



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Практикум

по дисциплине

«Сопротивление материалов»

«Определение геометрических характеристик для симметричных плоских сечений»

Авторы
Маяцкая И.А.,
Языев Б.М.



Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Практикум содержит основные теоретические положения, необходимые для успешного выполнения практической работы, порядок выполнения практической работы, задание и контрольные вопросы для самопроверки.

Практикум предназначен для изучения способов вычисления геометрических характеристик по дисциплинам «Соппротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Строительная механика для архитекторов».

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Техно-логия художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Авторы

канд. техн. наук, доц. кафедры «Соппротивление материалов»
Маяцкая И.А.

докт. техн. наук, профессор кафедры «Соппротивление материалов»
Языев Б.М.



Оглавление

Определение геометрических характеристик для симметричных плоских сечений	4
1. Основные теоретические положения.....	4
1.1. Центр тяжести сечения. Статические моменты плоских фигур.....	4
1.2. Моменты инерции плоских фигур. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей и при повороте осей.....	6
1.3. Главные оси и главные моменты инерции.....	8
1.4. Моменты сопротивления.....	9
2. Примеры определения геометрических характеристик простых фигур.....	10
3. Пример выполнения задания «Определение геометрических характеристик для симметричных плоских сечений».....	11
4. Тестовые задания и их решения.....	16
5. Задание «Определение геометрических характеристик для симметричных плоских сечений»	24
Перечень использованных информационных ресурсов.....	29

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1. Основные теоретические положения

Геометрическими характеристиками сечения, определяющими способность стержня сопротивляться деформации, являются площадь, статические моменты, моменты инерции площади сечения, моменты сопротивления.

1.1. Центр тяжести сечения. Статические моменты плоских фигур

Рассмотрим произвольное сечение площадью A (рис. 1) с координатами центра тяжести $C(z_c, y_c)$.

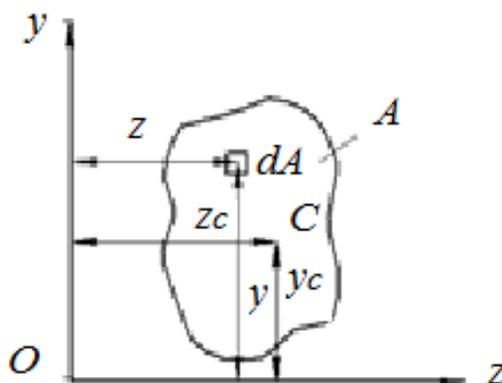


Рис. 1

В произвольной точке с координатами (z, y) выделим элемент площади dA . Площадь поперечного сечения определяется интегралом:

$$A = \int_A dA.$$

Статические моменты площади плоской фигуры относительно осей y и z , лежащих в ее плоскости (рис. 1), определяются выражениями:

$$S_y = \int_A z dA \quad \text{и} \quad S_z = \int_A y dA.$$

Индекс A у знака интеграла показывает, что интегрирование распространяется на всю площадь сечения. Статический момент площади измеряется единицами длины в третьей степени, $см^3$.

Если известны координаты центра тяжести сечения y_c и z_c , то статические моменты определяются по формулам:

$$S_z = Ay_c \quad \text{и} \quad S_y = Az_c.$$

Статический момент плоской фигуры относительно любой оси, проходящей через ее центр тяжести, равен нулю. На этом основании ось, относительно которой статический момент сечения равен нулю, является центральной.

В зависимости от положения сечения по отношению к оси статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Статический момент сложной фигуры относительно осей y и z равен сумме статических моментов ее частей:

$$S_z = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i$$

$$S_y = A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n = \sum_{i=1}^n A_i z_i,$$

где A_1, A_2, \dots, A_n – площади отдельных частей, на которые разбивается сечение,

y_1, y_2, \dots, y_n и z_1, z_2, \dots, z_n – координаты центров тяжести частей сечения по отношению к осям Z и Y (рис. 2).

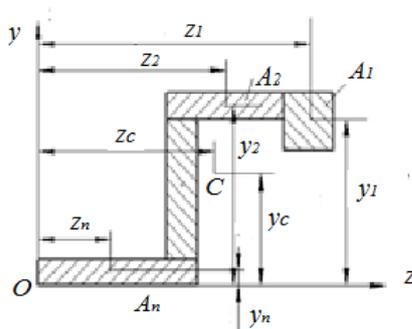


Рис. 2

Координаты центра тяжести сложной плоской фигуры определяются по формулам:

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

Если фигура имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси и его положение определяется одной координатой.

Если фигура имеет две оси симметрии (или более), то ее центр тяжести совпадает с точкой пересечения этих осей.

Если фигура состоит из двух частей, то ее центр тяжести лежит на прямой, соединяющей центры тяжести этих частей сечения.

1.2. Моменты инерции плоских фигур. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей и при повороте осей

Осевые моменты инерции площади сечения относительно осей y и z , лежащих в его плоскости (рис. 3),

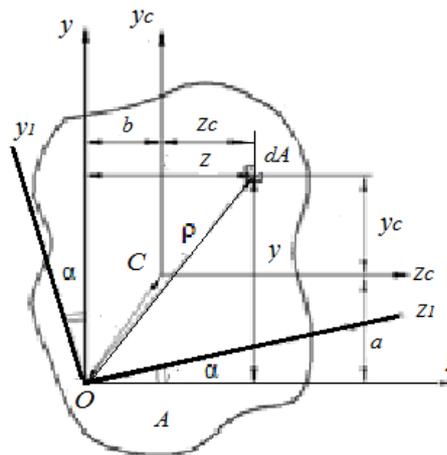


Рис. 3

представляют собой интегралы следующего вида:

$$J_y = \int_A z^2 dA \quad \text{и} \quad J_z = \int_A y^2 dA,$$

где y и z – координаты элементарной площадки dA .

Полярный момент инерции площади относительно точки (полюса), лежащей в ее плоскости:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA,$$

где ρ – расстояние от точки O (полюса) до элементарной площадки.

Центробежный момент инерции относительно взаимно перпендикулярных осей y_1 и z_1 , лежащих в плоскости фигуры:

$$J_{zy} = \int_A zy dA.$$

При повороте координатных осей на 90° центробежный момент инерции, сохраняя свою величину, изменяет знак на обратный.

