



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

КУРС ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

«Строительная механика для архитекторов»

**«Строительная механика для
архитекторов» - Часть I**

Авторы
Еремин В.Д.



Ростов-на-Дону, 2022



АННОТАЦИЯ

Учебное пособие содержит материал для изучения обучающимися основных тем учебной дисциплины «Строительная механика для архитекторов», для закрепления читаемого курса лекций, самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ, подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной (итоговой) аттестации.

Пособие предназначено для обучающихся всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) архитектурных (технических) направлений подготовки (специальностей), изучающих дисциплину «Строительная механика для архитекторов», в частности, для студентов, обучающихся по направлениям 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство.

Содержание пособия соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования по архитектурным (техническим) направлениям подготовки (специальностям) и «Примерной программе дисциплины "Сопротивление материалов", Москва, 2012год», рекомендованной учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства.

Автор

канд. техн. наук, профессор кафедры

«Сопротивление материалов» Еремин В.Д.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Раздел I. «Теоретическая механика»	10
Предмет теоретической механики.....	10
Тема 1. Основные понятия и определения	10
Тема 2. Силы и системы сил	11
Тема 3. Аксиомы статики	14
Тема 4. Связи и реакции связей	19
4.1. Понятие о связях.....	19
4.2. Разновидности опор, используемых в плоских расчетных схемах. Их схематическое обозначение. Реакции связей.....	21
Тема 5. Условия уравновешенности сходящейся системы сил. Равновесие плоской системы сил.....	25
5.1. Аналитические уравнения равновесия.....	26
Контрольные вопросы для самопроверки по разделу «Теоретическая механика»	27
Раздел II. «Соппротивление материалов»	29
Тема 1. Введение	29
1.1. Понятие о сопротивлении материалов. Прочность, жесткость и устойчивость элементов инженерных конструкций.....	29
1.2. Основные допущения о свойствах материала и характере деформирования, принимаемые в сопротивлении материалов.....	30
1.3. Схематизация элементов строительных конструкций. Понятие о расчетной схеме.....	32
1.4. Классификация внешних нагрузок.....	36
1.5. Основные типы опор.....	38
1.6. Определение опорных реакций.....	40
1.7. Внутренние силы в поперечных сечениях бруса и	



метод их определения.....	41
1.8. Виды простых деформаций.....	43
1.9. Понятие о напряжении. Определение полных, нормальных и касательных напряжений.....	45
1.10. Интегральная связь между внутренними усилиями и напряжениями.....	47
1.11 Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Введение».....	48
Тема 2. Геометрические характеристики плоских сечений.....	50
2.1. Статические моменты, их свойства. Определение положения центра тяжести сечения.....	50
2.2. Осевые и центробежный моменты инерции и их свойства.....	52
2.3. Полярный момент инерции и его свойства.....	53
2.4. Зависимости между моментом инерции фигуры при параллельном переносе осей.....	54
2.5. Зависимость между моментами инерции фигуры при повороте осей.....	56
2.6. Вычисление моментов инерции простейших фигур.....	58
2.7. Вычисление полярного и осевого моментов инерции круга и кольца.....	61
2.8. Главные оси и главные моменты инерции. Определение положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений.....	63
2.9. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга.....	67
2.10. Моменты сопротивления и их свойства.....	67
2.11. Контрольные вопросы для самопроверки по теме	



«Геометрические характеристики плоских фигур».....	68
Тема 3. Центральное растяжение или сжатие прямого бруса.....	70
3.1. Центральное (осевое) растяжение или сжатие. Продольные силы и их определение.....	70
3.2. Эпюры продольных сил. Правила их построения.....	71
3.3. Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса.....	75
3.4. Продольные деформации.....	78
3.5. Закон Гука при центральном растяжении или сжатии.....	79
3.6. Поперечные деформации.....	81
3.7. Основные характеристики механических свойств материала и их опытное определение.....	82
3.8. Расчет на прочность при центральном (осевом) растяжении или сжатии. Метод допускаемых напряжений.....	85
3.9. Понятие о расчете по предельным состояниям. Расчет по первой группе предельных состояний.....	89
3.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Центральное растяжение или сжатие прямого бруса».....	92
Тема 4. Напряженное состояние в точке.....	94
4.1. Виды напряженного состояния.....	94
4.2. Одноосное напряжённое состояние. Напряжения в наклонных сечениях бруса при центральном растяжении (сжатии)...	95
4.3. Закон парности касательных напряжений.....	99
4.4. Плоское напряжённое состояние.....	99
4.5. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Напряженное состояние в точке».....	100
Тема 5. Кручение.....	103
5.1. Основные понятия. Крутящий момент.....	103



5.2. Определение крутящих моментов по мощности « N » и числу оборотов вала « n ».....	104
5.3. Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого поперечного сечения.....	106
5.4. Расчет стержня круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении.....	112
5.5. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Кручение»..	116
Перечень рекомендуемых информационных ресурсов.....	118
Рекомендуемая литература.....	119
Приложения.....	120



ПРЕДИСЛОВИЕ

Строительная механика для архитекторов – дисциплина о прочности, жесткости и надежности отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке архитекторов и инженеров любой специальности.

Строительная механика для архитекторов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами архитектурных (технических) направлений подготовки (специальностей).

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи.

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями, а также обратиться за консультацией к преподавателю.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этой дисциплины, и в то же время необходимости формирования у будущих архитекторов и инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и



находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить студентов пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность и жесткость элементов конструкций.

Курс строительной механики для архитекторов традиционно делится на три крупных раздела: «Теоретическая механика», «Сопrotивление материалов» и «Строительная механика».

В первом разделе рассматриваются основные понятия и определения теоретической механики, аксиомы статики, связи и реакции связей, разновидности опор, используемых в плоских расчетных схемах, условия уравновешенности сходящейся системы сил, равновесие плоской системы сил, аналитические уравнения равновесия.

Во втором разделе анализируется напряженное состояние тела и излагаются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, испытывающих простые виды деформаций, в том числе, чистый и плоский поперечный изгибы.

В третьем разделе учебного пособия рассматриваются вопросы построения эпюр внутренних силовых факторов (N , Q и M) в простейших рамах.

Данное пособие содержит материал для изучения студентами основных тем следующих учебных дисциплин кафедры: строительная механика для архитекторов; сопротивление материалов, механика и специальные вопросы сопротивления материалов, для закрепления читаемого курса лекций, для подготовки к текущим контролям успеваемости и промежуточной аттестации, для самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной и заочной) архитектурных (технических) направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям



07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство.

Положения, сформулированные дисциплиной «Строительная механика для архитекторов», служат основой для изучения обучающимися других важных дисциплин, таких, как архитектурно-строительное проектирование, металлические конструкции, железобетонные и каменные конструкции, деревянные и пластиковые конструкции, основания и фундаменты и др.

РАЗДЕЛ I. «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Предмет теоретической механики

Теоретическая механика это наука о наиболее общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Теоретическая механика является базой для изучения других разделов механики: сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости.

Курс теоретической механики состоит из трех частей: статики, кинематики и динамики.

В данном курсе «Строительная механика для архитекторов» мы ограничимся изучением только основных положений статики.

Статика (от греч. *Status* – неподвижный) – это раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием сил.

Кроме этого в статике рассматривают также законы, по которым системы сил могут преобразовываться.

ТЕМА 1. Основные понятия и определения

Определение. Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел (или изменение взаимного положения частей тела).

Движение рассматривается по отношению к некоторой *системе отсчета*, под которой понимается координатная система, связанная с определенным телом (обычно с Землей).

Частным случаем движения является относительное *состояние покоя*.

Материальные тела могут оказывать друг на друга *механическое действие*, при котором изменяется характер движения этих тел.

Мерой механического действия является *сила*.

В теоретической механике вместо реальных предметов и явлений

рассматриваются *идеализированные объекты (модели)*.

При построении этих моделей не принимаются во внимание аспекты, несущественные для решения задачи.

Основными идеализированными объектами теоретической механики являются *материальная точка, механическая система и абсолютно твердое тело*.

Определение. Материальная точка – это точка, обладающая массой. Материальной точкой можно считать любое материальное тело, если его размерами в данной конкретной задаче можно пренебречь.

Определение. Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Определение. Материальное тело может рассматриваться как механическая система, образованная непрерывной совокупностью материальных точек.

Определение. Абсолютно твердым телом называется такое материальное тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным.

В теоретической механике все тела рассматриваются как абсолютно твердые. В дальнейшем для краткости будем называть их просто *твердыми телами*.

Определение. Твердое тело называется свободным, если его перемещение ничем не ограничивается.

В противном случае тело называется несвободным.

Определение. Ограничения, наложенные на перемещения тела, называются связями.

ТЕМА 2. Силы и системы сил

В общем случае твердое тело может находиться или в состоянии покоя, или в состоянии какого-то движения.

Определение. Бесчисленные разновидности состояний движения мы будем называть кинематическими состояниями.

Основная цель статики – определение условий, при выполнении которых механическая система (например, тело) будет находиться в состоянии покоя.

Изменение характера движения означает изменение кинематического состояния (например, нарушение состояния покоя).

Изменение кинематического состояния происходит под действием сил.

Сила – является мерой механического действия и определяется следующими элементами:

- точкой приложения;
- направлением;
- численным значением (модулем).

Важной характеристикой является *линия действия силы*.

Единицей модуля силы является *ньютон*, хотя на практике используется иногда и другая единица – *килограмм силы*: $1 \text{ кгс} \approx 9,81 \text{ Н}$.

Сила является векторной величиной (рис. 1.1).

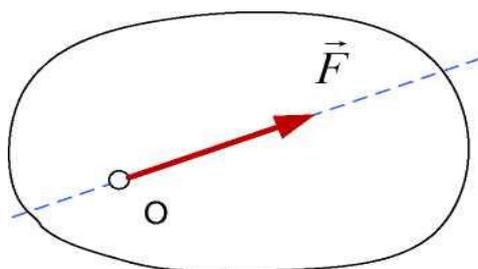


Рис. 1.1

Такие величины мы будем обозначать с чертой или стрелочкой сверху

\bar{F} или \vec{F} .

Условимся, что если черта или стрелка сверху отсутствует, то это означает модуль данного вектора

$$F = |\bar{F}|.$$

Определение. Совокупность нескольких сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ называется системой сил.

Определение. Если одну систему сил, действующую на свободное твердое тело, можно заменить другой системой сил так, что при этом кинематическое состояние тела не изменится, то эти системы сил называют эквивалентными друг другу.

Для обозначения эквивалентности систем сил используются символ ∞ или символ \equiv .

Определение. Одна сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется ее равнодействующей.

Будем обозначать ее символом \bar{R} .

Заметим, что не всякая система сил имеет равнодействующую.

Определение. Система сил, не выводящая из равновесия свободное твердое тело, называется уравновешенной системой, или эквивалентной нулю.

Основная задача статики состоит в установлении условий, которым должны удовлетворять системы сил, чтобы они были уравновешенными.

Под действием уравновешенной системы сил свободное твердое тело не обязательно находится в покое.

Если до приложения этой системы сил тело двигалось, то оно и будет продолжать свое движение.

Чтобы под действием уравновешенной системы сил тело находилось в состоянии покоя необходимо, чтобы оно изначально находилось в состоянии покоя, то есть и до приложения этой системы сил.

Все силы, действующие на точки механической системы (и твердого тела), делятся на внешние силы и внутренние силы.

Определение. Внешними силами называются силы, с которыми на точки механической системы действуют какие-либо тела, не входящие в систему.

Определение. Внутренними силами называются силы взаимодействия точек самой системы.

Деление сил на внешние и внутренние условно, оно зависит от того, какие именно тела мы включаем в рассматриваемую механическую систему.

Например, если рассмотреть подъемный кран и висящий на его тросе груз как одну механическую систему, то сила натяжения троса будет силой внутренней.

Если же рассматривать механическую систему, состоящую только из груза, то сила натяжения троса является силой внешней.

Теперь перейдем к изложению аксиом статики – положений, справедливость которых подтверждена практикой человеческой деятельности.

ТЕМА 3. Аксиомы статики

Аксиома 1. Аксиома двух сил.

Система из двух сил является уравновешенной тогда и только тогда, когда эти силы:

- имеют общую линию действия;
- направлены по ней в противоположные стороны;
- равны по модулю.

Возможных вариантов этого расположения сил всего два, они показаны на рис. 1.2.

В обоих случаях имеем

$$\overline{F_2} = -\overline{F_1},$$

но при этом

$$F_2 = F_1.$$

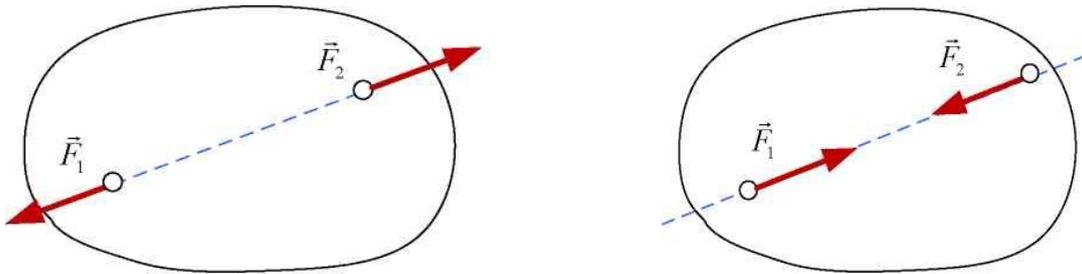


Рис. 1.2

Из данной аксиомы следует, что система из одной силы никогда не может быть уравновешенной.

Следствие. Если для некоторой системы сил существует эквивалентная ей равнодействующая R , то данная система сил может быть уравновешена одной силой, которая называется *уравновешивающей силой*.

Аксиома 2. Аксиома эквивалентности систем сил.

Две системы сил, отличающиеся друг от друга на уравновешенную систему сил, эквивалентны.

Это значит, что к любой системе сил можно добавить или из нее исключить уравновешенную систему сил. Действие системы сил на тело при этом не изменится.

Следствие из аксиом 1 и 2. Силу можно переносить вдоль линии действия в другую точку данного тела.

Действительно, если на тело действует некоторая сила \vec{F} , приложенная в точке A (рис. 1.3), то мы можем:

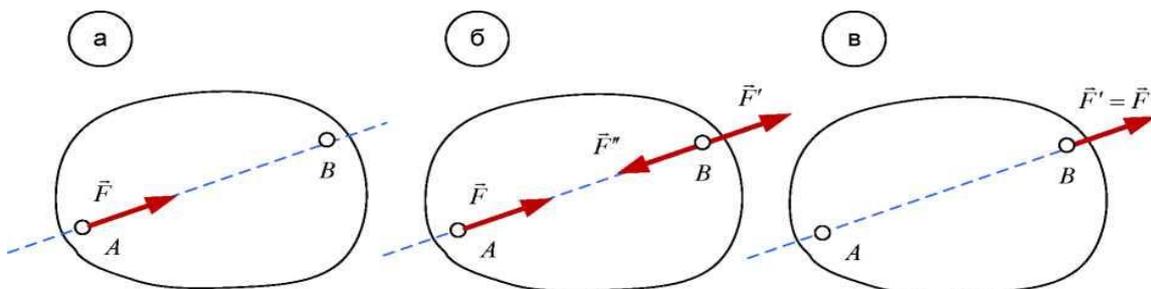


Рис. 1.3

- в произвольной точке B , на линии действия силы, добавить

уравновешенную систему из силы $\vec{F}' = \vec{F}$ и силы $\vec{F}'' = -\vec{F}$.

- исключить из полученной системы трех сил уравновешенную систему сил, состоящую из сил \vec{F} и \vec{F}'' .

В этом случае останется одна сила $F' = \vec{F}$, которая эквивалентна силе \vec{F} .

Эта аксиома справедлива при рассмотрении *абсолютно твердых тел*.

В этом случае сила может рассматриваться как *скользящий вектор*.

Скользящий вектор не связан с конкретной точкой приложения на линии ее действия.

Силу нельзя считать скользящим вектором, рассматривая ее действие на деформируемые тела, то есть при изучении таких дисциплин как «Сопротивление материалов» и «Строительная механика».

Аксиома 3. Аксиома параллелограмма сил.

Система из двух сил, приложенных в одной точке, имеет равнодействующую, равную их векторной сумме, и приложенную в той же точке.

Следовательно, геометрически сумма двух сил $R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис. 1.4) изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на его сторонах (исключение – случай $\vec{R} = 0$ – уравновешенная система сил).

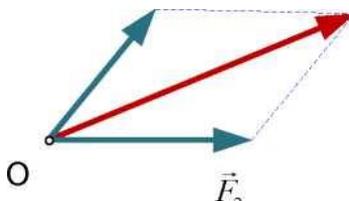


Рис. 1.4

Следствие. Сумму двух векторов можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил.

Треугольник сил строится от произвольной точки плоскости путем присоединения начала второго вектора к концу первого вектора.

В силу равенства противоположных сторон параллелограмма замыкающий вектор геометрически будет равен искомому вектору \vec{R} , причем получаемый результат не зависит от порядка следования слагаемых $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$.

Суммарный вектор будет являться равнодействующей двух сил (будет эквивалентен им), если приложить его в точке, где приложены обе силы.

Силовые треугольники

Модуль и направление равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке, можно определить аналитически, используя формулы тригонометрии для треугольников (рис. 1.5)

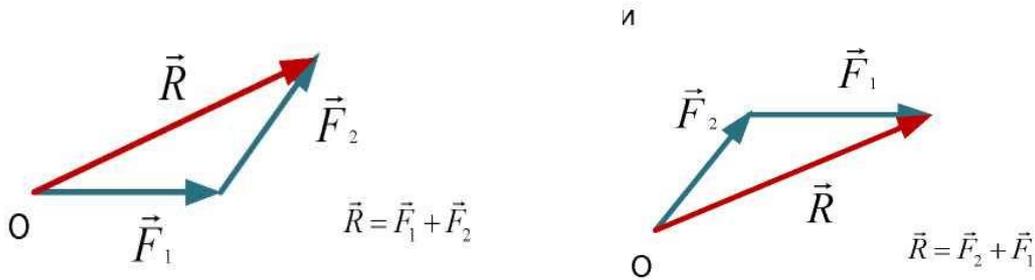


Рис. 1.5

Таким образом, если линии действия двух сил пересекаются, то эти силы имеют равнодействующую.

Если же линии действия сил не пересекаются, то эти силы могут не иметь равнодействующей.

Аксиома 4. Аксиома двух тел. Принцип равенства действия и противодействия.

При всяком действии одного тела на другое силы их взаимодействия:

- имеют общую линию действия;
- направлены по ней в противоположные стороны;
- равны по модулю.

Приведенная формулировка говорит о том, что силы никогда не возникают поодиночке. Действие всегда порождает противодействие.

При этом (рис. 1.6)

$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1 \text{ и } F_2 = F_1$$

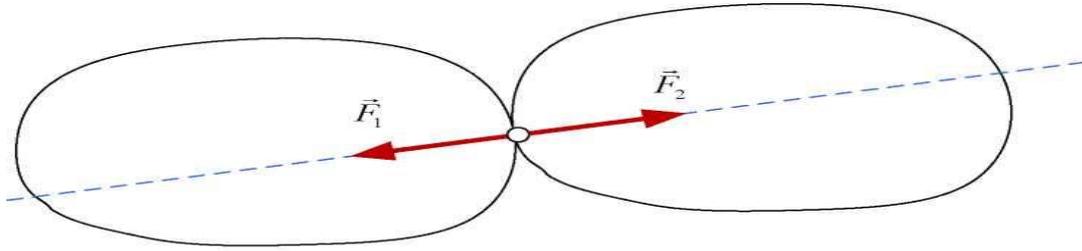


Рис. 1.6

Сравнивая аксиому 4 с аксиомой 1, можно увидеть, что формально силы действия и противодействия образуют уравновешенную систему сил. Однако надо учитывать, что эти силы приложены к разным телам.

На основании рассмотренного принципа можно сделать важное заключение.

Свойство внутренних сил

Векторная сумма внутренних сил любой механической системы всегда равна нулю.

Действительно, для каждой внутренней силы в системе имеется и сила противодействия, а их векторная сумма равна нулю (рис. 1.6)

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$$

Приведенное свойство имеет большое значение, поскольку позволяет при составлении уравнений статики исключать из рассмотрения неизвестные внутренние силы.

Аксиома 5. Принцип отвердевания.

Равновесие изменяемого (деформируемого) тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.

Простым примером может служить случай замерзания некоторого объема жидкости или застывания бетонной смеси.

Следствие. Приведенный принцип позволяет при составлении уравнений статики для деформируемого тела, находящегося в равновесии, считать его абсолютно твердым.

Таким образом, статика абсолютно твердого тела является необходимой

составной частью механики деформируемого тела (сопротивления материалов, теории упругости, гидромеханики и других).

ТЕМА 4. Связи и реакции связей

4.1. Понятие о связях

Материальные тела при взаимодействии ограничивают перемещения друг друга, что сказывается на характере их возможного движения.

Например, если на столе лежит книга, то поверхность стола ограничивает перемещения книги, делая невозможным ее опускание ниже этой поверхности. Также имеются ограничения у положений груза, висящего на тросе: он не может удалиться от точки подвеса на расстояние большее, чем длина троса.

Определение. Ограничения, наложенные на положения (скорости) точек механической системы, называются связями.

Связи всегда осуществляются какими-либо материальными телами. Так, для лежащей на столе книги связь осуществляет поверхность стола; для груза, висящего на тросе, – сам трос.

Определение. Реакцией связи называется сила, с которой на данное тело действует то тело, которое осуществляет связь.

Так, для книги, лежащей на столе, реакцией связи будет сила, с которой поверхность стола действует на книгу.

Для груза, висящего на тросе, реакцией связи является сила, с которой трос действует на груз (сила натяжения троса).

Силы, не являющиеся реакциями связей, принято называть *активными (или заданными)*.

Таким образом, мы имеем теперь две классификации сил. Все силы, действующие на механическую систему, делятся на:

- внешние и внутренние;
- активные и реакции связей.

Обе эти классификации будут использоваться при дальнейшем изложении строительной механики для архитекторов.

Определение реакций, наложенных на механическую систему связей при ее равновесии, составляет содержание большинства решаемых в статике задач.

Большое практическое значение имеют расчеты сил, действующих на фундаменты, опоры, подвески, расчеты сил натяжения тросов, канатов и прочее.

Изучение равновесия несвободных тел основано на принципе освобожденности от связей.

Принцип освобожденности от связей

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи, учтя их действие введением соответствующих реакций связей.

Пример.

Для шара, лежащего на горизонтальной плоскости стола (рис. 1.7), мысленно отбрасывая связь (стол), мы должны ввести силу, с которой стол воздействует на шар, то есть реакцию связи – силу N .

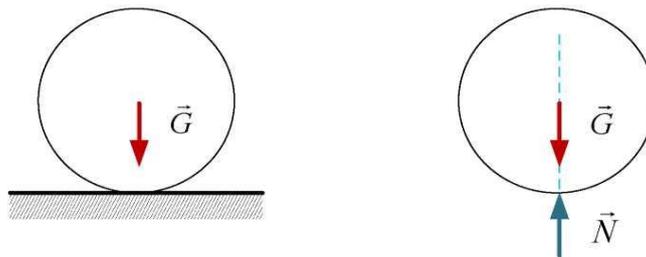


Рис. 1.7

Поскольку шар находится в равновесии, то действующая на него система из двух сил (силы тяжести G и реакции N) является уравновешенной.

Тогда, согласно аксиоме I , эти силы направлены по одной прямой, противоположно друг другу и равны по модулю

$$N = G.$$

Отметим, что реакция всегда направлена в сторону, противоположную той,

куда тело, осуществляющее связь, не дает перемещаться данному телу.

Решение задач статики значительно упрощается, если заранее известны направления реакций связей.

Поэтому рассмотрим ряд простейших связей, когда направления реакций полностью или частично известны.

4.2. Разновидности опор, используемых в плоских расчетных схемах.

Их схематическое обозначение. Реакции связей

Определение. Схематическое изображение конструкции, отражающее основные, наиболее важные особенности ее поведения, называется расчетной схемой.

Любая конструкция имеет опоры, фиксирующие ее положение как жесткого целого. Направление и количество реакций, возникающих со стороны опоры конструкции, зависит от ее устройства.

Тип опоры устанавливается по ее характеристикам – кинематической (перемещений, допускаемых и задерживаемых опорными связями) и статической (силовое сопротивление).

Различают три основных типа простейших опорных устройств (в плоской системе сил):

1. Шарнирно – подвижная опора.
2. Шарнирно – неподвижная опора.
3. Жесткая заделка.

Опоры конструкции на расчетных схемах показываются с помощью условных обозначений. Часто характер работы опоры показывается с помощью схемы, составленной из опорных стержней, которые запрещают те же степени свободы, что и сама опора.

Опорный стержень, который далее будем называть просто «связь», обладает следующим свойством – он запрещает перемещение точки тела в направлении оси (вдоль линии, соединяющей центры шарниров). По этой же линии направлена и возникающая реакция (рис. 1.8).

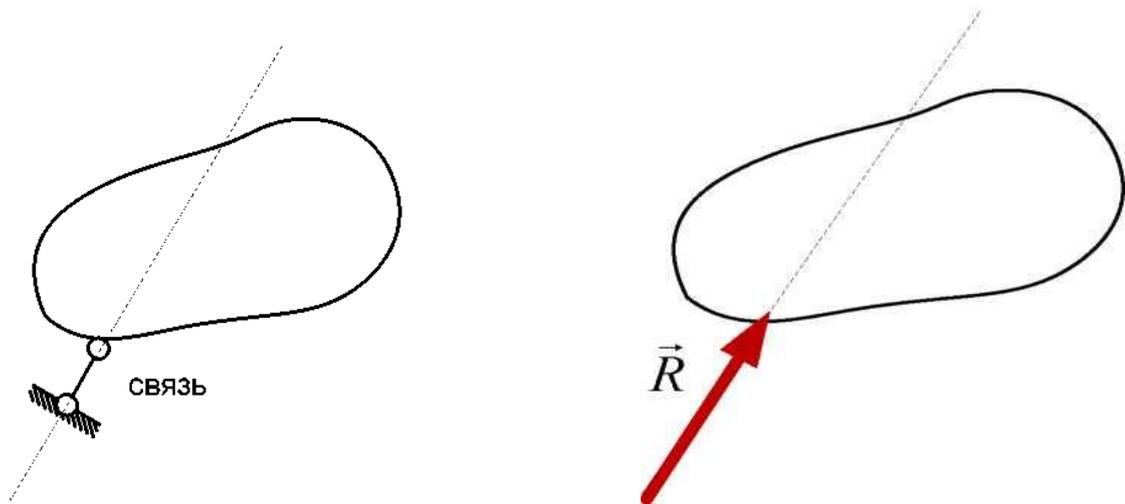


Рис. 1.8

При действии на стержень плоской системы внешних сил, реакции опор действуют в той же плоскости, а поэтому реакции опор определяются из условий равновесия плоской системы сил. Плоская система может находиться в равновесии только при условии не пересечения направления реакций в одной точке.

а). Шарнирно-подвижная (скользящая) опора

Подвижная шарнирная опора не препятствует повороту стержня на опоре и осевому смещению стержня вдоль опорной плоскости.

Такой тип опоры обычно реализуется в виде опоры на катках (рис. 1.9).

Наличие катков позволяет опоре свободно перемещаться вдоль поверхности, поэтому реакция имеет известное направление – она перпендикулярна опорной поверхности.

Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей

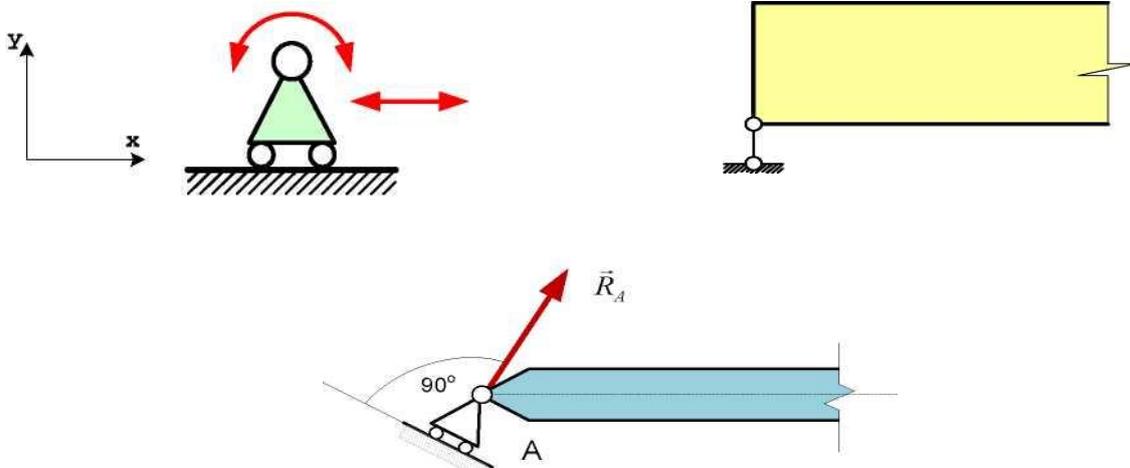


Рис. 1.9. Шарнирно-подвижная опора

б). Шарнирно-неподвижная опора

Неподвижная шарнирная опора, допускающая поворот опорного сечения стержня, но препятствующая линейному перемещению опоры в силовой плоскости.

Если тело прикреплено к поверхности (другому телу) с помощью неподвижного цилиндрического шарнира (рис. 1.10, а), то реакция имеет неизвестное направление в плоскости действия, а угол α может быть любым.

В этом случае силу \vec{R}_A неизвестного направления удобно разложить на две неизвестные силы \vec{X}_A и \vec{Y}_A , направленные по координатным осям.

При этом

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A \quad \text{и} \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$$

Силы \vec{X}_A и \vec{Y}_A , называются составляющими силы \vec{R}_A по осям x и y .

Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.

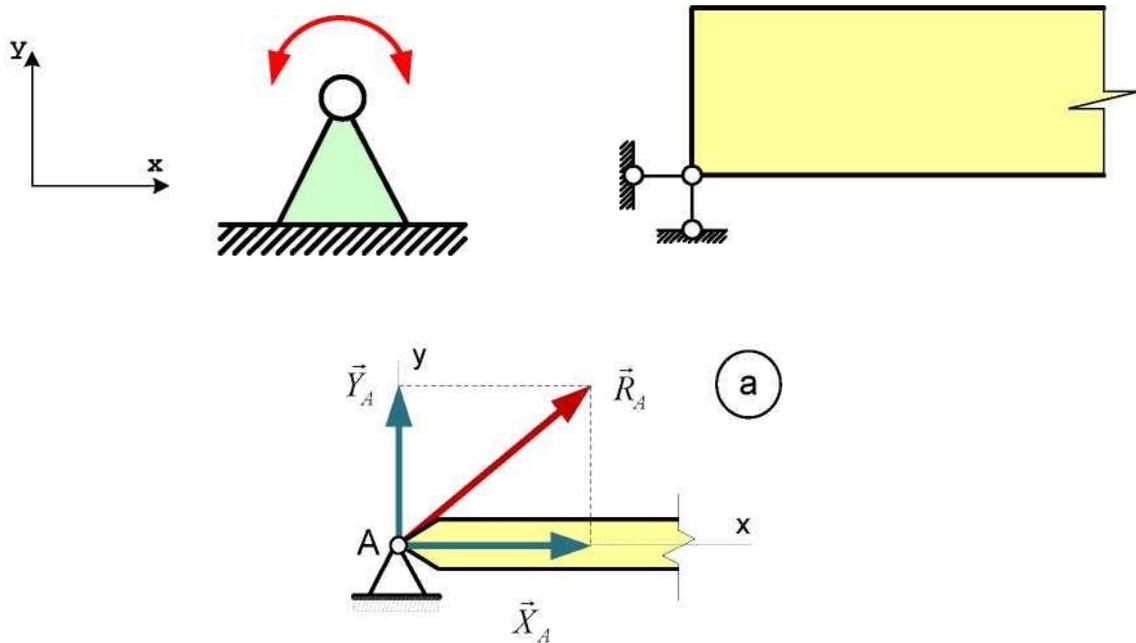


Рис. 1.10. Шарнирно–неподвижная опора

в). Жесткая заделка

Движение тела может быть ограничено жёсткой заделкой в какой-либо опоре (рис. 1.11).

Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.

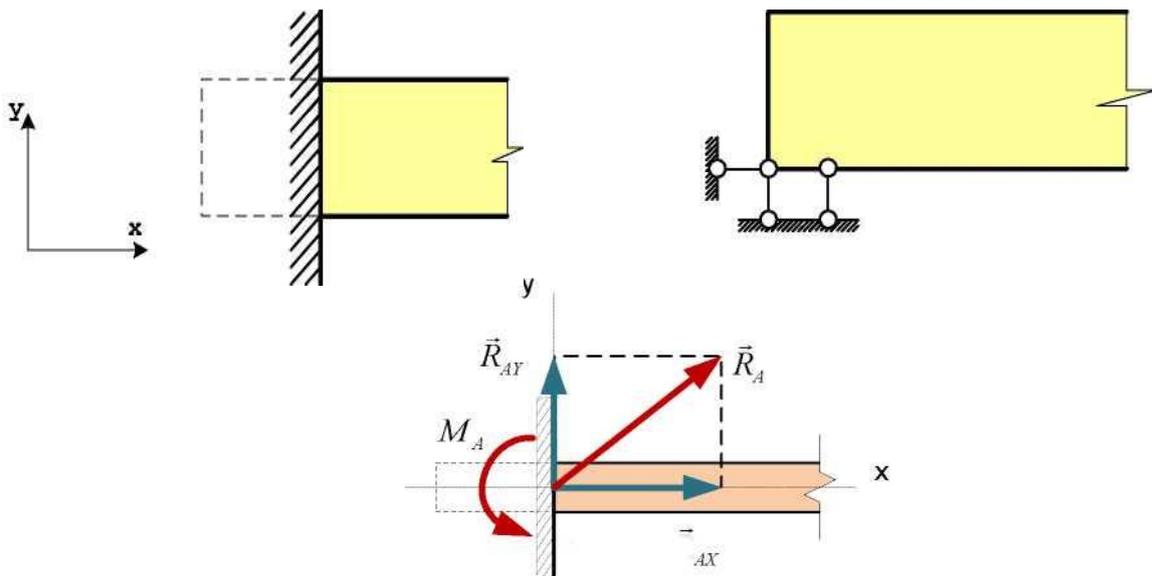


Рис. 1.11. Защемление или заделка

Заделка – это неподвижная опора с защемлением конца стержня. При деформации конец стержня остается прямым по всей длине заделанной части.

Жёсткая заделка препятствует любому поступательному перемещению тела, поэтому направление её реакции заранее определить нельзя и сначала определяют её составляющие R_{Ax} и R_{Ay} .

Кроме того, жёсткая заделка препятствует повороту телу, поэтому, кроме силовой реакции, на тело действует ещё момент заделки M_A , уравнивающий стремление нагрузок повернуть тело в заделке.

Примечание. В каждой из перечисленных выше опор по направлению запрещенных степеней свободы возникают соответствующим образом направленные реакции, причем:

- по направлению запрещенных перемещений возникает реакция в виде силы;
- по направлению запрещенного поворота возникает реактивный момент.

ТЕМА 5. Условия уравновешенности сходящейся системы сил.

Равновесие плоской системы сил

Система сходящихся сил эквивалентна одной силе – равнодействующей.

Равнодействующая сходящейся системы равна ее главному вектору. В общем случае сходящаяся система не является уравновешенной.

Исключение составляет случай, когда равнодействующая, а следовательно, и главный вектор этой системы сил, равны нулю.

Таким образом, для равновесия системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. *В векторной форме:* главный вектор системы сил должен быть равен нулю $\bar{R} = 0$.
2. *В геометрической форме:* силовой многоугольник должен быть замкнут.
3. *В аналитической форме:* сумма проекций сил на каждую из координатных осей должна быть равна нулю.

Для системы сходящихся сил, расположенных в одной плоскости (например, в плоскости xy), имеем два уравнения равновесия

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} = 0$$

Если в систему сил входит и пара сил, для которой, как известно, сумма векторов сил равна нулю, то уравнения проекций сил оказываются тождествами.

В этом случае для системы пар остаются только уравнения моментов сил, относительно произвольных точек, которые могут быть записаны, например, как уравнение

$$\sum_{i=1}^n m_o(\bar{F}_i) = 0$$

Где точка O – произвольная точка плоскости xu .

Таким образом, условия равновесия плоской системы сил в аналитической форме могут быть представлены тремя уравнениями.

5.1. Аналитические уравнения равновесия

При решении задач статики мы изначально предполагаем, что тела находятся в равновесии, то есть действующие на них системы сил уравновешены, и тогда для них справедливы приведенные выше условия.

