ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Механика»

«Статика. Система двух тел. Фермы»

Авторы

Маяцкая И.А.,

Языев Б.М.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям:

08.03.01 – Строительство;

07.03.01 – Архитектура;

07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство;

23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов;

29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям:

08.05.01 – Строительство уникальных зданий;

08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей;

21.05.01 – Прикладная геодезия;

23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Авторы

канд. техн. наук, доц.
Маяцкая И.А.

докт. техн. наук, профессор
Языев Б.М.

Оглавление

СТАТИКА. СИСТЕМА ДВУХ ТЕЛ. ФЕРМЫ

В инженерной практике расчет многих конструкций с достаточной точностью может быть сведен к анализу составных конструкций, находящихся в состоянии равновесия под действием плоской системы сил.

При расчетах таких конструкций приходиться сталкиваться с рассмотрением задач, в которых рассматриваются находящиеся в равновесии конструкции, состоящие из двух тел. А также в практической деятельности особое место, занимают задачи, связанные с расчетом ферм.

Башни и стрелы подъемных кранов, опоры линий электропередач, железнодорожные мосты и стропила, поддерживающие крыши зданий и сооружений – это конструкции, составленные из стержней, соединенных в единый объект.

1. Основные положения статики системы двух тел

Рассмотрим равновесие сил, приложенных к системе нескольких взаимодействующих между собой тел. Тела могут быть соединены между собой с помощью шарниров, соприкасаться друг с другом и взаимодействовать одно с другим, вызывая силы противодействия. Такую систему тел называют сочлененной.

Силы, действующие на эту систему тел, можно разделить на внешние и внутренние силы. Внешними называют силы, с которыми на тела рассматриваемой системы действуют тела, не входящие в эту систему. Внутренними называют силы взаимодействия между телами этой системы.

При рассмотрении равновесия сил, приложенных к системе тел, можно мысленно разделить систему тел на отдельные тела.

Затем к силам, действующим на эти тела, применить условия равновесия для каждого из этих тел.

В эти уравнения равновесия войдут как внешние силы, так и внутренние силы системы тел.

Внутренние силы на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия в каждой точке сочленения двух тел образуют равновесную систему сил: $\overline{R}_A{}^I$ и $\overline{R}_A{}^{II}$ (рис. 1).

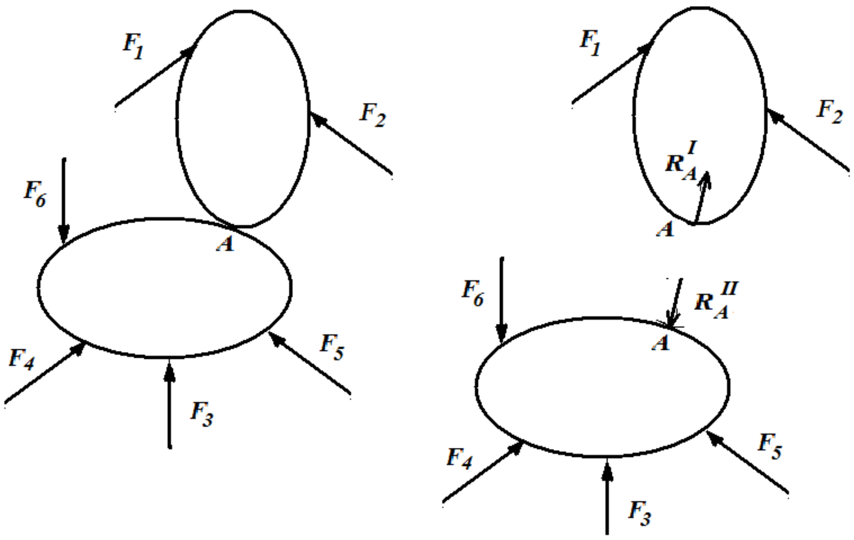


Рис. 1

Для каждого тела составим уравнения равновесия:

Тело I: $$\sum \overline{F}_i^I + \overline{R}_A{}^I = 0$$

$$\sum m_O\left(\overline{F}_i^I\right) + \sum m_O\left(\overline{R}_A{}^I\right) = 0;$$

Тело II: $$\sum \overline{F}_i^{II} + \overline{R}_A{}^{II} = 0$$

$$\sum m_O\left(\overline{F}_i^{II}\right) + \sum m_O\left(\overline{R}_A{}^{II}\right) = 0.$$

Для системы n тел можно составить 3n уравнений равновесия и определить 3n неизвестных сил при условии, что на систему действует плоская система сил.

При рассмотрении равновесия всей системы тел реакции связей между телами не учитываются, так как они являются внутренними. При рассмотрении равновесия каждого тела, входящего в данную систему, соответствующие реакции связей между телами становятся внешними и входят в уравнения равновесия.

На рис. 2 показаны силы взаимодействия между телами А и В в точке опирания одного стержня на другой стержень. Сила $\overline{R}_C{}^{I}$ – действие тела А на тело В, а сила $\overline{R}_C{}^{II}$ – действие тела В на тело А.

Если тело А служит опорой для тела В, то $\overline{R}_C{}^{I}$ – реакция связи, приложенная к телу В, а $\overline{R}_C{}^{II}$ – сила давления, приложенная к телу А.

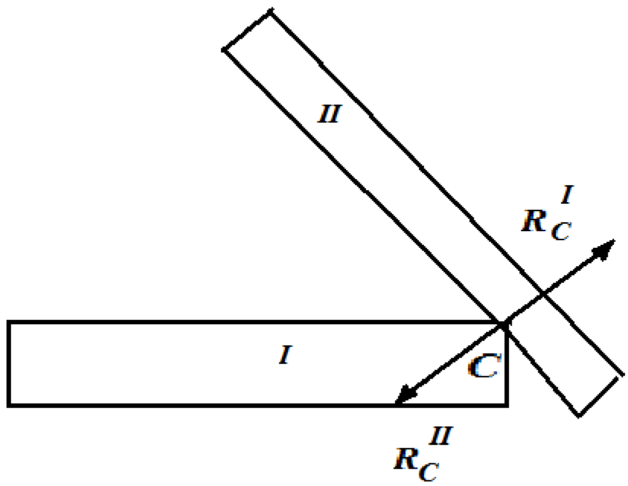


Рис. 2

В этом случае выполняется равенство:

$$\overline{R}_C{}^{I} = -\overline{R}_C{}^{II}\ .$$

На рис. 3 показаны силы взаимодействия двух тел А и В через стержень. Если тело А действует на тело В через стержень силой $N_{CD}{}^{I}$, то со стороны тела В возникает сила $N_{CD}{}^{II}$.

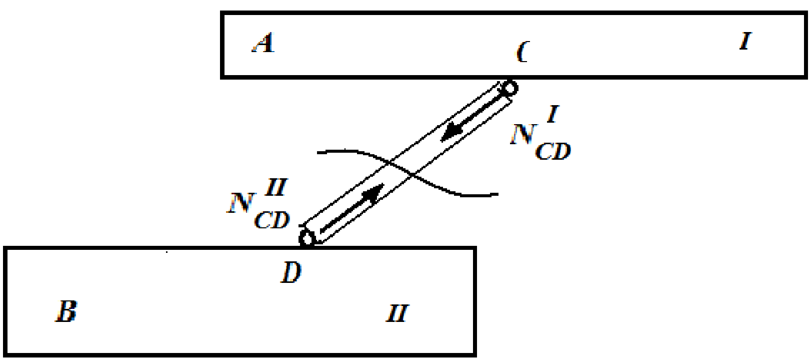


Рис. 3

Если тела А и В связаны друг с другом при помощи шарнирного соединения, то возникают силы взаимодействия тела А на тело В ($\overline{R}_C{}^I$) тела В на тело А ($\overline{R}_C{}^{II}$), при этом силы можно разложить на составляющие (рис. 4).

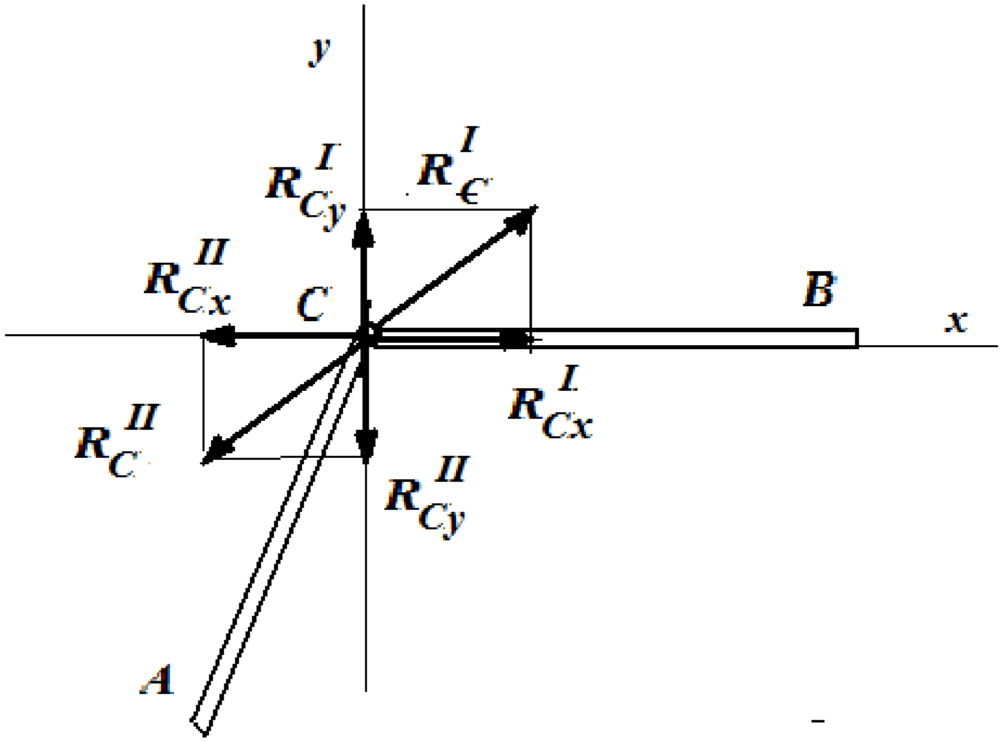


Рис. 4

2. Примеры решения задач статики системы тел

Пример 1.