Центробежный момент инерции плоской фигуры относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю.

Все моменты инерции измеряются единицами длины в четвертой степени ($мм^4$, $см^4$ и т. д.).

Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны и не равны нулю, а центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю в зависимости от положения сечения относительно осей.

Радиусы инерции плоской фигуры относительно осей y и z представляют собой величины:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

и измеряются в линейных единицах ($мм$, $см$).

Зависимость между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей выражается формулами:

$$J_z = J_{z_c} + a^2 A \quad \text{и} \quad J_y = J_{y_c} + b^2 A,$$

где J_{z_c} и J_{y_c} – моменты инерции относительно центральных осей y_c и z_c , соответственно параллельных осям y и z ;

a – расстояние между осями z_c и z ;

b – расстояние между осями y_c и y ;

A – площадь сечения.

Зависимость между центробежными моментами инерции относительно параллельных осей определяется формулой:

$$J_{zy} = J_{z_c y_c} + abA,$$

где $J_{z_{cy}}$ – центробежный момент инерции относительно центральных осей z_c и y_c параллельных осям z и y ;

a и b – координаты центра тяжести фигуры по отношению к осям z и y ; они берутся с их знаками.

Зависимость между полярными моментами инерции относительно двух точек O и C :

$$J_p = (J_p)_C + CO^2 A,$$

где $(J_p)_C$ – полярный момент инерции относительно центра тяжести сечения; CO – расстояние между C и O .

Зависимости между моментами инерции при повороте осей определяются следующими формулами:

$$J_{z_1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha; J_{y_1} = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha \text{ и}$$

$$J_{z_1 y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha,$$

где $J_{z_1}, J_{y_1}, J_{z_1 y_1}$ – моменты инерции относительно осей z_1 и y_1 , повернутых на угол α против часовой стрелки по отношению к осям z и y ;

J_z, J_y, J_{zy} – моменты инерции относительно первоначальных осей z и y .

1.3. Главные оси и главные моменты инерции

Главными осями инерции являются две взаимно перпендикулярные оси u и v , проходящие через данную точку, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции:

$$J_u = \int_A v^2 dA; J_v = \int_A u^2 dA.$$

Главный момент инерции относительно одной из осей является наиболь-

шим ($J_u = J_{\max}$), относительно другой — наименьшим ($J_u = J_{\min}$) по сравнению с моментами инерции этого же сечения относительно других осей, проходящих через данную точку.

Если известны моменты инерции J_z , J_y , J_{zy} , относительно взаимно перпендикулярных осей z и y , то величины главных моментов инерции можно определить по формуле:

$$J_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[(J_z + J_y) \pm \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right].$$

Знак плюс перед радикалом берется при определении J_{\max} , а знак минус — при определении J_{\min} .

Угол α_0 определяет положение главных центральных осей относительно любых центральных осей y_c, z_c и определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}.$$

Угол α_0 откладывается между осью z и осью u и считается положительным в направлении против часовой стрелки.

1.4. Моменты сопротивления

Осевым моментом сопротивления сечения относительно главной центральной оси z , расположенной в плоскости сечения, называется отношение момента инерции J_z относительно этой оси к расстоянию y_{\max} от оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}.$$

Полярным моментом сопротивления сечения называется отношение:

$$W_p = \frac{J_p}{p_{\max}},$$

где p_{\max} — расстояние от полюса до крайней точки сечения.

Моменты сопротивления измеряются в линейных единицах 3-й степени (см^3 , мм^3).

Момент сопротивления сложной фигуры в отличие от момента инерции

нельзя вычислять как алгебраическую сумму моментов сопротивления ее частей.

2. Примеры определения геометрических характеристик простых фигур

Пример 1. Определить полярный момент сопротивления кругового кольца (рис. 4) с отношением $\frac{r}{R} = \frac{d}{D} = c$.

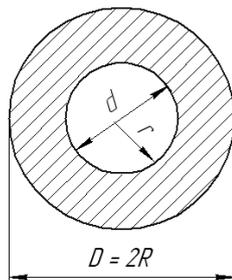


Рис. 4

Решение.

Полярный момент инерции кольца равен:

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4).$$

Принимая во внимание, что $p_{\max} = R = \frac{D}{2}$, получим формулу для определения момента сопротивления:

$$W_p = \frac{J_p}{p_{\max}} = \frac{\pi}{2R}(R^4 - r^4) = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4).$$

Пример 2. Определить моменты сопротивления и радиус инерции относительно центральной оси Z, параллельной основанию треугольного сечения (рис. 5).

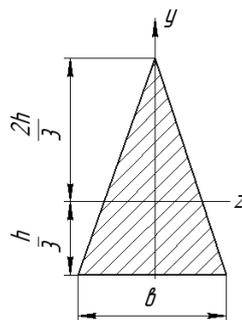


Рис. 5

Решение.

Момент инерции треугольника определяется по формуле:

$$J_z = \frac{bh^3}{36}.$$

Момент сопротивления для нижних волокон равен:

$$W_{z1} = \frac{J_z}{y_{\max(1)}} = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{h}{3}} = \frac{bh^2}{12}.$$

Момент сопротивления для верхних волокон равен:

$$W_{z2} = \frac{J_z}{y_{\max(2)}} = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^2}{24}.$$

Радиус инерции относительно центральной оси Z , параллельной основанию треугольного сечения определяем по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{bh}{2}}} = \sqrt{\frac{h^2}{18}} = \frac{h}{3\sqrt{2}} \approx 0,236h.$$

3. Пример выполнения задания**«Определение геометрических характеристик
для симметричных плоских сечений»**

Геометрические характеристики отдельных элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения равны (рис. 6): фигура I – швеллер № 30, фигуры II и III – равнополочный уголок $125 \times 80 \times 8$.