• *Первая (основная) форма уравнений равновесия произвольной плоской системы сил:*

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n m_o(\bar{F}_i) = 0.$$

Она состоит из двух уравнений проекций сил на две проведенные произвольным образом перпендикулярные оси x и y и одного уравнения моментов сил относительно произвольной точки O плоскости xu .

• *Вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил:*

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n m_A(\bar{F}_i) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n m_B(\bar{F}_i) = 0.$$

Она содержит одно уравнение проекций сил на какую-либо ось x и два

уравнения моментов сил относительно точек A и B (ось x не должна быть перпендикулярна линии AB , иначе уравнения не будут независимы).

- Третья форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^n m_A(\overline{F}_i) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n m_B(\overline{F}_i) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n m_C(\overline{F}_i) = 0.$$

Она содержит три уравнения моментов сил относительно трех произвольных точек A , B и C (при этом точки A , B и C не должны лежать на одной прямой).

Из трех возможных вариантов следует выбирать ту форму записи уравнений равновесия, с помощью которой данная конкретная задача будет решаться наиболее рациональным образом.

Контрольные вопросы для самопроверки по разделу

«Теоретическая механика»

1. Строительная механика для архитекторов и ее место среди естественных и технических наук?
2. Предмет теоретической механики?
3. Основные понятия теоретической механики?
4. Основные определения теоретической механики?
5. Основные понятия силы и системы сил?
6. Основные аксиомы статики?
7. Разновидности опор, используемых в плоских расчетных схемах?
8. Схематическое обозначение опор?
9. Связи и реакции связей?
10. Условия уравновешенности сходящейся системы сил?
11. Равновесие плоской системы сил.
12. Аналитические уравнения равновесия?

РАЗДЕЛ II. «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

ТЕМА 1. Введение

1.1. Понятие о сопротивлении материалов. Прочность, жесткость и устойчивость элементов инженерных конструкций

Сопротивление материалов является одним из разделов *механики деформируемого твердого тела*, где изучаются законы движения и равновесия твердых тел в условиях их деформирования при различных воздействиях.

Задачей сопротивления материалов является создание теоретических и экспериментальных основ для установления требуемых размеров элементов, входящих в состав конструкций и сооружений. При этом должна быть обеспечена *надежность* эксплуатации и *экономичность* конструкции, в значительной мере определяемая расходом материала.

Надежность – свойство конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени. Надежность, безотказность изделия (машины, конструкции, детали) связывается с определенным сроком службы. В большинстве случаев под сроком службы понимается время работы изделия под нагрузкой или число циклов нагружений. Надежность конструкции обеспечена, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности.

Прочность – способность конструкции в целом и ее отдельных элементов воспринимать определенную нагрузку без разрушения. Первой задачей обеспечения прочности проектируемой конструкции является получение гарантии против ее разрушения при действии на нее определенных внешних сил. Однако в большинстве случаев приходится считаться не только с опасностью разрушения, но и с величиной деформаций и их характером.

Разрушение (полное или местное) – разделение конструкции на несколько частей, появление видимых трещин, отколов. Если изменения формы и размеров

(деформации) конструкции при действии на нее внешних сил *невелики* и не мешают ее эксплуатации, то такая конструкция обладает необходимой *жесткостью*. Обычно жесткость конструкций регламентируется нормами проектирования.

Деформация – изменение взаимного расположения частиц тела под действием внешних сил, вызывающая, как правило, изменение его формы и размеров.

Деформации различают:

а) *упругие*, то есть имеющие обратимый характер (полностью исчезающие после прекращения действия внешних сил). При таких деформациях тело после снятия нагрузки полностью восстанавливает свои прежние форму и размеры;

б) *остаточные*, то есть необратимые и не исчезающие после прекращения действия внешних сил. Остаточная деформация, не сопровождающаяся местным разрушением, называется *пластической*;

в) деформации, зависящие от времени, принято называть *вязкими*;

г) увеличение деформации тела при постоянных внешних нагрузках (осадка фундамента зданий и сооружений, постепенное удлинение каната, несущего груз и т. д.) называется *ползучестью*.

Кроме того, различают *общую деформацию*, распространяющуюся на весь объем тела, и *местную деформацию*, происходящую лишь в малой части этого объема.

Деформации конструкции при действии на нее внешней нагрузки должны быть невелики (по сравнению с ее линейными размерами) и не должны мешать ее эксплуатации. Чрезмерные деформации могут совершенно изменить условия работы конструкции и исключить возможность выполнения ею своего назначения в полной мере.

Вопрос о проверке прочности следует рассматривать в широком смысле, понимая под его решением обеспечение не только прочности против разрушения, но и определенной величины и характера деформаций.

Устойчивость конструкции – это ее способность сохранять вплоть до разрушения первоначальную форму равновесия. Нарушение первоначально заданной формы равновесия, называемое потерей устойчивости, опасно также как и разрушение. Понятие устойчивости относится, в основном, к сжатым элементам конструкций.

1.2. Основные допущения о свойствах материала и характере деформирования, принимаемые в сопротивлении материалов

Для решения основной задачи сопротивления материалов (определения рациональных размеров) вводят ряд допущений и гипотез, позволяющих сложную работу элементов конструкции свести к простым расчетным моделям и схемам и получить простые инженерные формулы для определения напряженно-деформированного состояния.

1. *Гипотеза идеальной или абсолютной упругости* предполагает полную обратимость процесса деформирования тела в стадии нагружения и разгрузки, то есть до приложения внешних сил в рассматриваемом элементе отсутствуют внутренние силы и деформации, возникающие в процессе нагружения элемента и исчезающие после снятия нагрузки.

2. *Гипотеза о сплошности материала* предполагает, что упругое тело полностью заполняет объем и не имеет в нем пустот и разрывов. Эта гипотеза позволяет рассматривать деформации и перемещения как неразрывные функции координат и в полном объеме использовать математический аппарат теории непрерывных функций.

3. *Гипотеза однородности материала* допускает, что в любых точках тела под действием одних и тех же напряжений возникают одинаковые деформации, то есть в окрестности произвольной точки физические свойства и соответствующие им механические характеристики материала одинаковы.

4. *Гипотеза шаровой изотропии* предполагает, что для некоторых материалов (например, металлов) физические свойства и механические характеристики одинаковы по всем направлениям, проведенным в окрестности произвольной точки.

5. *Гипотеза малости деформаций* предполагает, что перемещения точек рассматриваемого элемента малы по сравнению с его размерами, а относительные деформации малы по сравнению с единицей. Эта гипотеза позволяет пренебрегать изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и составлять уравнения статики для недеформированного тела.

6. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и нагрузками (напряжениями) - закон Гука.* Согласно этой гипотезе считают, что для большинства материалов на определенной с момента нагружения стадии между деформациями и напряжениями устанавливается прямая пропорциональная зависимость.

7. *Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли)* предполагает, что поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его геометрической оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации.

Наряду с перечисленными гипотезами в курсе сопротивления материалов рассматривают два основных принципа.

1. *Принцип независимости действия сил.* Согласно этому принципу действие на элемент конструкции группы сил вызывает в одних и тех же точках такие же напряжения, перемещения и деформации, что и алгебраическая сумма нагрузок, полученная от каждой отдельной силы этой группы при любом порядке нагружения (рис. 1.1).

Сформулированное положение называется еще *принципом сложения действия сил или принципом суперпозиции.*

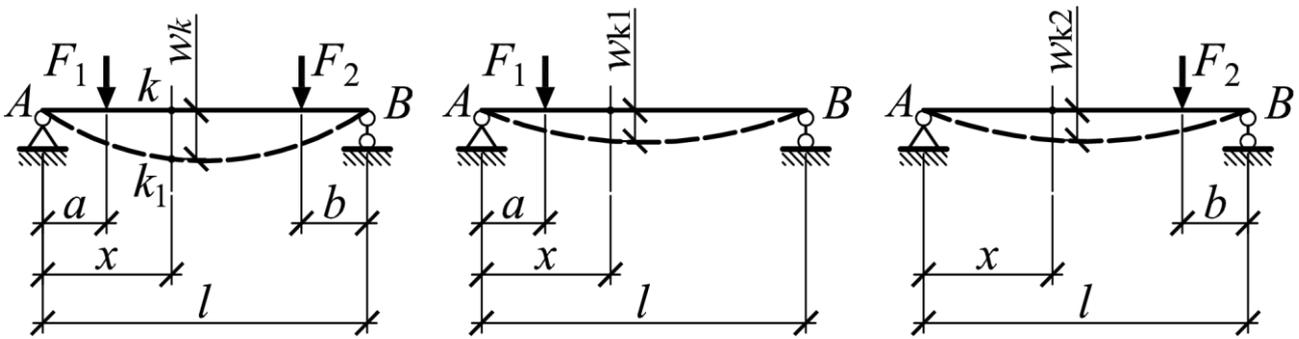


Рис. 1.1. Принцип независимости действия сил

2. *Принцип Сен-Венана.* Этот принцип излагается в двух вариантах:

а) если на какой-либо малой площадке элемента конструкции приложена уравновешенная система сил, то она вызывает в этом элементе напряжения, достаточно быстро убывающие по мере удаления от места приложения нагрузок.

На оси бруса построен график сжимающих нормальных напряжений от уравновешенной нагрузки F (рис. 1.2);

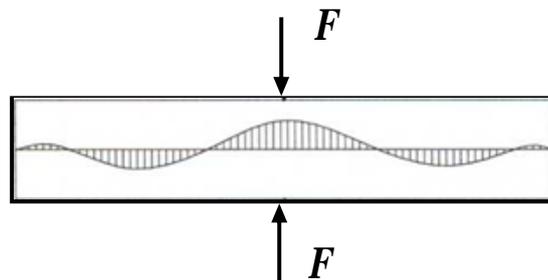


Рис. 1.2. Принцип Сен-Венана

б) в точках деформируемого элемента конструкции, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения и деформации практически мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок

Гипотезы и принципы позволяют достаточно просто рассматривать расчетные модели и расчетные схемы конструктивных элементов.

1.3. Схематизация элементов строительных конструкций.

Понятие о расчетной схеме

Геометрическая форма элементов конструкций бывает весьма сложной.

Учет всех особенностей геометрической формы часто нецелесообразен, так как приводит к сложным моделям. Для определения напряженного и деформированного состояний применяют упрощенные схематизированные модели формы элементов конструкций. Основными элементами формы в моделях прочностной надежности являются стержень, пластинка, пространственное тело (массив), оболочка, тонкостенные стержни (рис. 1.3).

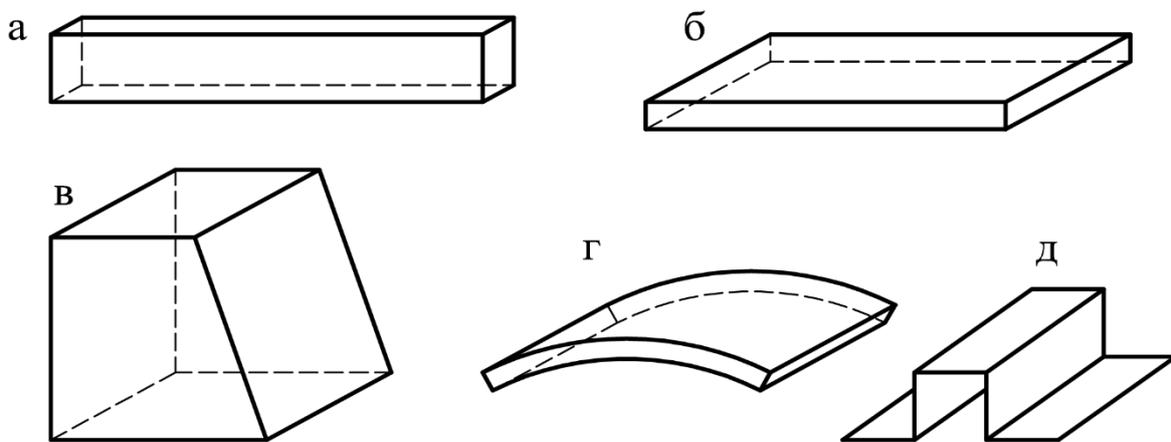


Рис. 1.3. Основные элементы формы в моделях прочностной надежности:

а – стержень; б – пластинка; в – объёмное тело; г – оболочка;

д – тонкостенные стержни

Модели формы представляют схематизированное описание геометрии элемента с помощью типовых элементов.

К первому типу геометрической формы элементов конструкции относятся стержни, у которых длина значительно больше размеров поперечного сечения.

Геометрическими элементами стержня являются его ось и поперечное сечение.

Определение. Ось стержня – линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений стержня.

Определение. Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

Поперечное сечение образуется при пересечении стержня плоскостью, перпендикулярной его оси. В зависимости от формы оси стержни могут быть прямыми, кривыми, плоскими и пространственными. Поперечные сечения стержня могут быть одинаковыми или различными по размерам (стержни постоянного или переменного сечения). В несущих строительных конструкциях чаще всего встречаются прямые стержни постоянного или ступенчато-постоянного сечения.

В технике и строительстве часто применяются тонкостенные стержни, у которых один размер поперечного сечения мал по отношению к другому и оба малы по отношению к длине стержня. Расчет таких тонкостенных стержней имеет специфические особенности.

В сопротивлении материалов используются термины «волокно» и «слой».

Определение. Волокном называют материальную линию, параллельную оси стержня и имеющую бесконечно малую площадь поперечного сечения.

Определение. Совокупность волокон, лежащих на плоскости или на поверхности, образуют слой стержня.

Определение. Оболочка – тело ограниченное двумя близкими поверхностями.

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью.

По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические, конические, сферические и др. К оболочкам относятся стенки тонкостенных резервуаров, купола зданий и т. д.

Определение. Пластина – частный случай оболочки, когда срединная поверхность представляет собой плоскость. Толщина пластины намного меньше

двух других размеров. К пластинам относятся плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений и др.

Значительное превалирование одного характерного размера над двумя другими – в стержнях и малость одного размера по сравнению с двумя другими – в оболочках и пластинах позволяют существенно упростить анализ их напряженного и деформированного состояния.

Определение. Пространственное тело (массив) – модель формы элемента конструкции, в которой размеры по всем направлениям соизмеримы. К ним относятся фундаменты зданий и сооружений, подпорные стенки и т. п.

Определение. Механической системой называется совокупность твердых тел, в которой положение и движение каждого тела определяется положением и движением остальных.

Определение. Расчетной схемой системы называется ее упрощенное представление, принимаемое за основу прочностного расчета. Расчетная схема определяется: совокупностью принимаемых гипотез; методикой расчета; упрощенным представлением элементов; условным представлением нагрузок; пренебрежением некоторыми размерами и конструктивными деталями, которые практически не сказываются на их прочности.

При расчете реальной конструкции ее заменяют идеализированной упрощенной системой – расчетной схемой. Расчетная схема включает в себя: элементы конструкции (стержни, оболочки, пластины, массивы), способы соединения элементов конструкции, опорные устройства.

Обычно стержни соединяются между собой упругоподатливо, однако в различных случаях такое соединение в расчетных схемах трактуется по-разному:

- в рамах (рис. 1.4, а) – жесткое соединение в узлах;
- в фермах (рис. 1.4, б) – шарнирное соединение стержней в узлах.

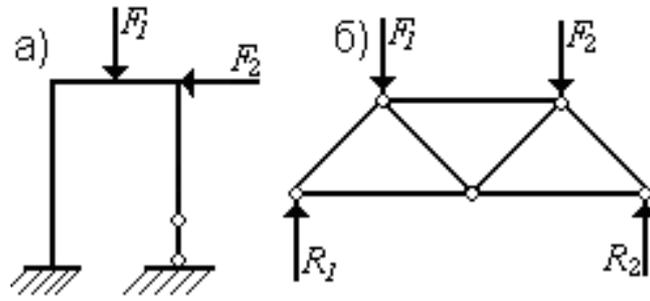


Рис. 1.4. Примеры соединения стержней в узлах

Таким образом, реальные элементы конструкций и сооружений могут быть с достаточной точностью представлены сочетанием более простых моделей формы (стержня, пластины или оболочки, пространственного тела).

1.4. Классификация внешних нагрузок

В процессе работы или эксплуатации конструкций и сооружений их элементы испытывают действие различных нагрузок.

Определение. Нагрузки – это силы, передающиеся рассматриваемым телам от других, соприкасающихся с ними тел, или от внешней среды. Все нагрузки делятся на силы внешние и силы внутренние.

Определение. Внешними называются нагрузки, действующие на конструкцию в целом, при рассмотрении ее как твердого тела.

Определение. Внутренними называются силы, возникающие внутри конструкции в результате деформаций от действия внешних нагрузок.

Нагрузки, приложенные к телу, распределены по некоторым площадям его поверхности (поверхностные нагрузки) или по объему (объемные нагрузки).

Для их представления используют следующие модели: распределенные нагрузки, сосредоточенные и объемные силы.

Все поверхностные нагрузки являются распределенными по некоторой поверхности конструкции. Распределенные нагрузки характеризуются

интенсивностью, которая может быть переменной или постоянной. При расчете стержней распределенная по площади нагрузка приводится к линейной нагрузке, распределенной по длине стержня.

Если размеры площади приложения нагрузки малы по сравнению с размерами тела, то в этом случае нагрузка может быть представлена в виде силы, приложенной к математической точке поверхности тела. Такую нагрузку называют *сосредоточенной*.

Так как сила возникает в результате взаимодействия тел и давление между ними передается через площадку больших или меньших размеров, то в действительности сосредоточенных сил не существует.

Нагрузки, распределенные по всему объему (приложены к каждой частице внутри тела), называются *объемными* (собственный вес, силы инерции).

В ряде случаев нагрузки моделируются как моментные в виде сосредоточенных моментов (пар сил) и моментов, распределенных по поверхности или по линии.

К внешним силам также относятся температурные воздействия, возникающие при перемене температуры, а также инерционные силы при поступательном и вращательном движениях.

Деление внешних нагрузок на поверхностные, линейные и сосредоточенные – три степени абстракции, используемой в расчетах.

Внешние нагрузки делятся на активные и реактивные (реакции опорных закреплений).

Реактивные нагрузки подлежат определению из уравнений статики. Если уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций, то к ним добавляют уравнения, характеризующие деформации конструкции.

Нагрузки разделяют на стационарные (постоянные, статические) и нестационарные (временные, переменные).

Постоянные нагрузки действуют в течение всего периода существования конструкции (например, собственный вес конструкции).

Статические нагрузки – сообщаемые телу малые ускорения (малы и силы инерции), которые можно не учитывать.

Временные нагрузки – это нагрузки, действующие в течение ограниченного отрезка времени (снеговая или ветровая нагрузки).

Переменные нагрузки – это нагрузки, изменяющиеся во времени. Наиболее важный класс переменных нагрузок – циклические нагрузки.

Совокупность напряжений от некоторого значения σ_{\max} до σ_{\min} и снова до σ_{\max} , называется циклом напряжений, а сами напряжения – циклическими.

Для *динамического* действия нагрузки характерно быстрое изменение во времени ее величины (высокая скорость возрастания нагрузки), что вызывает силы инерции, которые необходимо учитывать.

Модели нагружения должны учитывать воздействие полей и сред. Наиболее часто встречается воздействие температурного поля. Пониженная или повышенная температура влияют на механическую прочность материала.

Таким образом, модели нагружения содержат схематизацию внешних нагрузок по величине, распределению, времени, воздействию внешних полей и сред.

1.5. Основные типы опор

Для того чтобы элементы конструкции могли воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, они должны быть соединены с ним опорными связями (опорами).

Тип опоры устанавливается по ее характеристикам – кинематической (перемещений, допускаемых и задерживаемых опорными связями) и статической (силовое сопротивление).

Различают три основных типа опорных устройств (в плоской системе сил).

- **Защемление или заделка** (рис. 1.5, а)

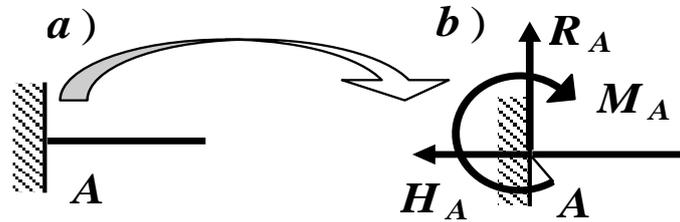


Рис. 1.5. Защемление или заделка

Защемленный конец стержня A не может смещаться ни поступательно (в горизонтальном и вертикальном направлениях), ни поворачиваться.

В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила R_A , препятствующая вертикальному смещению, горизонтальная сила H_A , исключаяющая горизонтальное смещение, и момент M_A , препятствующий повороту (рис. 1.5, б).

- **Цилиндрическая шарнирно–неподвижная опора** (рис. 1.6, а)

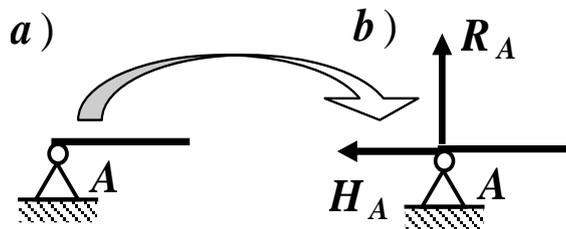


Рис. 1.6. Шарнирно–неподвижная опора

Эта опора не позволяет сечению стержня в точке A иметь поступательные перемещения в горизонтальном и вертикальном направлениях, но при этом возможен поворот сечения в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила R_A , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная сила H_A , исключаяющая горизонтальное смещение (рис. 1.6, б).

- **Цилиндрическая шарнирно–подвижная опора** (рис. 1.7, а)

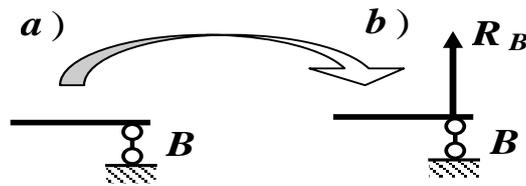


Рис. 1.7. Шарнирно–подвижная опора

Эта опора позволяет сечению стержня в точке B поворачиваться вокруг шарнира и перемещаться в горизонтальном направлении, но не позволяет перемещаться по вертикали. В такой опоре возникает только реакция R_B (рис. 1.7, б).

Для обеспечения неподвижности элементов конструкции, то есть, чтобы они могли сопротивляться приложенным внешним силам, необходимо защементировать один их конец или в одном их сечении устроить шарнирно–неподвижную опору, а в другом – шарнирно–подвижную опору.

Таким образом, наименьшее число связей, не позволяющих элементам конструкции перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.

1.6. Определение опорных реакций

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

При действии на стержень плоской системы внешних сил, реакции опор действуют в той же плоскости, а поэтому реакции опор определяются по правилам теоретической механики из условий равновесия плоской системы сил. Плоская система может находиться в равновесии только при условии не пересечения направления реакций в одной точке.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных комбинациях:

- Первая комбинация:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & - \text{сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum F_z = 0 & - \text{сумма проекций всех сил на} \\ & \text{вертикальную ось } z \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & - \text{сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю.}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Уравнение $\sum M_B = 0$ (сумма моментов всех сил относительно точки B равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

• Вторая комбинация:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & - \text{сумма проекций всех сил на} \\ & \text{горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \sum M_A = 0 & - \text{сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } A \text{ равна нулю;} \\ \sum M_B = 0 & - \text{сумма моментов всех сил относительно} \\ & \text{точки } B \text{ равна нулю.}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Уравнение $\sum F_z = 0$ (сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

1.7. Внутренние силы (усилия) в поперечных сечениях бруса и метод их определения

Под влиянием внешних сил в теле происходит деформация и возникают дополнительные внутренние силы.

В дальнейшем при определении внутренних сил мы будем подразумевать не их абсолютные значения, а только те изменения, которые вызваны действующими на тело нагрузками.

Внутренние силы упругости увеличиваются с возрастанием внешних сил, но только до определенного предела, после превышения которого, тело разрушается.

Для расчета конструкций на прочность необходимо уметь находить внутренние силы по заданным внешним нагрузкам. Чтобы установить численные значения внутренних сил, возникающих в результате деформации, вызванной внешними силами, применяют *метод сечений*.

Пусть к элементу конструкции приложена система нагрузок, включающая в себя заданные силы и опорные реакции (рис. 1.8).

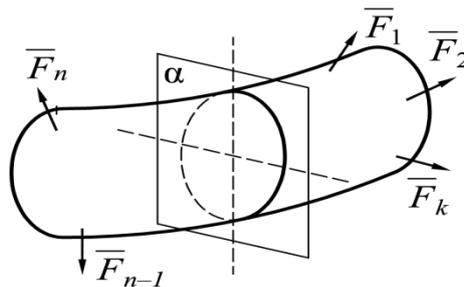


Рис. 1.8. Метод сечений

Под действием рассматриваемых сил элемент находится в равновесии.

Метод сечений сводится к четырем действиям:

1. Плоскостью α , проходящей через внутреннюю точку, в которой необходимо определить искомое усилие, разрезают (мысленно) тело на две части (рис. 1.8).

2. Для каждой из частей прикладывают в сечениях внутренние силы взаимодействия в каждой точке рассматриваемого сечения (рис. 1.9).

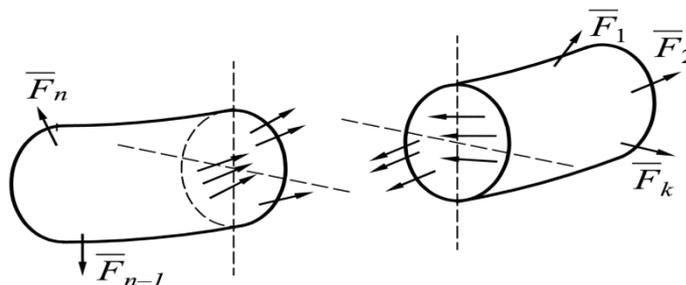


Рис. 1.9. Метод сечений

3. Отбрасывая одну из частей стержня (желательно наиболее сложную), заменяют внутренние силы статически эквивалентными им главным вектором R и главным моментом M (рис. 1.10).

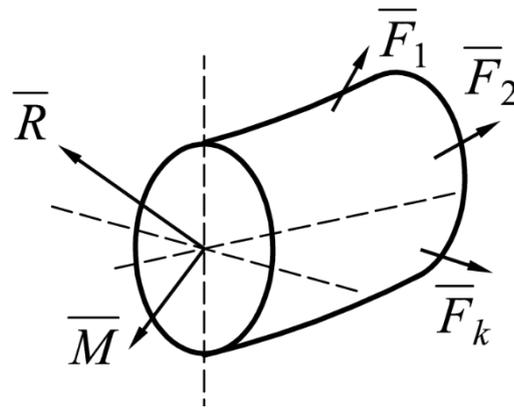


Рис. 1.10. Метод сечений

4. В соответствии с гипотезой о малости деформаций составляют как для недеформируемого тела уравнения равновесия для всех сил (внешних и внутренних), действующих на оставшуюся часть

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0; & \Sigma M_x &= 0; \\ \Sigma F_y &= 0; & \Sigma M_y &= 0; \\ \Sigma F_z &= 0; & \Sigma M_z &= 0. \end{aligned}$$

Из шести уравнений статики можно определить (выразить) шесть составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил.

Определение. Составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающие в поперечном сечении бруса, называются внутренними силовыми факторами (или усилиями) в этом сечении.

Указанные шесть внутренних силовых факторов имеют следующие наименования:

- N – продольная сила;
- Q_y и Q_z – поперечные силы;
- $M_x = M_k$ – крутящий момент;
- M_y и M_z – изгибающие моменты.

Индексы в обозначениях силовых факторов (x, y, z) показывают, относительно каких осей они вычислены.

1.8. Виды простых деформации

Каждый из силовых факторов связан с определенным видом деформации.

В частных случаях система внешних, а значит, и система внутренних сил могут приводиться к одной, двум, трем и так далее до шести составляющих.

Рассмотрим возможные простейшие случаи деформаций, когда внутренние силы приводятся к какой – либо одной составляющей.

Определение. Центральным растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только продольные силы N , а все прочие внутренние силовые факторы (Q , $M_{изз}$, M_k) равны нулю.

Определение. Брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем.

Определение. Чистым сдвигом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только поперечные силы Q , а все прочие внутренние силовые факторы (N , $M_{изз}$, M_k) равны нулю.

Чистый сдвиг – вид сопротивления (деформирования), характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.

Определение. Кручением называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты M_k , а все прочие внутренние силовые факторы (N , Q , $M_{изз}$) равны нулю.

Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно его продольной оси.

Определение. Брус, работающий на кручение, называется валом.

Вал – вращающаяся (обычно в подшипниках) деталь машины, передающая крутящий момент.

Определение. Чистым изгибом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только изгибающие моменты $M_{изз}$, а все прочие внутренние силовые факторы (N , Q , M_k) равны нулю.

Чистый изгиб – вид сопротивления (деформирования), при котором происходит искривление оси прямого бруса, или изменение кривизны кривого бруса.

Определение. Стержень, работающий на изгиб, называется балкой.

Изгиб возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно главных центральных осей его поперечного сечения.

1.9. Понятие о напряжении.

Определение полных, нормальных и касательных напряжений

Выявив внутренние силы и даже определив их равнодействующую, еще нельзя говорить об условии прочности рассматриваемого тела, так как прочность зависит не только от материала и величины равнодействующей внутренних сил, но также от характера их распределения и размеров тела – от величины того сечения, к которому приложена равнодействующая.

Ранее указывалось, что внешние силы характеризуются интенсивностью, численно равной силе, приходящейся на единицу площади.

По аналогии, внутренние силы также принято характеризовать интенсивностью, относя усилие, передаваемое через какое-либо воображаемое сечение, к площади этого сечения.

Выделим (рис. 1.11, а) в окрестности произвольной точки бесконечно малую площадку ΔA .

На эту площадку действуют внутренние силы с равнодействующей ΔR , направление которой, в общем случае, не совпадает с направлением нормали ν к площадке. Будем считать, что равнодействующая ΔR приложена в центре тяжести площадки ΔA .

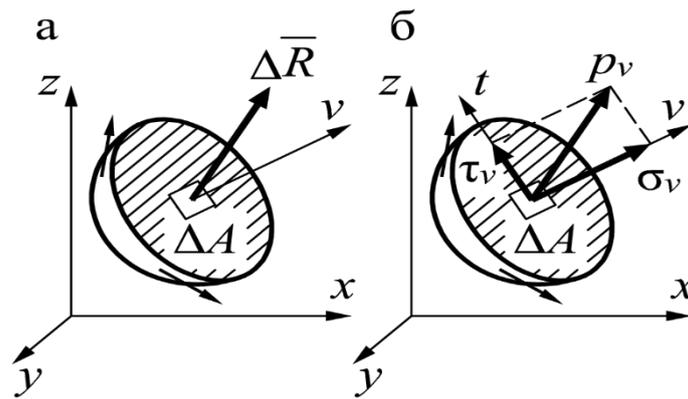


Рис. 1.11. Бесконечно малая площадка ΔA в окрестности произвольной точки

Среднее напряжение будет равно

$$p_{cp} = \Delta R / \Delta A \quad (1.3)$$

Устремляя величину ΔA к нулю и переходя к пределу, получим полное напряжение в рассматриваемой точке

$$p_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta R / \Delta A) = dR / dA \quad (1.4)$$

Разложив полное напряжение p_v на составляющие по нормали к площадке и по касательной к ней, получим нормальное напряжение σ_v и касательное напряжение τ_v в точке (рис. 1.11, б). Между напряжениями справедливо соотношение

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \quad (1.5)$$

Если внутренние силы распределяются равномерно по сечению, то и напряжения распределяются равномерно и во всех точках сечения будут одинаковые. Величина напряжения в этом случае определяется как отношение равнодействующей внутренних сил к суммарной площади, то есть

$$p = \frac{R}{A} \quad (1.6)$$

Таким образом,

Определение. Напряжение – это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади сечения.

Размерность напряжения – $\text{кГ}/\text{см}^2$ или $\text{н}/\text{м}^2$ (Па).

Совокупность напряжений по всевозможным площадкам, проходящим через точку, образует *напряженное состояние* в точке.

1.10. Интегральная связь между внутренними усилиями и напряжениями

Установим связь между внутренними силовыми факторами и напряжениями в поперечном сечении бруса.

Рассмотрим стержень, находящийся в равновесии под действием произвольных нагрузок (рис. 1.12, а).

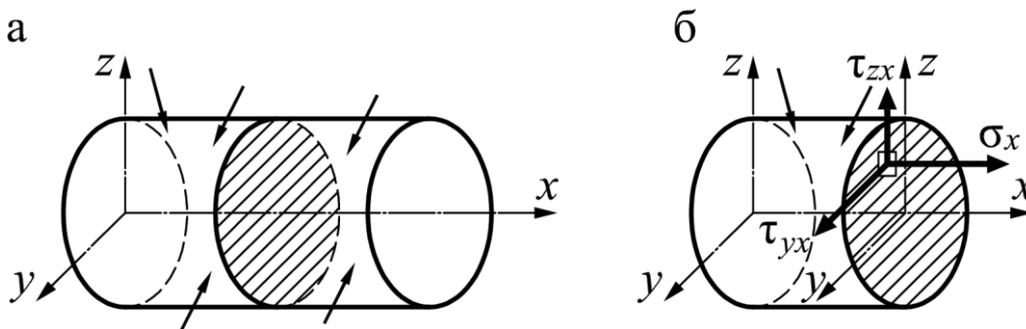


Рис.1.12. Стержень, находящийся в равновесии под действием произвольных нагрузок

Рассечем мысленно стержень плоскостью, перпендикулярной оси.

Разложим полное напряжение p_v на нормальное напряжение $\sigma_x = \sigma$ и касательные напряжения τ_{yx} и τ_{zx} (рис. 1.12, б). Направление нормальной составляющей напряжения вполне определено и здесь достаточно одного касательного напряжения необходимо два индекса: первый индекс указывает направление вектора касательного напряжения; второй – плоскость, на которой это напряжение действует.

Напряжения в данной точке связаны между собой соотношением

$$p_x = \sigma_x^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (1.7)$$

Установим связь между внутренними силовыми факторами и напряжениями в поперечном сечении бруса.

Выделим в окрестности рассматриваемой точки элементарную площадку dA . Умножая напряжения σ , τ_{yx} и τ_{zx} на площадь dA площадки их действия получим внутренние элементарные усилия

$$dN = \sigma \cdot dA; \quad dQ_y = \tau_{yx} \cdot dA; \quad dQ_z = \tau_{zx} \cdot dA$$

Суммируя проекции элементарных сил, а также их моменты относительно осей x , y и z , получим выражения шести составляющих главного вектора внутренних сил

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \, dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{yx} \, dA; \quad Q_z = \int_A \tau_{zx} \, dA; \quad M_y = -\int_A \sigma \cdot z \, dA; \\ M_z &= -\int_A \sigma \cdot y \, dA; \quad M_k = \int_A (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{yx} \cdot z) \, dA. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Полученные выражения определяют равнодействующие внутренних сил через соответствующие напряжения, если установлены законы их распределения по сечению.

Одной из основных задач сопротивления материалов является определение *напряжений через внутренние усилия*. Решить ее можно только рассматривая дополнительно и условия деформирования тела.

1.11. Контрольные вопросы для самопроверки по теме

«Введение»

1. Какие цели и задачи науки о сопротивлении материалов?
2. Что изучает наука о сопротивлении материалов?
3. Что называется деформацией стержня?
4. Что такое упругость тела?
5. Какая деформация называется упругой и пластической?
6. Как классифицируются внешние нагрузки, действующие на сооружения?
7. Что называется брусом, пластинкой и оболочкой?
8. Что такое расчетная схема? Основные направления схематизации реальной конструкции.
9. Какие основные типы опор вы знаете?



10. Какие уравнения статики (равновесия) можно составить для определения опорных реакций?
11. Какие основные допущения приняты в сопротивлении материалов?
12. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса?
13. В чем заключается метод сечения?
14. Какие основные простые виды деформации вызываются внешними силами?
15. Что называется напряжением и какая его размерность?
16. Какие напряжения называются нормальными и касательными?
17. Какая интегральная связь существует между внутренними усилиями и напряжениями?

ТЕМА 2. Геометрические характеристики плоских сечений

2.1. Статические моменты, их свойства.

Определение положения центра тяжести сечения

Рассмотрим произвольную фигуру, расположенную в декартовой системе координат Oz и любую точку $K(y, z)$, принадлежащую этой фигуре (рис. 2.1).