Два стержня соединены шарниром в точке С. Эти стержни прикреплены к неподвижным опорам в точках А и В (рис. 5).

Длина стержней одинаковая: $AC = CB = 10м$. Схема нагружения показана на рис. 5. На систему действуют силы: $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_3$, значения которых равны: $P_1 = 100кН$; $P_2 = 50кН$; $P_3 = 150кН$.

Требуется определить реакции в опорах А и В.

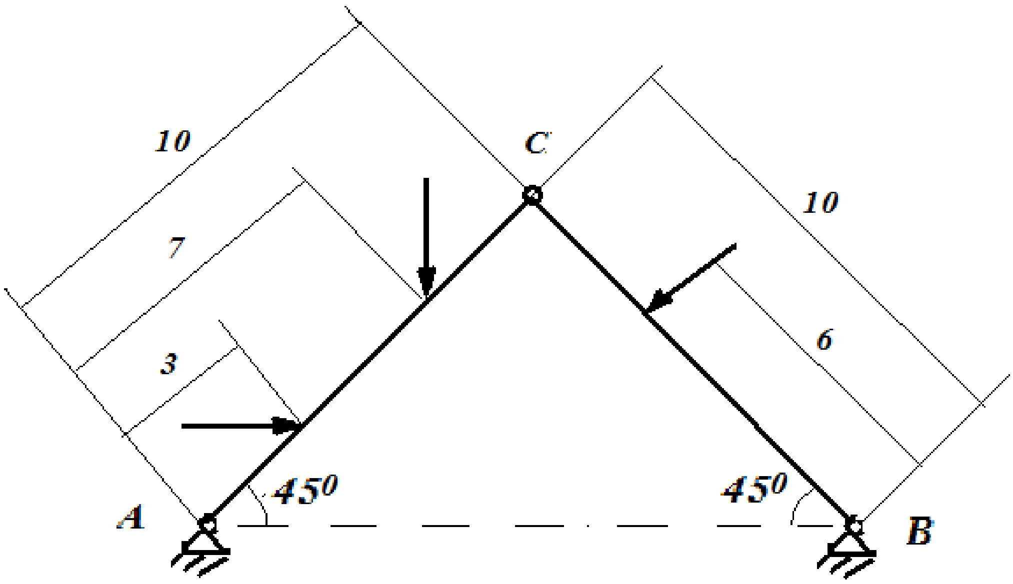


Рис. 5

Решение.

Освободим стержни от связей в точках А и В. Действие этих реакций разложим по осям x и y (рис. 6).

Силы взаимодействия, возникающие в шарнирном соединении, уравновешивают друг друга и поэтому не учитываются при составлении уравнений равновесия всей системы тел (рис. 7).

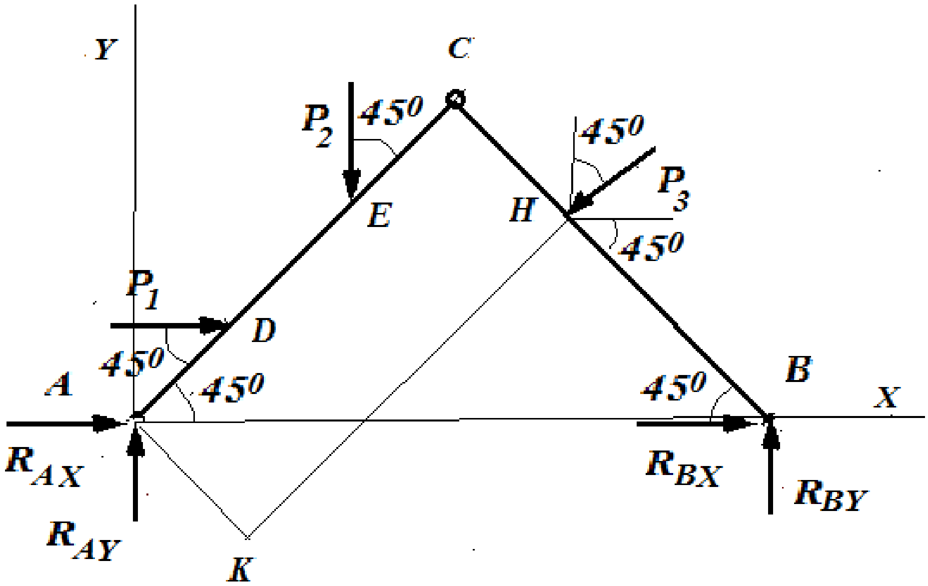
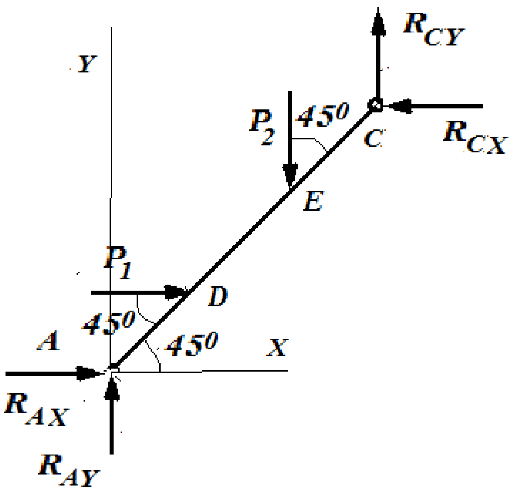


Рис. 6



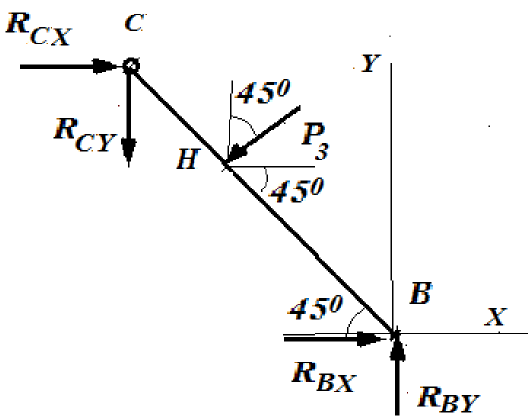


Рис. 7 Рис. 8

На систему двух тел действуют три внешние силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и четыре реакции связей $\overline{R}_{AX}$, $\overline{R}_{AУ}$, $\overline{R}_{BX}$, $\overline{R}_{BУ}$.

Составим 3 уравнения равновесия:

$$\sum F_{кx} = 0;$$

$$\sum F_{ку} = 0;$$

$$\sum m_B(\overline{F}_к) = 0;$$

$$R_{AX} + P_1 - P_3 \sin 45^\circ + R_{BX} = 0;$$

$$R_{AУ} + P_2 - P_3\cos 45° + R_{BУ} = 0;$$

$$-R_{AY}AB - P_1AD\sin 45° + P_1(AB - AE\cos 45°) - P_3HB = 0.$$

В эти уравнения вошли четыре неизвестные реакции.

Необходимое четвертое уравнение составим, исходя из равновесия стержня АС (рис. 8):

$$\sum m_C(\overline{F}_к) = 0;$$

$$-R_{AY}AC\cos 45° + R_{AX}AC\sin 45° - P_1AC\sin 45° + P_2CE\cos 45° = 0.$$

Расстояния равны:

АС = 10 м; АЕ = 7 м; AD = 3 м; АС = СВ; ВН = 6 м.

Из уравнений равновесия находим неизвестные силы:

$$R_{AX} = -3{,}86 кН;\ R_{AУ} = 81{,}14 кН;\ R_{BX} = 9{,}92 кН;\ R_{BУ} = 74{,}93 кН.$$

Для проверки решения можно использовать уравнение моментов относительно точки А, составленного для всей системы:

$$\sum m_A(\overline{F}_к) = 0.$$

В результате получаем:

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^{\ 2} + R_{AУ}^{\ 2}} = 81{,}23 кН;$$

$$R_B = \sqrt{R_{BX}^{\ 2} + R_{BУ}^{\ 2}} = 75{,}58 кН.$$

Пример 2.

Определить реакции в опорах А и С, а также усилия в стержнях BD и ЕК системы тел, показанной на рис. 9.

Стержень АВ нагружен по всей длине равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 10 кН/м$.