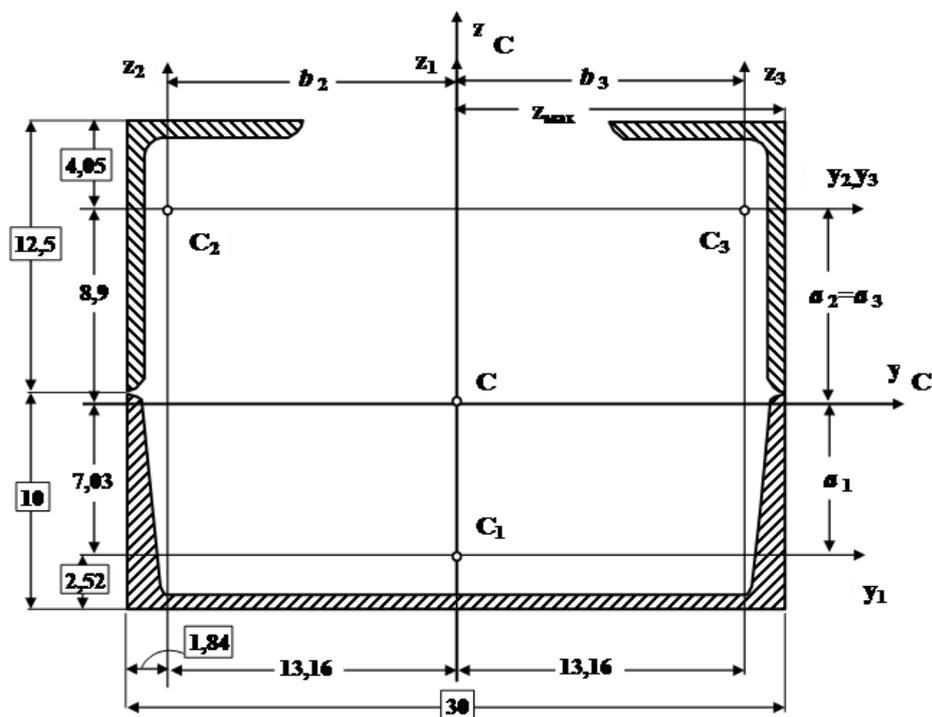


Рис. 6

Фигура I – швеллер – № 30:

$$h = 300\text{мм} = 30\text{см}; \quad b = 100\text{мм} = 10\text{см}; \quad d = 6,5\text{мм} = 0,65\text{см};$$

$$t = 11\text{мм} = 1\text{см}; \quad A_1 = 40,5\text{см}^2; \quad y_0 = 2,52\text{см}; \quad J_{y_1}^I = 327\text{см}^4; \quad J_{z_1}^I = 5810\text{см}^4;$$

$$J_{y_1 z_1}^I = 0.$$

Фигуры II и III – неравнополочные уголки 125×80×8:

$$B = 125\text{мм} = 12,5\text{см}; \quad b = 80\text{мм} = 8\text{см}; \quad d = 8\text{мм} = 0,8\text{см}; \quad A_2 = A_3 = 16\text{см}^2; \quad y_0 = 1,84\text{см}; \quad z_0 = 4,05\text{см};$$

$$J_{y_3}^{III} = J_{y_2}^{II} = 256\text{см}^4; \quad J_{z_3}^{III} = J_{z_2}^{II} = 83\text{см}^4; \quad J_{y_2 z_2}^{II} = 84,1\text{см}^4;$$

$$J_{y_3 z_3}^{III} = -84,1\text{см}^4.$$

Заданное сложное поперечное сечение (рис. 6) имеет одну ось симметрии, которая является главной центральной осью.

Вторая главная центральная ось пройдет через центр тяжести перпендикулярно этой оси.

Очевидно, что центр тяжести составной фигуры будет находиться на оси симметрии, поэтому определяем только по одной координате для точек C_1 , C_2 и C_3 .

В качестве вспомогательной координатной системы выбираем оси y_1 $C_1 z_0$.

Точка C_1 : $z_{C_1} = 0$.

Точка C_2 : $z_{C_2} = +(10 + 12,5 - 2,52 - 4,05) = 15,93$ см.

Точка C_3 : $z_{C_3} = z_{C_2} = 15,93$ см.

Тогда координата центра тяжести составной фигуры (точка C) вычисляется по формуле;

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{A_1 z_{C_1} + 2 A_2 z_{C_2}}{A_1 + 2 A_2} = \\ &= \frac{(40,5 \cdot 0 + 2 \cdot 16 \cdot 15,93) \text{см}^3}{(40,5 + 2 \cdot 16) \text{см}^2} = \frac{509,8}{72,5} \text{см} = 7,03 \text{см}. \end{aligned}$$

Общая площадь фигуры $A = 72,5 \text{см}^2$.

По полученным значениям координат центра тяжести составной фигуры u_c и z_c на рис. 6 показываем положение точки C .

Центр тяжести составной фигуры (точка C) всегда должен лежать внутри треугольника, полученного соединением точек C_1 , C_2 и C_3 .

Теперь центральные оси u_C и z_C – основная система координат.

На основании свойства о том, что момент инерции сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции отдельных элементов этого сечения, вычисленных относительно той же оси, имеем:

$$J_{y_C} = J_{y_C}^I + J_{y_C}^{II} + J_{y_C}^{III}.$$

Для вычисления моментов инерции отдельных элементов заданного сложного сечения относительно центральной оси u_C , воспользуемся формулами моментов инерции при параллельном переносе осей.

Таким образом, момент инерции I-й фигуры заданного сложного сечения относительно главной центральной оси u_0 будет равен:

$$J_{y_C}^I = J_{y_1}^I + A_1 a_1^2,$$

где $J_{y_1}^I$ – момент инерции I-й фигуры относительно собственной центральной оси u_1 (справочная величина);

A_1 – площадь I-й фигуры (справочная величина);

a_1 – величина, которая определяет расстояние между осями u_C и u_I .