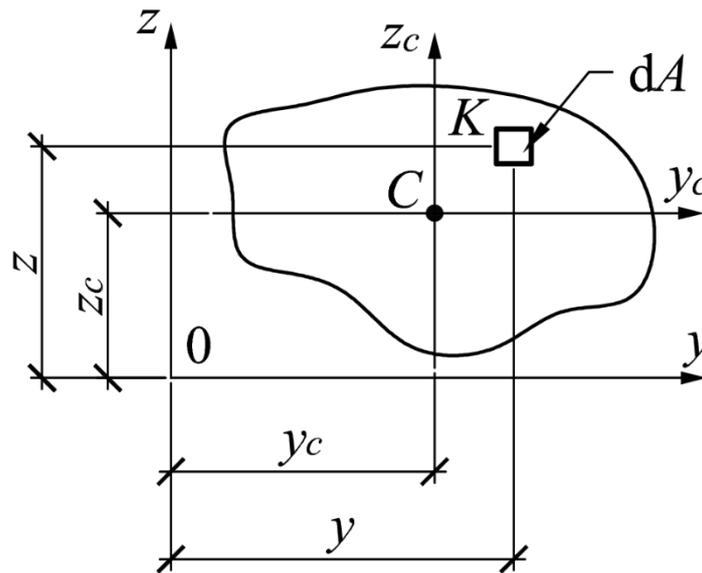


Рис. 2.1. Вычисление статических моментов

Точку $K(y, z)$ ограничим элементарной площадью величиной dA . По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение момента элементарной площади относительно некоторой оси.

Произведение элементарной площади dA на координату z точки $K(y, z)$, принадлежащей элементарной площадке, называется статическим моментом этого элемента площади относительно оси y

$$dS_y = z dA$$

Аналогично,

$$dS_z = y dA \text{ – статический момент элемента площади } dA \text{ относительно оси } z.$$

Определение. Статическим моментом площади фигуры относительно какой-

либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координату точки $K (y, z)$, принадлежащей элементарной площадке,

$$S_y = \int_A z dA ; \quad S_z = \int_A y dA . \quad (2.1)$$

Единицей измерения статического момента является единица длины в третьей степени – см³ (в системе СИ – м³).

Статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Проводя аналогию между моментами сил и моментами площадей, на основании теоремы Вариньона о моменте равнодействующей системы сил из курса теоретической механики, можно записать следующие выражения для моментов площади

$$S_y = A z_c ; \quad S_z = A y_c , \quad (2.2)$$

где

A – площадь рассматриваемой фигуры;

y_c и z_c – координаты ее центра тяжести.

Если провести оси y_c и z_c через центр тяжести фигуры – точку C , то статические моменты относительно этих осей будут равны нулю, то есть

$$S_{y_c} = 0 ; \quad S_{z_c} = 0 \quad (2.3)$$

Определение. Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными.

Относительно этих осей статические моменты равны нулю.

Таким образом, получаем формулы для определения координат центра тяжести фигуры

$$y_c = \frac{S_z}{A} ; \quad z_c = \frac{S_y}{A} . \quad (2.4)$$

При вычислении статических моментов сложной составной фигуры ее разбивают на элементарные или простые части, для каждой из которых площадь и положение ее центра тяжести известны.

В этом случае статические моменты определяются как алгебраические суммы статических моментов каждой элементарной площади

$$S_y = S_y^I + S_y^II + S_y^III + \dots = A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3} + \dots;$$

$$S_z = S_z^I + S_z^II + S_z^III + \dots = A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3} + \dots.$$

Используя последние соотношения, получаем формулы для определения координат центра тяжести сложной составной фигуры

$$y_c = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}, \quad z_c = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

или

$$y_c = \frac{\sum S_z}{\sum A}; \quad z_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}. \quad (2.5)$$

2.2. Осевые и центробежный моменты инерции и их свойства

Определение. Осевым или экваториальным моментом инерции площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на квадрат координаты точки $K(y, z)$, принадлежащей элементарной площадке (рис. 2.2),

$$J_y = \int_A z^2 dA; \quad J_z = \int_A y^2 dA \quad (2.6)$$

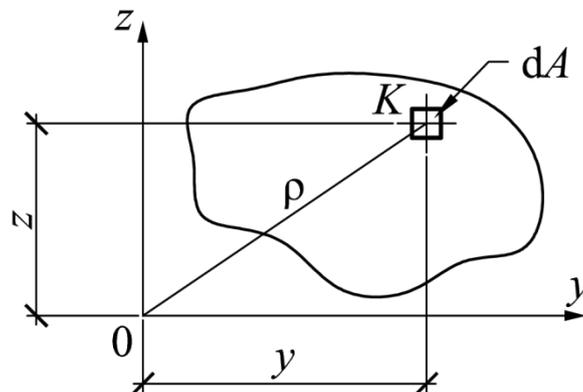


Рис. 2.2. Вычисление моментов инерции

Определение. Полярным моментом инерции площади фигуры относительно

данной точки (полюса O) называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарных площадок на квадраты их расстояний ρ от полюса (рис. 2.2)

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA \quad (2.7)$$

Определение. Центробежным моментом инерции площади фигуры называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координаты точки K (y, z), принадлежащей элементарной площадке (рис. 2.2),

$$J_{yz} = \int_A yz dA \quad (2.8)$$

Единицей измерения момента инерции является единица длины в четвертой степени – см⁴, (в системе СИ – м⁴).

Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны по определению. Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.

2.3. Полярный момент инерции и его свойства

В задачах на кручение стержней круглого поперечного сечения фигурирует понятие полярного момента инерции, который определяется по формуле (2.7)

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA,$$

где

ρ – полярный радиус, или расстояние от начала координат до площадки dA .

Поскольку (рис. 2.2)

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \rightarrow J_{\rho} = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y,$$

То есть

$$J_{\rho} = J_y + J_z = \text{const.} \quad (2.9)$$

Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции.

2.4. Зависимости между моментами инерции фигуры при параллельном переносе осей

Для произвольной фигуры, площадь которой равна A , известны моменты инерции J_{y_c} , J_{z_c} и $J_{y_c z_c}$ относительно центральных осей y_c , z_c .

Необходимо определить моменты инерции J_{y_1} , J_{z_1} и $J_{y_1 z_1}$ относительно новых осей y_1 и z_1 , которые параллельны центральным осям y_c и z_c (рис. 2.3).

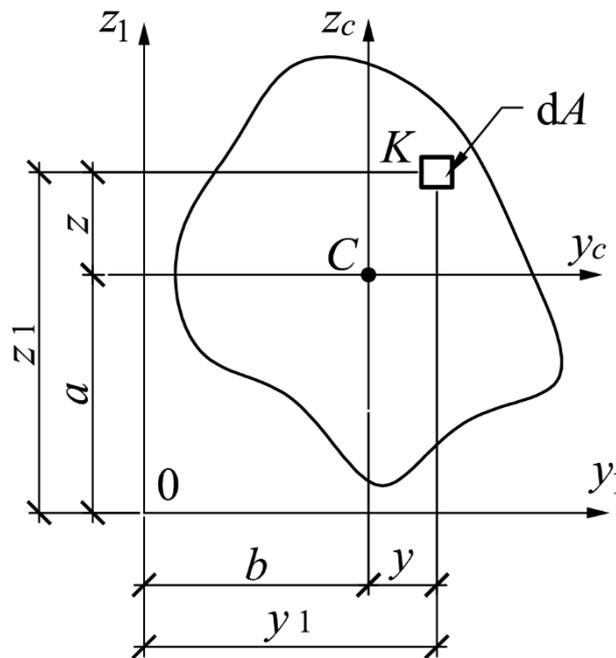


Рис. 2.3. Зависимости между моментами инерции фигуры относительно параллельных осей

Обозначим через a и b координаты точки C в системе координат $y_1 O z_1$ (рис. 2.3).

Из рисунка легко установить зависимости между новыми и старыми координатами элементарной площадки dA

$$y_1 = y + b; \quad z_1 = z + a.$$

Используя определения осевых моментов инерции относительно осей y_1 , z_1 (2.6), находим

$$J_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z + a)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2a \int_A z dA + a^2 \int_A dA = J_{y_c} + 2a S y_c + a^2 A$$

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + b)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA = J_{z_c} + 2bS_{z_c} + b^2 A$$

$$J_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y + b)(z + a) dA = \int_A yz dA + b \int_A z dA + a \int_A y dA + ab \int_A dA = \\ = J_{y_c z_c} + bS_{y_c} + aS_{z_c} + abA.$$

Здесь

$$J_{y_c} = \int_A z^2 dA; \quad J_{z_c} = \int_A y^2 dA; \quad J_{y_c z_c} = \int_A yz dA; \quad S_{y_c} = \int_A z dA; \quad S_{z_c} = \int_A y dA.$$

Так как оси y_c и z_c – центральные оси, то

$$S_{y_c} = S_{z_c} = 0.$$

Окончательно, формулы параллельного переноса осей в этом случае будут иметь вид

$$J_{y_1} = J_{y_c} + a^2 A; \quad J_{z_1} = J_{z_c} + b^2 A; \\ J_{y_1 z_1} = J_{y_c z_c} + abA \quad (2.10)$$

Первые две зависимости формулируются следующим образом:

Момент инерции фигуры относительно любой оси, параллельной центральной, равен моменту инерции фигуры относительно центральной оси, плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь фигуры.

Третья зависимость читается так:

Центробежный момент инерции фигуры относительно произвольных осей, параллельных центральным осям, равен центробежному моменту инерции фигуры относительно центральных осей плюс произведение координат центра тяжести фигуры относительно произвольных осей на площадь фигуры.

Необходимо помнить, что вышеприведенные формулы параллельного переноса осей (2.10) справедливы только в том случае, когда оси y_c и z_c – центральные оси.

Следствие. Осевые моменты инерции фигуры относительно центральных

осей минимальны по сравнению с осевыми моментами инерции этой фигуры относительно любых других параллельных им осей.

2.5. Зависимость между моментами инерции фигуры при повороте осей

Рассмотрим некоторую фигуру, отнесенную к первоначальной декартовой системе координат y_0, z_0 (рис. 2.4).

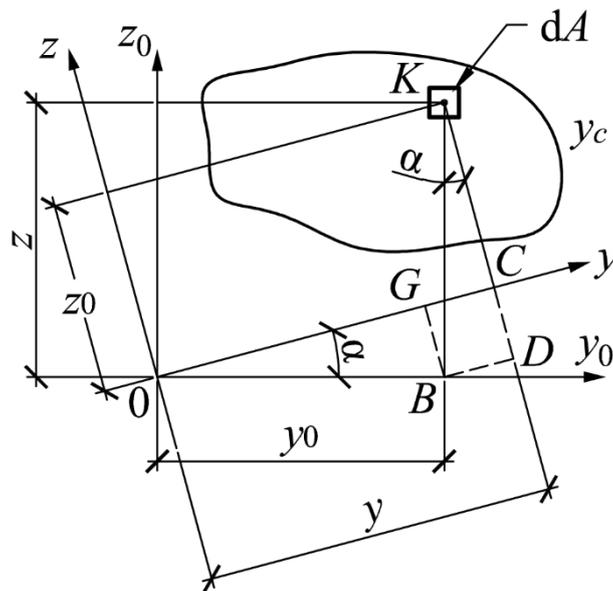


Рис. 2.4. Зависимость между моментами инерции фигуры при повороте осей

Относительно осей y_0 и z_0 известны моменты инерции $J_{y_0}, J_{z_0}, J_{y_0z_0}$.

Необходимо определить осевые и центробежный моменты инерции фигуры относительно новых осей y и z , полученных поворотом первоначальных центральных осей y_0 и z_0 против хода часовой стрелки на угол $\alpha > 0$, то есть необходимо найти J_y, J_z и J_{yz} фигуры, выразив их через J_{y_0}, J_{z_0} и $J_{y_0z_0}$, а также положительный угол α .

Выразим координаты (y и z) точки K (центр тяжести элементарной площадки dA) в новой системе координат через координаты y_0, z_0 в исходной системе координат

$$y_0 = OB, \quad z_0 = BK.$$

Из точки B опустим перпендикуляры на ось y и на продолжение линии KC , в результате получим прямоугольник $BGCD$.

Из прямоугольного треугольника BOG находим

$$BG = OB \cdot \sin \alpha = y_0 \sin \alpha = CD; \quad OG = OB \cdot \cos \alpha = y_0 \cos \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника BKD находим

$$BD = BK \cdot \sin \alpha = z_0 \sin \alpha = GC; \quad KD = KB \cdot \cos \alpha = z_0 \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$y = OC = OG + GC = y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha;$$

$$z = KC = KD - CD = z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha.$$

Из определения осевых моментов инерции фигуры относительно новых осей y и z (2.6) следует

$$\begin{aligned} J_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A z_0^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0 z_0 dA + \sin^2 \alpha \int_A y_0^2 dA. \end{aligned}$$

Аналогично получаем,

$$J_z = \cos^2 \alpha \int_A y_0^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0 z_0 dA + \sin^2 \alpha \int_A z_0^2 dA.$$

Но по определению (2.6)

$$J_{y_0} = \int_A z_0^2 dA; \quad J_{z_0} = \int_A y_0^2 dA; \quad J_{y_0 z_0} = \int_A y_0 z_0 dA.$$

Следовательно, окончательно выражения для осевых моментов инерции фигуры относительно новых осей y и z принимают вид

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{z_0} \sin^2 \alpha - J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha; \\ J_z &= J_{y_0} \sin^2 \alpha + J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.11)$$

По определению центробежного момента инерции фигуры относительно новых осей y и z (2.8) находим

$$J_{yz} = \int_A yz dA = \int_A (y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha) \cdot (z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha) dA =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A y_0 z_0 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0^2 dA + \sin \alpha \cos \alpha \int_A z_0^2 dA - \sin^2 \alpha \int_A y_0 z_0 dA .$$

Следовательно, выражение центробежного момента инерции фигуры относительно новых осей y и z принимает вид

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha \quad (2.12)$$

Таким образом, мы получили формулы, выражающие зависимость между моментами инерции фигуры относительно любых повернутых осей

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{z_0} \sin^2 \alpha - J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha \\ J_z &= J_{y_0} \sin^2 \alpha + J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha$$

Правило знаков. Положительный угол α откладывается от первоначальных осей y_0 и z_0 против хода часовой стрелки.

Эти формулы являются основными для расчетов, связанных с определением моментов инерции относительно любых повернутых осей.

Складывая первое и второе выражения, получим

$$J_y + J_z = J_{y_0} + J_{z_0} = \text{const.} \quad (2.14)$$

Следовательно, при повороте центральных осей сумма соответствующих осевых моментов инерции не изменяется.

2.6. Вычисление моментов инерции простейших фигур

Прямоугольник. Вычислим осевые моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей y и z (рис. 2.5).

По определению осевого момента инерции (2.6)

$$J_y = \int_A z^2 dA ,$$

где

$dA = b \cdot dz$ - площадь элементарного прямоугольника (рис. 2.5).

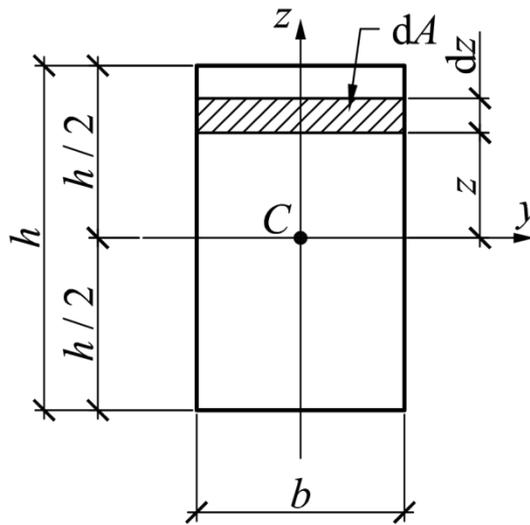


Рис. 2.5. Вычисление осевых моментов инерции прямоугольника

Подставляя под знак интеграла вместо dA ее значение, получим

$$J_y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{b}{3} h^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Следовательно,

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (2.15)$$

Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции прямоугольника относительно оси z

$$J_z = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (2.16)$$

Треугольник. Вычислим осевые моменты инерции треугольника относительно центральных осей y_c и z_c (рис. 2.6).

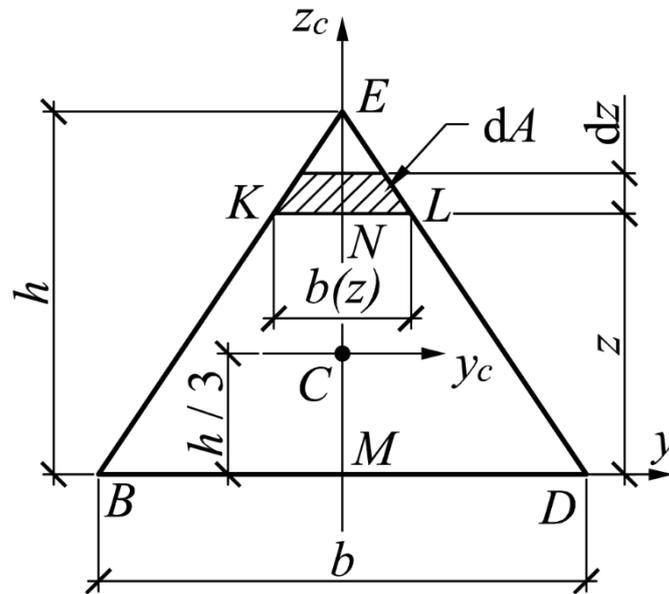


Рис.2.6. Вычисление осевых моментов инерции треугольника

Рассматривая в качестве элементарной площадки dA прямоугольник с основанием $b(z) = KL$ и высотой dz , получаем

$$dA = b(z) \cdot dz.$$

Размер основания $b(z)$ находим из подобия треугольников BED и KEL

$$\frac{KL}{BD} = \frac{EN}{EM}, \quad \frac{b(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \quad b(z) = (h-z) \cdot \frac{b}{h},$$

где

z – расстояние от оси y до элементарной площадки.

$$dA = b(z) dz = \frac{b}{h} (h-z).$$

По определению момента инерции относительно оси y (2.6), получаем

$$J_y = \int_A z^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 \cdot (h-z) dz = \frac{b}{h} \cdot \left(h \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{b}{h} \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

То есть,

$$J_y = \frac{bh^3}{12}$$

Используя формулу моментов инерции при параллельном переносе осей (2.10), получим

$$J_y = J_{yc} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot A.$$

Из этого равенства определяем момент инерции треугольника относительно центральной оси yc

$$J_{yc} = J_y - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}.$$

Следовательно,

$$J_{yc} = \frac{b \cdot h^3}{36}. \quad (2.17)$$

Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции треугольника относительно оси центральной zc

$$J_{zc} = \frac{h \cdot b^3}{36}. \quad (2.18)$$

2.7. Вычисление полярного и осевых моментов инерции круга и кольца

Круг. Вычислим полярный момент инерции круга относительно центра тяжести. В качестве элементарной площади рассмотрим площадь заштрихованного кольца с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ (рис. 2.7).

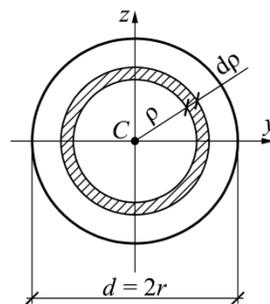


Рис. 2.7. Вычисление полярного момента инерции круга

Площадь этого кольца

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Тогда

$$J_{\rho} = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \rho^2 = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \cdot d\rho \quad (2.19)$$

После интегрирования и подстановки пределов полярный момент инерции круга относительно его центра тяжести C найдем по формуле

$$J_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4. \quad (2.20)$$

Для определения осевых моментов инерции круга относительно центральных осей y и z прежде всего отметим, что очевидно,

$$J_y = J_z,$$

а затем воспользуемся формулой (2.9), на основании которой

$$J_y = J_z = \frac{J_{\rho}}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05 \cdot d^4. \quad (2.21)$$

Кольцо. Для определения полярного момента инерции кругового кольца с наружным диаметром D и внутренним диаметром d (рис. 2.8) воспользуемся формулой (2.19), но интегрирование выполним в пределах от $\frac{d}{2}$ до $\frac{D}{2}$, то есть

$$J_{\rho} = 2\pi \cdot \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 \cdot d\rho.$$

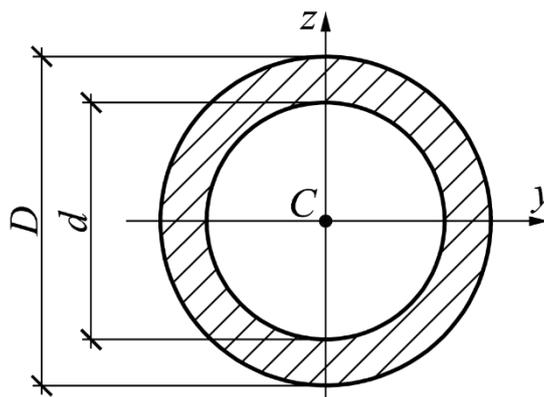


Рис. 2.8. Вычисление полярного момента инерции кругового кольца

В результате получим

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (2.22)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Следовательно, полярный момент инерции кругового кольца равен разности полярных моментов инерции внешнего и внутреннего круга.

Осевые моменты инерции кругового кольца по аналогии будут равны

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4). \quad (2.23)$$

2.8. Главные оси и главные моменты инерции.

Определение положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений

Определение. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (относительно одной – максимум, относительно другой – минимум), называются главными осями.

Определение. Главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются главными центральными осями.

Если, хотя бы одна, из взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат является осью симметрии фигуры, то центробежный момент инерции такой фигуры равен нулю.

В самом деле, для симметричной фигуры всегда можно выделить две элементарные площадки с одинаковой площадью dA , которые имеют одинаковые ординаты z и равные, но противоположные по знаку абсциссы y (рис. 2.9).

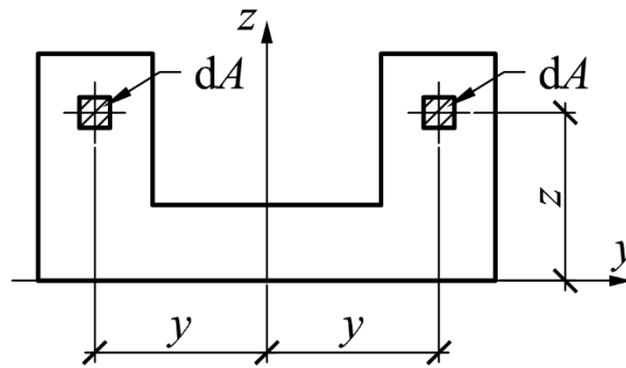


Рис. 2.9. Определение положения главных центральных осей для симметричных фигур

Составляя сумму произведений $y \cdot z \cdot dA$ для элементов, показанных на рис. 2.9, то есть, вычисляя интеграл (2.8), получаем в результате

$$J_{yz} = 0.$$

Вывод. Ось симметрии фигуры всегда является главной центральной осью.

Следовательно, для симметричных фигур положение главных центральных осей определяется достаточно просто.

Для фигуры, имеющей одну ось симметрии, одна из главных центральных осей совпадает с этой осью симметрии, а вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести перпендикулярно к ней.

Для фигуры, имеющей две оси симметрии, главные центральные оси совпадают с этими осями симметрии.

Можно сказать, что, если для какой – либо фигуры два главных осевых момента равны между собой, тогда любая центральная ось является главной (круг, квадрат, правильный треугольник, правильный шестиугольник и т.д.).

Анализируя формулы повернутых осей (2.13), приходим к заключению о том, что при изменении угла поворота α осевые моменты инерции изменяются так, что их сумма остается неизменной (2.14). Это приводит к выводу о том, что можно найти такое значение угла α_0 , при котором один из осевых моментов инерции достигнет минимального значения, а второй – максимального, то есть возникает постановка задачи на нахождение экстремума функции по переменной

α .

Вычисляя производную от J_y или J_z по переменной α , получим

$$\begin{aligned} \frac{dJ_y}{d\alpha} &= 2J_{y_0} \cos \alpha (-\sin \alpha) + 2J_{z_0} \sin \alpha \cos \alpha - 2J_{y_0z_0} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left(\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что (2.12)

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha$$

выражение для производной принимает вид

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = -2 \left(\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha \right) = -2J_{yz}.$$

Приравнивая производную нулю, получаем уравнение, позволяющее найти угол α_0

$$\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{y_0z_0}}{J_{y_0} - J_{z_0}} \quad \text{и} \quad J_{yz} /_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (2.24)$$

Таким образом, эта формула (2.24) определяет положение экстремальных осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, то есть положение главных осей.

Определение. Осевые моменты относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Для определения численных значений главных моментов инерции можно использовать формулы повернутых осей (2.11), подставляя в них значение угла α_0 .

Выполняя эту операцию в общем виде, после некоторых алгебраических преобразований тригонометрических выражений, можно получить формулы для определения главных моментов инерции, не содержащие угла α_0

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4J_{yz}^2}. \quad (2.25)$$

Следовательно, для определения положения главных центральных осей и численных значений главных центральных моментов инерции несимметричных поперечных сечений рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Проводят произвольные оси. Вычисляют статические моменты поперечного сечения относительно этих осей (разбив предварительно сложное поперечное сечение на ряд простых фигур) и находят положение центра тяжести сложного сечения.

2. Проводят через центр тяжести всего сечения оси, параллельные первоначально выбранным произвольным осям, и находят с помощью формул параллельного переноса осей центробежный и осевые моменты инерции сечения относительно этих новых центральных осей.

3. Находят положение главных центральных осей u и v по формуле (2.24).

4. Находят численные значения главных центральных моментов инерции по формулам (2.11) или (2.25).

5. Для проверки правильности вычисления J_u и J_v используют равенства

$$J_{uv} = 0 \quad \text{и} \quad J_u + J_v = J_y + J_z \quad (2.26)$$

Примечание. Следует иметь в виду, что с помощью этих равенств можно проверить только правильность вычисления положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции. Соблюдение этих равенств не гарантирует правильности вычисления положения центра тяжести сечения, а также осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно центральных осей.

2.9. Радиусы инерции.

Вычисление радиусов инерции круга

Иногда при расчетах бывает математически удобно представить момент инерции как произведение площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции сечения

$$J_y = A \cdot i_y^2, \quad (2.27)$$

где

i_y^2 – радиус инерции сечения относительно оси y .

Откуда следует, что

$$i_y = \pm \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad i_z = \pm \sqrt{\frac{J_z}{A}}. \quad (2.28)$$

Радиус инерции круга будет равен

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi d^4}{64 \cdot \pi d^2}} = \pm \frac{d}{4}. \quad (2.29)$$

Радиусы инерции измеряются единицами длины в первой степени – см (в системе СИ – м).

2.10. Моменты сопротивления и их свойства

Определение. Моментом сопротивления плоской фигуры относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости фигуры, называется отношение осевого момента инерции относительно той же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_y = \frac{J_y}{|z_{max}|}; \quad W_z = \frac{J_z}{|y_{max}|}. \quad (2.30)$$

Здесь

W_y и W_z – соответственно моменты сопротивления фигуры относительно осей y и z ;

$|z_{max}|$ и $|y_{max}|$ – расстояния от осей до наиболее удаленных точек фигуры.

Определение. Полярным моментом сопротивления плоской фигуры

относительно какого-либо центра (полюса), лежащего в плоскости фигуры, называется отношение полярного момента инерции плоской фигуры относительно того же центра к расстоянию от центра до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{|\rho_{max}|}, \quad (2.31)$$

где

W_{ρ} – полярный момент сопротивления фигуры относительно центра O ;

J_{ρ} – полярный момент инерции фигуры;

$|\rho_{max}|$ – расстояние от центра до наиболее удаленной точки фигуры.

Моменты сопротивления измеряются единицами длины в третьей степени – см^3 , (в системе СИ – м^3).

Сложные сечения, встречающиеся в различных конструкциях, часто включают элементы стандартных прокатных профилей стали (двутавры, швеллера, уголки и др.).

Расчет геометрических характеристик таких сечений сложен и трудоемок, поэтому в справочных таблицах для этих профилей (в сортаментах) приводятся не только их геометрические размеры, но и такие важные сведения, как положение центра тяжести, моменты инерции, моменты сопротивления и др.

Эти табличные данные намного облегчают вычисление геометрических характеристик сложных составных сечений.

2.11. Контрольные вопросы для самопроверки по теме

«Геометрические характеристики плоских фигур»

1. Какие оси называются центральными?
2. Что называется статическим моментом площади фигуры относительно некоторой оси?
3. Как определяется статический момент фигуры относительно некоторой оси, координаты центра тяжести которой известны?

4. Как вычисляется положение центра тяжести сложных фигур (для симметричных и несимметричных сечений)?
5. Дайте определение осевого и центробежного моментов инерции фигуры.
6. Приведите формулы моментов инерции простейших фигур относительно собственных главных центральных осей (прямоугольник, треугольник, круг).
7. Дайте определение полярного момента инерции.
8. Приведите формулы полярного момента инерции круга и кольца.
9. Как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей, если исходные оси – центральные?
10. Формулы для моментов инерции при повороте осей.
11. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
12. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
13. Как определяется положение главных центральных осей инерции для симметричных сечений?
14. Формула для определения положения главных осей инерции для несимметричных сечений?
15. Определение численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений.
16. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга и кольца.
17. Моменты сопротивления и их свойства.

ТЕМА 3. Центральное растяжение или сжатие прямого бруса

3.1. Центральное (осевое) растяжение или сжатие.

Продольные силы и их определение

Рассмотрим растяжение бруса внешними силами F , приложенными к его концам. Очевидно, если воспользоваться методом сечений, во всех сечениях возникает продольная сила N , равная внешней нагрузке F . При растяжении продольная сила N направлена от сечения, а при сжатии – к сечению (рис. 3.1)

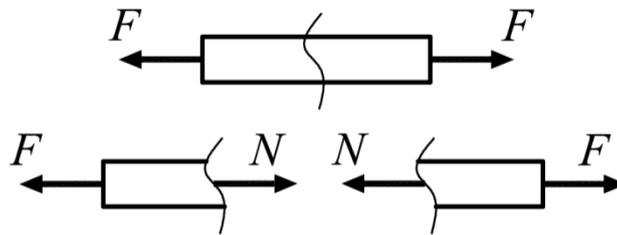


Рис. 3.1. Центральное растяжение

Определение. Центральным растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только продольные силы N , а все прочие внутренние силовые факторы (Q , $M_{изз}$, M_k) равны нулю.

Как показывают эксперименты, при центральном растяжении или сжатии прямого бруса все его волокна, расположенные вдоль геометрической оси, получают одинаковое удлинение или укорочение.

Определение. Брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем.

Определение. Сечения бруса, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

В общем случае, когда стержень подвергается действию системы внешних сил, приложенных не только к его торцам, но и в промежуточных сечениях, значение продольной силы N может быть разным по величине и знаку для

различных поперечных сечений.

Определение. Продольная сила N в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на геометрическую ось стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения

$$N = \left(\sum F_{kx} \right)_{отсеч} . \quad (3.1)$$

Правило знаков. Если продольная сила N вызывает растяжение (удлинение) стержня относительно проведенного сечения, то она считается положительной, а если она вызывает сжатие (укорочение) – отрицательной.

3.2. Эпюры продольных сил. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния бруса (стержня) необходимо знать, как изменяются продольные силы N по его длине. Результат исследования закона распределения продольных сил по длине бруса можно представить в виде графика, называемого эпюрой продольных сил.

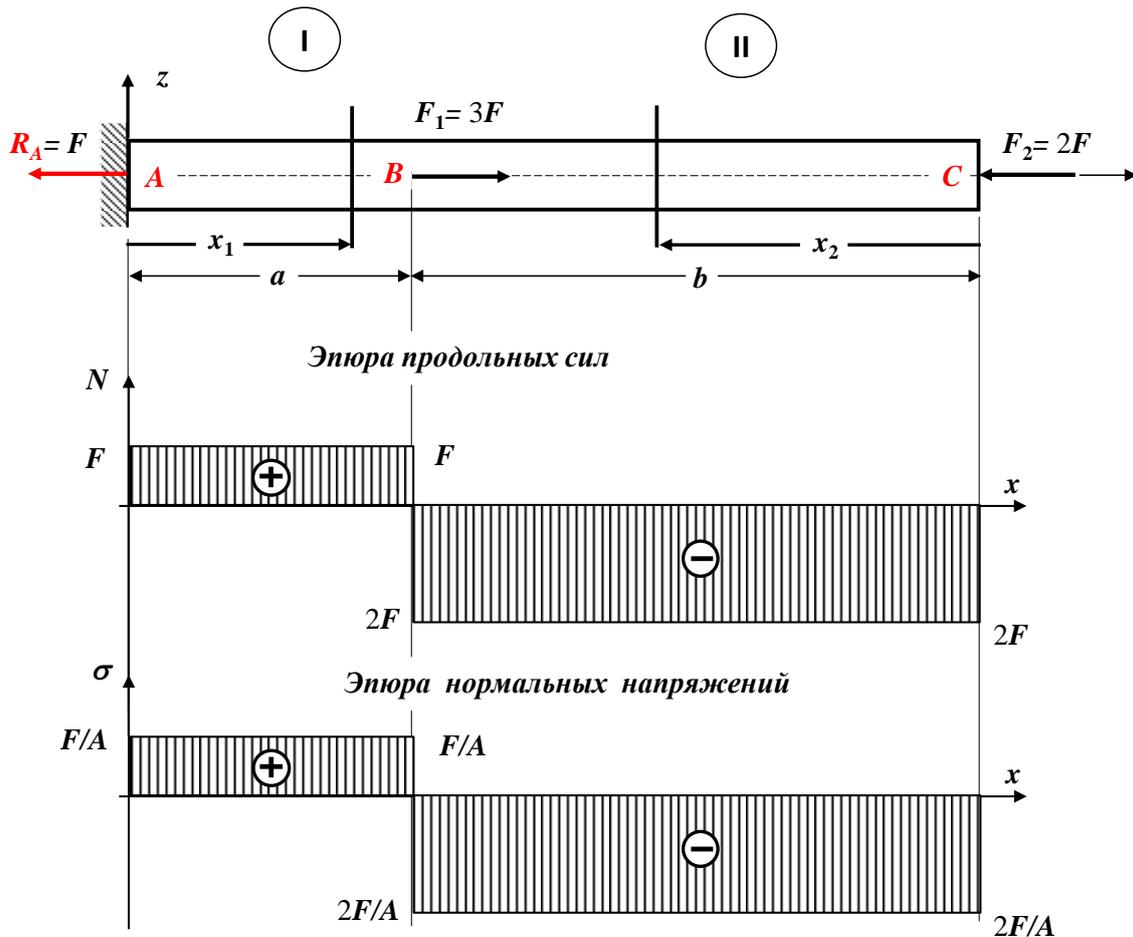
Определение. График, изображающий закон изменения N вдоль геометрической оси стержня, называется эпюрой продольных сил.

Ординаты этой эпюры представляют собой численные значения продольных сил N в соответствующих сечениях стержня.

На рис. 3.2 изображен стержень постоянного поперечного сечения, жестко защемленный в сечении A и нагруженный внешними силами $F_1 = 3F$ и $F_2 = 2F$, направленными вдоль его геометрической оси.

Определим продольные силы, возникающие в его поперечных сечениях, и построим эпюру продольных сил.

Конец стержня защемлен. Очевидно, что опорная реакция R_A будет направлена вдоль оси бруса.


 Рис. 3.2. Расчетная схема. Эюры N и σ

1. Составляем уравнение равновесия бруса в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось x (Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю):

$$\sum F_x = 0; \quad -F_2 + F_1 - R_A = 0 \rightarrow R_A = F_1 - F_2 = 3F - 2F = +F.$$

Следовательно,

$$R_A = +F.$$

Ниже будет показано, что для консольных стержней (брусьев), в виде исключения, опорную реакцию можно не определять, а вести дальнейший расчет со стороны свободного конца стержня.

Численные значения опорной реакции, в случае необходимости, можно определить по эюре N , используя правило «скачков».

2. Разбиваем стержень на участки.

Определение. Участком называется часть стержня, в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия (продольной силы) постоянен.

Границами участка являются:

а) сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы, где начинается или заканчивает свое действие распределенная нагрузка.

б) сечения, где изменяются размеры или форма поперечного сечения;

в) сечения, где изменяется материал стержня.

Таким образом, наш стержень имеет два участка (AB и BC), которые пронумеруем слева направо (рис. 3.2).

Границами участков, в данном примере, являются сечения, в которых приложены сосредоточенные силы.

3. Строим эпюру N по участкам стержня.

Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает стержень на две части.

Выбираем ту часть стержня, на которую действует наименьшее число известных нагрузок.

Для определения внутреннего усилия в сечении совершенно безразлично, какую часть стержня рассматривать.

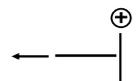
I участок AB : $0 \leq x_I \leq a$ (начало отсчета на левом конце стержня).