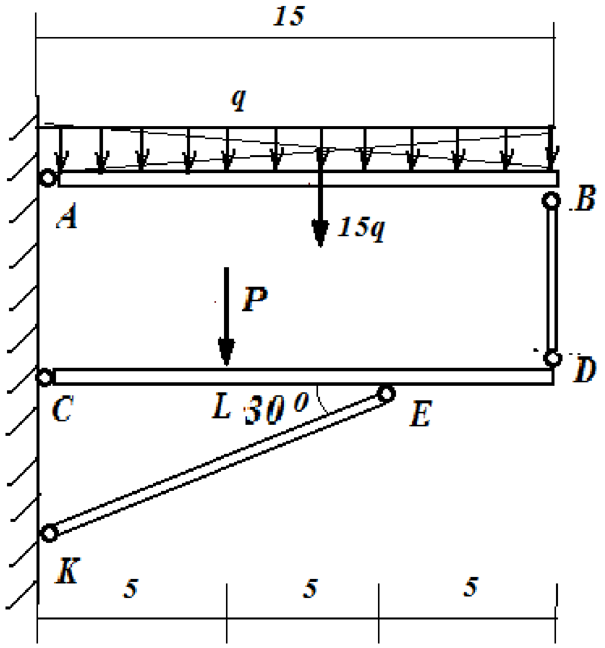


Рис. 9

К стержню АВ в точке В прикреплен стержень, ко второму концу которого также шарнирно прикреплен стержень CD, опирающийся в точке E на стержень ЕК под углом $30°$. Стержень CD нагружен внешней силой $P = 10кН$.

Решение.

Рассмотрим равновесие каждого стержня отдельно. К стержню АВ приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 10кН/м$, а в точке В реакция $N_{BD}{}^{I}$, которая передает через стержень BD действие стержня CD.

На рис. 10 изображен стержень с этими силами, а также с составляющими реакциями опоры А (R_{AX} и R_{AY}).

Рассмотрим равновесие этой части составной конструкции и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{кх} = 0;$$

$$\sum F_{ку} = 0;$$

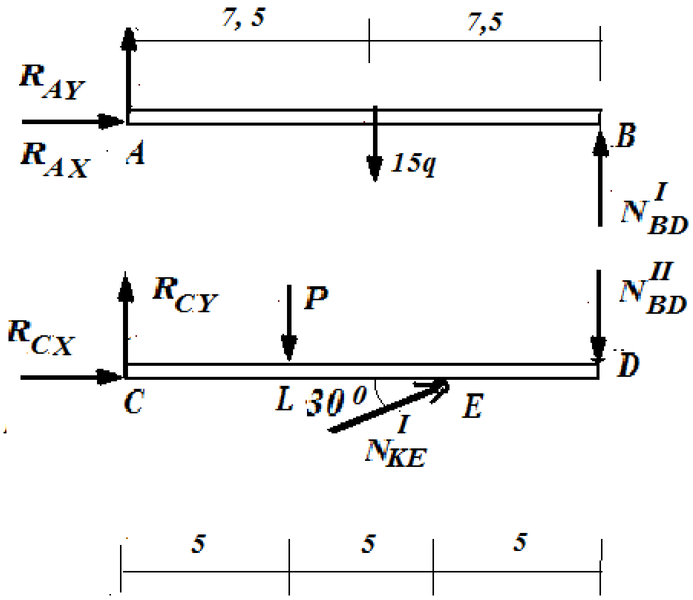


Рис. 10

$$\sum m_A(\overline{F}_к)=0;$$

$$R_{AX}=0;$$

$$R_{AУ}-q\cdot 15+N_{BD}{}^{I}=0;$$

$$-q\cdot 15\cdot 7{,}5+N_{BD}{}^{I}\cdot 15=0.$$

Решая систему этих уравнений находим:

$$R_{AX}=0; \quad N_{BD}{}^{I}=75кН; \quad R_{AУ}=75кН.$$

На рис. 10 изображен стержень, имеющий заданную внешнюю нагрузку $\overline{P}$, реакцию стержня В: $\overline{N}_{BD}{}^{II}$ ($\overline{N}_{BD}{}^{I}=-\overline{N}_{BD}{}^{I}$), также реакцию стержня КЕ: $\overline{N}_{KE}{}^{I}$.

Рассмотрим равновесие стержня CD. Реакция стержня CD на стержень АВ определена: $N_{BD}{}^{I}=75кН$, следовательно известна и сила давления на стержень CD: $N_{BD}{}^{II}=75кН$.

Учитывая это, составим уравнения равновесия для стержня CD:

$$\sum F_{кх}=0;$$

$$\sum F_{ку}=0;$$

$$\sum m_C\left(\overline{F}_к\right)=0\,;$$

$$R_{CX}+N_{KE}{}^{I}\cos 30^\circ=0\,;$$

$$R_{CУ}-P+N_{KE}{}^{I}\sin 30^\circ-N_{BD}{}^{II}=0\,;$$

$$-P\cdot 5+N_{KE}{}^{I}\sin 30^\circ\cdot 10-N_{BD}{}^{II}\cdot 15=0\,.$$

Из этих уравнений находим:

$$N_{KE}{}^{I}=235кН\,;\quad R_{CX}=203{,}52кН\,;\quad R_{CУ}=-32{,}5кН\,.$$

Модуль реакции опоры С определяется по формуле:

$$R_C=\sqrt{R_{CX}{}^2+R_{CУ}{}^2}=206{,}1кН$$

Проверку решения можно произвести при помощи любого из трех уравнений равновесия, составленного для всей системы тел. В данном случае можно использовать следующее уравнение:

$$\sum F_{ку}=0\,;\qquad R_{AУ}-q\cdot 15+R_{AУ}-P+N_{KE}{}^{I}\sin 30^\circ=0\,.$$

Подставляя в уравнения значения величин, убедимся в том, что уравнение обратиться в тождество: $0\equiv 0$. Задача решена правильно.

Пример 3.

Арка состоит из двух симметричных полуарок, соединенных в точке С шарниром (рис. 11).

В точках А и В арка шарнирно прикреплена к фундаменту. На арку действуют две внешние нагрузки $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ значения которых равны: $P_1=100кН$; $P_2=50кН$.

Требуется определить реакции опор при действии этих сил на арку.

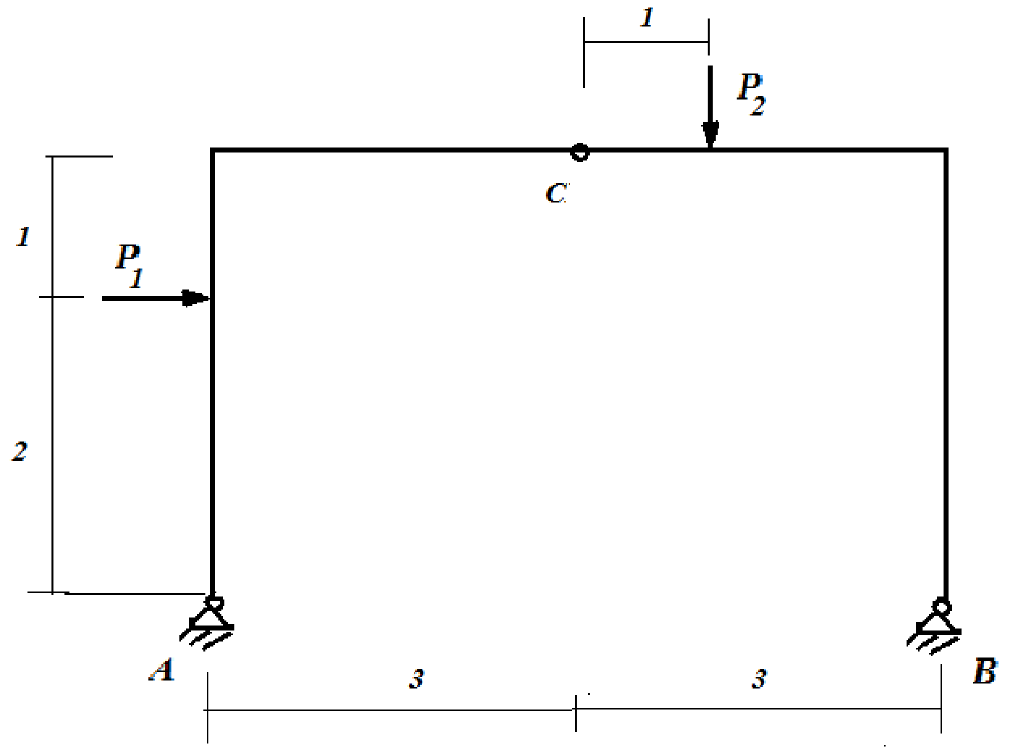


Рис. 11

Решение.

Применяя принцип освобождаемости от связей, опоры A и B, а также шарнирное соединение C заменим реакциями (рис. 12).

Составим уравнения равновесия для каждой части системы тел ($\overline{R}_{CX}{}^{I} = -\overline{R}_{CX}{}^{II}$ и $\overline{R}_{CY}{}^{I} = -\overline{R}_{CY}{}^{II}$).