Следовательно,

$$a_1 = z_{C1} - z_C = 0 - 7,03 = -7,03 \text{ см (рис. 6);}$$

$$J_{y_C}^I = 327 + 40,5 \cdot (-7,03)^2 = 2328,546 \text{ см}^4 = 2329 \text{ см}^4.$$

Аналогично, момент инерции второй фигуры относительно главной оси u_C будет равен:

$$a_2 = z_{C2} - z_C = 15,93 - 7,03 = 8,9 \text{ см.}$$

$$J_{y_C}^{II} = J_{y_2}^{II} + A_2 a_2^2 = 256 + 16 \cdot 8,9^2 = 1523,36 \text{ см}^4 = 1523 \text{ см}^4.$$

Момент инерции третьей фигуры относительно главной оси u_C будет равен моменту инерции второй фигуры относительно этой оси u_C , так как центры тяжести фигуры II и фигуры III находятся на одинаковом расстоянии от оси u_C :

$$J_{y_C}^{III} = J_{y_C}^{II} = 1523 \text{ см}^4.$$

Окончательно, момент инерции заданной составной фигуры относительно главной оси u_C будет равен:

$$J_V = J_{y_C} = 2329 + 2 \cdot 1523 = 5375 \text{ см}^4 = 5380 \text{ см}^4.$$

Аналогично, момент инерции заданного сложного сечения относительно второй главной оси z_C будет равен:

$$J_{z_C} = J_{z_C}^I + J_{z_C}^{II} + J_{z_C}^{III}.$$

Момент инерции первой фигуры относительно главной оси z_C равен:

$$J_{z_C}^I = J_{z_1}^I = 5810 \text{ см}^4,$$

так как оси z_C и z_I совпадают.

Для вычисления моментов инерции II и III фигур сечения относительно главной центральной оси z_C , воспользуемся формулами моментов инерции при параллельном переносе осей.

Таким образом, момент инерции II-й фигуры заданного сложного сечения относительно главной центральной оси z_C будет равен:

Сопrotивление материалов

$$J_{z_c}^{\text{II}} = J_{z_2}^{\text{II}} + A_2 b_2^2,$$

где $J_{z_2}^{\text{II}}$ – момент инерции II-й фигуры относительно собственной центральной оси z_2 ;

A_2 – площадь II-й фигуры (справочная величина);

b_2 – величина, которая определяет расстояние между осями z_c и z_2 (координата центра тяжести II-й фигуры относительно главной центральной оси z_c).

Следовательно,

$$b_2 = -\left(\frac{30}{2} - 1,84\right) = -13,16 \text{ см.}$$

$$J_{z_c}^{\text{II}} = J_{z_2}^{\text{II}} + A_2 b_2^2 = 83 + 16 \cdot 13,16^2 = 2853,9696 \text{ см}^4 = 2854 \text{ см}^4.$$

Момент инерции третьей фигуры относительно главной оси z_c будет равен моменту инерции второй фигуры относительно этой оси z_c , так как центры тяжести фигуры II и фигуры III находятся на одинаковом расстоянии от оси z_c :

$$J_{z_c}^{\text{III}} = J_{z_c}^{\text{II}} = 2854 \text{ см}^4.$$

Следовательно, момент инерции заданной составной фигуры относительно главной оси z_c будет равен

$$J_u = J_{z_c} = 5810 + 2 \cdot 2854 = 11518 \text{ см}^4 = 11500 \text{ см}^4.$$

Таким образом, главные центральные моменты инерции заданной фигуры будут равны:

$$J_u = J_{\max} = 11500 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{\min} = 5380 \text{ см}^4.$$

Радиусы инерции относительно главных центральных осей определяются по следующим формулам:

$$i_{y_c} = \sqrt{\frac{J_{y_c}}{A}} = \sqrt{\frac{5380 \text{ см}^4}{72,5 \text{ см}^2}} = 8,6143 \text{ см} = 8,61 \text{ см};$$

$$i_{z_c} = \sqrt{\frac{J_{z_c}}{A}} = \sqrt{\frac{11500 \text{ см}^4}{72,5 \text{ см}^2}} = 12,5940 \text{ см} = 12,6 \text{ см}.$$

Момент сопротивления сечения относительно оси z_c вычисляем по формуле:

$$W_{z_c} = \frac{J_{z_c}}{|y_{\max}|},$$

где y_{\max} – максимальное расстояние от оси z_c до наиболее удаленной точки сечения;

$$y_{\max} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см.}$$

В результате получаем:

$$W_{z_c} = \frac{J_{z_c}}{|y_{\max}|} = 766,667 \text{ см}^4 \approx 767 \text{ см}^4.$$

4. Тестовые задания и их решения

Тест № 1. Определить статический момент фигуры (рис. 7) относительно оси x .

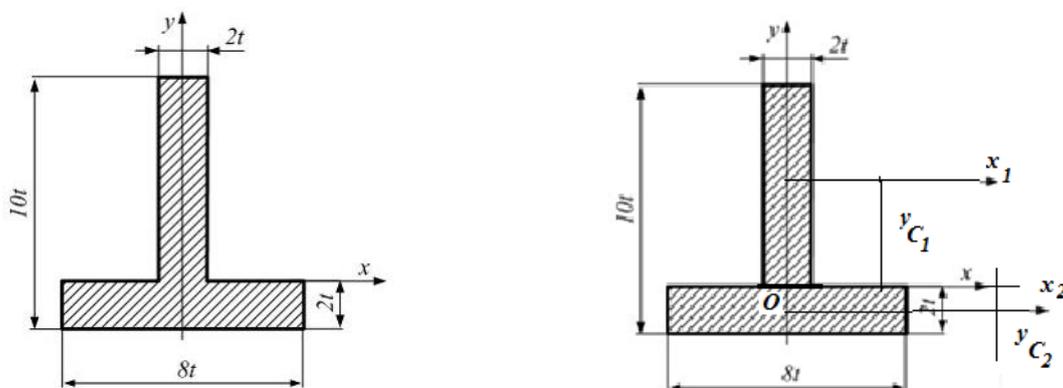


Рис. 7

Решение.

Статический момент относительно оси x есть произведение площади на координату ее центра тяжести по оси y . Разделим фигуру на два прямоугольника с размерами: первый – $2t$ и $8t$; второй – $8t$ и $2t$. Площади равны $A=16t^2$, координаты центра тяжести по оси y : $y_{C1}=4t$ и $y_{C2}=-t$.