Определяем величину продольной силы N на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на геометрическую ось x бруса. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для продольной силы

$$N(x_I) = +R_A = +F.$$

Продольная сила N на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси x . Для построения ее графика



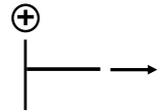
определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = +F \text{ (значение на левой границе участка);}$$

$$N(a) = +F \text{ (значение на правой границе участка).}$$

II участок CB: $0 \leq x_2 \leq b$ (начало отсчета на правом конце стержня).

Определяем величину продольной силы N на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на геометрическую ось x бруса. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.



Составляем выражение для продольной силы

$$N(x_2) = -F_2 = -2F.$$

Продольная сила N на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси x . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = -2F \text{ (значение на правой границе участка);}$$

$$N(b) = -2F \text{ (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям продольных сил N в характерных сечениях стержня строим эпюру (график) этого внутреннего усилия, как показано на рис. 3.2.

Эпюра внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси стержня.

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

4. Делаем проверки правильности построенной эпюры внутреннего силового фактора N .

«Скачки» на эпюре N возможны только в тех сечениях стержня, где приложены сосредоточенные внешние силы. По величине этот «скачок» равен этой силе.

Таким образом, при построении эпюры N рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).

2. Разбиваем расчетную схему стержня на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает стержень на две части.
4. Составляем выражения (уравнения), показывающие закон изменения продольной силы N в пределах рассматриваемого участка. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.
5. По этим выражениям вычисляем численные значения продольных сил в характерных сечениях участка (на его границах).
6. По полученным численным значениям продольных сил N строим эпюру (график) этого внутреннего усилия.
5. Делаем проверки правильности построенной эпюры внутреннего силового фактора N .
8. Отмечаем опасное сечение стержня, где действует максимальное (наибольшее) по абсолютной величине значение продольной силы N .

3.3. Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса

При центральном растяжении или сжатии прямого стержня продольные волокна, расположенные на его поверхности вдоль геометрической оси, получают одинаковое удлинение или укорочение.

Естественно можно предположить, что и внутри стержня все продольные волокна испытывают такое же удлинение, а, следовательно, можно считать, что выполняется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), то есть поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его геометрической оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации.

Поскольку в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении (сжатии) возникает только продольная сила, естественно предположить, что касательные составляющие напряжения будут отсутствовать, а полное

напряжение в сечении будет равно нормальному напряжению.

Продольная сила N , возникающая в поперечных сечениях стержня, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения A , и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями интегральной зависимостью (1.8)

$$N = \int_A \sigma \cdot dA \quad (3.2)$$

Здесь

σ – нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dA ;

A – площадь поперечного сечения бруса.

Произведение $\sigma \cdot dA$ представляет собой элементарную внутреннюю силу ΔN , приходящуюся на площадку dA (рис. 3.3)

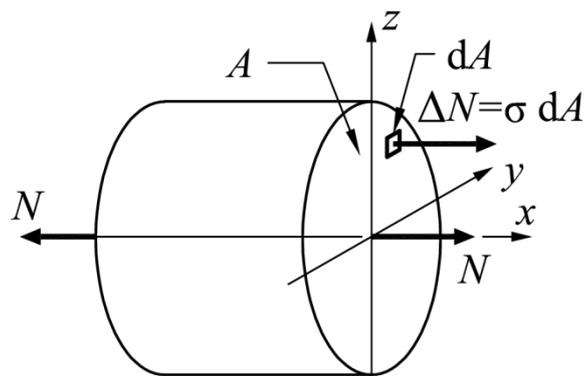


Рис. 3.3. Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса

Представим мысленно стержень, состоящий из бесчисленного множества волокон, параллельных его оси. В результате деформации стержня, в соответствии с гипотезой плоских сечений, два его любые поперечные сечения удаляются друг от друга на некоторую величину, на такую же величину удлиняется каждое волокно. А так как одинаковым удлинениям соответствуют одинаковые напряжения, то и напряжения в поперечных сечениях всех волокон, а, следовательно, и во всех точках поперечного сечения стержня, будут равны между собой, то есть $\sigma = const$.

Это позволяет в выражении (3.2) вынести величину σ за знак интеграла

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int_A dA \quad (3.3)$$

Таким образом, нормальное напряжение в поперечном сечении стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3.4)$$

Знак напряжения зависит от знака продольной силы в рассматриваемом сечении стержня.

Правило знаков. В случае растяжения нормальные напряжения считаются положительными.

Как показывает опыт, нормальные напряжения распределены по всему сечению равномерно, если вблизи этого сечения нет точек приложения внешних сил или каких – то геометрических особенностей.

Это предположение соответствует принципу Сен – Венана.

Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня по его длине строится *эюра нормальных напряжений*. Осью (базисной прямой) этой эюры является отрезок прямой, равный длине стержня и параллельный его оси.

Для стержня постоянного поперечного сечения эюра σ имеет такой же вид, как и эюра N , она отличаются от неё лишь принятым масштабом (рис. 3.2).

Для стержня переменного поперечного сечения вид этих двух эюр различен. В частности, для ступенчатого стержня эюра σ имеет «скачки» не только в сечениях, где приложены сосредоточенные осевые силы (здесь имеет «скачки» эюра N), но и в местах изменения размеров поперечных сечений.

Для стержня, растягиваемого только двумя силами, приложенными по его концам, напряжения постоянны не только по данному сечению, но и вдоль всего стержня. Такое напряженное состояние называют *одноосным или линейным напряженным состоянием* (однородным).

Если в окрестности любой точки стержня вырезать малый элементарный параллелепипед, одна из граней которого совпадает с поперечным сечением, то

площадки этого параллелепипеда будут являться *главными площадками*, а напряжения на них – *главными напряжениями*, причем два из них будут иметь нулевую величину (рис. 3.4)

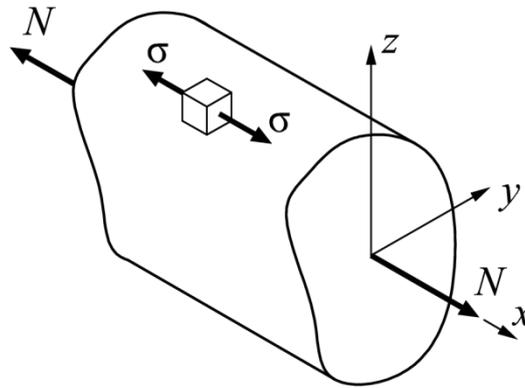


Рис. 3.4. Главные площадки и главные напряжения

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (3.5)$$

В ряде задач продольная сила не является постоянной по длине стержня, например, в задаче о растяжении стержня под действием собственного веса.

Напряженное состояние в таких стержнях не является однородным.

В ступенчатых стержнях напряженное состояние однородно только в пределах отдельных участков, границами которых являются сечения, в которых приложены внешние силы или изменяются поперечные размеры.

3.4. Продольные деформации

Вычисление деформаций и перемещений стержня необходимо для его расчета на жесткость.

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения длиной l , заделанный одним концом и растягиваемый продольным усилием F на другом конце (рис. 3.5).

Под действием силы F стержень удлинится на некоторую величину Δl и его длина станет равной $l + \Delta l$.

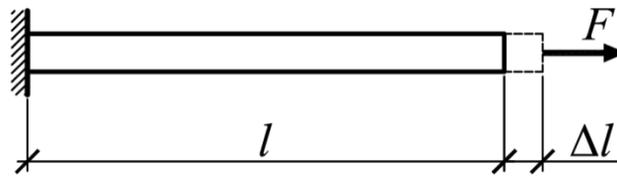


Рис. 3.5. Продольные деформации

Величина Δl называется *полным или абсолютным удлинением (абсолютной продольной деформацией) стержня*.

Абсолютное удлинение, очевидно, зависит от первоначальной длины стержня. Поэтому более удобной мерой деформации стержня является абсолютное удлинение, отнесенное к его первоначальной длине.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.6)$$

Определение. Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине называется *относительной продольной деформацией* или *относительным удлинением* ε .

Считается напряженное состояние в стержне одноосным (однородным), поэтому деформация ε вдоль оси стержня остается одной и той же, равной своему среднему значению по длине l .

Относительное удлинение ε не имеет размерности, это отвлеченное число и часто выражается в процентах от первоначальной длины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\% \quad (3.7)$$

Деформацию удлинения считают положительной, а деформацию сжатия – отрицательной.

3.5. Закон Гука при центральном растяжении или сжатии

Нагрузки и деформации, возникающие в стержне, тесно связаны между собой. Чем больше величина внешней силы, растягивающей стержень, тем больше, при прочих равных условиях, его удлинение. Чем больше площадь

поперечного сечения бруса, тем удлинение меньше. Опытным путём установлена прямая пропорциональная зависимость между величиной растягивающей силы и соответствующей ей упругой деформацией.

Эту зависимость впервые сформулировал английский ученый Роберт Гук.

Определение. При центральном растяжении (сжатии) нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению (закон Гука)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.8)$$

где

E – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости первого рода или модулем Юнга.

Модуль упругости первого рода или модуль Юнга определяется экспериментально, на основе опытов на растяжение специальных образцов из различных материалов: для стали $E = 200$ ГПа; для дюралюминия $E = 72$ ГПа; для меди $E = 120$ ГПа и т. д.

Закон Гука соблюдается в случае так называемых малых деформаций. Для конечных деформаций связь с напряжениями перестает быть линейной.

При решении многих задач закону Гука удобнее придать несколько иной вид, получаемый подстановкой в (3.8) формул (3.4) и (3.6)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (3.9)$$

По этой формуле можно вычислять величину абсолютного удлинения стержня в пределах рассматриваемого участка.

Если напряженное состояние по длине стержня не является однородным, то общее удлинение может быть найдено как интегральная сумма удлинений по бесконечно малым участкам длиной dx

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dx. \quad (3.10)$$

Этой формулой пользуются в случаях, когда какие-либо из величин N , E , A

не постоянны по длине стержня.

Определение. Произведение $E \cdot A$ (модуля Юнга на площадь сечения) называют жесткостью стержня при растяжении.

Чем больше жесткость, тем менее податливым является стержень.

3.6. Поперечные деформации

Опытом установлено, что даже при весьма малых деформациях стержня в продольном направлении его поперечные размеры изменяются. При растяжении тело удлиняется и становится тоньше, а при сжатии укорачивается и становится толще. Это изменение называется поперечной деформацией стержня.

Если обозначить поперечный размер стержня деформации b и тот же размер после деформации b_1 (рис. 3.6) то абсолютная поперечная деформация при растяжении стержня будет равна

$$\Delta b = b - b_1, \quad (3.11)$$

а его относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{b - b_1}{b} = \frac{\Delta b}{b}$$

или

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} \cdot 100\% \quad (3.12)$$

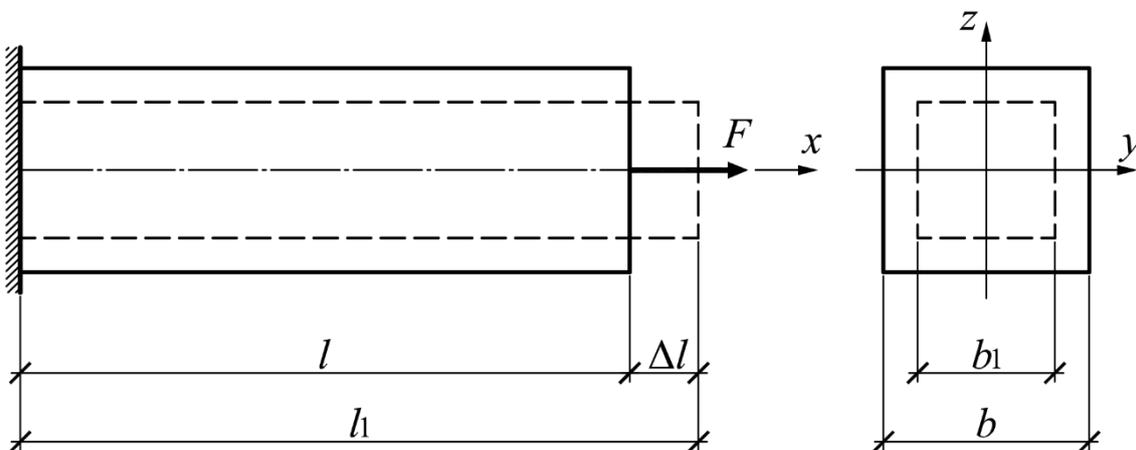


Рис. 3.6. Поперечные деформации

Опыты показывают, что в пределах применимости закона Гука отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации для данного материала есть величина постоянная и равная

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| \quad (3.13)$$

Постоянная величина μ , зависящая от свойств материала, называется *коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона*.

Для различных материалов

$$0 \leq \mu \leq 0,5$$

3.7. Основные характеристики механических свойств материалов и их опытное изучение

Механические характеристики определяются путем испытания стандартных образцов. Образцы испытываются на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, срез. Основным видом испытаний стали является растяжение стандартных круглых или плоских образцов, для которых строятся диаграммы растяжения в координатах сила – абсолютное удлинение / $F = f(\Delta l)$ /.

Для определения обобщенных механических характеристик материала строят диаграммы напряжения в координатах напряжение – деформация / $\sigma = f(\varepsilon)$ /.

Рассмотрим диаграмму напряжения малоуглеродистой стали Ст.3, обладающей высокими пластическими свойствами и широко применяемой в строительстве (рис. 3.7).

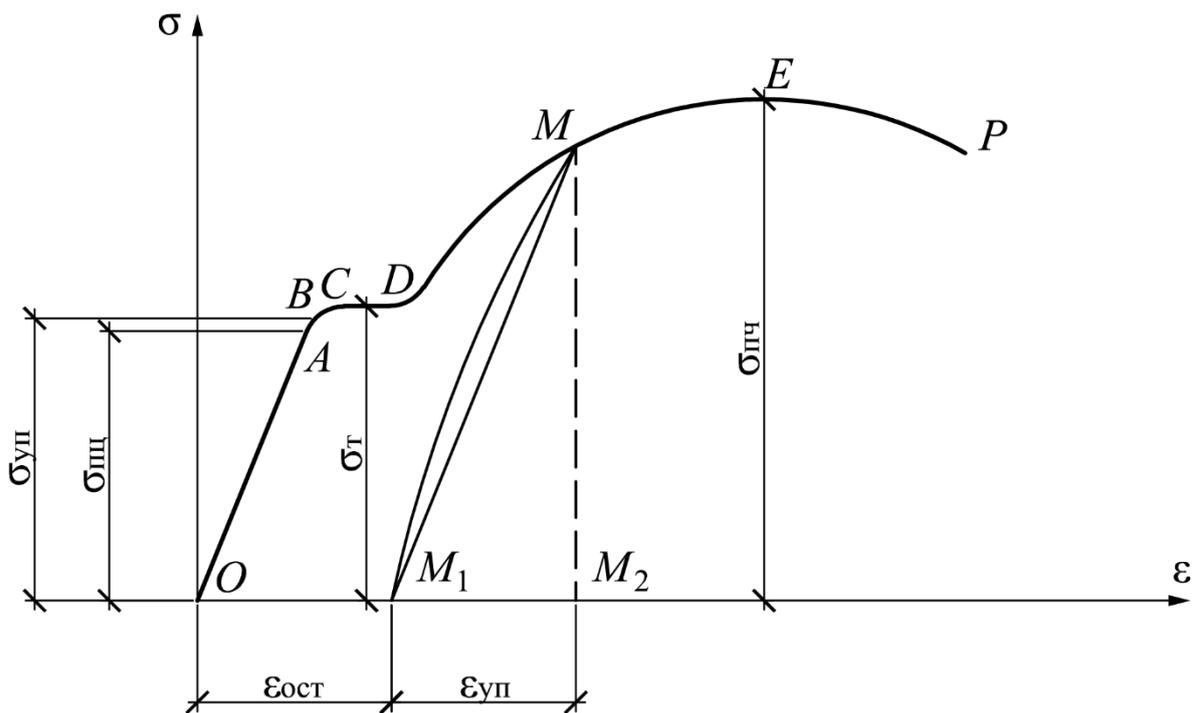


Рис. 3.7. Диаграмма напряжения малоуглеродистой стали

На отрезке OA зависимость между напряжениями и деформациями является линейной.

Определение. Напряжение $\sigma_{пл}$, соответствующее точке A на диаграмме напряжения, называется пределом пропорциональности.

На отрезке AB линейная зависимость нарушается, но при разгрузке образца возникшие деформации исчезают.

Определение. Напряжение $\sigma_{уп}$, соответствующее точке B на диаграмме напряжения, называется пределом упругости.

Практически горизонтальный отрезок CD называется площадкой текучести.

Определение. Напряжение $\sigma_{т}$, соответствующее точке D на диаграмме напряжения, называется пределом текучести.

При напряжениях, равных пределу текучести, в малоуглеродистых сталях развиваются пластические деформации, связанные с необратимыми деформациями сдвига между кристаллами феррита.

После развития определенных пластических деформаций и перестройки кристаллической решетки стали несущая способность стержня увеличивается – рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, происходит упрочнение стали. Участок DE на диаграмме напряжения называется зоной упрочнения. При напряжениях, соответствующих наивысшей точке E на диаграмме напряжения, в определенном участке образца появляется значительное уменьшение размеров поперечного сечения – образуется, так называемая, *шейка*.

Определение. Напряжение $\sigma_{пч} = \sigma_{\sigma}$, соответствующее точке E диаграммы напряжения, называется пределом прочности или временным сопротивлением.

Разрушение образца наступает вскоре после образования шейки.

Рассмотренная диаграмма напряжения называется *условной*, так как при ее построении не учитывается уменьшение площади поперечного сечения при растяжении образца.

Рассмотренные выше напряжения – предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и предел прочности (временное сопротивление) являются основными механическими характеристиками прочности и упругости материала.

Если довести нагружение образца до точки, лежащей выше предела упругости (точка M), а затем снять нагрузку, то диаграмма разгрузки пойдет по прямой MM_1 , параллельной OA , а отрезок OM_1 будет соответствовать остаточной деформации $\varepsilon_{ост}$. Отрезок M_1M_2 характеризует упругую деформацию $\varepsilon_{уп}$ при нагружении образца до точки M .

При повторном нагружении образца от точки M_1 диаграмма нагружения следует по кривой, практически совпадающей с прямой MM_1 . Таким образом, при повторном нагружении как бы повышается предел пропорциональности стали, что связано с изменением микроструктуры в ее кристаллической решетке. При этом площадка текучести исчезает, материал становится более хрупким.

Изменения свойств стали, возникающие при разгрузке и повторном нагружении, называются наклепом.

Участок диаграммы MM_1M называется *петлей гистерезиса*.

Использование реальных диаграмм приводит к большим математическим трудностям. Существуют различные способы аппроксимации этих диаграмм с помощью более простых графиков. Так, например, для стали ВСт. 3, у которой $\sigma_{пл}$, $\sigma_{уп}$, $\sigma_{т}$ имеют близкие значения, принимается диаграмма в виде двух прямых, считая, что все три указанных напряжения соответствуют одной точке.

Такая диаграмма называется диаграммой Прандтля.

3.8. Расчет на прочность при центральном (осевом) растяжении или сжатии. Метод допускаемых напряжений

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение её прочности в условиях эксплуатации.

Зная механические характеристики материалов, можно перейти к оценке прочности и соответствующим расчетам при центральном растяжении и сжатии стержней.

Проектирование начинается с выбора материала. При этом учитываются условия работы сооружения, технология изготовления и монтажа конструкций, а также экономические соображения.

Применяемые в строительстве материалы можно условно разделить на пластичные и хрупкие.

Хрупкие материалы разрушаются при очень малых деформациях, а пластичные получают значительные пластические деформации.

Пластичные материалы почти одинаково работают на растяжение и сжатие, а хрупкие, как правило, плохо работают на растяжение и хорошо сопротивляются сжатию.

Механические испытания материалов дают предельные значения напряжений, достижение которых в элементах конструкций вызывает или

разрушение или появление недопустимо больших деформаций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в её элементах, были ниже предельных напряжений (предел прочности, предел текучести).

В настоящее время применяются два метода расчета на прочность: по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям.

Оба метода преследуют одну цель – обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Наиболее распространенным расчетом на прочность при центральном растяжении (сжатии) является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому наибольшее нормальное напряжение, возникающее в материале, не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы. Эта величина называется допускаемым напряжением, то есть

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (3.14)$$

Определение. Допускаемым напряжением называется наибольшее напряжение, при котором обеспечивается прочность и долговечность проектируемого элемента конструкции.

Допускаемое напряжение обозначается теми же буквами, что и действующие напряжения, но заключаются в квадратные скобки $[\sigma]$ или $[\tau]$.

Допускаемое напряжение составляет некоторую долю предельных, то есть в качестве допускаемого напряжения выбирают величину

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n} \quad (3.15)$$

Определение. Число n , показывающее во сколько раз допускаемое напряжение меньше предельного, называется коэффициентом запаса прочности.

Величина n всегда больше единицы. В машиностроении запасы прочности сравнительно невелики: $n = 1,5 \div 2$. В строительстве они существенно выше: $n = 2 \div 5$, что связано с большей опасностью возможных последствий при аварии.

В случае хрупкого материала за исходное предельное напряжение берется предел прочности. В этом случае допускаемое напряжение равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пч}}{n} \quad (3.16)$$

В случае пластичного материала за исходное предельное напряжение берется предел текучести, то есть

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} \quad (3.17)$$

Необходимость введения коэффициента запаса прочности вызывается следующими обстоятельствами:

- разбросом в определяемых из опытов величинах предела текучести σ_m и предела прочности $\sigma_{пч}$ для данного материала;
- неточностью методов расчета;
- неточностью изготовления деталей;
- отклонением расчетных схем от допущений, принятых при выводе расчетных формул и т.д.

На величину коэффициента запаса прочности влияет ряд факторов:

- качество и степень однородности материала. Чем однороднее материал, тем меньше можно брать запас прочности ($n_{ст} = 1,5 \div 3$; $n_{бетона} = 3$; $n_{дерево} = 3 \div 5$ и т.д.);
- долговечность и значимость сооружения;
- уровень развития техники и т.д.

Величины допускаемых напряжений устанавливаются СНиП (Строительные нормы и правила).

Максимальное нормальное напряжение в стержне при центральном растяжении (сжатии) возникает в сечении, где продольная сила достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором продольная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение N_{max} , называется опасным сечением стержня по нормальным напряжениям.

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения в стержне при центральном растяжении (сжатии) будут равны

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \quad (3.18)$$

Следовательно, условие прочности при центральном растяжении или сжатии по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma] \quad (3.19)$$

В этой формуле

σ_{max} – максимальное нормальное напряжение в стержне;

N_{max} – максимальная продольная сила в стержне;

A – площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

При расчете элементов конструкции, работающих на центральное растяжение или сжатие, встречаются задачи трех типов:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют продольную силу N и из условия прочности находят величину требуемой площади поперечного сечения

$$A_{\text{треб}} \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]} \quad (3.20)$$

б). Определение допускаемой нагрузки. Решение второй задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям). По известной площади A и допускаемому напряжению $[\sigma]$ определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A. \quad (3.21)$$

По найденному значению $[N]$ определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в). Проверочный расчет. По известным значениям N , A , $[\sigma]$ проверяют

выполнение условия прочности (3.19).

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma].$$

3.9. Понятие о расчете по предельным состояниям.

Расчет по I–й группе предельных состояний

При помощи одного коэффициента запаса прочности трудно учесть все факторы, которые для различных сооружений могут проявляться в разных комбинациях. С целью более точного учета влияния различных факторов на величину запаса прочности советские ученые предложили в 1955 году новый метод расчета по предельным состояниям.

Определение. Предельным называют такое состояние конструкции, при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.

Нормами установлены три вида предельных состояний:

– Первое предельное состояние, определяемое несущей способностью (прочностью или устойчивостью). На это предельное состояние рассчитываются все конструкции.

– Второе предельное состояние, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

– Третье предельное состояние, определяемое образованием или раскрытием трещин (относится, в основном, к железобетонным конструкциям).

В сопротивлении материалов рассматривается, главным образом, первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе.

При расчете по предельным состояниям запас прочности определяется методом частных коэффициентов.

В этом случае коэффициент запаса находится как произведение трех коэффициентов, учитывающих влияние различных факторов: перегрузок (случайные отклонения от нормативных нагрузок), неоднородности материала и условий работы.

1. Коэффициент перегрузки n учитывает неточности в определении нагрузки. Фактическая нагрузка может отклоняться от нормативной

(устанавливается СНиП) в неблагоприятную сторону. Для учета такого отклонения и вводят коэффициент перегрузки, который может быть $n > 1$, а в отдельных случаях $n < 1$. Нормативную нагрузку умножают на этот коэффициент и расчет производят на действие расчетной нагрузки

$$N_{расч} = N_1 \cdot n_1 + N_2 \cdot n_2 + \dots + N_n \cdot n_n, \quad (3.22)$$

где

N_1, N_2, \dots, N_n – нормативные усилия от различных видов нагрузки.

n_1, n_2, \dots, n_n – соответствующие этим нагрузкам коэффициенты перегрузки.

Полные данные о величинах коэффициентов перегрузки приведены в СНиП.

2. Коэффициент однородности k вводят для учета возможности снижения прочности вследствие неоднородности материала, из которого изготовлена конструкция. Чем однороднее материал, тем ближе к единице коэффициент k .

3. Коэффициент условий работы m учитывает специфические особенности работы материала элементов конструкции и их соединений, например, наличие агрессивной среды, влажности, резких смен температуры и т.д. При неблагоприятных условиях принимают $m < 1$, при нормальных $m = 1$, при особо благоприятных в отдельных случаях $m > 1$.

При поставках партий материала, например, стали, бетона, цемента, испытывают образцы, изготовленные из этого материала. Для каждого материала установлено нормативное сопротивление $R^н$, то есть напряжение, которое как минимум должно быть обеспечено при испытании образцов данной марки.

Для пластичных материалов за нормативное сопротивление принимают наименьшее значение предела текучести σ_m , а для хрупких – предела прочности $\sigma_{пч}$.

При расчете на прочность вводят расчетное сопротивление R данного материала, определяемое как произведение нормативного сопротивления $R^н$ на

коэффициент однородности k и условий работы m :

$$R = R^H \cdot k \cdot m \quad (3.23)$$

Следовательно, условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по методу предельных состояний имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N_{расч}}{A} \leq R \quad (3.24)$$

В этой формуле

σ_{max} – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N_{расч}$ – расчетная продольная сила в стержне;

A – площадь поперечного сечения стержня;

R – расчетное сопротивление.

Три вида расчета на прочность при центральном растяжении (сжатии) по методу предельных состояний:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют продольную силу N и из условия прочности находят величину требуемой площади поперечного сечения

$$A_{треб} \geq \frac{N_{расч}}{R} \quad (3.25)$$

б). Определение допускаемой нагрузки. Решение этой задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны расчетному сопротивлению R). По известной площади A и расчетному сопротивлению R определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[N]_{расч} \leq R \cdot A. \quad (3.26)$$

По найденному значению $[N]_{расч}$ определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в). Проверочный расчет. По известным значениям N , A , R проверяют выполнение условия прочности (3.24)

$$\sigma_{max} = \frac{N_{расч}}{A} \leq R$$

3.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Центральное растяжение или сжатие прямого бруса»

1. Какой вид деформации называется центральным растяжением (сжатием)?
2. В чем заключается метод сечений?
3. Как определяется численное значение продольной силы?
4. Что называется эпюрой продольных сил?
5. План построения эпюры продольных сил.
6. По какой формуле определяются нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) в произвольной точке поперечного сечения стержня?
7. Что называется коэффициентом поперечной деформации?
8. Сформулируйте закон Гука. Как он выражается математически?
9. По какой формуле определяется величина продольной деформации участка стержня?
10. Что характеризует модуль упругости первого рода (модуль Юнга) и какая его размерность?
11. От чего зависит численное значение модуля упругости первого рода (модуля Юнга)?
12. Что называется жесткостью стержня при центральном растяжении и сжатии?
13. Как строятся диаграммы растяжения и напряжения?
14. Перечислите характерные точки диаграмм растяжения и напряжения.
15. В чем разница между пластичными и хрупкими материалами?
16. Перечислите основные механические характеристики материалов.
17. Дайте определение допускаемого напряжения и коэффициента запаса

прочности.

18. Как определяется величина допускаемого напряжения для пластичных и хрупких материалов?
19. Какие факторы влияют на величину допускаемого напряжения и коэффициента запаса прочности?
20. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений?
21. Какие три типа задач, вытекают из условия прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений?
22. Какое состояние конструкции называется предельным?
23. Сколько предельных состояний Вы знаете?
24. Что учитывает коэффициент перегрузки?
25. Как определяется расчетная нагрузка?
26. Что учитывает коэффициент однородности?
27. Что учитывает коэффициент условий работы?
28. Как определяется величина нормативного сопротивления?
29. Как определяется величина расчетного сопротивления?
30. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу предельных состояний.
31. Три вида расчета на прочность по методу предельных состояний?

ТЕМА 4. Напряженное состояние в точке

4.1. Виды напряженного состояния

Взаимодействие между частями элемента конструкции характеризуется нормальными и касательными напряжениями в каждой точке элемента. Их значения зависят от ориентации сечения, проведенного через данную точку.

Определение. Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется напряженным состоянием в этой точке.

Исследуя напряженное состояние в рассматриваемой точке тела, в окрестности ее выделяют элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами ребер dx , dy , dz .

Полные напряжения на гранях параллелепипеда раскладывают на составляющие по координатным осям. Изменяя ориентацию элементарного объема всегда можно найти такое его положение, при котором по всем его граням касательные напряжения будут равны нулю.

Определение. Грани элементарного объема (площадки), на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными площадками, а нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, – главными напряжениями.

При исследовании вопросов прочности в сложном напряженном состоянии существенное значение имеет вид напряженного состояния. Значения главных напряжений определяют вид напряженного состояния. Существует три основных вида напряженного состояния.

Определение. Напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю, называется одноосным или линейным напряженным состоянием (рис. 4.1, а).

Определение. Напряженное состояние, в котором два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, называется двухосным или плоским напряженным состоянием (рис. 4.1, б).

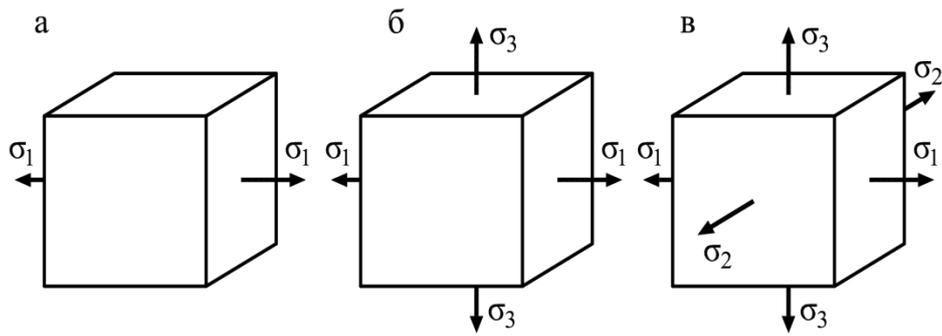


Рис. 4.1. Виды напряженного состояния

Определение. Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля, называется пространственным или трехосным напряженным состоянием (рис. 4.1, в).

4.2. Одноосное напряжённое состояние.

Напряжения в наклонных сечениях бруса при центральном растяжении (сжатии)

Имея эпюру продольных сил N , нормальные напряжения в любом поперечном сечении стержня при центральном растяжении (сжатии) достаточно просто определяются по формуле (3.4)

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Во многих задачах возникает необходимость определения напряжений в наклонных сечениях.

Рассмотрим напряжения в наклонных сечениях бруса. Обозначим α угол между наклонным сечением $n - n_2$ и поперечным сечением $n - n_1$ (рис. 4.2, а).

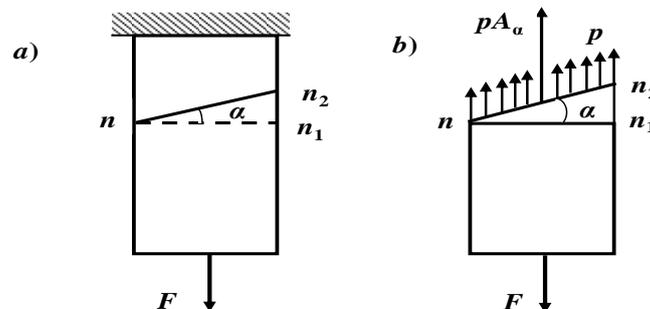


Рис. 4.2. Напряжения в наклонных сечениях бруса

Правило знаков. Будем считать угол α положительным, когда поперечное

сечение для совмещения с наклонным сечением надо повернуть на этот угол против хода часовой стрелки (рис 4.3, а).

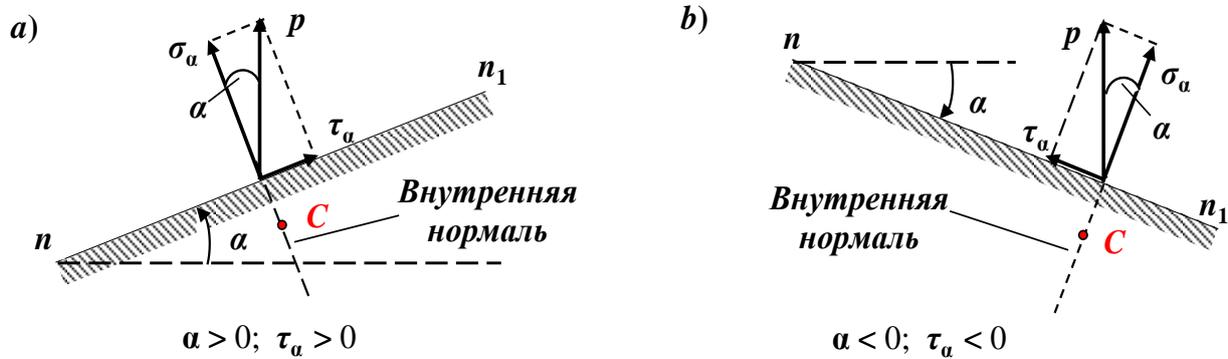


Рис.4.3. Напряжения в наклонных сечениях бруса

Установим, чему равно напряжение, возникающее в любом наклонном сечении, нормаль к плоскости которого составляет с осью стержня угол α .

Как известно удлинения всех волокон, параллельных оси бруса, при его растяжении или сжатии одинаковы. Это позволяет предполагать, что напряжения p во всех точках наклонного (так же, как и поперечного) сечения одинаковы.

Рассмотрим нижнюю часть бруса, отсеченную сечением $n - n_2$ (рис. 4.2, б). Из условия ее равновесия следует, что напряжения p параллельны оси бруса и направлены в сторону, противоположную внешней силе F . Следовательно,

$$N = F = p \cdot A_\alpha \quad (4.1)$$

откуда

$$p = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha, \quad (4.2)$$

где

A_α – площадь наклонного сечения $n - n_2$ ($A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$);

A – площадь поперечного сечения $n - n_1$;

$\sigma = \frac{N}{A}$ – нормальное напряжение в поперечном сечении бруса.

Разложим напряжение p на два составляющих напряжения: нормальное σ_α , перпендикулярное к плоскости наклонного сечения $n - n_2$, и касательное τ_α ,

параллельное этой плоскости (рис. 4.3).

Значения σ_α и τ_α будут равны

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \quad (4.3)$$

$$\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (4.4)$$

Правило знаков. Нормальное напряжение σ считается положительным при растяжении. Касательное напряжение τ положительно, если изображающий его вектор стремиться вращать тело относительно любой точки C , лежащей на внутренней нормали к сечению, по ходу часовой стрелки (рис. 4.3.).

Полученные соотношения называются формулами для определения напряжений на наклонных площадках при центральном растяжении или сжатии.

Из формулы (4.3) следует, что нормальные напряжения σ_α имеют значения от $\sigma = \frac{F}{A}$ (при $\alpha = 0$) до $\sigma = 0$ (при $\alpha = 90^\circ$).

Таким образом, наибольшие (по абсолютной величине) нормальные напряжения имеют место в поперечных сечениях бруса.

Определение. Плоскости сечений, в которых нормальные напряжения достигают наибольшего и, соответственно, наименьшего значений, называются главными плоскостями (главными площадками).

Определение. Наибольшее и наименьшее нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются главными напряжениями.

Определение. Направления, по которым действуют главные напряжения, называются главными направлениями.

Из формулы (4.4) следует, что касательные напряжения τ_α имеют значения от $\frac{\sigma}{2} = + \frac{F}{2A}$ (при $\alpha = 45^\circ$) до $\frac{\sigma}{2} = - \frac{F}{2A}$ (при $\alpha = -45^\circ$).

В этом случае

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma}{2} \quad (4.5)$$

Касательные напряжения $\tau_\alpha = 0$ при $\alpha = 0$ и при $\alpha = 90^\circ$.

Таким образом, в площадках с наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями (главные площадки) касательные напряжения равны нулю.