<u>Для левой полуарки:</u>

$$\sum F_{кx} = 0;$$

$$\sum F_{ку} = 0;$$

$$\sum m_A\left(\overline{F}_к\right) = 0;$$

$$R_{AX} + P_1 + R_{CX}{}^{I} = 0;$$

$$R_{AY} + R_{CY}{}^{I} = 0;$$

$$-P_1 \cdot 2 - R_{CX}{}^{I} \cdot 3 + R_{CY}{}^{I} \cdot 3 = 0.$$

<u>Для правой полуарки:</u>

$$\sum F_{кх} = 0;$$

$$\sum F_{ку} = 0;$$

$$\sum m_B(\overline{F}_к) = 0;$$

$$R_{BX} - R_{CX}{}^{II} = 0;$$

$$R_{BY} - P_2 - R_{CY}{}^{II} = 0;$$

$$P_2 \cdot 2 + R_{CX} \cdot 3 + R_{CY} \cdot 3 = 0.$$

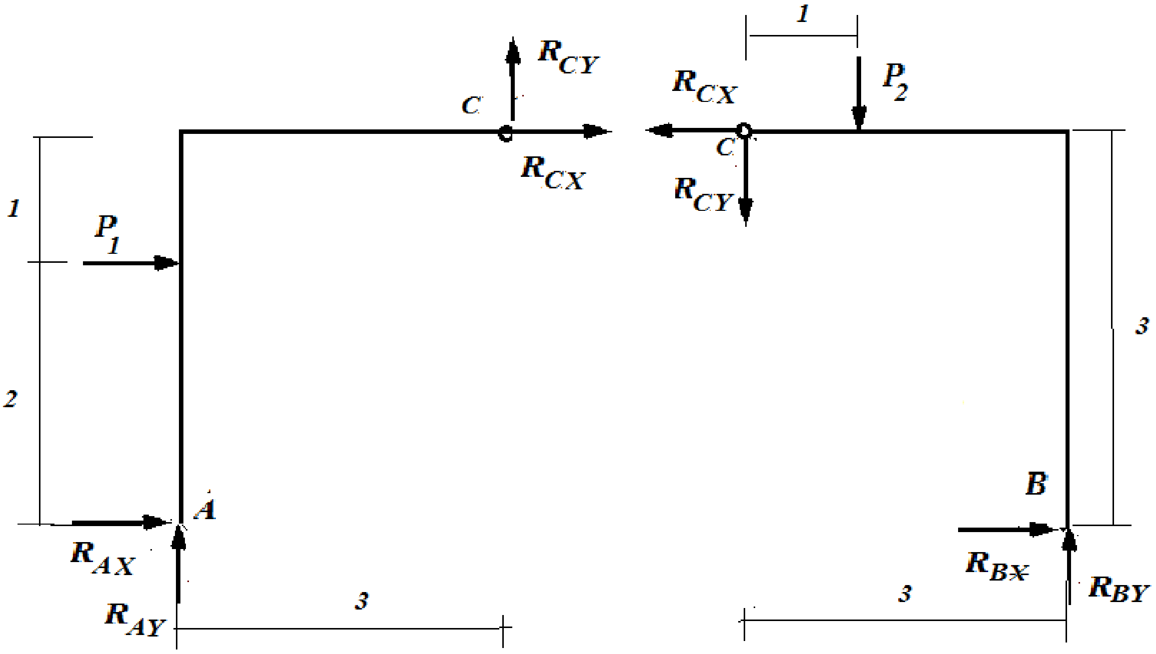


Рис. 12

Решая систему этих уравнений, находим неизвестные реакции:

$$R_{AX} = -50кН \;;\; R_{AY} = -16{,}67кН;$$

$$R_{BX} = -50кН \;;\; R_{BY} = 66{,}67кН;$$

$$R_{CX} = -50кН \;;\; R_{CY} = 16{,}67кН.$$

Модули этих реакций определяются по формулам:

$$R_A = \sqrt{R_{AX}{}^2 + R_{AY}{}^2} = 52{,}71кН;$$

$$R_B = \sqrt{R_{BX}{}^2 + R_{BY}{}^2} = 83{,}34кН;$$

$$R_C = \sqrt{R_{CX}{}^2 + R_{CY}{}^2} = 52{,}71кН.$$

Пример 4.

Стержень AB имеет неподвижную опору A, а серединой опирается на консоль балки CD на двух опорах: подвижной и неподвижной (рис. 13). Весом стержня и балки пренебречь.

Требуется определить опорные реакции при действии внешней силы $\overline{P}$, приложенной к концу стержня AB.

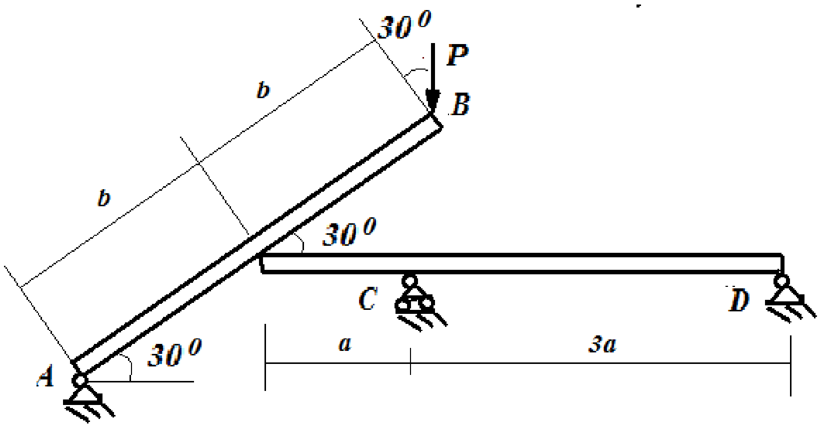


Рис. 13

Решение.

Система тел состоит из двух элементов. Рассмотрим равновесие каждой части составной конструкции отдельно (рис. 14).

Составим уравнения равновесия для каждой части системы тел.

Для части AB:

$$\sum F_{кx} = 0;$$

$$\sum F_{кy} = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_к) = 0;$$

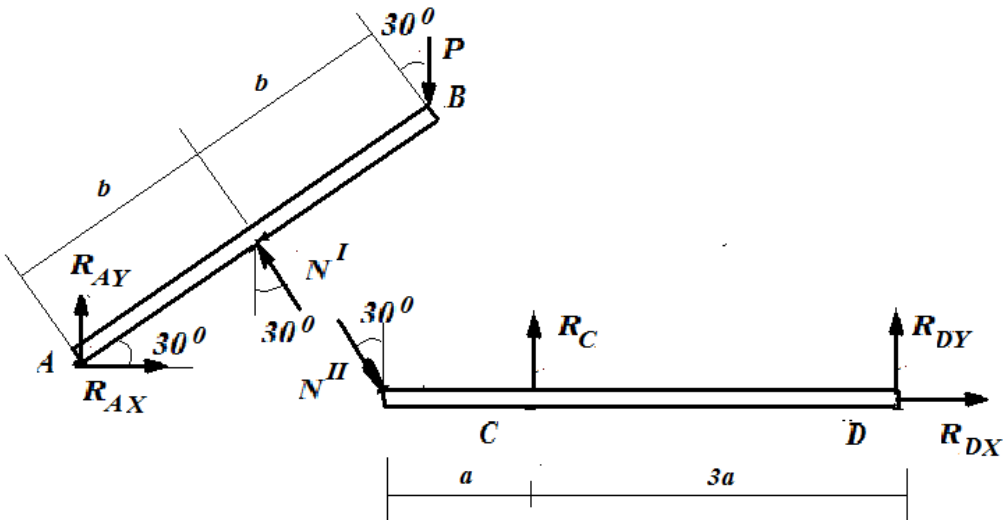


Рис. 14

$$R_{AX} + N^{I} \sin 30^{\circ} = 0;$$

$$R_{AY} - P - N^{I} \cos 30^{\circ} = 0;$$

$$-P \cdot 2b \cos 30^{\circ} + N^{I} \cdot b = 0.$$

<u>Для части CD:</u>

$$\sum F_{кх} = 0;$$

$$\sum F_{ку} = 0;$$

$$\sum m_{B}(\overline{F}_{к}) = 0;$$

$$R_{BX} + N^{II} \sin 30^{\circ} = 0;$$

$$R_{BY} + R_{C} - N^{II} \cos 30^{\circ} = 0;$$

$$-R_{C} \cdot 3a + N^{II} \cos 30^{\circ} \cdot 4a = 0$$

Учитывая, что

$$N^{II} = N^{I} \; (\overline{N}^{II} = -\overline{N}^{I}),$$

находим:

$$N^{I} = P \cdot 2 \cos 30^{\circ};$$

$$R_{C} \cdot = \left(\frac{4}{3}\right) N^{I} \cos 30^{\circ};$$

$$R_{AX} = -N^{I} \sin 30° ;$$

$$R_{AУ} = P + N^{I} \cos 30° ;$$

$$R_{BX} = -N^{I} \sin 30° ;$$

$$R_{BУ} = -R_{C} + N^{I} \cos 30° .$$

3. Последовательность действий при решении задач статики системы тел

Решение задач на равновесие системы тел рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Выделить систему тел и отдельные части системы, входящие в эту систему, равновесие которых необходимо рассмотреть.

2. Приложить внешние силы.