Статический момент относительно оси x всей фигуры определяется по формуле:

$$S_x = S_x^I + S_x^II = A_I y_{C1} + A_{II} y_{C2} = 16t^2 \cdot 4t + 16t^2 \cdot (-t) = 48t^3.$$

Тест № 2. Определить координаты центра тяжести фигуры (рис. 8).

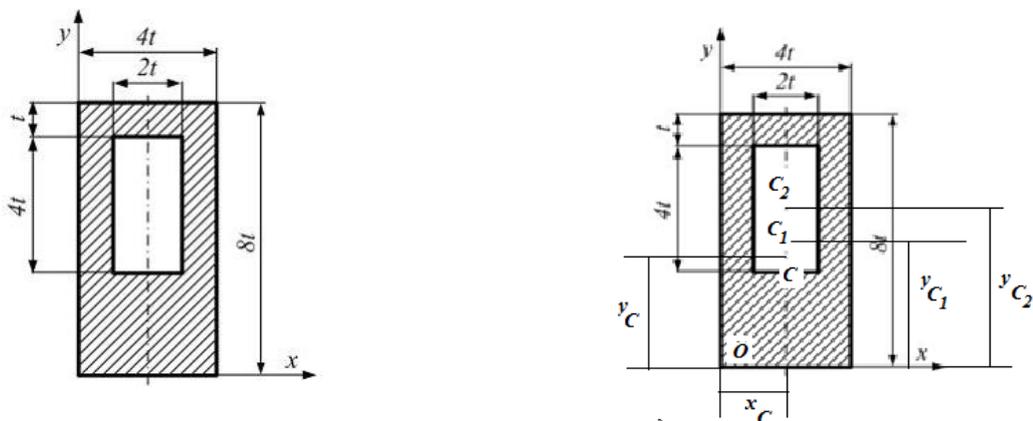


Рис. 8

Решение.

Статический момент относительно оси x есть произведение площади на координату ее центра тяжести по оси y . Разделим фигуру на два прямоугольника, при этом первый вырезается из второго, с размерами: первого – $4t$ и $8t$; второго – $2t$ и $4t$.

Площади и координаты центра тяжести по оси y равны:

$$A_I = 32t^2 \text{ и } A_{II} = 8t^2, \quad y_{C1} = 4t \text{ и } y_{C2} = 5t.$$

Площадь всей фигуры определяется по формуле:

$$A = A_I - A_{II} = 32t^2 - 8t^2 = 24t^2.$$

Статический момент относительно оси x всей фигуры определяется по формуле:

$$S_x = S_x^I - S_x^II = A_I y_{C1} - A_{II} y_{C2} \quad \text{и} \quad S_x = S_x^I - S_x^II = 32t^2 \cdot 4t - 8t^2 \cdot 5t = 88t^3.$$

Координаты центра тяжести по оси x и по оси y равны:

$$x_C = 2t \quad \text{и} \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{88t^3}{24t^2} = 3,67t.$$

Тест № 3. Определить координаты центра тяжести фигуры (рис. 9).

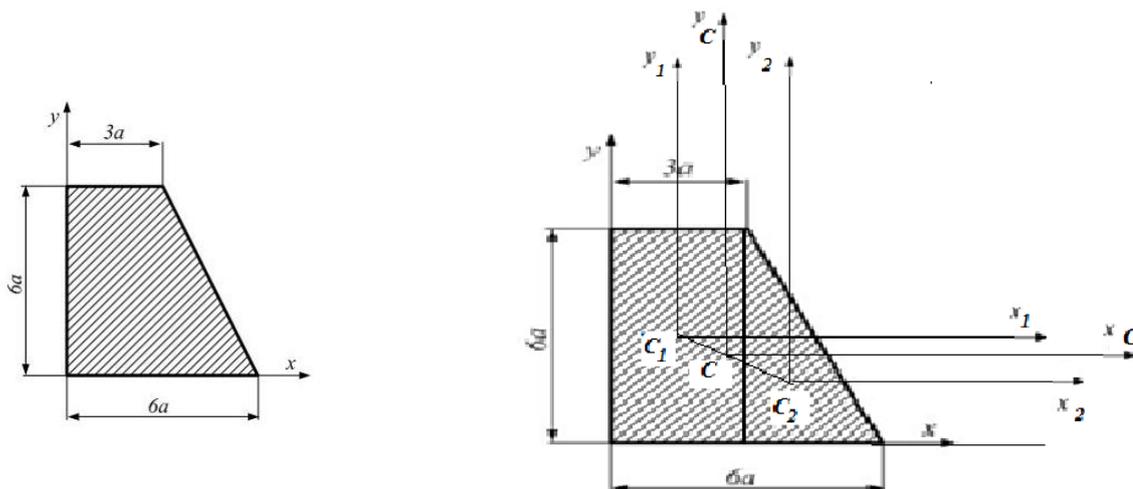


Рис. 9

Решение.

Статический момент относительно оси x есть произведение площади на координату ее центра тяжести по оси y .

Разделим фигуру на прямоугольник и треугольник: размеры первого – $3a$ и $6a$; второго – $3a$ и $6a$.

Площади и координаты центра тяжести по оси x и по оси y равны:

$$A_I = 18a^2 \text{ и } A_{II} = 9a^2, \quad x_{C1} = 1,5a \text{ и } x_{C2} = 3a + a = 4a, \quad y_{C1} = 3a \text{ и } y_{C2} = 2a.$$

Площадь всей фигуры определяется по формуле:

$$A = A_I + A_{II} = 18a^2 + 9a^2 = 27a^2.$$

Статические моменты относительно оси x и по оси y всей фигуры определяются по формуле:

$$S_x = S_x^I + S_x^{II} = A_I y_{C1} + A_{II} y_{C2} = 18a^2 \cdot 3a + 9a^2 \cdot 2a = 72a^3;$$

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} = A_I x_{C1} + A_{II} x_{C2} = 18a^2 \cdot 1,5a + 9a^2 \cdot 4a = 63a^3.$$

Координаты центра тяжести по оси x и по оси y будут равны:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{63a^3}{27a^2} = 2,3a \quad \text{и} \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{72a^3}{27a^2} = 2,7a.$$

Тест № 4. Определить осевой момент инерции фигуры (рис. 10) относительно оси x , проходящей через центр тяжести.

