кН\ ;$$

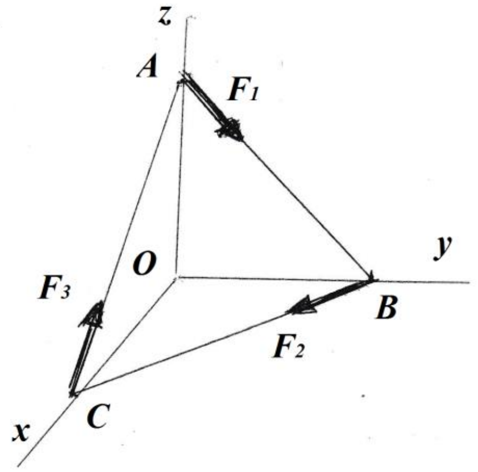
$$R_B = \sqrt{R_{Bx}{}^2 + R_{Bz}{}^2} = 30{,}53кН\ .$$

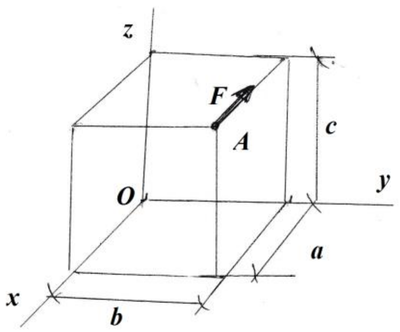
9. Тестовые задания

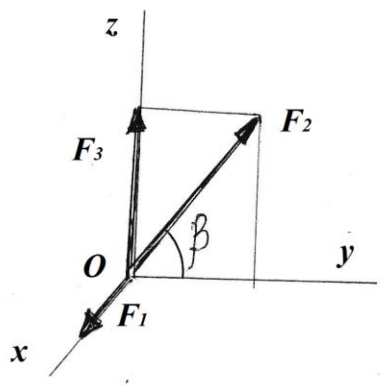
Задание 1	Ответы (1 – верно)
На закрепленную балку действует плоская система параллельных сил. Сколько независимых уравнений равновесия балки можно составить?	2
	3
	1
	6

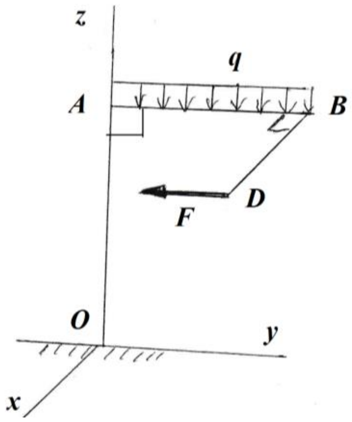
Задание 2	Ответы (1 – верно)
На закрепленную балку действует произвольная плоская система сил. Сколько независимых уравнений равновесия балки можно составить?	3
	2
	1
	6

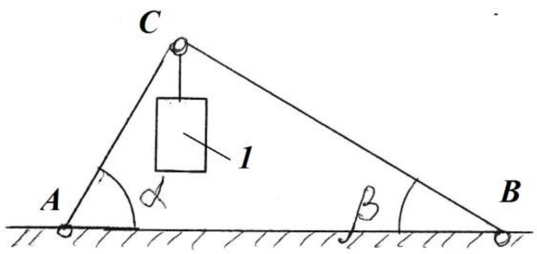
Задание 3	Ответы (1 – верно)
Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1=F_2=$ 5 Н, образующих между собой угол α=45°.	9,24
	5
	10
	0

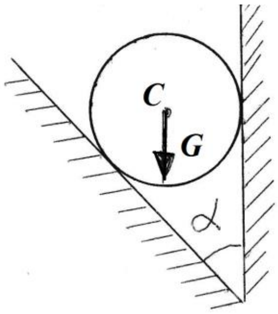
Задание 4	Ответы (1 – верно)
Определить главный вектор системы трех сил $F_1=F_2=F_3$=1 кН, направленных по сторонам треугольника, если расстояния равны: AB=BC=AC= 0,5 м. 	0
	1
	2
	3

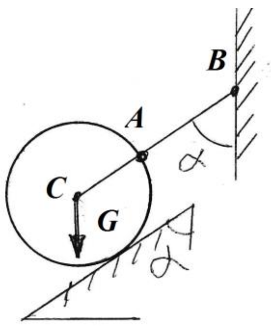
<table>
<tr><th>Задание 5</th><th>Ответы (1 – верно)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">К точке А прямоугольного параллелепипеда приложена сила $F=$ 4 кН. Определить момент этой силы относительно оси *Oy*, если *a= 10 м , b=6 м, c=20 м.*

</td><td>$-8 \cdot 10^4$</td></tr>
<tr><td>$6 \cdot 10^4$</td></tr>
<tr><td>$-5 \cdot 10^8$</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание 6</th><th>Ответы (1 – верно)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Определить модуль равнодействующей трех сходящихся сил, если заданы их модули F_1= 5 кН, F_2= 12 кН, F_3= 9 кН и угол $\beta = 60^0$.

</td><td>20,9</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание 7</th><th>Ответы (1 – верно)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">На участке AB данной конструкции действует распределенная нагрузка если q =2 кН/м. К точке D приложена сила F=4 кН, Определить главный вектор данной системы сил, если AB=1,5 м.

</td><td>$5 \cdot 10^3$</td></tr>
<tr><td>$5 \cdot 10^8$</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
</table>

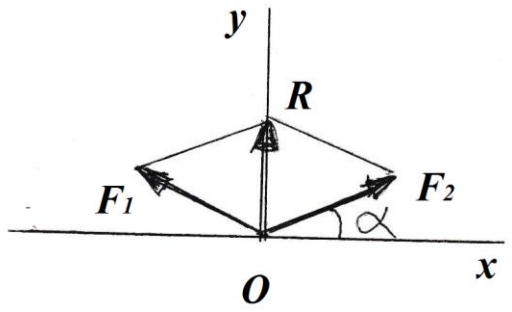
<table>
<tr><th>Задание 8</th><th>Ответы (1 – верно)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Два невесомых стержня AC и BC соединены в точке C и шарнирно прикреплены к полу. К шарниру C подвешен груз 1. Определить реакцию стержня BC, если усилие в стержне AC равно 43 Н и углы равны: α=60° и β=30°.

</td><td>-24,8</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>40</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание 9</th><th>Ответы (1 – верно)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Однородный шар весом 40 Н опирается на две плоскости, пересекающиеся под углом α=60°. Определить давление шара на наклонную плоскость.

</td><td>46,2</td></tr>
<tr><td>40</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание 10</th><th>Ответы (1 – верно)</th></tr>
<tr><td>Однородный шар весом 12 кН удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости с помощью веревки АВ. Определить давление шара на плоскости, если угол α=60°.

</td><td>10,4</td></tr>
</table>

Задание 11	Ответы (1 – верно)

Сколько независимых уравнений равновесия имеет система двух сочлененных тел в пространстве?	12
	6
	10
	3

Задание 12	Ответы (1 – верно)
При каком условии модуль равнодействующей двух сходящихся сил F_1, F_2 направлен по оси У, задан угол α. 	$F_1= F_2$
	$F_1=3\ F_2$
	$F_1=0,1\ F_2$
	$F_1=2\ F_2$

Список использованных источников

1. Колесников К.С. Курс теоретической механики.- М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2011.-758 с.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики.- М.: Высш. шк., 1990.-606 с.

3. Молотников В.Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов. - СПб.: Лань, 2012.-608 с.