3. Применив закон освобождаемости от связей, приложить к системе тел соответствующие реакции связей.

4. Рассмотреть равновесие тел, входящих в эту систему, находящуюся под действием внешних сил и реакций связей.

5. Сопоставить число неизвестных величин и число уравнений равновесия и определить, является ли задача статически определимой.

6. Выбрать наиболее удобные системы координат. Для каждого тела и для всей системы тел можно выбрать свою систему координат.

7. Составить уравнения равновесия для всей системы тел и для отдельного тела.

8. Решить систему всех уравнений равновесия.

9. Для проверки правильности определения реакций можно составить не использованное уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей кон-

струкции или отдельному телу.

4. Пример решения задачи статики системы двух тел, соединенных шарниром

Дано: Схема составной конструкции (рис. 15); $P_1 = 10кН$; $P_2 = 20кН$; $M = 15кНм$; $q = 10кН/м$.

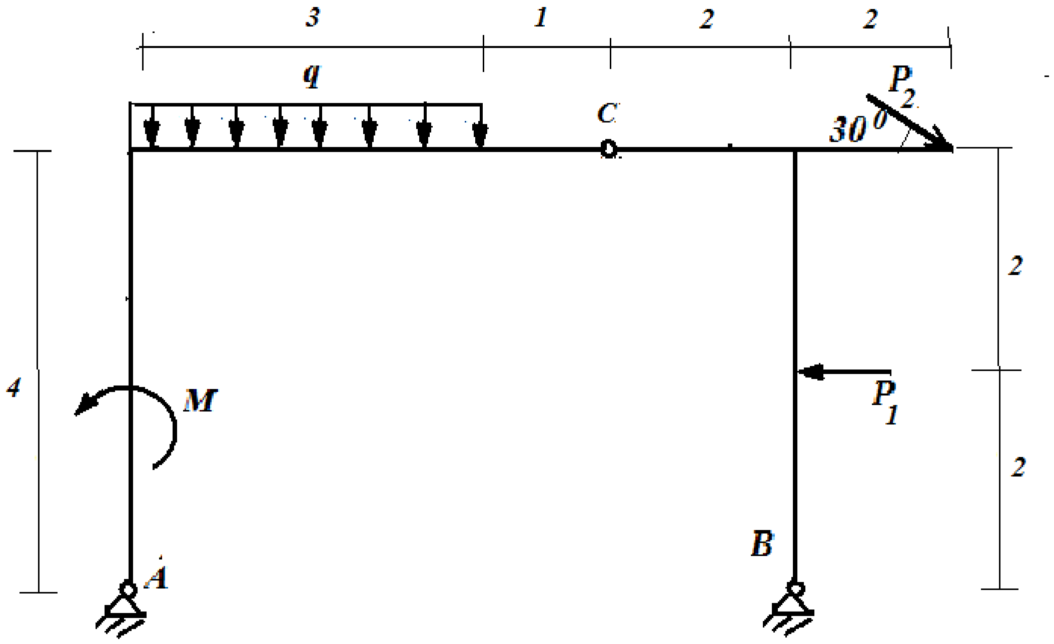


Рис. 15

Требуется определить: Реакции опор конструкции, состоящей из двух частей, а также шарнирного соединения С.

Решение.

Рассмотрим сначала равновесие всей конструкции, считая ее абсолютно твердым телом. На неё действуют следующие внешние силы: заданные силы $\overline{P}_1$; $\overline{P}_2$, момент М, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q и реакции связей R_{AX}, R_{AY}, R_{BX} и R_{BY}.

Составим уравнения равновесия для всей конструкции (рис. 16).

$$\sum F_{кx} = 0;$$

$$\sum F_{кy} = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_к)=0\,;$$

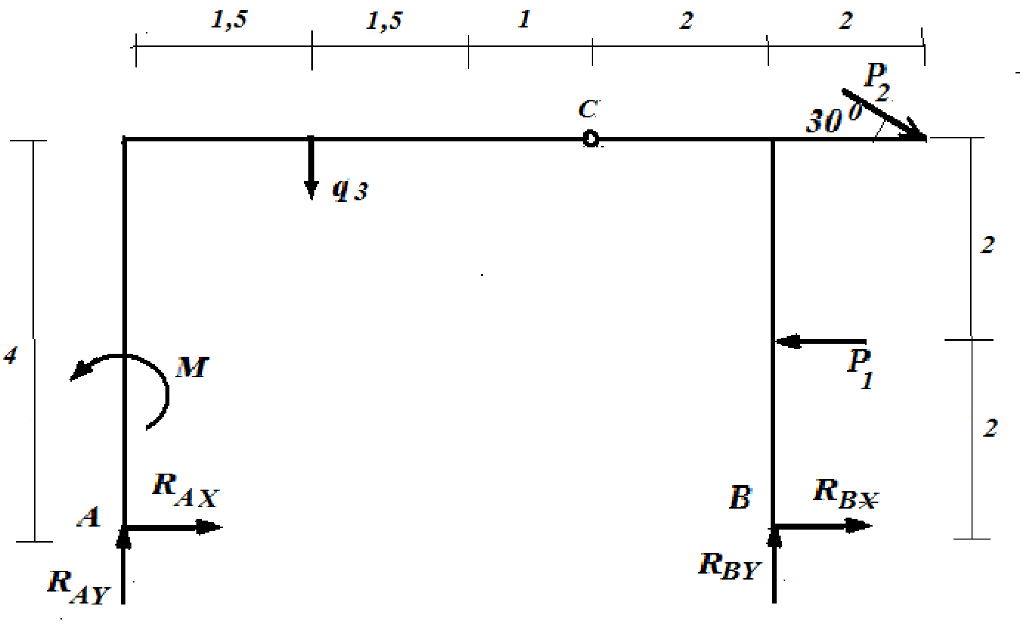


Рис. 16

$$R_{AX}+R_{BX}-P_1+P_2\cos30^\circ=0\,;$$

$$R_{AY}+R_{BY}-q\cdot4-P_2\sin30^\circ=0\,;$$

$$M-q\cdot4\cdot2+P_1\cdot2-P_2\cos30^\circ\cdot4-P_2\sin30^\circ\cdot9+R_{BY}\cdot7=0\,.$$

Полученные три уравнения содержат четыре неизвестные реакции R_{AX}, R_{AY}, R_{BX} и R_{BY}. Необходимо составить еще одно дополнительное уравнение для определения всех неизвестных.

Условия равновесия правой части конструкции имеют вид (рис. 17):

$$\sum F_{кx}=0\,;$$

$$\sum F_{кy}=0\,;$$

$$\sum m_C(\overline{F}_к)=0\,;$$

$$-R_{CX}+R_{BX}-P_1+P_2\cos30^\circ=0\,;$$

$$R_{CY}+R_{BY}-P_2\sin30^\circ=0\,;$$

$$-P_1\cdot2-P_2\sin30^\circ\cdot4+R_{BY}\cdot2+R_{BX}\cdot4=0\,.$$

Полученные уравнения содержат 6 неизвестных реакций: к реакциям опор R_{AX}, R_{AY}, R_{BX} и R_{BY} добавились реакции шарнирного соединения R_{CX} и R_{CY}.

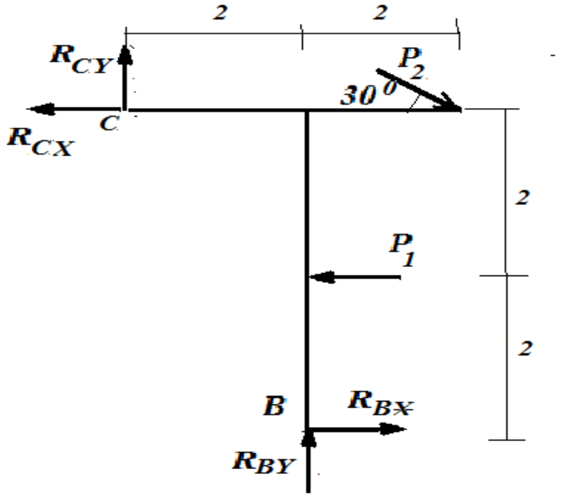


Рис. 17

Следовательно, рассматриваемая конструкция является статически определимой. Решая систему этих уравнений, найдем только составляющие реакции опор А и В, не определяя остальные.

В результате получаем:

$$R_{AX} = -13{,}63 кН \;;\quad R_{AY} = 32{,}62 кН\;;$$

$$R_{BX} = 6{,}31 кН \;;\quad R_{BY} = 17{,}38 кН\,.$$

Модули реакций связей определяются по формулам:

$$R_A = \sqrt{R_{AX}{}^2 + R_{AY}{}^2} = 35{,}35 кН\;;$$

$$R_B = \sqrt{R_{BX}{}^2 + R_{BY}{}^2} = 18{,}49 кН\,.$$

5. Основные положения теории расчета ферм

Фермой называется жесткая (неизменяемая) конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами.

Ферма называется плоской, если её стержни расположены в одной плоскости. Места соединения стержней фермы называются узлами.

Для того, чтобы ферма обладала жесткостью, то есть стержни не могли перемещаться относительно друг для друга, число узлов k и число стержней n должны быть связаны соотношением:

$$k = 2n - 3.$$

Если выполняется это условие, то конструкция будет статически определимой.