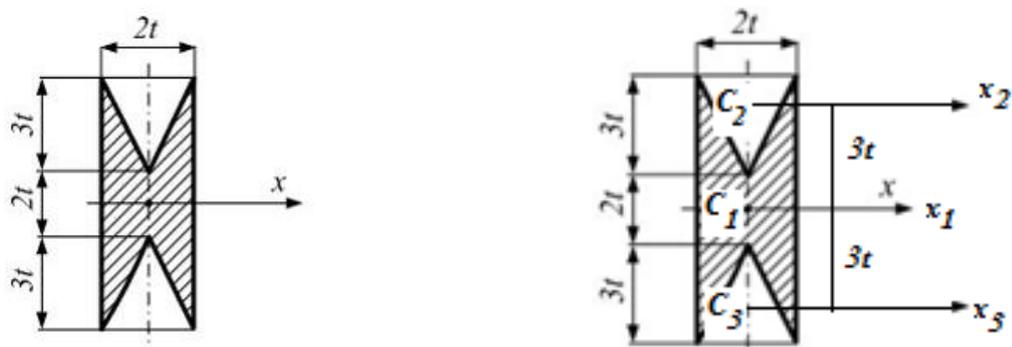


Рис. 10

Решение.

Разделим фигуру на прямоугольник и два вырезанных треугольника:

$$I_{x_1}^I = \frac{2t(8t)^3}{12} = 85,3t^4; \quad I_{x_2}^{II} = \frac{t(3t)^3}{36} = 0,75t^4; \quad I_{x_3}^{III} = \frac{t(3t)^3}{36} = 0,75t^4.$$

Используя формулу при параллельном переносе осей, найдем осевой момент инерции фигуры относительно оси x :

$$I_x = I_x^I - I_x^{II} - I_x^{III} = I_{x_1}^I - (I_{x_2}^{II} + (3t)^2 A^{II}) - (I_{x_3}^{III} + (3t)^2 A^{III}) = \frac{2t(8t)^3}{12} - 2(0,75t^4 + 9t^2 \cdot 6t^2) = 29,8t^4$$

Тест № 5. Моменты инерции фигуры (рис. 11) относительно осей x и y равны:

$$I_x = 3,67 \text{ см}^4, \quad I_y = 21,7 \text{ см}^4, \quad I_{xy} = 4,75 \text{ см}^4.$$

Определить положение главных осей, проходящих через начало координат.

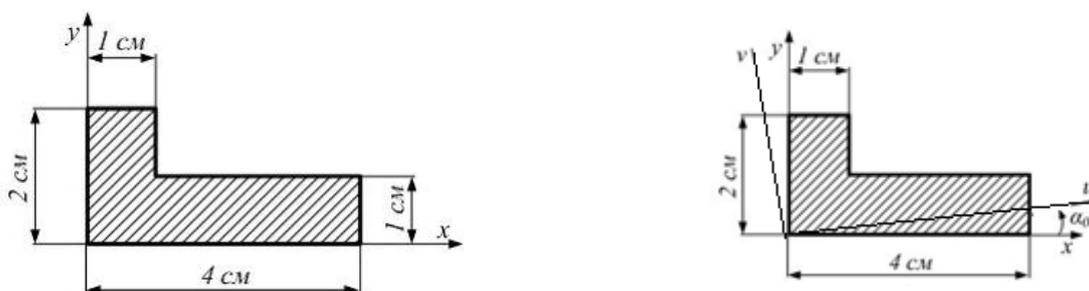


Рис. 11

Решение.

Угол между главной осью и положительным направлением оси x определяется по формуле:

$$\text{tg } 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

После вычислений получаем $\alpha_0 = 13^\circ 54'$ и откладываем его против часовой стрелки (рис. 26).

Оси u и v – главные оси, проходящие через начало координат.

Тест № 6. Моменты инерции фигуры (рис. 12) относительно осей x и y :

$I_x = \frac{65}{3}t^4$, $I_y = \frac{11}{3}t^4$, $I_{xy} = \frac{19}{4}t^4$. Определить положение главных осей, проходящих через начало координат.

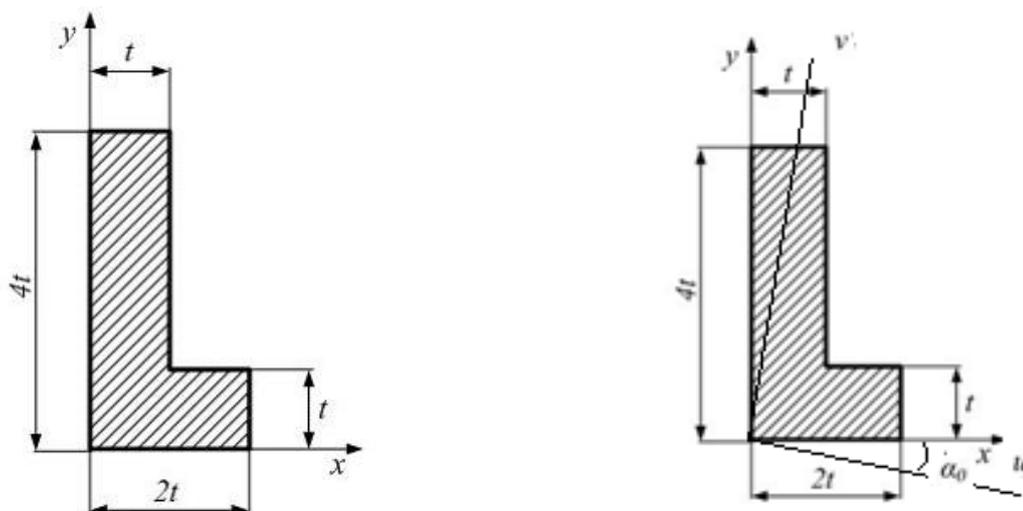


Рис. 12

Решение.

Угол между главной осью и положительным направлением оси x определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot \frac{19}{4}t^4}{\frac{65}{3}t^4 - \frac{11}{3}t^4} = -\frac{9,5}{18} = -0,528. \quad 2\alpha_0 = \operatorname{arctg}(-0,528).$$

После вычислений получаем $\alpha_0 = -13^\circ 54'$ и откладываем его почасовой стрелки (рис. 28). Оси u и v – главные оси, проходящие через начало координат.