Так как на главных площадках касательные напряжения отсутствуют, то главные площадки – это площадки на которых касательные напряжения равны нулю.

Рассмотрим напряжения, возникающие в двух произвольно расположенных, взаимно перпендикулярных сечениях при одноосном (центральном) растяжении – сжатии стержня.

Определим нормальные напряжения σ_{α_1} и σ_{α_2} в двух наклонных сечениях $n_1 - n_1$ и $n_2 - n_2$, перпендикулярных друг к другу (рис. 4.4).

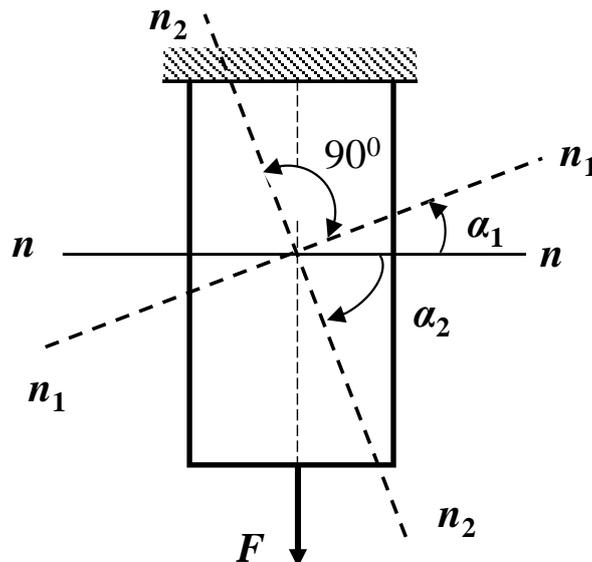


Рис. 4.4. Напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам

Углы α_1 и α_2 наклона этих сечений к плоскости поперечного сечения бруса находятся между собой с учетом правила знаков в зависимости

$$\alpha_2 = -(90^\circ - \alpha_1) = \alpha_1 - 90^\circ.$$

По формуле (4.3) имеем

$$\sigma_{\alpha_1} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_1, \text{ а } \sigma_{\alpha_2} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_2 = \sigma \cdot \cos^2 (\alpha_1 - 90^\circ) = \sigma \cdot \sin^2 \alpha_1$$

Сложив нормальные напряжения σ_{α_1} и σ_{α_2} , получим

$$\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma \cdot \sin^2 \alpha_1 = \sigma \quad (4.6)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная.

4.3. Закон парности касательных напряжений

Определим касательные напряжения τ_{α_1} и τ_{α_2} в двух наклонных сечениях n_1 – n_1 и n_2 – n_2 , перпендикулярных друг к другу (рис. 4.4).

По формуле (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha_2} &= \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_2 = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2(\alpha_1 - 90^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha_1) = \\ &= -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_1 = -\tau_{\alpha_1} \end{aligned}$$

То есть

$$\tau_{\alpha_2} = -\tau_{\alpha_1} \quad (4.7)$$

Таким образом, касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку (закон парности касательных напряжений).

4.4. Плоское напряжённое состояние

При плоском напряженном состоянии на одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку, касательные и нормальные напряжения равны нулю.

В теории плоского напряженного состояния можно рассматривать две основные задачи:

Прямая задача. В точке известны положения главных площадок и значения главных напряжений. Требуется определить нормальные и касательные напряжения по наклонным площадкам.

Обратная задача. В точке известны нормальные и касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку. Требуется найти главные напряжения и положение главных площадок.

Наиболее часто встречается обратная задача, когда необходимо определить главные напряжения и положение главных площадок.

Математически эта задача идентична задаче определения главных моментов инерции и определения положения главных осей инерции.

В связи с этим, соответствующие формулы будут иметь вид

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2} \quad (4.8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} \quad (4.9)$$

Знак (+) перед корнем берется, если $\sigma_x > \sigma_z$, знак (-) перед корнем берется, если $\sigma_x < \sigma_z$.

Угол, соответствующий экстремальному значению касательных напряжений, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha'_0 = - \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{zx}} \quad (4.10)$$

При этом экстремальные касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных к главным площадкам под углом $\pm 45^\circ$, и равны

$$\tau_{\alpha'_0} = \tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.11)$$

Определение. Площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения, называются площадками сдвига.

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными значениями касательных напряжений равны полу сумме главных напряжений

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (4.12)$$

4.5. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Напряженное состояние в точке»

1. Что называется напряженным состоянием в точке?
2. Какие площадки называются главными?

3. Какие напряжения называются главными?
4. Какие три основных вида напряженного состояния в точке Вы знаете?
5. Какое напряженное состояние называется одноосным или линейным?
6. Какое напряженное состояние называется двухосным или плоским?
7. Какое напряженное состояние называется пространственным или трехосным или объемным?
8. По какой формуле определяются нормальные напряжения на наклонной площадке при центральном растяжении (сжатии)?
9. По какой формуле определяются касательные напряжения на наклонной площадке при центральном растяжении (сжатии)?
10. В каких сечениях бруса нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) принимают наибольшее значение?
11. В каких сечениях бруса касательные напряжения при центральном растяжении (сжатии) принимают наибольшее значение?
12. Чему равно касательное напряжение на главной площадке?
13. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?
14. В чем суть закона парности касательных напряжений?
15. Какие две основные задачи рассматриваются в теории плоского напряженного состояния?
16. По какой формуле определяется положение главных площадок при плоском напряженном состоянии?
17. По какой формуле определяются численные значения главных напряжений при плоском напряженном состоянии?
18. Как расположены площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения при плоском напряженном состоянии?



19. Как называются площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения?
20. Чему равны нормальные напряжения на площадках с максимальными (экстремальными) касательными напряжениями при плоском напряженном состоянии?

ТЕМА 5. Кручение

5.1. Основные понятия. Крутящий момент

Определение. Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_k , а все прочие внутренние силовые факторы (N , Q , $M_{изг}$) равны нулю.

Таким образом, кручение – это такая деформация, которая сопровождается поворотом поперечных сечений стержня вокруг некоторой оси при неизменном расстоянии точек этих сечений от названной оси. Если сечения стержня имеют две оси симметрии, то за ось вращения принимается геометрическая ось стержня. Такая деформация, в частности, имеет место в том случае, когда к концам стержня приложены силы, которые сводятся к противоположно направленным парам сил, действующим в плоскостях концевых поперечных сечений и имеющим равные моменты.

С кручением на практике приходится встречаться достаточно часто: оси подвижного состава, трансмиссионные валы, винтовые пружины, элементы пространственных конструкций и обыкновенный замочный ключ – все это примеры стержней, работающих на кручение.

Исследования показали, что характер деформации скручиваемого стержня в значительной степени зависит от формы его поперечного сечения. Среди стержней с различными формами поперечных сечений, подвергаемых кручению, наибольшее распространение получили стержни с круглым или кольцевым сечением.

Определение. Стержни, работающие на кручение, называются валами.

Если прямой стержень находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к стержню, равна нулю ($\sum M_{(x)} = 0$).

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала,

определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений.

Определение. Крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения.

В простейшем случае, когда стержень нагружен только двумя равными друг другу по величине и направленными в противоположные стороны внешними моментами, крутящий момент в любом поперечном сечении стержня по величине равен внешнему моменту.

В более сложных случаях, когда к стержню приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты в поперечных сечениях различных участков будут не одинаковы.

Изменение крутящих моментов по длине стержня изображают графически в виде эпюр крутящих моментов.

Определение. График, изображающий закон изменения M_k вдоль геометрической оси стержня, называется эпюрой крутящих моментов.

Ординаты этой эпюры представляют собой численные значения крутящих моментов M_k в соответствующих сечениях стержня.

Правила построения этих эпюр M_k принципиально ничем не отличаются от построения эпюр других внутренних усилий.

При расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента не имеет особого значения, но для удобства построения эпюр M_k обычно принимают следующее правило знаков.

Правило знаков. Крутящий момент в рассматриваемом сечении стержня считается положительным, если при взгляде со стороны проведенного сечения внешний момент направлен против хода часовой стрелки.

5.2. Определение крутящих моментов по мощности « N » и числу оборотов вала « n »

При расчете валов на прочность обычно задается не крутящий момент, а мощность N , передаваемая валом, и число оборотов вала n .

Выведем формулу для определения крутящего момента по заданной мощности N и числу оборотов вала n .

Из механики нам известно, что мощность вращающего момента равна моменту, умноженному на угловую скорость ω , то есть

$$W = M_k \cdot \omega = M_k \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ (кг·м/сек)}$$

С другой стороны, если мощность N задана в лошадиных силах (1 л.с. = $75 \frac{\text{кгм}}{\text{сек}}$), то

$$W = 75 \cdot N \text{ (кг·м/сек)}$$

Следовательно,

$$M_k \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = 75 \cdot N.$$

Откуда

$$M_k = \frac{30 \cdot 75 \cdot N}{\pi \cdot n} = 716,2 \cdot \frac{N}{n} \text{ (кг·м)}$$

или

$$M_k = 71620 \cdot \frac{N}{n} \text{ (кг·см)}, \quad (5.1)$$

где

N – мощность, передаваемая валом, в л.с.;

n – число оборотов вала, в об/мин.

Если мощность N задана в киловаттах (1 квт. ≈ 1.36 л.с.), то

$$M_k = 71620 \cdot 1.36 \cdot \frac{N}{n} = 97360 \cdot \frac{N}{n} \text{ (кг·см)}, \quad (5.2)$$

где

N – мощность, передаваемая валом, в квт.;

n – числу оборотов вала, в об/мин.

Полученные формулы показывают, что скручивающий момент тем меньше, чем больше число оборотов вала. Следовательно, при применении быстроходной машины, делающей большое число оборотов, нагрузка на вал при одной и той

же мощности получается меньше, чем в тихоходной машине, поэтому диаметр вала, а, следовательно, и размеры машины при больших числах оборотов уменьшаются. Это объясняется тем, что при работе с большим числом оборотов увеличивается путь, на котором производится работа, а потому получается экономия в силе. На этом основывается выгодность применения быстроходных машин.

5.3. Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого поперечного сечения

При выводе формул для определения напряжений и угла закручивания при кручении вала круглого сечения предполагаем, что материал работает в пределах пропорциональности, то есть выполняется закон Гука.

Анализируя напряженное состояние стержней при кручении необходимо исходить из действующих в нем внутренних усилий.

В рассматриваемом случае в сечении вала возникает единственный силовой фактор – крутящий момент M_k (рис. 5.1), так как, согласно определению, все прочие внутренние силовые факторы (N , Q , $M_{изг}$) равны нулю.

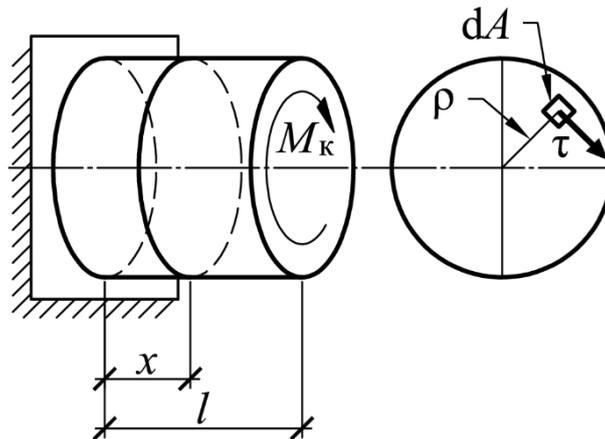


Рис. 5.1. Кручение вала круглого сечения

Составим уравнение равновесия (статики)

$$\Sigma M_x = 0 \rightarrow M_k - \int \tau \cdot \rho \cdot dA = 0.$$

Откуда

$$M_k = \int \tau \cdot \rho \cdot dA, \quad (5.3)$$

где

τ – касательное напряжение, действующее в элементарной площадке dA , расположенной на расстоянии ρ от центра сечения.

Проведем опыт на закручивание стержня. Предварительно нанесем на вал сетку, состоящей из линий параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги (рис. 5.2).

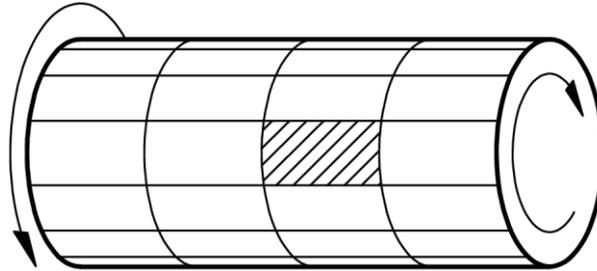


Рис. 5.2. Кручение вала круглого сечения

Для выяснения характера распределения напряжений по сечению рассмотрим картину деформации вала при кручении.

Как показывают эксперименты, после закручивания прямоугольники, образованные сеткой, перекашиваются. Контуры поперечных сечений (параллельных кругов) не искривляются и расстояния между ними не изменяются, а ось стержня остается прямолинейной. Радиусы, проведенные в торцевых сечениях вала, остаются прямыми.

Так как расстояния между поперечными сечениями практически не меняются, то это означает, что продольные волокна не удлиняются и не укорачиваются.

При кручении происходит поворот одного сечения относительно другого на некоторый угол φ , называемый *углом закручивания*.

Это свидетельствует о том, что при кручении возникает деформация чистого сдвига.

На основании этих экспериментальных данных строится теория кручения круглых стержней, в основу которой положена гипотеза плоских сечений.

Предположим, что:

– поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его продольной оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (гипотеза плоских сечений);

– радиусы поперечных сечений при деформации не искривляются и сохраняют свою длину;

– расстояния (вдоль оси стержня) между поперечными сечениями стержня при деформации не изменяются, то есть длина стержня остается прежней;

– прямолинейная ось стержня (ось кручения) остается прямолинейной и после деформации, а все поперечные сечения стержня поворачиваются вокруг этой оси по отношению друг к другу на угол φ .

Справедливость принятых гипотез подтверждается тем, что полученные на их основе формулы хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На основании принятых допущений кручение круглых стержней можно представить как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга.

Вследствие этого в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения τ , а нормальные напряжения σ равны нулю.

Двумя поперечными сечениями выделим из рассматриваемого бруса, подверженного деформации кручения, участок длиной dx и рассмотрим его деформацию (рис. 5.3).

Выделим элементарный объем наружного слоя (рис. 5.3).

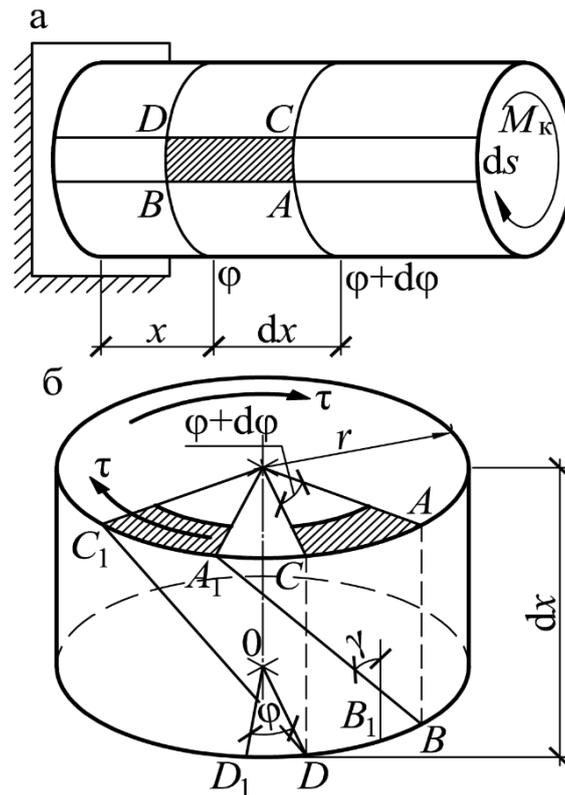


Рис. 5.3. Деформация вала при кручении

Смещения точек A и B равны

$$AA_1 = r \cdot (\varphi + d\varphi); \quad BB_1 = r \cdot \varphi. \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{r \cdot (\varphi + d\varphi) - r \cdot \varphi}{dx} = r \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Будем считать стержень жестким, углы поворота малыми, поэтому

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Следовательно

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx} \tag{5.4}$$

Выделенный элемент испытывает деформацию чистого сдвига (рис. 5.4)

Закон Гука при чистом сдвиге имеет вид

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad \rightarrow \quad \tau = \gamma \cdot G$$

или с учетом (5.4)

$$\tau = \left(G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot r.$$

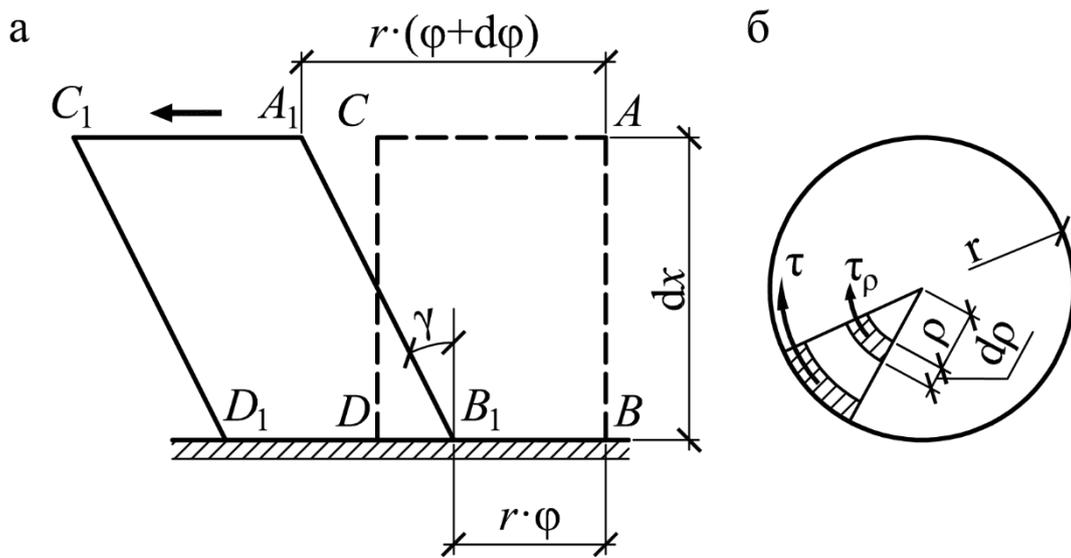


Рис. 5.4. Деформация чистого сдвига

Так как при закручивании поперечные сечения вала остаются плоскими, а радиусы прямыми, то выражения для угла сдвига и касательных напряжений в сечении на расстоянии ρ от центра его можно представить в виде

$$\gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}; \quad \tau_\rho = \left(G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \rho \quad (5.5)$$

Таким образом, касательные напряжения τ_ρ в поперечном сечении вала изменяется по линейному закону.

Подставив выражение (5.5) в уравнение (5.3), получим

$$M_K = \left(G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \int_A \rho^2 dA = \left(G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot I_\rho$$

или

$$\left(G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{M_K}{I_\rho} \quad (5.6)$$

Следовательно, подставив выражение (5.6) в уравнение (5.5), получим

$$\tau_\rho = \tau = \frac{M_K \cdot \rho}{I_\rho}. \quad (5.7)$$

Эта формула позволяет определять касательные напряжения в любой точке круглого поперечного сечения с координатой ρ .

Максимальные значения касательных напряжений возникают в крайних точках сечения $\rho = r$ и определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \tau_{(\rho=r)} = \frac{M_K \cdot r}{I_\rho} = \frac{M_K}{W_\rho} \quad (5.8)$$

где

$W_\rho = \frac{I_\rho}{r}$ – полярный момент сопротивления площади круга относительно его

центра.

Как известно, для круга

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (5.9)$$

Для определения угла закручивания φ воспользуемся уравнением (5.6)

$$G \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{I_\rho} \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{G \cdot I_\rho} \rightarrow d\varphi = \frac{M_K}{G \cdot I_\rho} \cdot dx \quad (5.10)$$

После интегрирования получим полный взаимный угол закручивания двух сечений на рассматриваемом участке, где $M_K = \text{const}$ и $d = \text{const}$

$$\varphi = \frac{M_K}{G I_\rho} \cdot \int_0^l dx = \frac{M_K \cdot l}{G I_\rho} \text{ (рад.)} \quad (5.11)$$

Величина $G \cdot I_\rho$ называется жесткостью стержня при кручении. Она характеризует сопротивление стержня закручиванию.

Полный угол закручивания не всегда может характеризовать жесткость стержня при кручении. На протяжении длины стержня крутящие моменты могут иметь разные знаки, поэтому полный угол закручивания может быть небольшим, в то время как на отдельных участках он окажется значительным.

Для объективной оценки жесткости стержня вводится другая величина – относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.12)$$

или с учетом (5.11)

$$\Theta = \frac{M_K}{G \cdot I_\rho}, \quad (5.13)$$

имеющая размерность рад/см или рад/м.

Таким образом, для случаев, когда на отдельных участках величина M_k постоянная, относительный угол закручивания θ на рассматриваемом участке численно равен углу закручивания вала, приходящегося на единицу длины.

5.4. Расчет стержня круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении

Наиболее распространенным расчетом на прочность при кручении является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому наибольшее касательное напряжение, возникающее в материале, не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы.

Эта величина называется допускаемым напряжением, то есть

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (5.14)$$

Это требование называется *условием прочности*.

Определение. Допускаемым напряжением называется наибольшее напряжение, при котором обеспечивается прочность и долговечность проектируемого элемента конструкции.

Допускаемое касательное напряжение при кручении $[\tau]$, зависит от свойств материала и от принятого коэффициента запаса прочности

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[n]} \quad (5.15)$$

В случае пластичного материала в качестве опасного напряжения $\tau_{\text{пред}}$ принимается τ_m – предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала τ_v – предел прочности.

В большинстве случаев допускаемые напряжения на кручение принимаются в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала.

Валы, являющиеся основными объектами, рассчитываемыми на кручение, кроме кручения, часто испытывают и изгиб. Кроме того, возникающие в них напряжения переменны во времени. Поэтому, рассчитывая вал только на кручение статической нагрузкой без учета изгиба и переменности напряжений,

необходимо принимать пониженные значения допускаемых напряжений $[\tau]$.

Величины допускаемых напряжений устанавливаются СНиП.

Максимальное касательное напряжение в вале при кручении возникает в сечении, где крутящий момент M_k достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором крутящий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение M_{max} , называется опасным сечением стержня по касательным напряжениям при кручении.

Величина τ_{max} представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении стержня в непосредственной близости к его внешней поверхности ($\rho = r$).

Определение. Опасными точками поперечного сечения называются точки, напряжения в которых достигают наибольших по величине значений.

Таким образом, наибольшие касательные напряжения в стержне при кручении будут возникать в опасных точках опасного сечения вала

$$\tau_{max} = \frac{M_k^{max}}{W_\rho} \quad (5.16)$$

Следовательно, условие прочности при кручении по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{M_k^{max}}{W_\rho} \leq [\tau] \quad (5.17)$$

В этой формуле

τ_{max} – максимальное касательное напряжение в вале;

M_k^{max} – максимальный крутящий момент в вале;

W_ρ – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала;

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

При расчете скручиваемых стержней на прочность возможны три вида задач, различающихся формой использования условия прочности:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют крутящий момент M_K^{max} и из условия прочности находят величину требуемого полярного момента сопротивления поперечного сечения

$$W_\rho^{треб} \geq \frac{M_K^{max}}{[\tau]} \quad (5.18)$$

По величине полярного момента сопротивления определяется диаметр сплошного круглого поперечного сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}}$$

или наружный d_n и внутренний d_v диаметры кольцевого сечения стержня

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} \cdot \alpha = \frac{d_v}{d_n} \rightarrow d_v = \alpha \cdot d_n$$

б). Определение допускаемой нагрузки. Решение этой задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям). По известной величине полярного момента сопротивления W_ρ и допускаемому напряжению $[\tau]$ определяют наибольшую величину допускаемого крутящего момента M_K^{max}

$$[M_K] \leq [\tau] \quad (5.19)$$

По найденному значению $[M_K]$ определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в). Проверочный расчет. По известным значениям M_K^{max} , W_ρ , $[\tau]$ проверяют выполнение условия прочности (8.17).

$$\tau_{max} = \frac{M_K^{max}}{W_\rho} \leq [\tau]$$

При проверке напряжений по заданным нагрузкам и размерам стержня определяют наибольшие касательные напряжения. Наибольшие касательные напряжения сравниваются с допускаемым напряжением.

Если условие прочности не выполняется, то необходимо увеличить размеры сечения или уменьшить нагрузку.

Расчет вала на прочность не исключает возможности возникновения деформаций, недопустимых при его эксплуатации. Большие углы закручивания вала особенно опасны при передаче им переменного во времени момента, так как при этом возникают опасные для его прочности крутильные колебания.

Поэтому в необходимых случаях валы рассчитывают и на жесткость.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{M_K}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta] \quad (5.20)$$

По величине полярного момента инерции определяется диаметр сплошного круглого поперечного сечения

$$\theta_{\max} = \frac{M_K}{G I_\rho} \leq [\theta] \rightarrow I_\rho \geq \frac{M_K}{G [\theta]} \rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K}{\pi G [\theta]}}$$

или наружный d_H и внутренний d_B диаметры кольцевого сечения стержня

$$d_H \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_K}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}}; \quad \alpha = \frac{d_B}{d_H} \rightarrow d_B = \alpha \cdot d_H,$$

где

θ – наибольший относительный угол закручивания стержня;

$[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания, принимаемый в диапазоне $0,5 \div 2$ градуса на один метр длины стержня.

На практике обычно производят расчет на прочность, а затем делают проверку выполнения условия жесткости.

Если при проверке окажется, что условие жесткости удовлетворяется, то на этом обычно расчет вала заканчивается.

В противном случае размеры вала должны быть подобраны из условия жесткости (5.20)

$$I_{\text{треб}} \geq \frac{M_K}{G \cdot [\theta]} \quad (5.21)$$

5.5. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Кручение»

1. Какой вид деформации называется кручением?
2. Чему равен крутящий момент в поперечном сечении вала?
3. Правило знаков для крутящего момента?
4. Что называется эпюрой крутящего момента?
5. Какая зависимость между крутящим моментом, мощностью, передаваемой валом, и числом оборотов вала?
6. Какие предположения (гипотезы) лежат в основе теории кручения стержня круглого сечения?
7. Какой вид имеет закон Гука при чистом сдвиге?
8. По какой формуле определяются максимальные касательные напряжения стержня круглого сечения?
9. В каких точках круглого вала возникают наибольшие напряжения при кручении?
10. Как определяется опасное сечение при кручении стержня круглого сечения?
11. Как распределяются касательные напряжения по поперечному сечению вала?
12. Напишите условие прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при кручении стержня круглого сечения.
13. Какие три типа задач вытекают из условия прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при кручении стержня круглого сечения?
14. Какой угол называется полным углом закручивания?
15. По какой формуле определяется полный угол закручивания?



16. Какая величина называется жесткостью стержня при кручении?



Перечень рекомендуемых информационных ресурсов

1. ЭБС «Znanium.com».
2. НЭБ eLibrary.ru.
3. ЭБС НТБ ДГТУ.
4. СКИФ ДГТУ.
5. ЭБС «Университетская библиотека online».
6. ЭБС IPRbooks.
7. Справочный модуль «Энциклопедии ZNANIUM.com».
8. ЭБС «BOOK.ru».
9. БД «Электронная библиотека технического вуза. Консультант студента».
10. БД «Book on Lime».
11. ЭБС «ЮРАЙТ».

Рекомендуемая литература

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов. /А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): учебник /В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. – М.: Изд-во АСВ, 2012. – 251 с.
3. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100.– М.: ИНФРА – М, 2010. – 323 с.
4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) / Г.С. Варданян, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; под ред. Г.С. Варданяна. – М.: ИНФРА–М, 2011. – 480 с.
5. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть I): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2018.
6. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть II): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2018.
7. Михайлов А.М. Сопротивление материалов: учебник для студентов высших учебных заведений / А.М. Михайлов. – М.: Издательский центр «Академия», – 2009. – 448 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 20-е изд. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов /В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 591 с.

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ
для выполнения расчетно-графических, контрольных работ
и проведения практических занятий
по дисциплине «Строительная механика для архитекторов»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

1. Сортамент прокатной стали

1.1. Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240—97

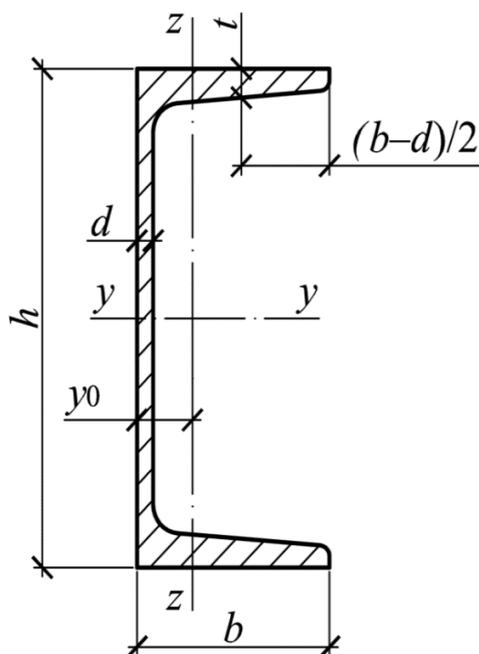


Рисунок 1.1 — Швеллер с уклоном внутренних граней полки

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- h — высота (швеллера);
- b — ширина полки;
- d — толщина стенки;
- t — толщина полки;
- y_0 — расстояние от оси $z - z$ до наружной грани стенки;
- A — площадь поперечного сечения;
- I — момент инерции;
- W — момент сопротивления;
- i — радиус инерции;
- S_y — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м швеллера вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.1 — Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	S_y см ³	I_z см ⁴	W_z см ³	i_z см	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
5У	50	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.95	1.16	4.84
6,5У	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.00	8.70	3.68	1.08	1.24	5.90
8У	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.30	12.80	4.75	1.19	1.31	7.05
10У	100	46	4.5	7.6	10.90	174.0	34.8	3.99	20.40	20.40	6.46	1.37	1.44	8.59
12У	120	52	4.8	7.8	13.30	304.0	50.6	4.78	29.60	31.20	8.52	1.53	1.54	10.40
14У	140	58	4.9	8.1	15.60	491.0	70.2	5.60	40.80	45.40	11.00	1.70	1.67	12.30
16У	160	64	5.0	8.4	18.10	747.0	93.4	6.42	54.10	63.30	13.80	1.87	1.80	14.20
16аУ	160	68	5.0	9.0	19.50	823.0	103.0	6.49	59.40	78.80	16.40	2.01	2.00	15.30
18У	180	70	5.1	8.7	20.70	1 090.0	121.0	7.24	69.80	86.00	17.00	2.04	1.94	16.30
18аУ	180	74	5.1	9.3	22.20	1 190.0	132.0	7.32	76.10	105.00	20.00	2.18	2.13	17.40
20У	200	76	5.2	9.0	23.40	1 520.0	152.0	8.07	87.80	113.00	20.50	2.20	2.07	18.40
22У	220	82	5.4	9.5	26.70	2 110.0	192.0	8.89	110.00	151.00	25.10	2.37	2.21	21.00
24У	240	90	5.6	10.0	30.60	2 900.0	242.0	9.73	139.00	208.00	31.60	2.60	2.42	24.00
27У	270	95	6.0	10.5	35.20	4 160.0	308.0	10.90	178.00	262.00	37.30	2.73	2.47	27.70
30У	300	100	6.5	11.0	40.50	5 810.0	387.0	12.00	224.00	327.00	43.60	2.84	2.52	31.80
33У	330	105	7.0	11.7	46.50	7 980.0	484.0	13.10	281.00	410.00	51.80	2.97	2.59	36.50
36У	360	110	7.5	12.6	43.40	10 820.0	601.0	14.20	350.00	513.00	61.70	3.10	2.68	41.90
40У	400	115	8.0	13.5	61.50	15 220.0	761.0	15.70	444.00	642.00	73.40	3.23	2.75	48.30

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

1.2. Выборка двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок по ГОСТ Р 57837—2017

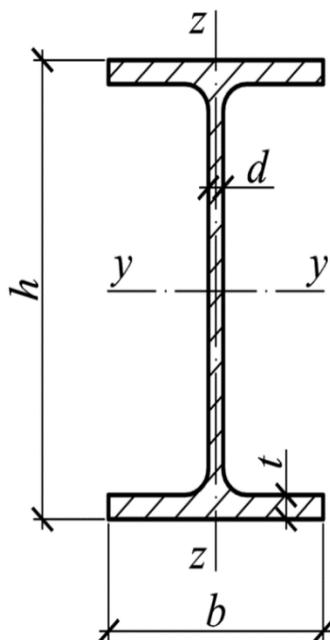


Рисунок 1.2 — Двутавр стальной горячекатаный с параллельными гранями полок

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

h — высота (двутавра);

b — ширина полки;

d — толщина стенки;

t — толщина полки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

W — момент сопротивления;

i — радиус инерции;

S — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.2 — Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
Тип Б — Балочные нормальные двутавры														
10Б1	100.0	55.0	4.1	5.7	10.32	8.10	171.01	34.20	19.70	40.70	15.92	5.79	4.57	12.42
12Б1	117.6	64.0	3.8	5.1	11.03	8.70	257.36	43.80	24.94	48.30	22.39	7.00	5.49	14.25
12Б2	120.0	64.0	4.4	6.3	13.21	10.40	317.75	53.00	30.36	49.04	27.67	8.65	6.79	14.47
14Б1	137.4	73.0	3.8	5.6	13.39	10.50	434.86	63.30	35.80	56.98	36.42	9.98	7.76	16.49
14Б2	140.0	73.0	4.7	6.9	16.43	12.90	541.22	77.30	44.17	57.40	44.92	12.31	9.62	16.54
16Б1	157.0	82.0	4.0	5.9	16.18	12.70	689.28	87.80	49.55	65.27	54.43	13.27	10.35	18.34
16Б2	160.0	82.0	5.0	7.4	20.09	15.80	869.29	108.70	61.93	65.78	68.31	16.66	13.05	18.44
18Б1	177.0	91.0	4.3	6.5	19.58	15.40	1062.74	120.10	67.66	73.68	81.89	18.00	13.98	20.45
18Б2	180.0	91.0	5.3	8.0	23.95	18.80	1316.96	146.30	83.21	74.16	100.85	22.16	17.30	20.52
20Б0	198.0	99.0	4.5	7.0	23.18	18.20	1581.56	159.80	89.88	82.60	113.62	22.95	17.86	22.14
20Б1	200.0	100.0	5.5	8.0	27.16	21.30	1844.26	184.40	104.73	82.41	133.91	26.78	20.97	22.21
20Б2	203.0	101.0	6.5	9.5	32.19	25.30	2218.49	218.60	124.99	83.02	163.93	32.46	25.50	22.57
20Б3	208.0	102.0	8.0	12.0	40.24	31.60	2852.62	274.30	158.46	84.20	213.50	41.86	33.02	23.03
25Б1	248.0	124.0	5.0	8.0	32.68	25.70	3537.11	285.30	159.68	104.04	254.85	41.11	31.80	27.93
25Б2	250.0	125.0	6.0	9.0	37.66	29.60	4051.73	324.10	182.93	103.73	293.85	47.02	36.55	27.93
25Б3	255.0	126.0	7.5	11.5	47.62	37.40	5238.16	410.80	233.88	104.88	384.79	61.08	47.67	28.43
25Б4	260.0	127.0	9.0	14.0	57.68	45.30	6481.01	498.50	286.25	106.00	480.07	75.60	59.24	28.85
30Б1	298.0	149.0	5.5	8.0	40.80	32.00	6318.22	424.00	237.53	124.44	442.00	59.33	45.88	32.91
30Б2	300.0	150.0	6.5	9.0	46.78	36.70	7209.26	480.60	271.06	124.14	507.53	67.67	52.56	32.94
30Б3	305.0	151.0	8.0	11.5	58.74	46.10	9254.92	606.90	344.37	125.52	661.88	87.67	68.31	33.57
30Б4	310.0	152.0	9.5	14.0	70.80	55.60	11381.41	734.30	419.40	126.79	822.37	108.21	84.60	34.08
35Б1	346.0	174.0	6.0	9.0	52.68	41.40	11094.49	641.30	358.09	145.12	791.54	90.98	70.11	38.76
35Б2	350.0	175.0	7.0	11.0	63.14	49.60	13559.01	774.80	433.96	146.54	984.34	112.50	86.79	39.48
35Б3	355.0	176.0	8.5	13.5	77.08	60.50	16797.02	946.30	533.54	147.62	1229.36	139.70	108.13	39.94
35Б4	361.0	177.0	10.0	16.5	92.89	72.90	20719.71	1147.90	651.07	149.35	1528.90	172.76	134.02	40.57
40Б1	396.0	199.0	7.0	11.0	72.16	56.60	20018.83	1011.10	563.93	166.56	1447.14	145.44	111.97	44.78
40Б2	400.0	200.0	8.0	13.0	84.12	66.00	23704.43	1185.20	663.13	167.87	1736.39	173.64	133.82	45.43
40Б3	406.0	201.0	9.5	16.0	102.05	80.10	29352.45	1445.90	813.38	169.60	2169.89	215.91	166.74	46.11