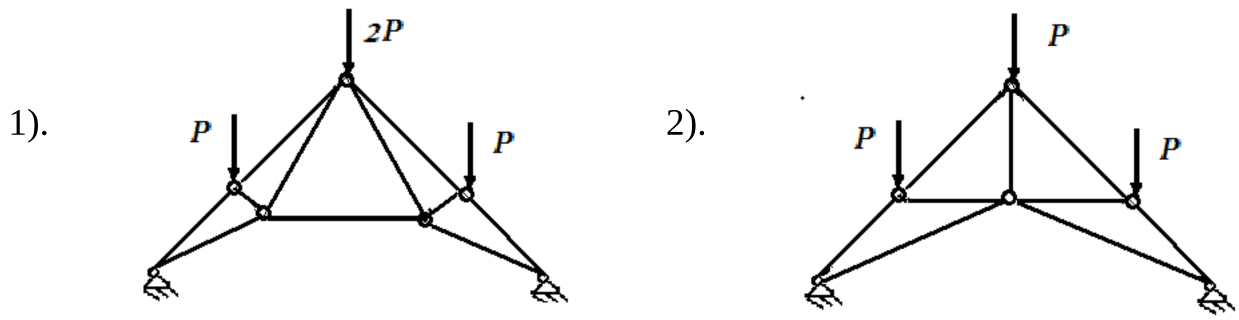
Если $k < 2n - 3$, то конструкция не будет обладать жесткостью, то есть система не будет фермой.

Если $k > 2n - 3$, то ферма имеет лишние стержни и конструкция будет статически неопределимой.

На рис. 18 показаны различные виды статически определимых плоских ферм: 1) – ферма Полонсо; 2) – немецкая ферма; 3) – английская ферма; 4) – американская ферма; 5) – параболическая ферма (углы нижнего пояса расположены по параболе); 6) – бельгийская ферма (подкосы перпендикулярны к стержням верхнего пояса).

Расчет статически неопределимой фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в её стержнях.

Опорные реакции можно найти методами статики, рассматривая ферму как твердое тело, на которое действует заданная нагрузка. Заданная нагрузка и опорные реакции по отношению к ферме являются внешними силами.



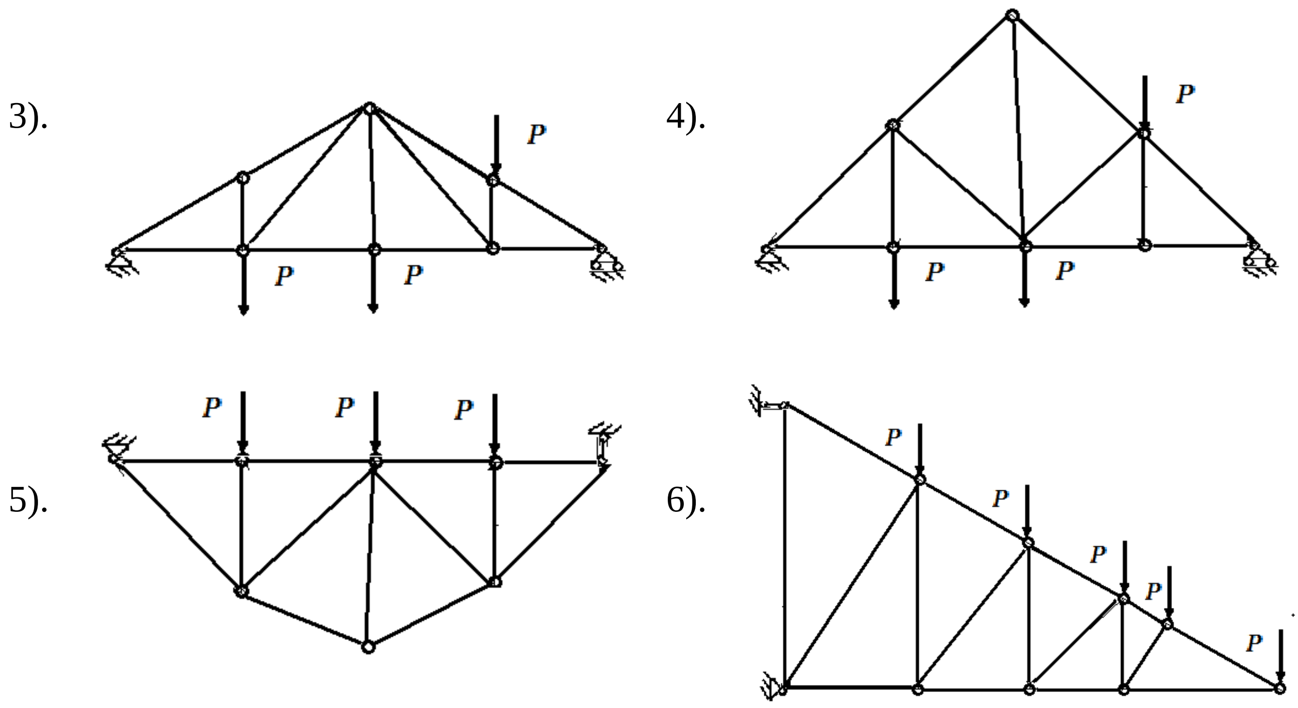


Рис. 18

Расчет усилий в стержнях становится простым, если под действием внешних сил стержни фермы подвергаются только продольным усилиям. В этом случае стержни работают только на центральное растяжение или сжатие.

Для этого нужно выполнить следующие допущения:

1. Стержни фермы должны быть соединены своими концами шарнирами без трения. Такие шарниры называются идеальными.

1. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах.

2. Весом стержней пренебрегают или распределяют вес стержней по узлам.

Рассмотрим определение усилий в стержнях фермы, используя аналитические методы расчета: метод вырезания узлов и метод сечений (метод Риттера).

Методом вырезания узлов удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы.

Суть метода состоит в том, что вырезают узлы фермы и прикладывают к ним соответствующие внешние силы и усилия в стержнях.

Эти силы образуют плоскую уравновешенную систему сходящихся сил. Тогда для каждого узла составляется два уравнения равновесия:

$$\sum F_{кx} = 0; \qquad \sum F_{кy} = 0.$$

Так как в начале расчета неизвестно, какие стержни растянуты, а какие сжаты, то условно предполагается, что все стержни растянуты. Усилия в стержнях направлены от узлов. Если в результате вычислений усилие имеет отрицательное значение, то соответствующий стержень – сжат.

Последовательность рассмотрения узлов определяется так, чтобы число неизвестных сил, приложенных к узлу, не превышало двух.

Методом Риттера удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы независимо от остальных.

Суть метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из них) требуется определить усилия.

В этом случае рассматривается равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части нужно заменить силами, направляя их вдоль разрезанных стержней, считая стержни растянутыми.

Затем для выбранной части фермы составляется три уравнения равновесия, в которые войдут три неизвестных усилия.

Если в сечении нет параллельных стержней, то эти уравнения удобно записать в виде равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на оставшуюся часть фермы, относительно трех центров.

Эти центры называются точками Риттера. Это точки, в которых попарно пересекаются рассеченные стержни или их продолжения. Тогда уравнение моментов для каждого центра будет содержать только одно неизвестное усилие в том стержне, направление которого не проходит через этот центр.

Если в сечении два из трех стержней параллельны, то одна из точек Риттера уходит в бесконечность. Тогда для определения усилия в непараллельном стержне нужно взять сумму проекций всех сил оставшейся части фермы на направление, перпендикулярное параллельным стержням.

Рассмотри пример применения метода Риттера при расчете ферм.

На ферму, изображенную на рис. 19, действуют вертикальные силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 20кН$.

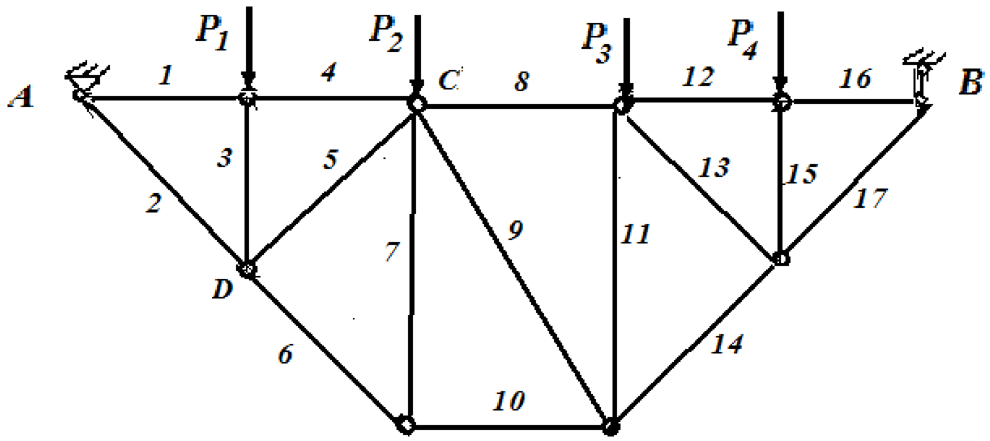


Рис. 19

Реакции в опорах равны:

$$R_{AX} = 0;\ R_{AУ} = 40кН;\ R_{BУ} = 40кН.$$

Требуется определить усилия в стержнях 6 и 9.