Тест № 7. Моменты инерции треугольника (рис. 13) относительно осей x и y , проходящих через центр тяжести поперечного сечения, параллельно катетам равны:

$$I_x = \frac{bh^3}{36} = 2222 \text{ см}^4, \quad I_y = \frac{b^3h}{36} = 556 \text{ см}^4, \quad I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72} = -556 \text{ см}^4.$$

Определить положение главных осей, проходящих через начало координат

и главные центральные моменты инерции.



Рис. 13

Решение.

Угол между главной осью и положительным направлением оси x определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

После вычислений получаем:

$\alpha_0 = -16^\circ 51'$ и откладываем его против часовой стрелки (рис. 29). Оси u и v – главные оси, проходящие через начало координат.

Главные центральные моменты инерции определяем по формуле:

$$J_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right].$$

В результате получаем $I_{\max} = I_u = 2391 \text{ см}^4$, $I_{\min} = I_v = 387 \text{ см}^4$.

Тест № 8. Момент инерции треугольника относительно основания (рис. 14) определяется по формуле:

$$I_u = \frac{bh^3}{12}.$$

На рис. 15 показана плоская фигура. Определить моменты инерции относительно главных осей, проходящих через точку K .

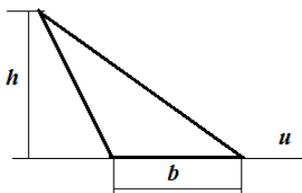


Рис. 14

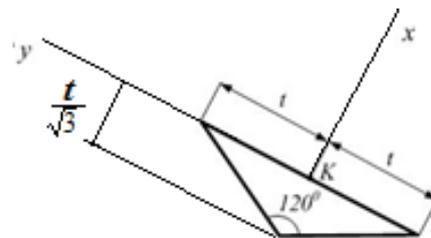
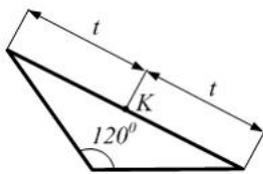


Рис. 15

Решение.

Центробежный момент инерции фигуры относительно главных осей равен нулю. Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью. Любая ось, перпендикулярная ей, является главной осью сечения. Такими осями являются оси x и y (рис. 15). Известно, что:

$$I_y = \frac{bh^3}{12}.$$

В результате получаем:

$$I_y = \frac{2t\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3}{12} = \frac{\sqrt{3}}{54}t^4.$$

Для определения момента инерции относительно оси x разделим треугольник на два прямоугольных и используем формулу для вычисления момента инерции треугольника относительно основания:

$$I_x = 2 \frac{\frac{t}{\sqrt{3}}(t)^3}{12} = \frac{\sqrt{3}}{18}t^4.$$

Тест № 9. Определить центробежный момент инерции фигуры (рис. 16) относительно осей x и y .

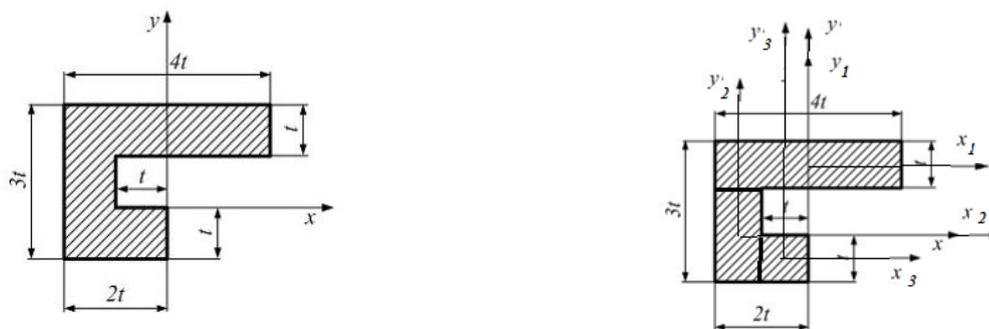


Рис. 16

Решение.

Разбиваем фигуру на три прямоугольника и используем формулу, связывающую моменты инерции фигуры относительно параллельных осей:

$$I_{xy} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1,$$

где A – площадь фигуры;

b, a – расстояния между осями.

В результате получаем:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{xy}^I + I_{xy}^{II} + I_{xy}^{III} = (I_{x_1 y_1}^I + a_1 b_1 A^I) + (I_{x_2 y_2}^{II} + a_2 b_2 A^{II}) + (I_{x_3 y_3}^{III} + a_3 b_3 A^{III}) = \\ &= (0 + 0 \cdot (1,5t) \cdot 4t^2) + (0 + (-1,5t) \cdot 0 \cdot 2t^2) + (0 + (-0,5t) \cdot (-0,5t) \cdot t^2) = \frac{1}{4} t^4. \end{aligned}$$

Тест № 10. Определить осевые моменты инерции ромба относительно осей (рис. 17).

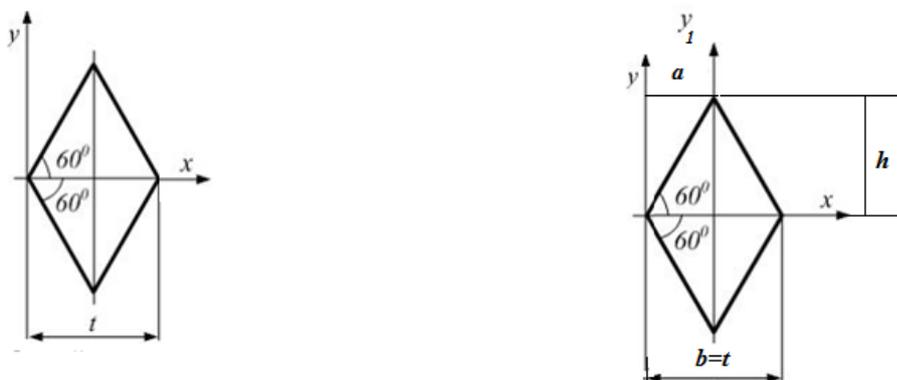


Рис. 17

Решение.