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
40Б4	412.0	202.0	11.0	19.0	120.10	94.30	35196.83	1708.60	966.65	171.19	2616.25	259.03	200.47	46.67
45Б1	446.0	199.0	8.0	12.0	84.30	66.20	28697.35	1286.90	725.06	184.50	1580.03	158.80	123.29	43.29
45Б2	450.0	200.0	9.0	14.0	96.76	76.00	33450.76	1486.70	839.53	185.93	1871.57	187.16	145.46	43.98
45Б3	456.0	201.0	10.5	17.0	115.43	90.60	40710.41	1785.50	1012.55	187.80	2307.62	229.61	178.81	44.71
45Б4	462.0	202.0	12.0	20.0	134.22	105.40	48197.42	2086.50	1188.75	189.50	2756.66	272.94	213.01	45.32
50Б1	492.0	199.0	8.8	12.0	92.38	72.50	36841.89	1497.60	853.45	199.70	1581.96	158.99	124.86	41.38
50Б2	496.0	199.0	9.0	14.0	101.27	79.50	41869.08	1688.30	957.23	203.33	1844.89	185.42	144.88	42.68
50Б3	500.0	200.0	10.0	16.0	114.23	89.70	47846.05	1913.80	1087.59	204.66	2140.79	214.08	167.48	43.29
50Б4	508.0	201.0	12.0	20.0	139.99	109.90	59953.57	2360.40	1348.82	206.94	2717.85	270.43	212.23	44.06
50Б5	516.0	202.0	15.0	24.0	170.59	133.90	73345.26	2842.80	1642.68	207.35	3315.53	328.27	260.04	44.09
55Б1	543.0	220.0	9.5	13.5	113.36	89.00	55677.42	2050.70	1164.94	221.62	2405.54	218.69	171.67	46.06
55Б2	547.0	220.0	10.0	15.5	124.74	97.90	62784.45	2295.60	1301.49	224.34	2761.34	251.03	196.56	47.05
55Б3	553.0	221.0	12.0	18.5	148.63	116.70	75321.22	2724.10	1554.49	225.11	3342.92	302.53	237.99	47.42
55Б4	560.0	222.0	14.0	22.0	174.86	137.30	89907.09	3211.00	1842.20	226.75	4032.07	363.25	286.76	48.02
60Б1	596.0	199.0	10.0	15.0	120.45	94.60	68715.90	2305.90	1325.36	238.85	1979.66	198.96	157.64	40.54
60Б2	600.0	200.0	11.0	17.0	134.41	105.50	77632.25	2587.70	1489.36	240.32	2278.16	227.82	180.72	41.17
60Б3	604.0	201.0	12.5	19.0	151.28	118.80	87472.10	2896.40	1675.38	240.46	2586.62	257.38	205.28	41.35
60Б4	612.0	202.0	15.0	23.0	181.97	142.90	106509.50	3480.70	2026.68	241.93	3182.62	315.11	253.12	41.82
70Б1	691.0	260.0	12.0	15.5	164.74	129.30	125922.20	3644.60	2094.79	276.47	4557.35	350.57	276.64	52.60
70Б2	697.0	260.0	12.5	18.5	183.64	144.16	145904.02	4186.63	2392.68	281.87	5437.68	418.28	328.41	54.41
70Б3	702.0	261.0	14.5	21.0	210.26	165.10	167085.05	4760.30	2736.06	281.89	6248.49	478.81	378.10	54.51
70Б4	710.0	262.0	17.0	25.0	248.14	194.80	199679.98	5624.80	3249.28	283.67	7531.16	574.90	456.29	55.09
Тип III — Балочные широкополочные двутавры														
20Ш0	190.0	149.0	5.0	7.0	31.11	24.40	2079.60	218.90	120.97	81.76	386.62	51.90	39.79	35.25
20Ш1	194.0	150.0	6.0	9.0	39.01	30.60	2689.74	277.30	154.28	83.04	507.16	67.62	51.85	36.06
20Ш2	199.0	151.0	7.5	11.5	49.38	38.80	3502.14	352.00	198.01	84.21	661.25	87.58	67.27	36.59
20Ш3	204.0	152.0	9.0	14.0	59.85	47.00	4362.01	427.70	243.18	85.37	821.37	108.08	83.18	37.05
20Ш4	211.0	155.0	11.0	17.5	75.06	58.90	5696.83	540.00	311.20	87.12	1089.19	140.54	108.38	38.09
20Ш5	218.0	157.0	13.0	21.0	90.27	70.90	7117.64	653.00	381.26	88.80	1359.05	173.13	133.81	38.80
20Ш6	228.0	159.0	16.0	26.0	112.29	88.20	9312.80	816.90	485.66	91.07	1749.68	220.09	170.75	39.47

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
25III0	240.0	174.0	6.0	9.0	46.84	36.80	4981.13	415.10	229.64	103.13	791.75	91.01	69.84	41.11
25III1	244.0	175.0	7.0	11.0	56.24	44.20	6121.23	501.70	279.19	104.33	984.48	112.51	86.36	41.84
25III2	249.0	176.0	8.5	13.5	68.59	53.80	7624.69	612.40	343.94	105.44	1229.33	139.70	107.41	42.34
25III3	256.0	177.0	10.5	17.0	85.69	67.30	9819.49	767.20	436.06	107.05	1575.20	177.99	137.18	42.88
25III4	264.0	182.0	13.0	21.0	107.50	84.40	12751.44	966.00	556.26	108.91	2116.49	232.58	179.70	44.37
25III5	274.0	184.0	16.0	26.0	133.40	104.70	16478.26	1202.80	703.59	111.14	2710.17	294.58	228.44	45.07
25III6	286.0	186.0	19.0	32.0	163.42	128.30	21287.68	1488.70	884.76	114.13	3448.57	370.81	288.22	45.94
30III0	290.0	199.0	7.0	10.0	61.48	48.30	9429.75	650.30	360.60	123.85	1316.09	132.27	101.70	46.27
30III1	294.0	200.0	8.0	12.0	72.38	56.80	11338.30	771.30	429.51	125.16	1603.26	160.33	123.28	47.06
30III2	300.0	201.0	9.0	15.0	87.38	68.60	14209.66	947.30	529.86	127.52	2034.13	202.40	155.42	48.25
30III3	306.0	203.0	11.0	18.0	105.56	82.90	17455.33	1140.90	644.63	128.59	2515.46	247.83	190.85	48.82
30III4	314.0	206.0	13.0	22.0	128.52	100.90	21967.16	1399.20	798.35	130.74	3213.67	312.01	240.56	50.00
30III5	326.0	208.0	16.0	28.0	162.46	127.50	29037.68	1781.50	1031.79	133.69	4213.04	405.10	313.16	50.92
30III6	342.0	210.0	20.0	36.0	207.98	163.30	39315.66	2299.20	1357.14	137.49	5580.38	531.47	412.35	51.80
35III1	334.0	249.0	8.0	11.0	83.17	65.30	17107.05	1024.40	565.71	143.42	2834.62	227.68	174.45	58.38
35III2	340.0	250.0	9.0	14.0	101.51	79.70	21676.50	1275.10	706.03	146.13	3650.97	292.08	223.45	59.97
35III3	347.0	252.0	11.0	17.5	125.95	98.90	27535.21	1587.00	886.41	147.86	4674.90	371.02	284.26	60.92
35III4	354.0	254.0	13.0	21.0	150.67	118.30	33692.45	1903.50	1072.31	149.54	5745.80	452.43	347.18	61.75
35III5	364.0	258.0	16.0	26.0	187.51	147.20	43231.44	2375.40	1354.36	151.84	7458.32	578.16	444.79	63.07
35III6	376.0	260.0	19.0	32.0	229.11	179.90	54967.48	2923.80	1688.25	154.89	9398.88	722.99	557.28	64.05
35III7	392.0	262.0	23.0	40.0	284.79	223.60	71815.25	3664.00	2150.36	158.80	12030.69	918.37	709.81	65.00
40III1	383.0	299.0	9.5	12.5	112.91	88.60	30554.32	1595.50	880.73	164.50	5576.08	372.98	285.42	70.27
40III2	390.0	300.0	10.0	16.0	135.95	106.70	38674.10	1983.30	1093.97	168.66	7207.77	480.52	366.53	72.81
40III3	397.0	302.0	12.0	19.5	164.89	129.40	47846.38	2410.40	1339.96	170.34	8962.48	593.54	453.33	73.72
40III4	406.0	304.0	14.5	24.0	201.98	158.60	60107.10	2960.90	1662.00	172.51	11253.74	740.38	566.43	74.64
40III5	418.0	309.0	17.5	30.0	252.20	198.00	77867.25	3725.70	2114.90	175.71	14776.27	956.39	732.65	76.54
40III6	430.0	311.0	21.0	36.0	303.25	238.10	96432.24	4485.20	2578.21	178.32	18086.35	1163.11	893.43	77.23
40III7	446.0	313.0	25.0	44.0	369.09	289.70	122543.61	5495.20	3204.85	182.21	22547.07	1440.71	1109.25	78.16
45III0	434.0	299.0	10.0	15.0	135.04	106.00	46794.17	2156.40	1192.24	186.15	6692.40	447.65	342.87	70.40
45III1	440.0	300.0	11.0	18.0	157.38	123.60	56069.13	2548.60	1412.44	188.75	8111.31	540.75	413.80	71.79

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
45Ш2	446.0	302.0	13.0	21.0	184.30	144.70	66379.08	2976.60	1661.51	189.78	9655.62	639.44	490.29	72.38
45Ш3	452.0	304.0	15.0	24.0	211.46	166.00	77050.83	3409.30	1915.99	190.88	11258.33	740.68	569.04	72.97
45Ш4	464.0	308.0	18.0	30.0	262.46	206.00	98962.82	4265.60	2420.93	194.18	14639.89	950.64	731.39	74.69
45Ш5	476.0	310.0	21.0	36.0	312.98	245.70	121722.09	5114.40	2932.26	197.21	17919.22	1156.08	891.09	75.67
45Ш6	492.0	312.0	25.0	44.0	380.50	298.70	153856.39	6254.30	3633.74	201.08	22341.69	1432.16	1106.76	76.63
50Ш1	482.0	300.0	11.0	15.0	145.52	114.20	60366.76	2504.80	1395.56	203.67	6763.81	450.92	347.62	68.18
50Ш2	487.0	300.0	14.5	17.5	176.34	138.40	71863.01	2951.30	1666.63	201.87	7897.76	526.52	409.42	66.92
50Ш3	493.0	300.0	15.5	20.5	198.86	156.10	83437.19	3384.90	1912.66	204.83	9251.07	616.74	478.76	68.21
50Ш4	499.0	300.0	16.5	23.5	221.38	173.80	95277.59	3818.70	2161.40	207.45	10604.77	706.98	548.21	69.21
50Ш5	508.0	302.0	19.0	28.0	260.80	204.70	114959.83	4526.00	2578.55	209.95	12894.50	853.94	663.27	70.31
50Ш6	518.0	310.0	22.0	33.0	309.84	243.20	140248.12	5415.00	3106.50	212.75	16442.93	1060.83	825.05	72.85
50Ш7	532.0	312.0	26.0	40.0	372.92	292.70	174203.77	6549.00	3797.96	216.13	20335.66	1303.57	1017.09	73.84
50Ш8	548.0	314.0	30.0	48.0	442.84	347.60	214879.98	7842.30	4598.03	220.28	24895.52	1585.70	1240.04	74.98
60Ш1	582.0	300.0	12.0	17.0	174.49	137.00	102709.98	3529.60	1981.30	242.62	7669.85	511.32	396.49	66.30
60Ш2	589.0	300.0	16.0	20.5	217.41	170.70	126193.28	4285.00	2438.84	240.92	9259.23	617.28	483.58	65.26
60Ш3	597.0	300.0	18.0	24.5	252.37	198.10	150035.32	5026.30	2869.72	243.82	11069.15	737.94	578.58	66.23
60Ш4	605.0	300.0	20.0	28.5	287.33	225.60	174450.48	5767.00	3305.39	246.40	12881.17	858.74	674.12	66.96
60Ш5	616.0	302.0	23.0	34.0	338.13	265.40	210467.04	6833.40	3941.46	249.49	15686.68	1038.85	817.44	68.11
60Ш6	630.0	315.0	27.0	41.0	412.99	324.20	266239.93	8452.10	4907.09	253.90	21476.18	1363.57	1073.64	72.11
60Ш7	644.0	317.0	31.0	48.0	480.93	377.50	318172.04	9881.10	5788.14	257.21	25653.76	1618.53	1279.02	73.04
60Ш8	664.0	319.0	36.0	58.0	574.05	450.60	394963.73	11896.50	7047.57	262.30	31634.21	1983.34	1572.47	74.23
70Ш1	692.0	300.0	13.0	20.0	211.49	166.00	172424.05	4983.40	2814.39	285.53	9024.74	601.65	468.07	65.32
70Ш2	698.0	300.0	15.0	23.0	242.53	190.40	198779.77	5695.70	3233.41	286.29	10382.92	692.19	540.47	65.43
70Ш3	707.0	300.0	18.0	27.5	289.09	226.90	239021.10	6761.60	3867.01	287.54	12424.20	828.28	650.29	65.56
70Ш4	715.0	300.0	20.5	31.5	329.39	258.60	275127.01	7695.90	4426.46	289.01	14242.00	949.47	748.55	65.76
70Ш5	725.0	300.0	23.0	36.5	375.69	294.90	319781.96	8821.60	5099.30	291.75	16514.18	1100.95	870.34	66.30
70Ш6	740.0	313.0	27.0	44.0	458.21	359.70	403258.33	10898.90	6334.98	296.66	22622.21	1445.51	1143.72	70.26
70Ш7	758.0	315.0	32.0	53.0	549.27	431.20	496466.98	13099.40	7693.00	300.64	27822.58	1766.51	1405.68	71.17
70Ш8	780.0	317.0	38.0	64.0	660.25	518.30	616075.38	15796.80	9389.94	305.47	34321.60	2165.40	1734.01	72.10
Тип К — Колонные двутавры														

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
15K1	147.0	149.0	6.0	8.5	34.17	26.80	1366.76	186.00	103.63	63.25	469.21	62.98	48.05	37.06
15K2	150.0	150.0	7.0	10.0	40.14	31.50	1641.33	218.80	123.04	63.95	563.28	75.10	57.36	37.46
15K3	155.0	151.0	8.5	12.5	49.84	39.10	2117.61	273.20	155.69	65.18	718.46	95.16	72.78	37.97
15K4	160.0	152.0	10.0	15.0	59.64	46.80	2629.16	328.60	189.67	66.40	879.66	115.74	88.65	38.41
15K5	166.0	153.0	12.0	18.0	71.72	56.30	3291.43	396.60	232.39	67.74	1077.13	140.80	108.12	38.75
20K1	196.0	199.0	6.5	10.0	52.69	41.40	3846.06	392.50	216.41	85.44	1314.47	132.11	100.38	49.95
20K2	200.0	200.0	8.0	12.0	63.53	49.90	4715.63	471.60	262.75	86.15	1601.53	160.15	121.91	50.21
20K3	204.0	201.0	9.0	14.0	73.57	57.80	5602.48	549.30	308.35	87.26	1896.76	188.73	143.72	50.78
20K4	210.0	201.0	10.5	17.0	88.27	69.30	6962.62	663.10	376.57	88.81	2303.59	229.21	174.72	51.09
20K5	214.0	202.0	12.0	19.0	99.33	78.00	7970.40	744.90	426.84	89.58	2613.87	258.80	197.63	51.30
20K6	220.0	202.0	14.0	22.0	114.97	90.30	9488.15	862.60	500.34	90.84	3027.75	299.78	229.45	51.32
20K7	226.0	203.0	16.0	25.0	131.11	102.90	11136.66	985.60	578.16	92.16	3493.41	344.18	263.98	51.62
20K8	234.0	203.0	18.0	29.0	150.87	118.40	13375.48	1143.20	679.29	94.16	4053.99	399.41	306.76	51.84
25K1	246.0	249.0	8.0	12.0	79.72	62.60	9170.92	745.60	410.68	107.26	3090.06	248.20	188.61	62.26
25K2	250.0	250.0	9.0	14.0	92.18	72.40	10832.61	866.60	480.25	108.41	3648.81	291.90	221.88	62.92
25K3	253.0	251.0	10.0	15.5	102.21	80.20	12153.56	960.80	535.41	109.05	4088.75	325.80	247.85	63.25
25K4	257.0	252.0	11.0	17.5	114.82	90.10	13927.17	1083.80	607.67	110.14	4672.01	370.79	282.18	63.79
25K5	262.0	253.0	12.5	20.0	131.15	103.00	16243.92	1240.00	701.07	111.29	5404.02	427.20	325.46	64.19
25K6	267.0	253.0	14.0	22.5	147.13	115.50	18593.24	1392.80	793.96	112.42	6080.59	480.68	366.65	64.29
25K7	274.0	258.0	16.0	26.0	171.88	134.90	22416.62	1636.30	942.16	114.20	7452.57	577.72	441.04	65.85
25K8	281.0	259.0	18.0	29.5	194.97	153.10	26169.72	1862.60	1083.49	115.86	8556.67	660.75	505.09	66.25
25K9	288.0	260.0	20.0	33.0	218.20	171.30	30128.76	2092.30	1228.96	117.51	9685.85	745.07	570.29	66.63
25K10	298.0	261.0	23.0	38.0	251.62	197.50	36112.37	2423.70	1442.84	119.80	11288.10	864.99	663.49	66.98
30K1	298.0	299.0	9.0	14.0	110.80	87.00	18848.66	1265.00	694.64	130.43	6241.19	417.47	316.82	75.05
30K2	300.0	300.0	10.0	15.0	119.78	94.00	20410.21	1360.70	750.59	130.54	6754.83	450.32	342.13	75.10
30K3	300.0	305.0	15.0	15.0	134.78	105.80	21535.21	1435.70	806.84	126.40	7104.76	465.89	358.04	72.60
30K4	304.0	301.0	11.0	17.0	134.82	105.80	23380.49	1538.20	852.74	131.69	7732.59	513.79	390.46	75.73
30K5	308.0	301.0	12.0	19.0	149.56	117.40	26362.99	1711.90	953.96	132.77	8642.78	574.27	436.61	76.02
30K6	312.0	302.0	13.0	21.0	164.72	129.30	29508.74	1891.60	1059.44	133.84	9648.60	638.98	485.99	76.53
30K7	316.0	302.0	14.5	23.0	180.85	142.00	32732.42	2071.70	1167.93	134.53	10569.09	699.94	533.09	76.45

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
30K8	316.0	357.0	14.5	23.0	206.15	161.80	38173.52	2416.10	1353.26	136.08	17452.10	977.71	741.50	92.01
30K9	322.0	358.0	16.0	26.0	232.14	182.20	43983.21	2731.90	1541.60	137.65	19896.06	1111.51	843.38	92.58
30K10	328.0	359.0	18.0	29.0	259.60	203.80	50113.52	3055.70	1738.68	138.94	22381.16	1246.86	947.13	92.85
30K11	334.0	360.0	20.0	32.0	287.18	225.40	56488.07	3382.50	1939.98	140.25	24906.98	1383.72	1052.25	93.13
30K12	341.0	361.0	22.0	35.5	318.49	250.00	64158.87	3763.00	2176.26	141.93	27866.03	1543.82	1175.02	93.54
30K13	350.0	362.0	24.0	40.0	357.18	280.40	74376.59	4250.10	2481.31	144.30	31663.84	1749.38	1332.11	94.15
30K14	356.0	371.0	27.0	43.0	394.74	309.90	83542.72	4693.40	2760.90	145.48	36649.59	1975.72	1506.68	96.36
30K15	364.0	372.0	30.0	47.0	433.46	340.30	93889.39	5158.80	3062.80	147.17	40396.23	2171.84	1659.03	96.54
30K16	374.0	373.0	33.0	52.0	479.80	376.60	107317.14	5738.90	3441.68	149.56	45068.65	2416.55	1848.28	96.92
30K17	384.0	374.0	36.0	57.0	526.34	413.20	121512.35	6328.80	3831.76	151.94	49816.72	2664.00	2040.04	97.29
30K18	396.0	375.0	39.0	63.0	580.58	455.80	139424.86	7041.70	4307.16	154.97	55520.26	2961.08	2269.45	97.79
30K19	408.0	385.0	43.0	69.0	650.18	510.40	162282.28	7955.00	4912.82	157.99	65823.94	3419.43	2622.83	100.62
30K20	422.0	387.0	47.0	76.0	717.92	563.60	187072.37	8866.00	5534.78	161.42	73671.75	3807.33	2923.99	101.30
30K21	440.0	389.0	52.0	85.0	804.48	631.50	221339.16	10060.90	6361.10	165.87	83732.23	4305.00	3311.01	102.02
35K1	342.0	348.0	10.0	15.0	139.03	109.10	31247.91	1827.40	1001.17	149.92	10542.21	605.87	459.67	87.08
35X1.5	346.0	349.0	11.0	17.0	156.41	122.80	35711.23	2064.20	1135.84	151.10	12051.44	690.63	524.08	87.78
35K2	350.0	350.0	12.0	19.0	173.87	136.50	40295.09	2302.60	1272.61	152.23	13585.82	776.33	589.29	88.39
35K3	355.0	351.0	13.5	21.5	196.48	154.20	46230.77	2604.60	1448.66	153.39	15506.81	883.58	671.24	88.84
35K4	360.0	352.0	15.0	24.0	219.19	172.10	52353.70	2908.50	1627.80	154.55	17459.86	992.04	754.25	89.25
35K5	365.0	353.0	16.5	26.5	242.00	190.00	58667.44	3214.70	1810.04	155.70	19445.30	1101.72	838.34	89.64
35K6	369.0	360.0	18.0	28.5	264.79	207.90	64960.86	3520.90	1991.80	156.63	22183.47	1232.42	938.35	91.53
35K7	376.0	361.0	20.0	32.0	296.87	233.10	74398.83	3957.40	2256.32	158.31	25119.61	1391.67	1060.65	91.99
35K8	382.0	362.0	22.0	35.0	325.47	255.50	82894.78	4340.00	2491.96	159.59	27708.51	1530.86	1168.17	92.27
35K9	389.0	363.0	24.0	38.5	357.82	280.90	93053.12	4784.20	2767.25	161.26	30738.03	1693.56	1293.57	92.68
35K10	396.0	364.0	26.5	42.0	391.87	307.60	103736.94	5239.20	3054.44	162.70	33819.63	1858.22	1421.64	92.90
35K11	404.0	374.0	29.0	46.0	437.99	343.80	118982.06	5890.20	3458.40	164.82	40183.36	2148.84	1644.63	95.78
35K12	414.0	375.0	32.0	51.0	485.77	381.30	135721.11	6556.60	3886.58	167.15	44924.28	2395.96	1836.42	96.17
35K13	424.0	376.0	35.0	56.0	533.75	419.00	153322.14	7232.20	4326.20	169.49	49742.08	2645.86	2030.81	96.54
35K14	434.0	377.0	38.0	61.0	581.93	456.80	171810.18	7917.50	4777.34	171.83	54637.74	2898.55	2227.81	96.90
35K15	446.0	378.0	42.0	67.0	640.99	503.20	195206.29	8753.70	5336.35	174.51	60526.72	3202.47	2466.48	97.17

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
35K16	458.0	392.0	46.0	73.0	719.27	564.60	227053.17	9915.00	6094.32	177.67	73566.95	3753.42	2891.61	101.13
35K17	472.0	393.0	50.0	80.0	788.23	618.80	258357.05	10947.30	6796.66	181.04	81286.57	4136.72	3191.54	101.55
35K18	488.0	394.0	55.0	88.0	868.47	681.80	296560.11	12154.10	7629.66	184.79	90173.86	4577.35	3538.66	101.90
35K19	506.0	395.0	60.0	97.0	956.93	751.20	342451.59	13535.60	8591.51	189.17	100237.84	5075.33	3929.92	102.35
35K20	520.0	409.0	65.0	104.0	1056.95	829.70	392963.38	15114.00	9664.42	192.82	119352.51	5836.31	4520.43	106.26
35K21	540.0	411.0	71.0	114.0	1162.03	912.20	454051.02	16816.70	10869.85	197.67	132896.31	6466.97	5017.71	106.94
35K22	562.0	413.0	77.0	125.0	1276.17	1001.80	526659.93	18742.40	12243.01	203.15	148011.27	7167.62	5568.89	107.69
35K23	580.0	426.0	84.0	134.0	1407.19	1104.70	606878.23	20926.80	13777.86	207.67	174271.92	8181.78	6362.61	111.29
35K24	604.0	430.0	92.0	146.0	1546.07	1213.70	704826.44	23338.60	15522.09	213.51	195579.56	9096.72	7087.61	112.47
40K1	394.0	398.0	11.0	18.0	186.81	146.70	56145.31	2850.00	1559.22	173.36	18922.62	950.89	720.40	100.64
40K2	400.0	400.0	13.0	21.0	218.69	171.70	66621.41	3331.10	1836.23	174.54	22412.67	1120.63	849.93	101.23
40K3	406.0	403.0	16.0	24.0	254.87	200.10	78039.22	3844.30	2139.84	174.98	26200.19	1300.26	988.59	101.39
40K4	414.0	405.0	18.0	28.0	295.39	231.90	92771.14	4481.70	2513.15	177.22	31026.87	1532.19	1165.56	102.49
40K4,5	420.0	403.0	20.0	31.0	325.61	255.60	103629.70	4934.80	2786.46	178.40	33850.08	1679.90	1279.67	101.96
40K5	429.0	400.0	23.0	35.5	370.49	290.80	120290.27	5607.90	3198.49	180.19	37914.87	1895.74	1447.08	101.16
40K6	438.0	370.0	25.0	40.0	389.65	305.90	128432.35	5864.50	3381.88	181.55	33828.59	1828.57	1400.59	93.18
40K7	448.0	371.0	28.0	45.0	438.29	344.10	148100.16	6611.60	3848.78	183.82	38379.67	2068.98	1587.47	93.58
40K8	458.0	372.0	31.0	50.0	487.13	382.40	168699.38	7366.80	4327.20	186.09	43005.94	2312.15	1777.05	93.96
40K9	470.0	373.0	35.0	56.0	547.21	429.60	194740.01	8286.80	4920.70	188.65	48584.93	2605.09	2007.28	94.23
40K10	484.0	374.0	39.0	63.0	615.01	482.80	226537.95	9361.10	5620.76	191.92	55131.74	2948.22	2276.18	94.68
40K11	494.0	392.0	43.0	68.0	691.21	542.60	261626.63	10592.20	6402.77	194.55	68534.68	3496.67	2700.52	99.57
40K12	510.0	393.0	48.0	76.0	773.35	607.10	303779.05	11912.90	7286.50	198.19	77250.09	3931.30	3043.64	99.94
40K13	528.0	394.0	53.0	85.0	863.69	678.00	354176.39	13415.80	8303.29	202.50	87133.42	4423.02	3430.99	100.44
40K14	548.0	395.0	59.0	95.0	965.87	758.20	414486.60	15127.30	9480.79	207.15	98243.26	4974.34	3868.52	100.85
40K15	564.0	410.0	65.0	103.0	1081.45	848.90	482318.02	17103.50	10811.51	211.18	119192.55	5814.27	4525.42	104.98
40K16	588.0	412.0	72.0	115.0	1209.51	949.50	569246.79	19362.10	12395.01	216.94	135224.96	6564.32	5120.62	105.74
40K17	616.0	414.0	80.0	129.0	1358.67	1066.60	679972.83	22077.00	14322.16	223.71	154171.56	7447.90	5823.25	106.52
40K18	638.0	430.0	87.0	140.0	1519.61	1192.90	800682.16	25099.80	16419.75	229.54	187578.96	8724.60	6820.27	111.10
40K19	668.0	435.0	96.0	155.0	1696.33	1331.60	952172.58	28508.20	18868.64	236.92	215398.09	9903.36	7755.88	112.68

1.3. Уголки стальные горячекатаные равнополочные по ГОСТ 8509—93

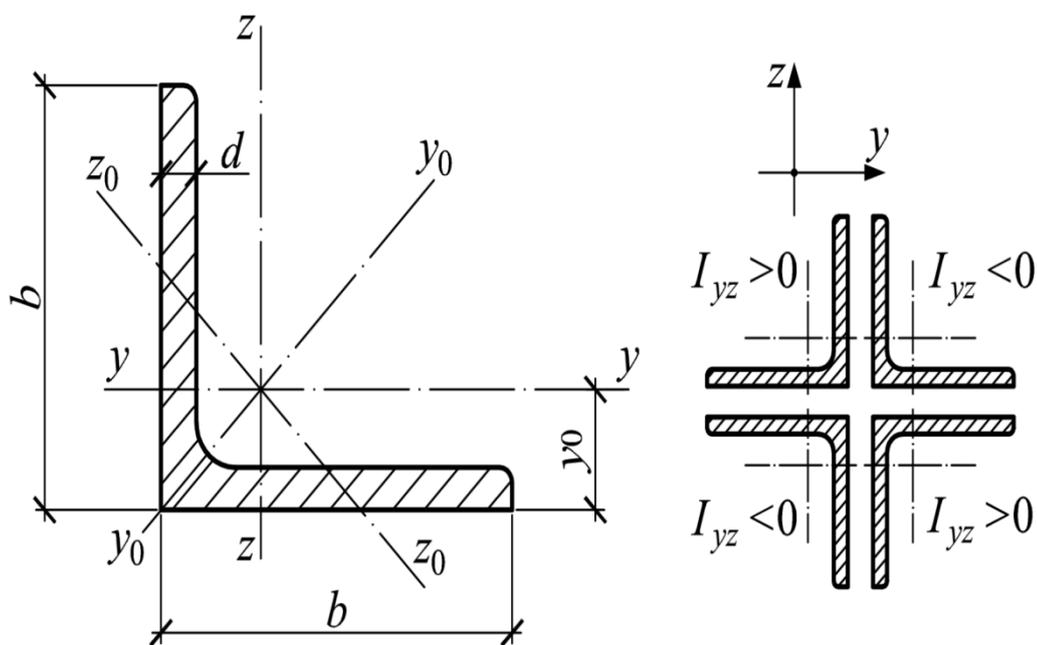


Рисунок 1.3 — Уголок стальной горячекатаный равнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- b — ширина полки;
- d — толщина полки;
- t — толщина полки;
- A — площадь поперечного сечения;
- I — момент инерции;
- y_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
- I_{yx} — центробежный момент инерции;
- i — радиус инерции.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м равнополочного уголка вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.3 — Уголки стальные горячекатаные равнополочные

№	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_{y0} см ⁴	i_{y0} см	I_{z0} см ⁴	W_{z0} см ³	i_{z0} см	I_{yz} см ⁴	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
2	20	3	1.13	0.40	0.28	0.59	0.63	0.75	0.17	0.20	0.39	0.23	0.60	0.89
2	20	4	1.46	0.50	0.37	0.58	0.78	0.73	0.22	0.24	0.38	0.28	0.64	1.15
2,5	25	3	1.43	0.81	0.46	0.75	1.29	0.95	0.34	0.33	0.49	0.47	0.73	1.12
2,5	25	4	1.86	1.03	0.59	0.74	1.62	0.93	0.44	0.41	0.48	0.59	0.76	1.46
2,8	28	3	1.62	1.16	0.58	0.85	1.84	1.07	0.48	0.42	0.55	0.68	0.80	1.27
3	30	3	1.74	1.45	0.67	0.91	2.30	1.15	0.60	0.53	0.59	0.85	0.85	1.36
3	30	4	2.27	1.84	0.87	0.90	2.92	1.13	0.77	0.61	0.58	1.08	0.89	1.78
3,2	32	3	1.86	1.77	0.77	0.97	2.80	1.23	0.74	0.59	0.63	1.03	0.89	1.46
3,2	32	4	2.43	2.26	1.00	0.96	3.58	1.21	0.94	0.71	0.62	1.32	0.94	1.91
3,5	35	3	2.04	2.35	0.93	1.07	3.72	1.35	0.97	0.71	0.69	1.37	0.97	1.60
3,5	35	4	2.67	3.01	1.21	1.06	4.76	1.33	1.25	0.88	0.68	1.75	1.01	2.10
3,5	35	5	3.28	3.61	1.47	1.05	5.71	1.32	1.52	1.02	0.68	2.10	1.05	2.58
4	40	3	2.35	3.55	1.22	1.23	5.63	1.55	1.47	0.95	0.79	2.08	1.09	1.85
4	40	4	3.08	4.58	1.60	1.22	7.26	1.53	1.90	1.19	0.78	2.68	1.13	2.42
4	40	5	3.79	5.53	1.95	1.21	8.75	1.52	2.30	1.39	0.78	3.22	1.17	2.98
4,5	45	3	2.65	5.13	1.56	1.39	8.13	1.75	2.12	1.24	0.89	3.00	1.21	2.08
4,5	45	4	3.48	6.63	2.04	1.38	10.52	1.74	2.74	1.54	0.89	3.89	1.26	2.73
4,5	45	5	4.29	8.03	2.51	1.37	12.74	1.72	3.33	1.81	0.88	4.71	1.30	3.37
5	50	3	2.96	7.И	1.94	1.55	11.27	1.95	2.95	1.57	1.00	4.16	1.33	2.32
5	50	4	3.89	9.21	2.54	1.54	14.63	1.94	3.80	1.95	0.99	5.42	1.38	3.05
5	50	5	4.80	11.20	3.13	1.53	17.77	1.92	4.63	2.30	0.98	6.57	1.42	3.77
5	50	6	5.69	13.07	3.69	1.52	20.72	1.91	5.43	2.63	0.98	7.65	1.46	4.47
5,6	56	4	4.38	13.10	3.21	1.73	20.79	2.18	5.41	2.52	1.11	7.69	1.52	3.44

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.3

№	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см ²	<i>I_y</i> см ⁴	<i>W_y</i> см ³	<i>i_y</i> см	<i>I_{y0}</i> см ⁴	<i>i_{y0}</i> см	<i>I_{z0}</i> см ⁴	<i>W_{z0}</i> см ³	<i>i_{z0}</i> см	<i>I_{yx}</i> см ⁴	<i>y₀</i> см	Масса 1 п. м. кг
5,6	56	5	5.41	15.97	3.96	1.72	25.36	2.16	6.59	2.97	1.10	9.41	1.57	4.25
6,3	63	4	4.96	18.86	4.09	1.95	29.90	2.45	7.81	3.26	1.25	11.00	1.69	3.90
6,3	63	5	6.13	23.10	5.05	1.94	36.80	2.44	9.52	3.87	1.25	13.70	1.74	4.81
6,3	63	6	7.28	27.06	5.98	1.93	42.91	2.43	11.18	4.44	1.24	15.90	1.78	5.72
7	70	4.5	6.20	29.04	5.67	2.16	46.03	2.72	12.04	4.53	1.39	17.00	1.88	4.87
7	70	5	6.86	31.94	6.27	2.16	50.67	2.72	13.22	4.92	1.39	18.70	1.90	5.38
7	70	6	8.15	37.58	7.43	2.15	59.64	2.71	15.52	5.66	1.38	22.10	1.94	6.39
7	70	7	9.42	42.98	8.57	2.14	68.19	2.69	17.77	6.31	1.37	25.20	1.99	7.39
7	70	8	10.67	48.16	9.68	2.12	76.35	2.68	19.97	6.99	1.37	28.20	2.02	8.37
7,5	75	5	7.39	39.53	7.21	2.31	62.65	2.91	16.41	5.74	1.49	23.10	2.02	5.80
7,5	75	6	8.78	46.57	8.57	2.30	73.87	2.90	19.28	6.62	1.48	27.30	2.06	6.89
7,5	75	7	10.15	53.34	9.89	2.29	84.61	2.89	22.07	7.43	1.47	31.20	2.10	7.96
7,5	75	8	11.50	59.84	11.18	2.28	94.89	2.87	24.80	8.16	1.47	35.00	2.15	9.02
7,5	75	9	12.83	66.10	12.43	2.27	104.72	2.86	27.48	8.91	1.46	38.60	2.18	10.07
8	80	5.5	8.63	52.68	9.03	2.47	83.56	з.и	21.80	7.10	1.59	30.90	2.17	6.78
8	80	6	9.38	56.97	9.80	2.47	90.40	з.и	23.54	7.60	1.58	33.40	2.19	7.36
8	80	7	10.85	65.31	11.32	2.45	103.60	3.09	26.97	8.55	1.58	38.30	2.23	8.51
8	80	8	12.30	73.36	12.80	2.44	116.39	3.08	30.32	9.44	1.57	43.00	2.27	9.65
9	90	6	10.61	82.10	12.49	2.78	130.00	3.50	33.97	9.88	1.79	48.10	2.43	8.33
9	90	7	12.28	94.30	14.45	2.77	149.67	3.49	38.94	11.15	1.78	55.40	2.47	9.64
9	90	8	13.93	106.11	16.36	2.76	168.42	3.48	43.80	12.34	1.77	62.30	2.51	10.93
9	90	9	15.60	118.00	18.29	2.75	186.00	3.46	48.60	13.48	1.77	68.00	2.55	12.20
10	100	6.5	12.82	122.10	16.69	3.09	193.46	3.89	50.73	13.38	1.99	71.40	2.68	10.06
10	100	7	13.75	130.59	17.90	3.08	207.01	3.88	54.16	14.13	1.98	76.40	2.71	10.79