Для определения усилия в стержне 6 проводим сечение $I - I$. В этом сечении нет параллельных стержней, поэтому рассмотрим равновесие левой части фермы, заменяя действие на нее правой части усилиями $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, $\overline{N}_6$, направленными вдоль стержней 4, 5, 6.

Найдем точки Риттера для этого сечения: С – точка, где пересекаются стержни 4 и 5; А – точка, где пересекаются стержни 4 и 6; D – точка, где пересекаются стержни 5 и 6 (рис. 20).

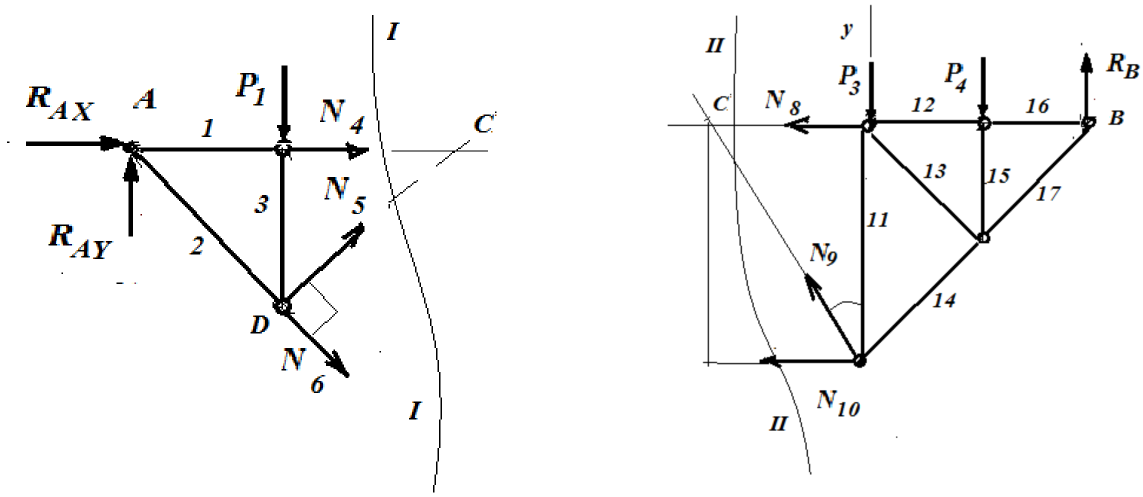


Рис. 20

Усилие в стержне 6 найдем из уравнения моментов относительно точки С (рис. 20):

$$\sum m_C\left(\overline{F}_к\right) = 0\,;$$

$$-R_{AY}\cdot 2a + P_1\cdot a + N_6\cdot\sqrt{2}a = 0\,.$$

Решая это уравнение, получим:

$$N_6 = 42{,}43кН\,.$$

Стержень 6 растянут.

Усилия в стержнях 4 и 5 можно найти, составив уравнения моментов относительно точек A и D.

Чтобы определить усилие в стержне 9, проведем сечение $II - II$. В этом сечении два параллельных стержня 8 и 9. Рассмотрим равновесие правой части фермы.

В этом случае одна из точек Риттера уходит в бесконечность, следовательно, для определения усилия в стержне 9 составим уравнение проекций на ось, перпендикулярную стержням 8 и 10:

$$R_{BY} - P_1 - P_1 + N_9\cos\alpha = 0, \text{ где} \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Отсюда $N_9 = 0$. Стержень 9 не нагружен.

Усилия в стержнях 8 и 10 можно найти, составив уравнения моментов относительно точек Риттера.

6. Последовательность действий при расчете плоских ферм

При определении усилий в стержнях ферм по методу вырезания узлов необходимо придерживаться следующего порядка:

1. Изобразить силы, действующие на ферму.

2. Применяя принцип освобождаемости от связей, приложить к ферме соответствующие реакции связей.

3. Определить реакции связей, используя уравнения равновесия и рассматривая ферму как твердое тело.

4. Вырезать узел и заменить действие на него отброшенной части фермы усилиями, действующими вдоль стержней, считая, что все стержни растянуты.

5. Определить усилия в стержнях фермы, начиная с того узла, на который действуют не более двух неизвестных сил, так как для системы сходящихся в узле сил можно составить лишь два уравнения равновесия.

6. Составить уравнения равновесия для системы сходящихся в узле сил.

7. Переходя от узла к узлу, определить усилия во всех стержнях фермы.

8. Один из узлов останется нерассмотренным. Составив уравнения равновесия для этого узла, сделать проверку решения.

При использовании метода Риттера рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Так же, как и при методе вырезания узлов определить реакции опор.

2. Мысленно разрезать ферму сечением на две части так, чтобы сечение проходило не более, чем через три стержня, усилия в которых неизвестны.

3. Отбросить одну из частей и заменить действие отброшенной части на оставшуюся усилиями, направленными вдоль стержней, предполагая, что эти стержни растянуты.

4. Составить три уравнения равновесия и определить неизвестные усилия в стержнях.

5. Правильность решения мож- но проверить, составив еще одно урав-

нение равновесия.

7. Пример расчета плоских ферм

Дано: Схема составной конструкции (рис. 21). $P_1 = 5кН$; $P_2 = 2кН$; $P_3 = 3кН$; $a = 3м$; $h = 3м$.

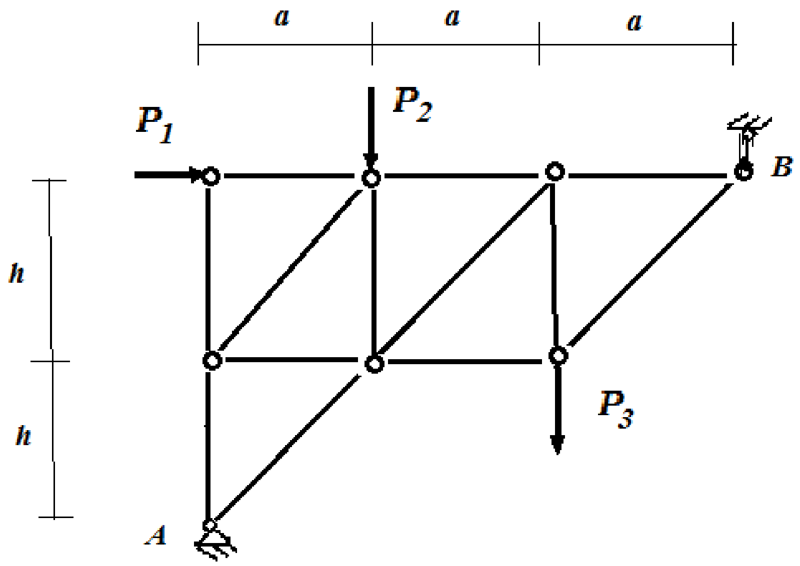


Рис. 21

Требуется определить реакции опор фермы и усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов.

Решение.

Рассмотрим равновесие фермы, считая ее абсолютно твердым телом.

На неё действуют внешние заданные силы $\overline{P_1}$; $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ и реакции опор R_{AX}, R_{AY} и R_B (рис. 22).

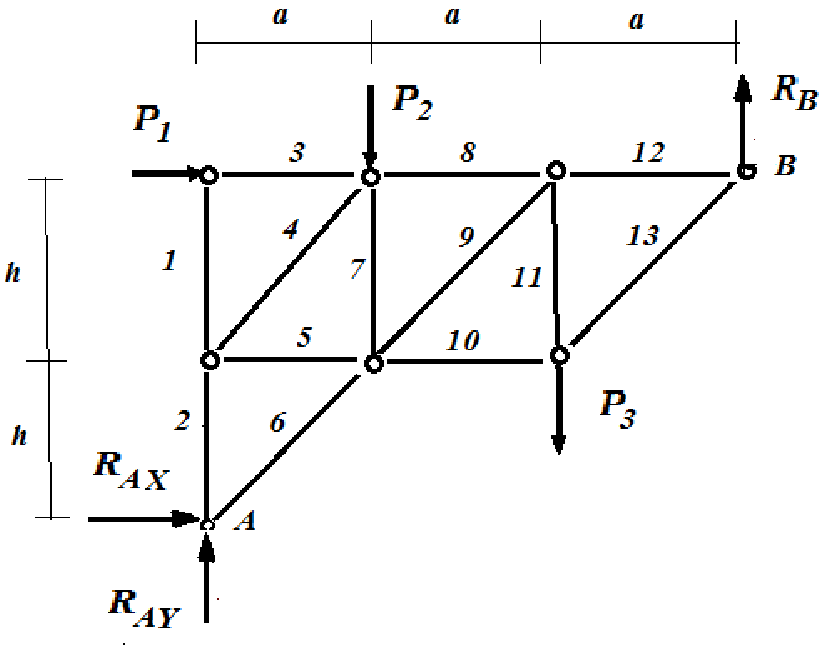


Рис. 22

Для определения неизвестных реакций R_{AX}, R_{AY} и R_B составим три уравнения равновесия фермы как твердого тела, находящегося под действием заданных сил и реакций опор:

$$\sum F_{\kappa x} = 0;$$

$$\sum F_{\kappa y} = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_\kappa) = 0;$$

$$R_{AX} + P_1 = 0;$$

$$R_{AY} + R_B - P_2 - P_3 = 0;$$

$$-P_1 \cdot 2h - P_2 \cdot a - P_3 \cdot 2a + R_B \cdot 3a = 0.$$

Решая систему этих уравнений находим:

$$R_{AX} = -5\kappa H \;;\; R_{AY} = -1\kappa H\,; R_B = 6\kappa H.$$

Модули реакций связей определяются по формуле:

$$R_A = \sqrt{R_{AX}{}^2 + R_{AY}{}^2} = 5{,}1\kappa H.$$

Применим метод вырезания узлов.