Разбиваем фигуру на два треугольника и используем формулу, связывающую моменты инерции фигуры относительно параллельных осей:

$$I_x = I_{x_1} + (b_1)^2 A_1 \quad \text{и} \quad I_y = I_{y_1} + (a_1)^2 A_1,$$

где A – площадь фигуры;

a_i, b_i – расстояния между осями.

В результате получаем:

$$I_y = I_y' + I_y'' = (I_{y_1}' + (a_1)^2 A') + (I_{y_2}'' + (a_2)^2 A'');$$

$$I_{y_1}' = I_{y_2}'' = \frac{bh^3}{12} = \frac{t \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^3}{36} = \frac{\sqrt{3}}{96}t^4, \quad A = A' + A'' = \frac{1}{2}t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2.$$

Итак,

$$I_y = 2(I_{y_1}') + a^2 A' = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{96}t^4\right) + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 = \frac{7\sqrt{3}}{48}t^4.$$

Аналогично, найдем выражение для другого момента инерции с учетом, что:

$$b_i = \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}t}{2 \cdot 3} = \frac{t}{2\sqrt{3}}: \quad I_x = I_x' + I_x'' = (I_{x_1}' + (b_1)^2 A') + (I_{x_2}'' + (b_2)^2 A'') = \frac{\sqrt{3}}{16}t^4.$$

5. Задание «Определение геометрических характеристик для симметричных плоских сечений»

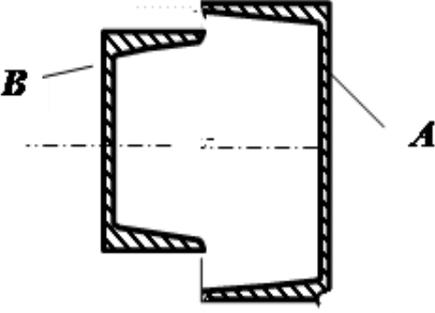
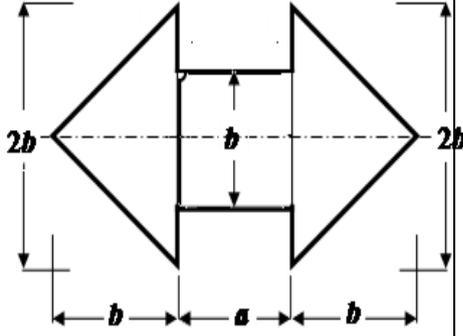
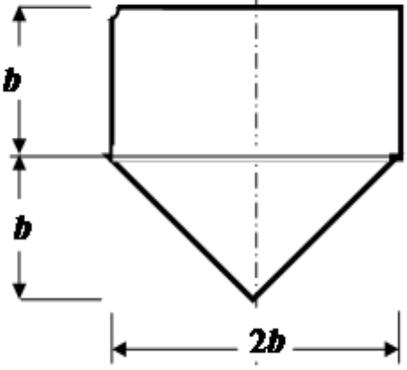
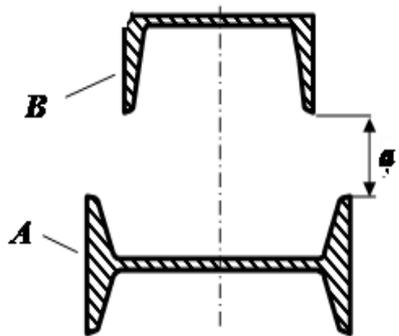
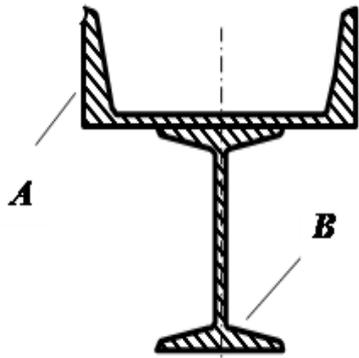
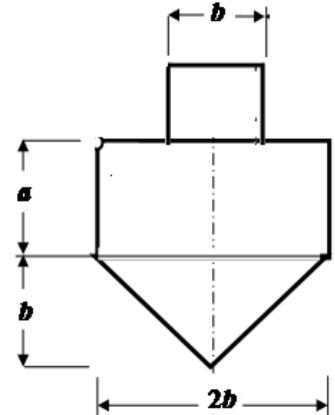
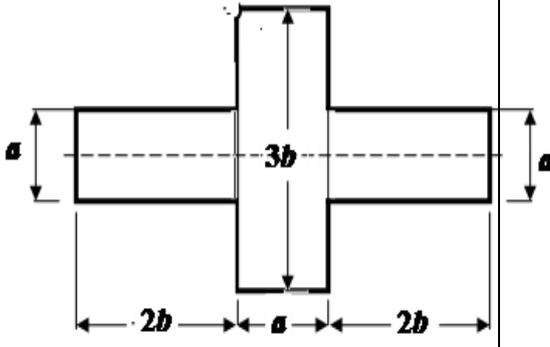
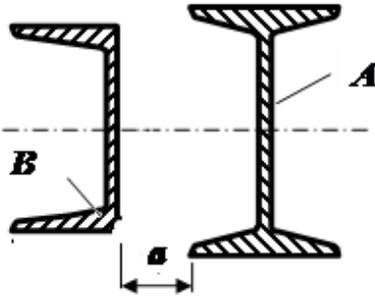
Таблица 1

№ п/п	№ прокатного профиля		a , см	b , см
	A	B		
1	2	3	4	5
1	20	16	8	10
2	22	18	10	12
3	24	18	12	14
4	24	20	14	16
5	27	22	16	18
6	30	24	18	16

Сопротивление материалов

7	33	27	8	12
8	20	18	10	10
9	22	20	12	14
10	24	20	14	16
11	24	22	16	18
12	27	24	18	16
13	30	27	8	10
14	33	30	10	12
15	20	16	12	14
16	22	18	14	16
17	24	20	16	18
18	24	22	18	14

Таблица 2

Продолжение табл. 2

		3	
0		4	
1		5	
2		6	

Окончание табл.2

7		1	
8		2	
9		3	
0		4	

Перечень использованных информационных ресурсов

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011.
2. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011.
3. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.
5. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014.