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.3

№	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_{y0} см ⁴	i_{y0} см	I_{z0} см ⁴	W_{z0} см ³	i_{z0} см	I_{yx} см ⁴	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
10	100	8	15.60	147.19	20.30	3.07	233.46	3.87	60.92	15.66	1.98	86.30	2.75	12.25
10	100	10	19.24	178.95	24.97	3.05	283.83	3.84	74.08	18.51	1.96	110.00	2.83	15.10
10	100	12	22.80	208.90	29.47	3.03	330.95	3.81	86.84	21.10	1.95	122.00	2.91	17.90
10	100	14	26.28	237.15	33.83	3.00	374.98	3.78	99.32	23.49	1.94	138.00	2.99	20.63
10	100	16	29.68	263.82	38.04	2.98	416.04	3.74	111.61	25.79	1.94	152.00	3.06	23.30
11	110	7	15.15	175.61	21.83	3.40	278.54	4.29	72.68	17.36	2.19	106.00	2.96	11.89
11	110	8	17.20	198.17	24.77	3.39	314.51	4.28	81.83	19.29	2.18	116.00	3.00	13.50
12,5	125	8	19.69	294.36	32.20	3.87	466.76	4.87	121.98	25.67	2.49	172.00	3.36	15.46
12,5	125	9	22.00	327.48	36.00	3.86	520.00	4.86	135.88	28.26	2.48	192.00	3.40	17.30
12,5	125	10	24.33	359.82	39.74	3.85	571.04	4.84	148.59	30.45	2.47	211.00	3.45	19.10
12,5	125	12	28.89	422.23	47.06	3.82	670.02	4.82	174.43	34.94	2.46	248.00	3.53	22.68
12,5	125	14	33.37	481.76	54.17	3.80	763.90	4.78	199.62	39.10	2.45	282.00	3.61	26.20
12,5	125	16	37.77	538.56	61.09	3.78	852.84	4.75	224.29	43.10	2.44	315.00	3.68	29.65
14	140	9	24.72	465.72	45.55	4.34	739.42	5.47	192.03	35.92	2.79	274.00	3.76	19.41
14	140	10	27.33	512.29	50.32	4.33	813.62	5.46	210.96	39.05	2.78	301.00	3.82	21.45
14	140	12	32.49	602.49	59.66	4.31	956.98	5.43	248.01	44.97	2.76	354.00	3.90	25.50
16	160	10	31.43	774.24	66.19	4.96	1229.10	6.25	319.33	52.52	3.19	455.00	4.30	24.67
16	160	11	34.42	844.21	72.44	4.95	1340.06	6.24	347.77	56.53	3.18	496.00	4.35	27.02
16	160	12	37.39	912.89	78.62	4.94	1450.00	6.23	375.78	60.53	3.17	537.00	4.39	29.35
16	160	14	43.57	1046.47	90.77	4.92	1662.13	6.20	430.81	68.15	3.16	615.00	4.47	34.20
16	160	16	49.07	1175.19	102.64	4.89	1865.73	6.17	484.64	75.92	3.14	690.00	4.55	38.52
16	160	18	54.79	1290.24	114.24	4.87	2061.03	6.13	537.46	82.08	3.13	771.00	4.63	43.01
16	160	20	60.40	1418.85	125.60	4.85	2248.26	6.10	589.43	90.02	3.12	830.00	4.70	47.41
18	180	11	38.80	1216.44	92.47	5.60	1933.10	7.06	499.78	72.86	3.59	716.00	4.85	30.47

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.3

№	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_{y0} см ⁴	i_{y0} см	I_{z0} см ⁴	W_{z0} см ³	i_{z0} см	I_{yx} см ⁴	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
18	180	12	42.19	1316.62	100.41	5.59	2092.78	7.04	540.45	78.15	3.58	776.00	4.89	33.12
20	200	12	47.10	1822.78	124.61	6.22	2896.16	7.84	749.40	98.68	3.99	1073.00	5.37	36.97
20	200	13	50.85	1960.77	134.44	6.21	3116.18	7.83	805.35	105.07	3.98	1156.00	5.42	39.92
20	200	14	54.60	2097.00	144.17	6.20	3333.00	7.81	861.00	111.50	3.97	1236.00	5.46	42.80
20	200	16	61.98	2362.57	163.37	6.17	3755.39	7.78	969.74	123.77	3.96	1393.00	5.54	48.65
20	200	20	76.54	2871.47	200.37	6.12	4860.42	7.72	1181.92	146.62	3.93	1689.00	5.70	60.08
20	200	25	94.29	3466.21	245.59	6.06	5494.04	7.63	1438.38	172.68	3.91	2028.00	5.89	74.02
20	200	30	111.54	4019.60	288.57	6.00	6351.05	7.55	1698.16	193.06	3.89	2332.00	6.07	87.56
22	220	14	60.38	2814.36	175.18	6.83	4470.15	8.60	1158.56	138.62	4.38	1655.00	5.91	47.40
22	220	16	68.58	3175.44	198.71	6.80	5045.37	8.58	1305.52	153.34	4.36	1869.00	6.02	53.83
25	250	16	78.40	4717.10	258.43	7.76	7492.10	9.78	1942.09	203.45	4.98	2775.00	6.75	61.55
25	250	18	87.72	5247.24	288.82	7.73	8336.69	9.75	2157.78	223.39	4.96	3089.00	6.83	68.86
25	250	20	96.96	5764.87	318.76	7.71	9159.73	9.72	2370.01	242.52	4.94	3395.00	6.91	76.11
25	250	22	106.12	6270.32	348.26	7.69	9961.30	9.69	2579.04	260.52	4.93	3691.00	7.00	83.31
25	250	25	119.71	7006.39	391.72	7.65	11125.52	9.64	2887.26	287.14	4.91	4119.00	7.11	93.97
25	250	28	133.12	7716.86	434.25	7.61	12243.84	9.59	3189.89	311.98	4.90	4527.00	7.23	104.50
25	250	30	141.96	8176.82	462.11	7.59	12964.66	9.56	3388.98	327.82	4.89	4788.00	7.31	111.44
25	250	35	163.71	9281.05	530.11	7.53	14682.73	9.47	3879.37	366.13	4.87	5401.68	7.53	128.51

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

1.4. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные по ГОСТ 8510—86

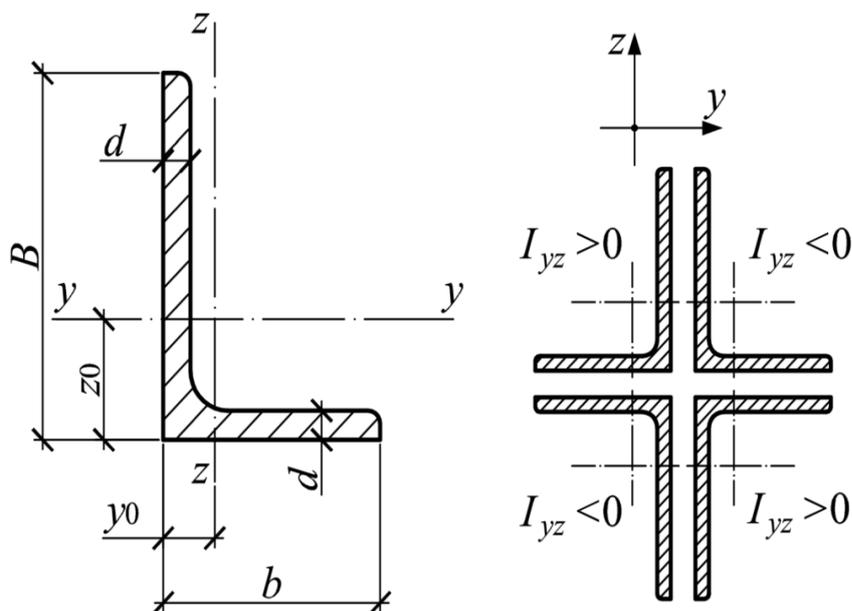


Рисунок 1.4 — Уголок стальной горячекатаный неравнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- h — высота (швеллера);
- b — ширина полки;
- d — толщина стенки;
- t — толщина полки;
- y_0 — расстояние от оси $z - z$ до наружной грани стенки;
- A — площадь поперечного сечения;
- I — момент инерции;
- W — момент сопротивления;
- i — радиус инерции;
- S_y — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и справочные величины вычислены по номинальным размерам. При вычислении массы 1 м уголка плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.4 — Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

№	<i>B</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см ²	<i>I_y</i> см ⁴	<i>W_y</i> см ³	<i>i_y</i> см	<i>I_z</i> см ⁴	<i>W_z</i> см ³	<i>i_z</i> см	<i>y₀</i> см	<i>z₀</i> см	<i>I_{yz}</i> см ⁴	tg α	Масса 1 п. м. кг
2,5/1,6	25	16	3	1.16	0.70	0.43	0.78	0.22	0.19	0.44	0.42	0.86	0.22	0.392	0.91
3/2*	30	20	3	1.43	1.27	0.62	0.94	0.45	0.30	0.56	0.51	1.0	0.43	0.427	1.12
3/2*	30	20	4	1.86	1.61	0.82	0.93	0.56	0.39	0.55	0.54	1.04	0.54	0.421	1.46
3,2/2	32	20	3	1.49	1.52	0.72	1.01	0.46	0.30	0.55	0.49	1.08	0.47	0.382	1.17
3,2/2	32	20	4	1.94	1.93	0.93	1.00	0.57	0.39	0.54	0.53	1.12	0.59	0.374	1.52
4/2,5	40	25	3	1.89	3.06	1.14	1.27	0.93	0.49	0.70	0.59	1.32	0.96	0.385	1.48
4/2,5	40	25	4	2.47	3.93	1.49	1.26	1.18	0.63	0.69	0.63	1.37	1.22	0.281	1.94
4/2,5	40	25	5	3.03	4.73	1.82	1.25	1.41	0.77	0.68	0.66	1.41	1.44	0.374	2.37
4/3*	40	30	4	2.67	4.18	1.54	1.25	2.01	0.91	0.87	0.78	1.28	1.68	0.544	2.26
4/3*	40	30	5	3.28	5.04	1.88	1.24	2.41	1.11	0.86	0.82	1.32	2.00	0.539	2.46
4,5/2,8	45	28	3	2.14	4.41	1.45	1.48	1.32	0.61	0.79	0.64	1.47	1.38	0.382	1.68
4,5/2,8	45	28	4	2.80	5.68	1.90	1.42	1.69	0.80	0.78	0.68	1.51	1.77	0.379	2.20
5/3,2	50	32	3	2.42	6.18	1.82	1.60	1.99	0.81	0.91	0.72	1.60	2.01	0.403	1.9
5/3,2	50	32	4	3.17	7.98	2.38	1.59	2.56	1.05	0.90	0.76	1.65	2.59	0.401	2.4
5,6/3,6	56	36	4	3.58	11.37	3.01	1.78	3.70	1.34	1.02	0.84	1.82	3.74	0.406	2.81
5,6/3,6	56	36	5	4.41	13.82	3.70	1.77	4.48	1.65	1.01	0.88	1.87	4.50	0.404	3.46
6,3/4,0	63	40	4	4.04	16.33	3.83	2.01	5.16	1.67	1.13	0.91	2.03	5.25	0.397	3.17
6,3/4,0	63	40	5	4.98	19.91	4.72	2.00	6.26	2.05	1.12	0.95	2.08	6.41	0.396	3.91
6,3/4,0	63	40	6	5.90	23.31	5.58	1.99	7.29	2.42	1.11	0.99	2.12	7.44	0.393	4.63
6,3/4,0	63	40	8	7.68	29.60	7.22	1.96	9.15	3.12	1.09	1.07	2.20	9.27	0.386	6.03
6,5/5*	65	50	5	5.56	23.41	5.20	2.05	12.08	3.23	1.47	1.26	2.00	9.77	0.576	4.36
6,5/5*	65	50	6	6.60	27.46	6.16	2.04	14.12	3.82	1.46	1.30	2.04	11.46	0.575	5.18
6,5/5*	65	50	7	7.62	31.32	7.08	2.03	16.05	4.38	1.45	1.34	2.08	12.94	0.571	5.98

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.4

№	<i>B</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см ²	<i>I_y</i> см ⁴	<i>W_y</i> см ³	<i>i_y</i> см	<i>I_z</i> см ⁴	<i>W_z</i> см ³	<i>i_z</i> см	<i>y₀</i> см	<i>z₀</i> см	<i>I_{yx}</i> см ⁴	tg α	Масса 1 п. м. кг
6,5/5*	65	50	8	8.62	35.00	7.99	2.02	18.88	4.93	1.44	1.37	2.12	13.61	0.570	6.77
7/4,5	70	45	5	5.59	27.76	5.88	2.23	9.05	2.62	1.27	1.05	2.28	9.12	0.406	4.39
7,5/5	75	50	5	6.11	34.81	6.81	2.39	12.47	3.25	1.43	1.17	2.39	12.00	0.436	4.79
7,5/5	75	50	6	7.25	40.92	8.08	2.38	14.60	3.85	1.42	1.21	2.44	14.10	0.435	5.69
7,5/5	75	50	7*	8.37	46.77	9.31	2.36	16.61	4.43	1.41	1.25	2.48	16.18	0.435	6.57
7,5/5	75	50	8	9.47	52.38	10.52	2.35	18.52	4.88	1.40	1.29	2.52	17.80	0.430	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.64	7.71	2.56	12.68	3.28	1.41	1.13	2.60	13.20	0.387	4.49
8/5	80	50	6	7.55	48.98	9.15	2.55	14.85	3.88	1.40	1.17	2.65	15.50	0.386	5.92
8/5	80	50	6	8.15	52.06	9.42	2.53	25.18	5.58	1.76	1.49	2.47	20.98	0.547	6.39
8/6*	80	60	7	9.42	59.61	10.87	2.52	28.74	6.43	1.75	1.53	2.52	24.01	0.546	7.39
8/6*	80	60	8	10.67	66.88	12.38	2.50	32.15	7.26	1.74	1.57	2.56	26.83	0.544	8.37
9/5,6	90	56	5.5	7.86	65.28	10.74	2.88	19.67	4.53	1.58	1.26	2.92	20.54	0.384	6.17
9/5,6	90	56	6	8.54	70.58	11.66	2.88	21.22	4.91	1.58	1.28	2.95	22.23	0.384	6.70
9/5,6	90	56	8	11.18	90.87	15.24	2.85	27.08	6.39	1.56	1.36	3.04	28.33	0.380	8.77
10/6,3	100	63	6	9.58	98.29	14.52	3.20	30.58	6.27	1.79	1.42	3.23	31.50	0.393	7.53
10/6,3	100	63	7	11.09	112.86	16.78	3.19	34.99	7.23	1.78	1.46	3.28	36.10	0.392	8.70
10/6,3	100	63	8	12.57	126.96	19.01	3.18	39.21	8.17	1.77	1.50	3.32	40.50	0.391	9.87
10/6,3	100	63	10	15.47	153.95	23.32	3.15	47.18	9.99	1.75	1.58	3.40	48.60	0.387	12.14
10/6,5*	100	65	7	11.23	114.05	16.87	3.19	38.32	7.70	1.85	1.52	3.24	38.00	0.415	8.81
10/6,5*	100	65	8	12.73	128.31	19.11	3.18	42.96	8.70	1.84	1.56	3.28	42.64	0.414	9.99
10/6,5*	100	65	10	15.67	155.52	23.45	3.15	51.68	10.64	1.82	1.64	3.37	51.18	0.410	12.30
11/7	110	70	6.5	11.45	142.42	19.11	3.53	45.61	8.42	2.00	1.58	3.55	46.80	0.402	8.98
11/7	110	70	8	13.93	171.54	23.22	3.51	54.64	10.20	1.98	1.64	3.61	55.90	0.400	10.93
12,5/8	125	80	7	14.06	226.53	26.67	4.01	73.73	11.89	2.29	1.80	4.01	74.70	0.407	11.04

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.4

№	<i>B</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см ²	<i>I_y</i> см ⁴	<i>W_y</i> см ³	<i>i_y</i> см	<i>I_z</i> см ⁴	<i>W_z</i> см ³	<i>i_z</i> см	<i>y₀</i> см	<i>z₀</i> см	<i>I_{yx}</i> см ⁴	tg α	Масса 1 п. м. кг
12,5/8	125	80	8	15.98	225.62	30.26	4.00	80.95	13.47	2.28	1.84	4.05	84.10	0.406	12.58
12,5/8	125	80	10	19.70	311.61	37.27	3.98	100.47	16.52	2.26	1.92	4.14	102.00	0.404	15.47
12,5/8	125	80	12	23.36	364.79	44.07	3.95	116.84	19.46	2.24	2.00	4.22	118.00	0.400	18.34
14/9	140	90	8	18.00	363.68	38.25	4.49	119.79	17.19	2.58	2.03	4.49	121.00	0.411	14.13
14/9	140	90	10	22.24	444.45	47.19	4.47	145.54	21.14	2.58	2.12	4.58	147.00	0.409	17.46
16/10	160	100	9	22.87	605.97	56.04	5.15	186.03	23.96	2.85	2.24	5.19	194.00	0.391	17.96
16/10	160	100	10	25.28	666.59	61.91	5.13	204.09	26.42	2.84	2.28	5.23	213.00	0.390	19.85
16/10	160	100	12	30.04	784.22	73.42	5.11	238.75	31.23	2.82	2.36	5.32	249.00	0.388	23.58
16/10	160	100	14	34.72	897.19	84.65	5.08	271.60	35.89	2.80	2.43	5.40	282.00	0.385	27.26
18/11	180	110	10	28.33	952.28	78.59	5.80	276.37	32.27	3.12	2.44	5.88	295.00	0.376	22.20
18/11	180	110	12	33.69	1122.56	93.33	5.77	324.09	38.20	3.10	2.52	5.97	348.00	0.374	26.40
20/12,5	200	125	11	34.87	1449.02	107.31	6.45	446.36	45.98	3.58	2.79	6.50	465.00	0.392	27.37
20/12,5	200	125	12	37.89	1568.19	116.51	6.43	481.93	49.85	3.57	2.83	6.54	503.00	0.392	29.74
20/12,5	200	125	14	43.87	1800.83	134.64	6.41	550.77	57.43	3.54	2.91	6.62	575.00	0.390	34.43
20/12,5	200	125	16	49.77	2026.08	152.41	6.38	616.66	64.83	3.52	2.99	6.71	643.00	0.388	39.07

* Уголки изготавливают по требованию потребителя

1.5. Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239—89

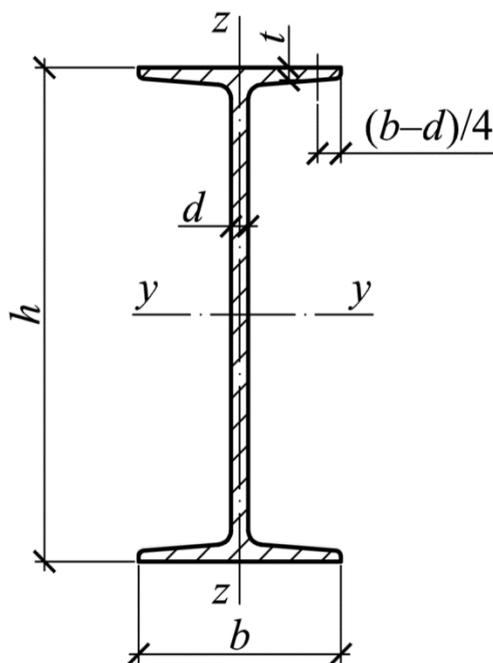


Рисунок 1.5 — Двутавр стальной горячекатаный

ВНИМАНИЕ! ГОСТ утратил силу на территории Российской Федерации с 30 ноября 2018 года в связи с изданием Приказа Росстандарта от 30.11.2018 № 1047-ст. Взамен введен ГОСТ Р 57837—2017.

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

- h — высота (двутавра);
- b — ширина полки;
- d — толщина стенки;
- t — толщина полки;
- A — площадь поперечного сечения;
- I — момент инерции;
- W — момент сопротивления;
- i — радиус инерции;
- S — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

Таблица 1.5 — Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ утратил силу на территории РФ)

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	S_y см ³	I_z см ⁴	W_z см ³	i_z см
10	100	55	4.5	7.2	12.0	9.46	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	14.7	11.50	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38
14	140	73	4.9	7.5	17.4	13.70	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.50	1.55
16	160	81	5.0	7.8	20.2	15.90	873	109.0	6.57	62.3	58.6	14.50	1.70
18	180	90	5.1	8.1	23.4	18.40	1290	143.0	7.42	81.4	82.6	18.40	1.88
20	200	100	5.2	8.4	26.8	21.00	1840	184.0	8.28	104.0	115.0	23.10	2.07
22	220	110	5.4	8.7	30.6	24.00	2550	232.0	9.13	131.0	157.0	28.60	2.27
24	240	115	5.6	9.5	34.8	27.30	3460	289.0	9.97	163.0	198.0	34.50	2.37
27	270	125	6.0	9.8	40.2	31.50	5010	371.0	11.20	210.0	260.0	41.50	2.54
30	300	135	6.5	10.2	46.5	36.50	7080	472.0	12.30	268.0	337.0	49.90	2.69
33	330	140	7.0	11.2	53.8	42.20	9840	597.0	13.50	339.0	419.0	59.90	2.79
36	360	145	7.5	12.3	61.9	48.60	13380	743.0	14.70	423.0	516.0	71.10	2.89
40	400	155	8.3	13.0	72.6	57.00	19062	953.0	16.20	545.0	667.0	86.10	3.03
45	450	160	9.0	14.2	84.7	66.50	27696	1231.0	18.10	708.0	808.0	101.00	3.09
50	500	170	10.0	15.2	100.0	78.50	39727	1589.0	19.90	919.0	1043.0	123.00	3.23
55	550	180	11.0	16.5	118.0	92.60	55962	2035.0	21.80	1181.0	1356.0	151.00	3.39
60	600	190	12.0	17.8	138.0	108.00	76806	2560.0	23.60	1491.0	1725.0	182.00	3.54

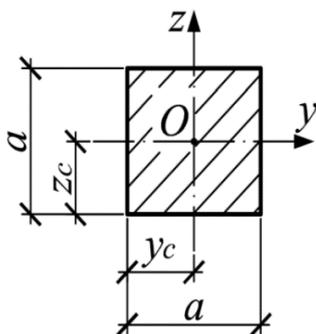
2. Геометрические характеристики простейших фигур

Принятые обозначения:

- A — площадь фигуры;
- y, z — главные оси;
- I_y, I_z — моменты инерции;
- I_y — центробежный момент инерции;
- W_y, W_z — моменты сопротивления;
- i_y, i_z — радиусы инерции.

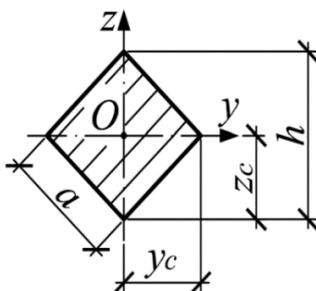
Значок «*» у момент сопротивления W приводится для наиболее удалённых волокон от центра тяжести сечения.

Квадрат



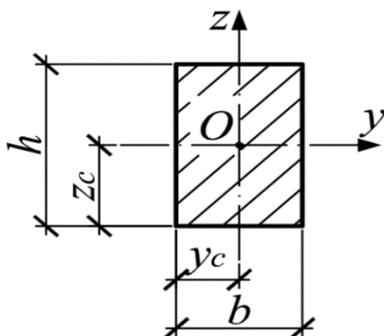
$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{a}{2}; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_y &= W_z = \frac{a^3}{6}; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.
 \end{aligned}$$

Квадрат, поставленный на ребро



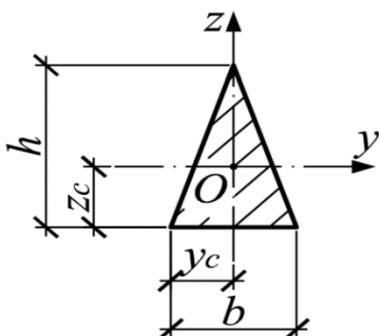
$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0.71a; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}; \quad I_{yz} = 0; \\
 W_y &= W_z = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.
 \end{aligned}$$

Прямоугольник



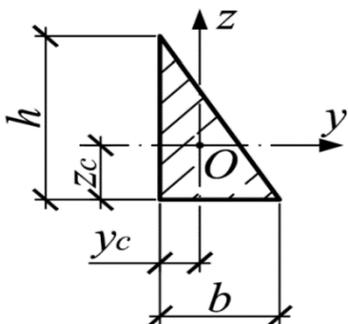
$$\begin{aligned}
 A &= bh; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{2}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{12}; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_y &= \frac{bh^2}{6}; \quad W_z = \frac{hb^2}{6}; \\
 i_y &= 0.289h; \quad i_z = 0.289b.
 \end{aligned}$$

Равнобедренный треугольник



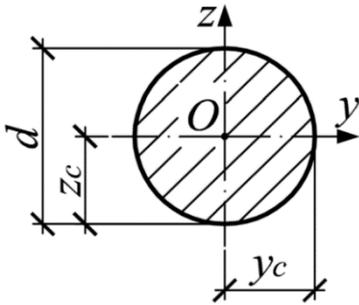
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{48}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_{y*} &= \frac{bh^2}{24} \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{2\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

Прямоугольный треугольник



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{3}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{36}; \\
 I_{yz} &= \pm \frac{b^2h^2}{72}; \\
 W_{y*} &= \frac{bh^2}{24}; \quad W_{z*} = \frac{hb^2}{24}; \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{3\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Круг



$$A = \frac{\pi d^2}{4};$$

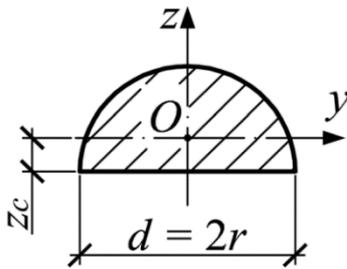
$$y_c = z_c = \frac{d}{2};$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}; \quad I_\rho = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$i_y = i_z = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}.$$

Полукруг



$$A = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2};$$

$$y_c = \frac{d}{2} = r; \quad z_c = \frac{2d}{3\pi} = \frac{4r}{3\pi};$$

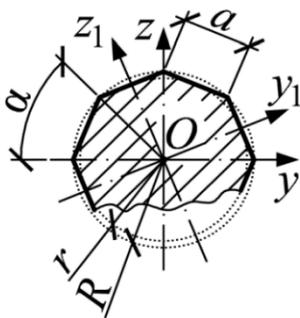
$$I_y = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right); \quad I_z = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8};$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$W_{y*} \approx 0.0239d^3; \quad W_z = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8}$$

$$i_y \approx 0.132d; \quad i_z = \frac{d}{4}.$$

Правильный многоугольник с n сторонами



$$A = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \alpha = n r^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{n a r}{2};$$

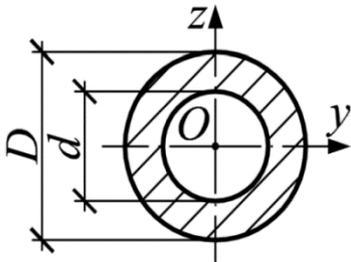
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha};$$

$$I_y = I_z = \frac{n a r}{48} (6 R^2 - a^2) = \frac{n a r}{96} (12 r^2 + a^2);$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{12 r^2 + a^2}{48}}.$$

Кольцо



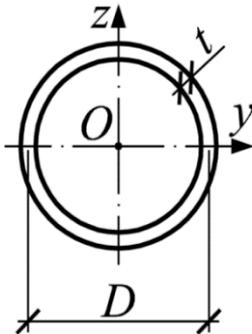
$$A = \frac{\pi d^2}{4} (1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0.05 D^4 (1 - \alpha^4);$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^3 (1 - \alpha^4);$$

$$i_y = i_z = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Тонкое кольцо $t \ll D$



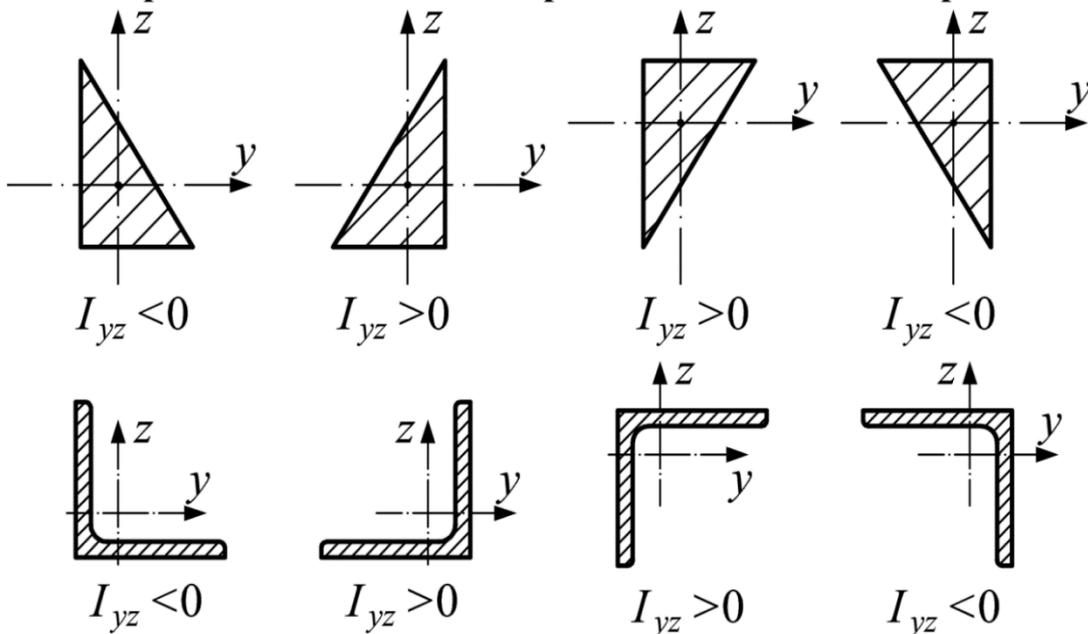
$$A = \pi D t;$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^3 t}{4} \approx 0.3926 D^3 t;$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^2 t}{4} \approx 0.7853 D^2 t;$$

$$i_y = i_z = 0.353 D.$$

Правило знаков для центробежного момента инерции



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

3. Перевод единиц. Механические характеристики материалов

3.1. Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами

Величина	Единица ее обозначения		Соотношение единиц
	по СНиП	в системе СИ	
Сила, нагрузка, вес	килограмм-сила (кгс) тонна-сила (тс)	ньютон (Н) килоньютон (кН)	$1 \text{ кгс} = 9.8 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$ $1 \text{ тс} \approx 10000 \text{ Н} = 10 \text{ кН}$
Линейная нагрузка, поверхностная нагрузка	килограмм-сила на метр (кгс/м), тонна-сила на метр (тс/м)	ньютон на метр (Н/м) килоньютон на метр (кН/м),	$1 \text{ кгс/м} \approx 10 \text{ Н/м}$ $1 \text{ тс/м} \approx 10 \text{ кН/м}$
	килограмм-сила на квадратный метр (кгс/м ²)	ньютон на квадратный метр (Н/м ²)	$1 \text{ кгс/м}^2 \approx 10 \text{ Н/м}^2$
	тонна-сила на квадратный метр (тс/м ²)	килоньютон на квадратный метр (кН/м ²)	$1 \text{ тс/м}^2 \approx 10 \text{ кН/м}^2$
Напряжение, давление, модуль упругости	килограмм-сила на квадратный миллиметр (кгс/мм ²), килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см ²)	паскаль (Па) (1 Па \approx 0.1 миллиметра водного столба), мегапаскаль (МПа)	$1 \text{ кгс/мм}^2 \approx 10^7 \text{ Па} = 10 \text{ МПа}$
	тонна-сила на квадратный метр (тс/м ²)		$1 \text{ кгс/см}^2 \approx 10^5 \text{ Па} = 0.1 \text{ МПа}$
			$1 \text{ тс/м}^2 \approx 10^4 \text{ Па} = 10 \text{ кПа}$
Момент силы	килограмм-сила-метр (кгс · м) тонна-сила-метр (тс · м)	ньютон-метр (Н · м) килоньютон-метр (кН · м)	$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} \approx 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ $1 \text{ тс} \cdot \text{м} \approx 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$$\begin{aligned}
 1 \text{ м} &= 10^2 \text{ см}; & 1 \text{ м}^2 &= 10^4 \text{ см}^2; & 1 \text{ м}^3 &= 10^6 \text{ см}^3; & 1 \text{ м}^4 &= 10^8 \text{ см}^4; \\
 1 \text{ см} &= 10^{-2} \text{ м}; & 1 \text{ см}^2 &= 10^{-4} \text{ м}^2; & 1 \text{ см}^3 &= 10^{-6} \text{ м}^3; & 1 \text{ см}^4 &= 10^{-8} \text{ м}^4; \\
 1 \text{ Н} &= 10^{-3} \text{ кН}; & 1 \text{ Н} &= 10^{-6} \text{ МН}; & 1 \text{ кН} &= 10^{-3} \text{ МН}; & 1 \text{ тс} &= 10 \text{ кН}; \\
 1 \text{ кН} &= 10^3 \text{ Н}; & 1 \text{ МН} &= 10^3 \text{ Н}^2; & 1 \text{ МН} &= 10^6 \text{ Н}; & 1 \text{ кгс} &= 10 \text{ Н}; \\
 1 \text{ Па} &= 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ кПа} &= 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МПа} &= 1 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МН} &= 100 \text{ тс}; \\
 1 \text{ кПа} &= 10^3 \text{ Па}; & 1 \text{ кПа} &= 10^{-3} \text{ МПа}; & 1 \text{ МПа} &= 10^3 \text{ кПа}; & 1 \text{ МПа} &= 10 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}; \\
 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} &= 10 \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$

3.2. Механические характеристики материалов

Материал	E , МПа	G , МПа	α , $\frac{1}{\text{град}}$	γ , $\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$
Сталь	$2.06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78.5
Медь прокатная	$1.1 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$165 \cdot 10^{-7}$	88.9
Серый чугун	$1.18 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^4$	$100 \cdot 10^{-7}$	68.0÷74.0
Дерево вдоль волокон	$1 \cdot 10^4$	$0.055 \cdot 10^4$	$20 \div 40 \cdot 10^{-7}$	5.5÷7.4

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- Обозначения: E — модуль упругости при растяжении материала;
 G — модуль упругости при сдвиге;
 ν — коэффициент Пуассона;
 α — температурный коэффициент линейного расширения;
 γ — объёмный вес.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

4. Устойчивость сжатых стержней

Значения φ для дерева определяются в соответствии с п.7.3 СП 64.13330.2017 «Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—25—80»:

$$\varphi = 1 - 0.8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad \text{если } \lambda \leq 70;$$

$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \quad \text{если } \lambda > 70,$$

- где λ — гибкость стержня;
 μ — коэффициент приведения длины;
 l — длина стержня;
 i_{\min} — минимальный радиус инерции.

В случае стали С245, значение φ приведены в таблицы ниже и определены согласно выражению (8) СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81*»:

$$\varphi = \frac{0.5 \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - 39.48\bar{\lambda}^2} \right)}{\bar{\lambda}^2}.$$

Значение коэффициента δ определяется по формуле

$$\delta = 9.87 (1 - \alpha + \beta\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}^2.$$

- где $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}}$ — условная гибкость стержня;
 α и β — коэффициенты, определяемые по таблице 7 СП 16.13330.2011.

Для типов сечений «б» по таблице 7 СП 16.330.2017 $\alpha = 0.04$ и $\beta = 0.09$, а также согласно таблицы В.5 для стали С245 $R_y = 235$ МПа; $E = 2.06 \cdot 10^5$ МПа значения коэффициента φ приведены в таблице

φ	Материал	Гибкость λ									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	Сталь С245	0.99	0.98	0.95	0.91	0.87	0.82	0.77	0.70	0.63	0.57
	Дерево	0.99	0.97	0.93	0.87	0.80	0.71	0.61	0.47	0.37	0.30
φ	Материал	Гибкость λ									
		110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ	Сталь С245	0.50	0.44	0.39	0.35	0.31	0.28	0.25	0.23	0.21	0.19
	Дерево	0.25	0.21	0.18	0.15	0.13	0.12	0.10	0.09	0.08	0.08

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

Расчётное сопротивление стали R_y определяется согласно СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81*».

В случае, если гибкость стержня λ превышает предельную гибкость $\lambda_{пред}$, критическое напряжение определяется по формуле Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{Э}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{A(\mu l)^2}.$$

В случае, если гибкость стержня λ не превышает предельную гибкость $\lambda_{пред}$, критическое напряжение определяется по формуле В. Ф. Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где a и b — эмпирические коэффициенты, определяемые для различных материалов на основе экспериментальных данных.

Таблица 4.1 — Значения коэффициентов a и b для некоторых материалов, используемых в формуле Ф. С. Ясинского

Материал	a , МПа	b , МПа	$\lambda_{пред}$
Сталь	310	1.14	100
Дерево	40	0.203	70

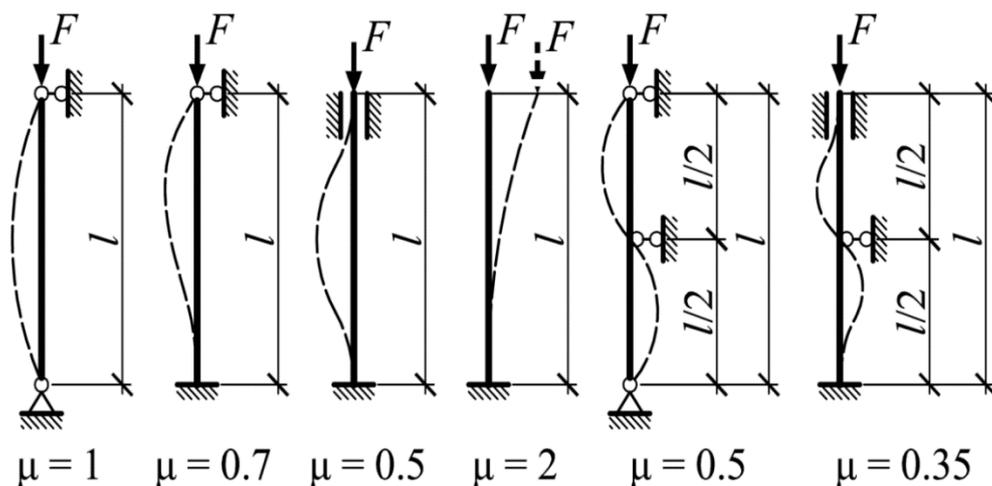


Рисунок 4.1 — Зависимость коэффициента приведения длины μ от схемы закрепления стержня

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

5. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок

5.1. Правила построения и контроля эпюр (метод начальных параметров)

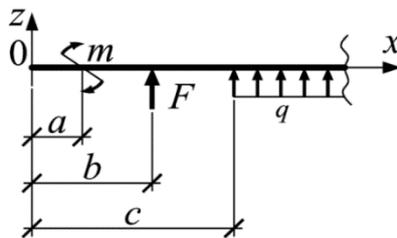


Рисунок 5.1 — К методу начальных параметров: положительное направление внешних нагрузок

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[\sum m(x-a) + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} \right];$$

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[\sum m \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} \right],$$

- где E — Модуль упругости балки;
 I — момент инерции балки относительно оси y ;
 a — расстояние от начала координат до точки приложения изгибающего момента m ;
 b — расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы F ;
 c — расстояние от начала координат до начала распределённой нагрузки q .

Использование приведённого выражения может быть возможно при соблюдении двух из четырёх правил Клебша: 1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят. 2. При действии на балку распределённой нагрузки, не доходящей до правого конца балки, её необходимо продолжить до правого концевого сечения, одновременно уравнивая её противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности.

Дифференциальная зависимость между внутренними силовыми факторами может быть записана:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^3\varphi}{dx^3} = EI \frac{d^4w}{dx^4}.$$

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

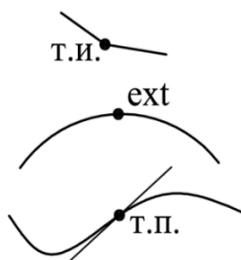
Тогда правила построения эпюр углов поворота и прогибов могут быть сформулированы:

1. На участке, где эпюра поперечных сил Q положительна, эпюра углов поворота φ имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра поперечных сил q отрицательная, эпюра углов поворота φ имеет выпуклость вверх.
2. В точке, где эпюра поперечных сил Q проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре углов поворота φ в этом месте точка перегиба (т. п.).
3. В точке, где эпюра изгибающего момента M проходит через ноль, на эпюре углов поворота φ в этом месте экстремум (ext).
4. В точке, где на эпюре изгибающего момента M наблюдается скачок, на эпюре углов поворота φ точка излома (т. и.).
5. На участке, где эпюра изгибающего момента M положительна, эпюра прогибов w имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра изгибающего момента M отрицательная, эпюра прогибов w имеет выпуклость вверх.
6. В точке, где эпюра изгибающего момента M проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре прогибов w в этом месте точка перегиба (т. п.).
7. В точке, где эпюра углов поворота φ проходит через ноль, на эпюре прогибов w в этом месте экстремум (ext).

Сокращённо данные правила могут быть представлены графически:

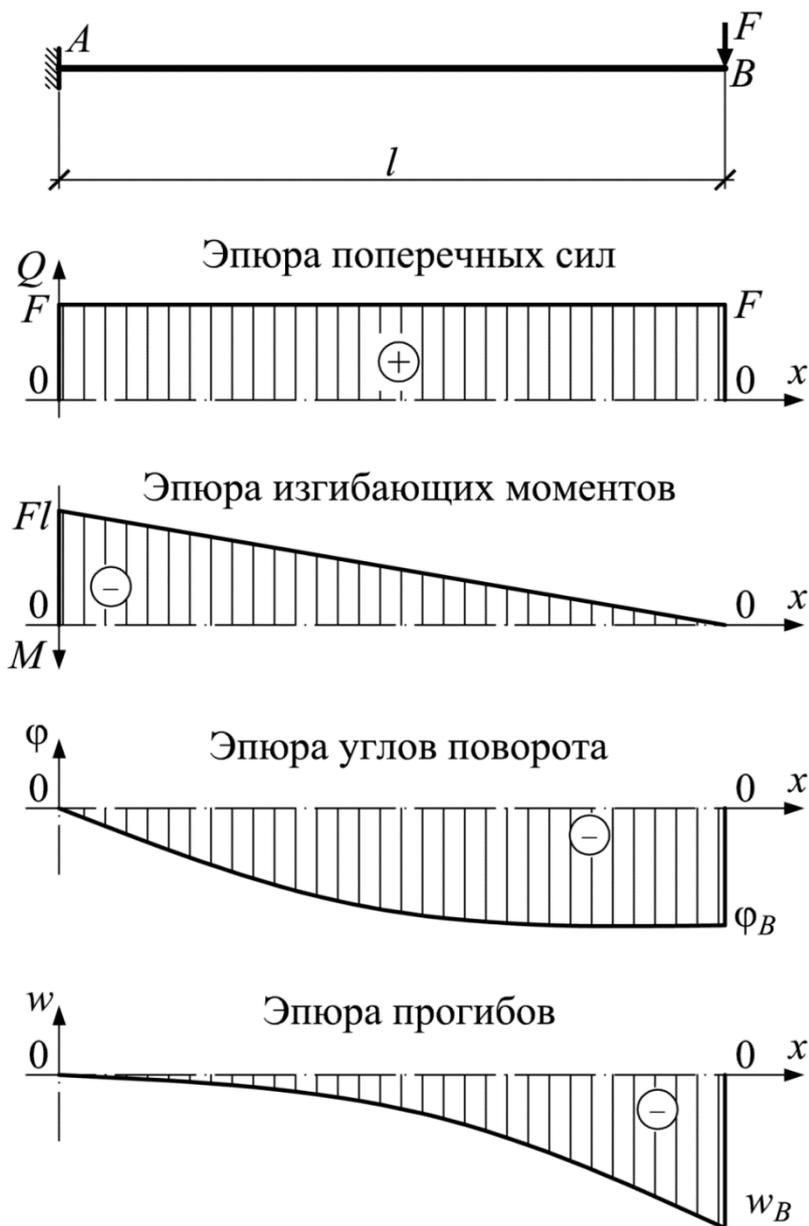
Нагрузка	$\Downarrow q$	$\Downarrow F$	$\curvearrowright M$	\circ	0	—		
Q	∇	\lrcorner			ext	0		
M	\cup	∇	\lrcorner		т.п.	ext	0	
φ			∇	\lrcorner		т.п.	ext	0
w				∇			т.п.	ext

где \cup — парабола;
 ∇ — излом;
 \lrcorner — скачок;
 ext — экстремум;
 т.п. — точка перегиба.



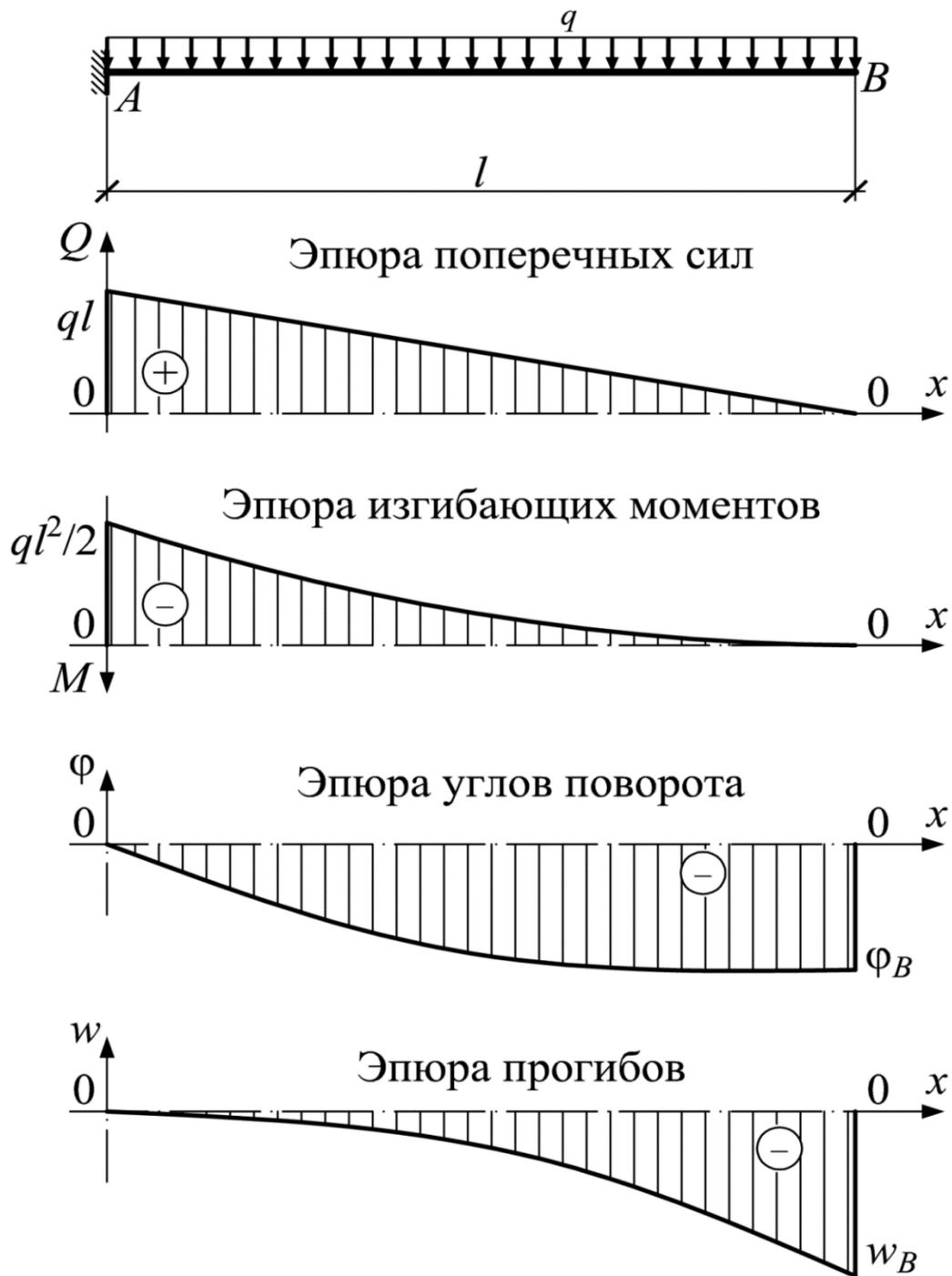
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

5.2. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок



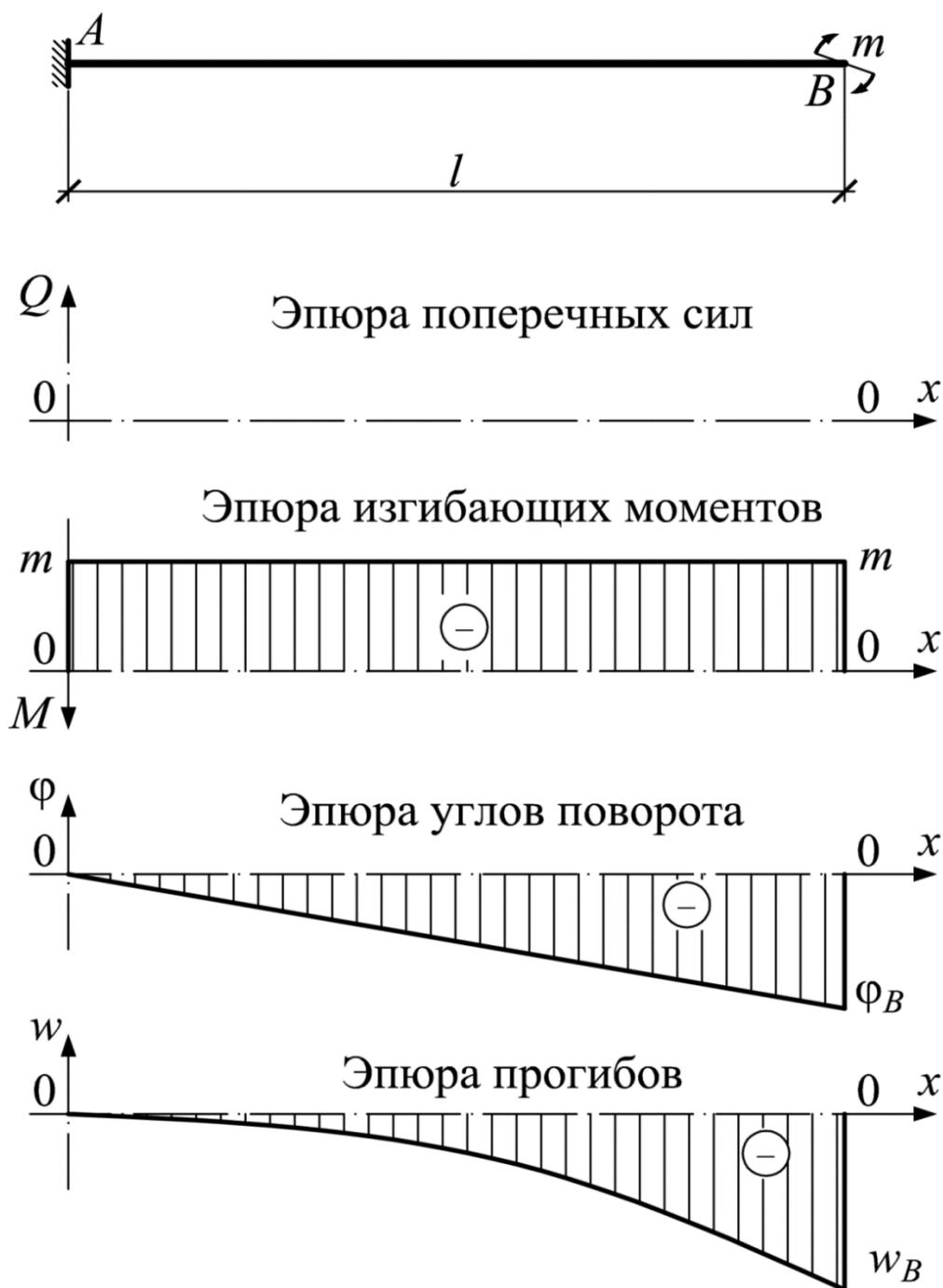
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{Fl^2}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}.$$



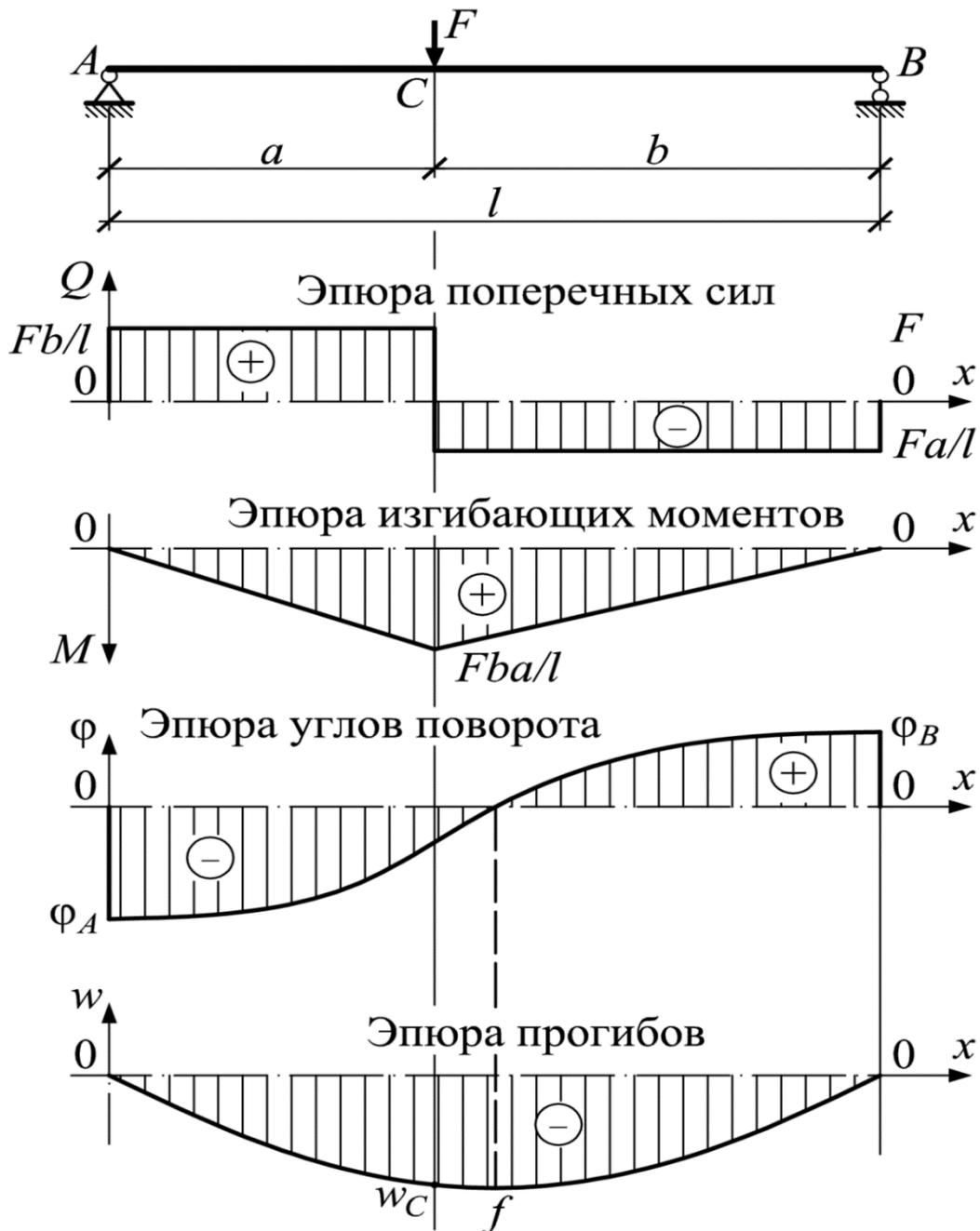
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$



$$\varphi_B = -\frac{ml}{EI};$$

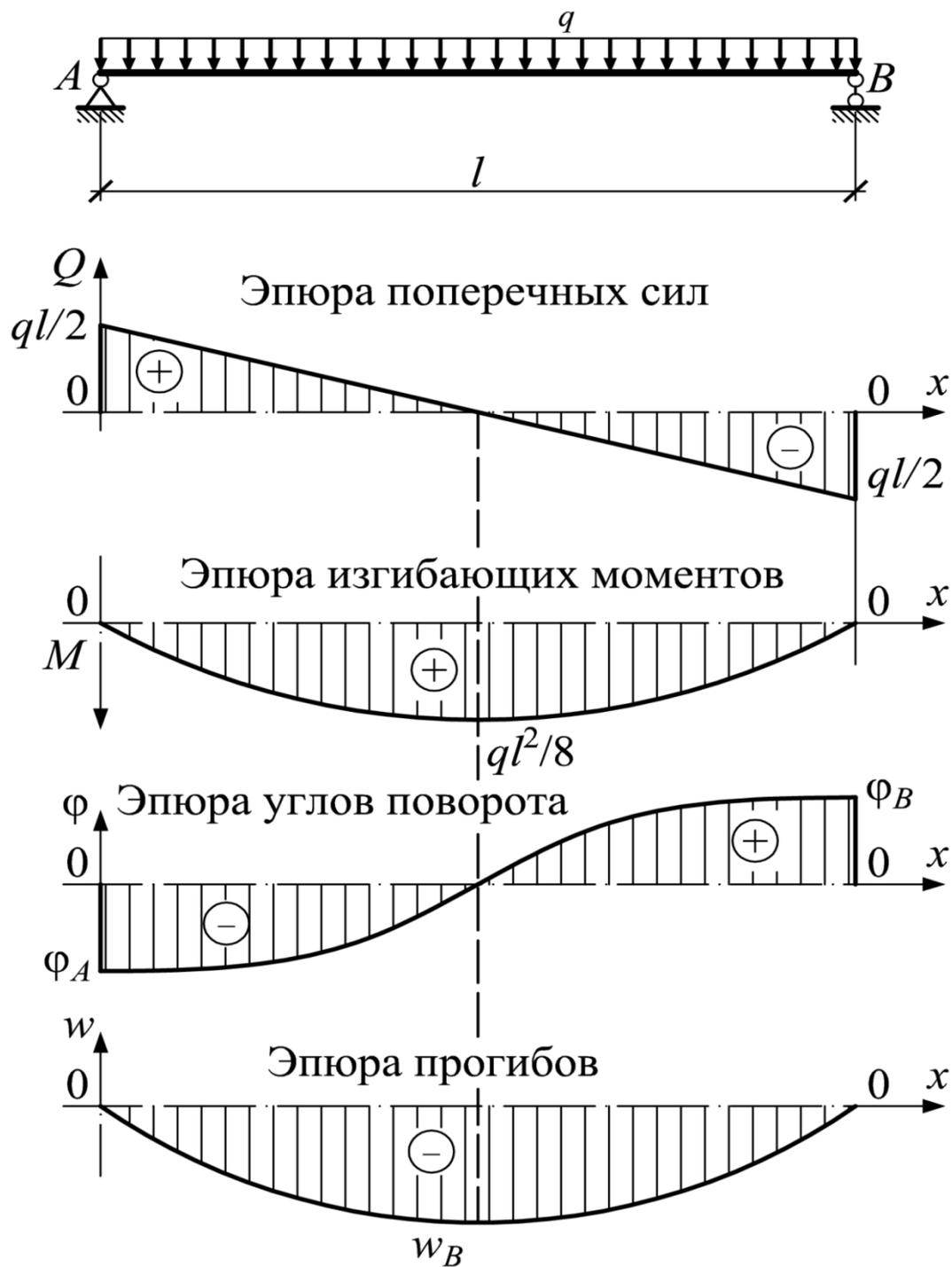
$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{ml^2}{EI}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{Fba}{EI} (a+2b); \quad \varphi_B = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} (l^2 - a^2);$$

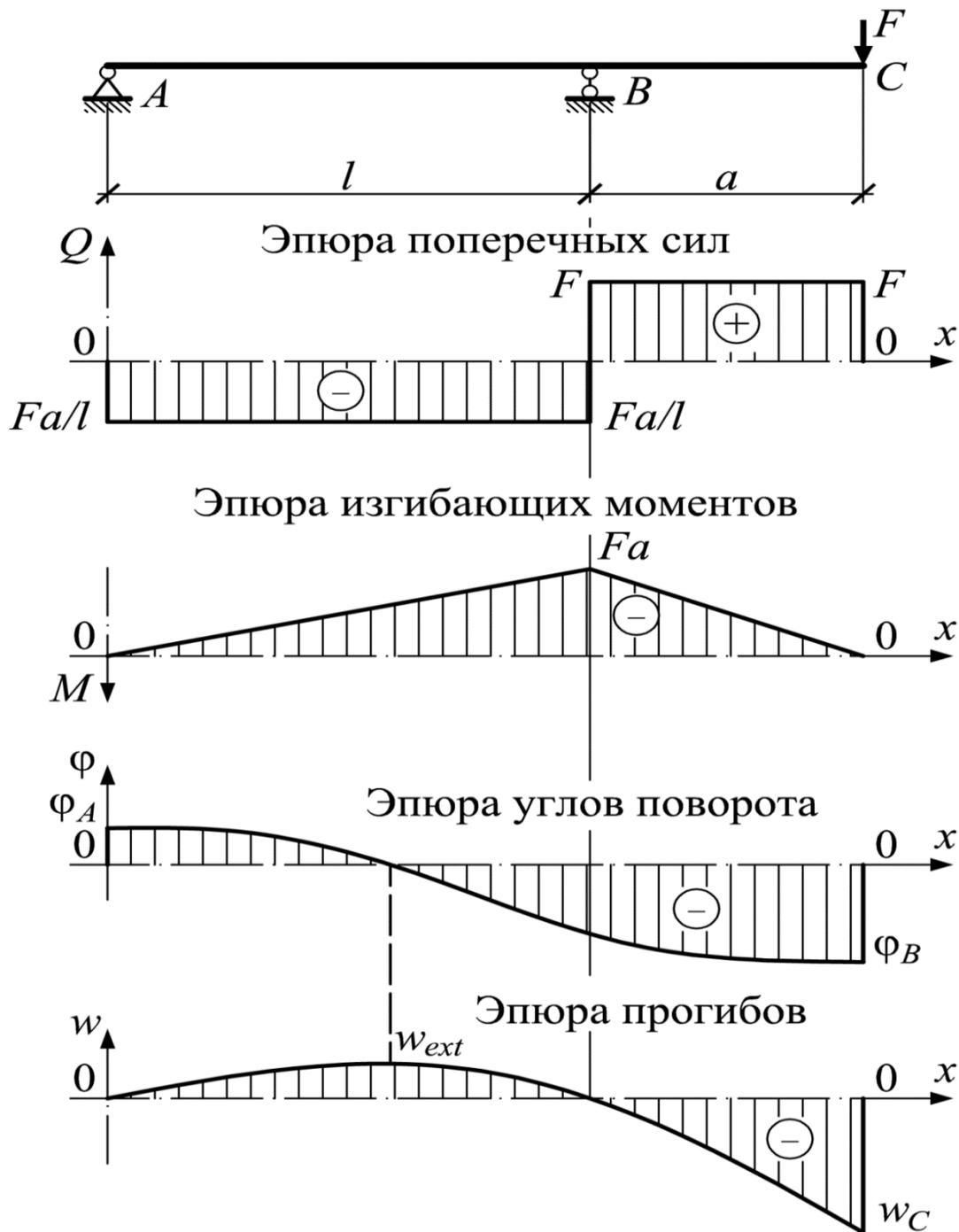
$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F}{EI} \frac{(ab)^2}{l}, \quad \text{при } x = a;$$

$$f = w_{\max} = w_C = -\frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}, \quad \text{при } x = a = b = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI};$$

$$w_{\max} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad \text{при } x = \frac{l}{2}.$$

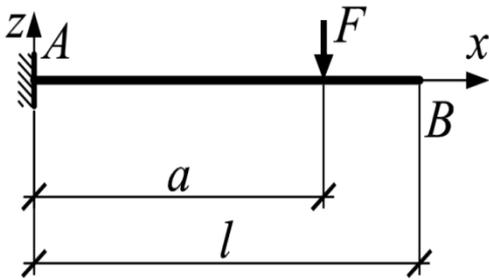


$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{F a l}{E I}; \quad \varphi_C = -\frac{1}{6} \frac{F a}{E I} (2l + 3a);$$

$$w_{ext} = 0.0642 \frac{F a l^2}{E I}; \quad \text{при } x = 0.578l;$$

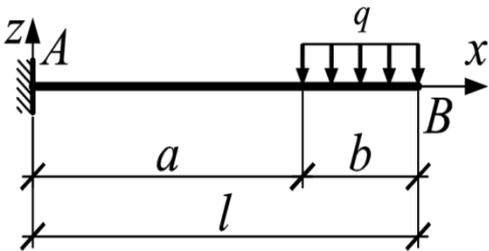
$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F a^2}{E I} (l + a).$$

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/



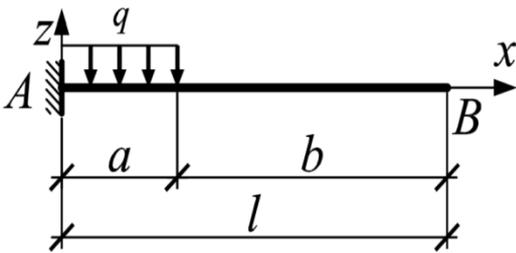
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{F a^2}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{6} \frac{F a^2}{EI} (3l - a).$$



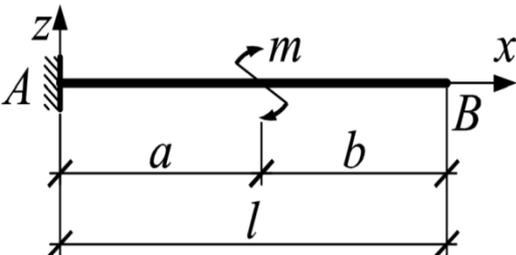
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{q l^3}{EI} \left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right);$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{q l^4}{EI} \left(3 - 3 \frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4}\right).$$



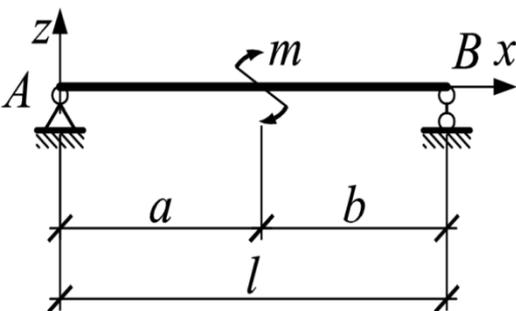
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{q a^3}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI} (4l - a).$$



$$\varphi_B = -\frac{m a}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{2} \frac{m a (l + b)}{EI}.$$

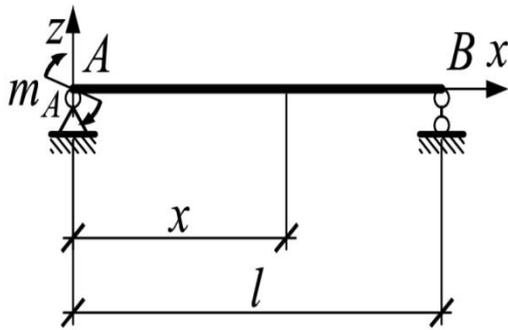


$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{m l}{EI} \left(1 - 3 \frac{b^2}{l^2}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m l}{EI} \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right);$$

$$w(a) = -\frac{1}{3} \frac{m a b}{EI} \left(\frac{a - b}{l}\right) \text{ при } x = a.$$

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/

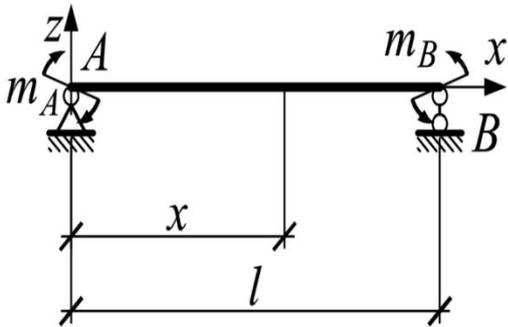


$$\varphi_A = -\frac{1}{3} \frac{ml}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ml}{EI};$$

$$w_{\max} = -0.0642 \frac{ml^2}{EI};$$

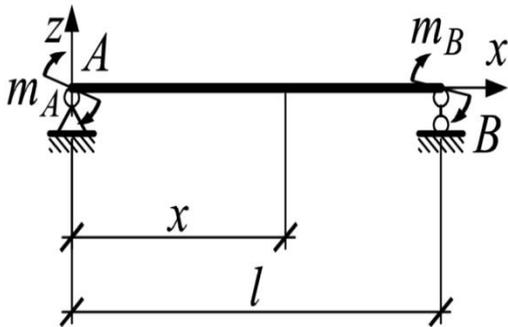
$$w = -\frac{1}{16} \frac{ml^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

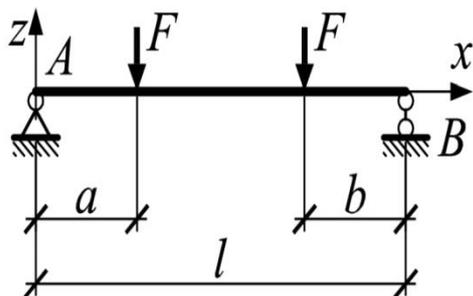
$$w_{\max} = -\frac{1}{16} \frac{(m_A + m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

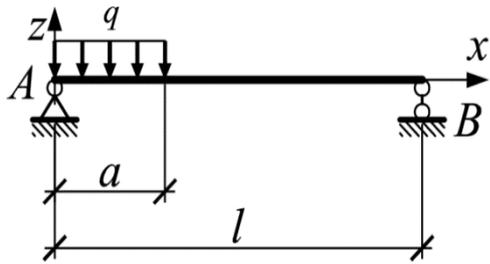
$$w = -\frac{1}{16} \frac{(m_A - m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} (l - a);$$

$$w_{\max} = -\frac{1}{24} \frac{Fl^3}{EI} \left(3 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$

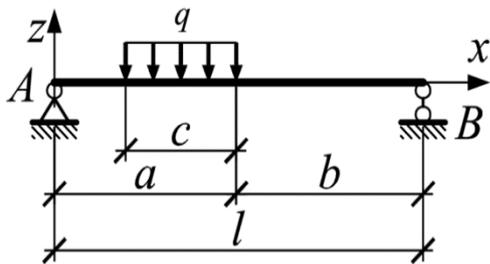
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ АРХИТЕКТОРОВ /Часть I/



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a}{2l}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{12} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right);$$

$$w = -\frac{1}{24} \frac{a^3 b}{EI} \left(4 - 3\frac{a}{l}\right).$$

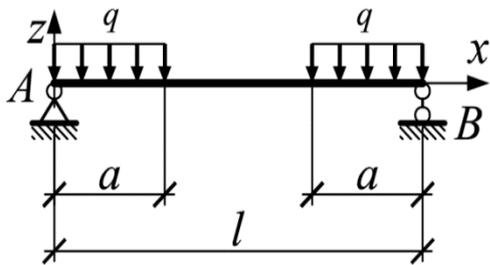


$$\varphi_A = \frac{1}{24} \frac{qbc}{EI} [4a(l+b) - c^2];$$

$$\varphi_B = \frac{1}{24} \frac{qac}{EI} [4b(l+a) - c^2];$$

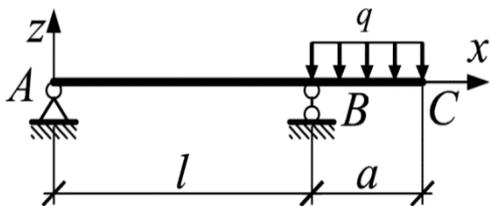
$$w = -\frac{1}{6} \frac{qc}{EI} \left[\frac{ab}{l} \left(2al - 2a^2 - \frac{c}{4}\right) + \frac{c^3}{64} \right]$$

при $x = a$.



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{12} \frac{qa^2}{EI} (3l - 2a);$$

$$w_{\max} = -\frac{1}{48} \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2\frac{a^2}{l^2}\right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{12} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_C = \frac{1}{6} \frac{qa^2}{EI} (a+l);$$

$$w_C = -\frac{1}{24} \frac{qa^2}{EI} (4l+3a);$$

$$w_{\max} = 0.0321 \frac{qa^2 l^2}{EI} \text{ при } x = 0.577l.$$