Стержни, сходящиеся в узле фермы, являются для узлового соединения связями.

На рис. 23 показаны узлы фермы с приложенными к ним усилиями.

Направления реакций всех стержней показаны от узлов в предположении, что стержни растянуты. Если в результате решения реакция стержня получится отрицательной, это будет означать, что соответствующий стержень сжат.

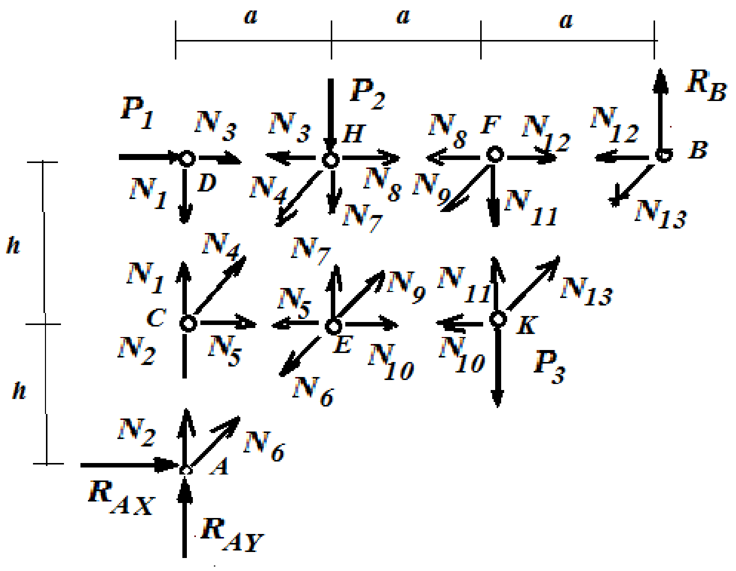


Рис. 23

Для каждого узла составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{кx} = 0; \quad \sum F_{кy} = 0.$$

Расчет начнем с узла A, к которому приложены реакции R_{AX}, R_{AY} и неизвестные усилия N_2, N_6 ($tg\alpha = \frac{a}{h} = 1$ и $\alpha = 45°$):

$$R_{AX} + N_6 \sin\alpha = 0;$$

$$R_{AY} + N_2 + N_6 \cos\alpha = 0.$$

<u>Узел D:</u>

$$P_1 + N_3 = 0;$$

$$N_1 = 0.$$

<u>Узел C:</u>

$$N_5 + N_4 \sin\alpha = 0;$$

$$N_1 + N_4 \cos\alpha - N_2 = 0.$$

Узел H:

$$N_8 - N_4 \sin\alpha = 0;$$

$$-N_7 - N_4 \cos\alpha - P_2 = 0.$$

Узел E:

$$N_{10} + N_9 \sin\alpha - N_5 - N_6 \sin\alpha = 0;$$

$$N_7 + N_9 \cos\alpha - N_6 \cos\alpha = 0.$$

Узел K:

$$-N_{10} + N_{13} \sin\alpha = 0;$$

$$N_{11} + N_{13} \cos\alpha - P_3 = 0.$$

Узел B:

$$-N_{12} - N_{13} \sin\alpha = 0;$$

$$-N_{13} \cos\alpha - R_B = 0.$$

Отсюда находим:

$$N_1 = 0;\ N_2 = -4кН;\ N_3 = -5кН;\ N_4 = -5{,}7кН;\ N_5 = 4кН;$$

$$N_6 = 7{,}1кН;\ N_7 = 2кН;\ N_8 = -9кН;\ N_9 = 4{,}2кН;\ N_{10} = 6кН;$$

$$N_{11} = -3кН;\ N_{12} = -6кН;\ N_{13} = 8{,}5кН.$$

Как показывают знаки усилий, стержни 5, 6, 7, 9, 10 и 13 растянуты, а остальные сжаты, только стержень 1 не нагружен.

Для проверки расчета можно для каждого узла построить многоугольники сил.

8. Пример расчета плоских ферм с использованием диаграммы Максвелла-Кремоны

При расчете ферм можно применять и графические методы расчета, например, с использованием диаграммы Максвелла-Кремоны.

Если силовые многоугольники, построенные для всех узлов фермы, объединить в один чертеж так, чтобы ни одно из усилий не повторилось дважды, получим диаграмму Максвелла-Кремоны.

Определение усилий построением диаграммы создает общую картину распределения усилий в стержнях фермы.

Рассмотрим тот же пример, который рассматривался для демонстрации метода вырезания узлов.

Изображаем все приложенные к ферме внешние силы и реакции опор, так, чтобы их вектора располагались вне контура фермы.

Части плоскости, ограниченные контуром фермы и линиями действия сил обозначим буквами C, D, E, F, G.

Плоскости, ограниченные стержнями фермы, обозначим буквами J, I, M, N, K,O.

Узлы фермы обозначим римскими цифрами I, II, III,…XIII.

Стержни нумеруем арабскими цифрами 1, 2, 3,…, 13 (рис. 24).

Построение диаграммы Максвелла-Кремоны начинается с изображения многоугольника внешних сил (рис. 25). Он должен быть замкнутым, так как ферма находится в равновесии.

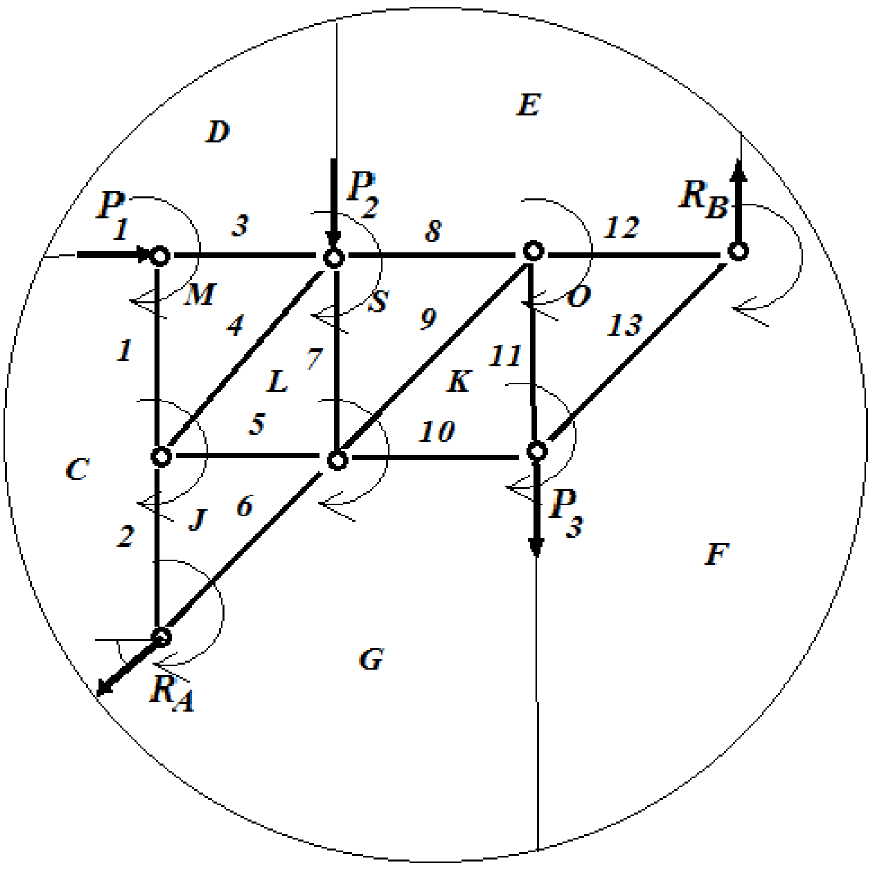


Рис. 24

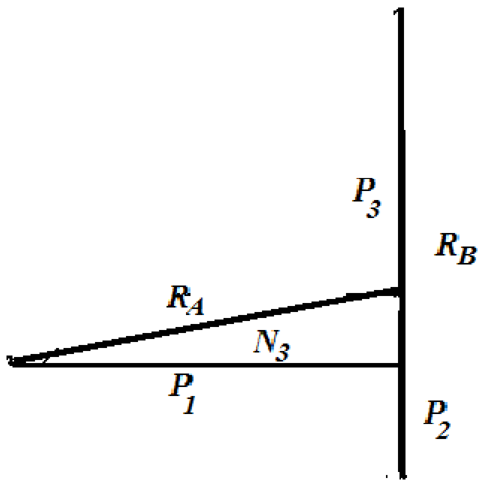


Рис. 25

Переходим к построению силовых многоугольников для узлов фермы. Построение этих многоугольников начинается с узла, в котором сходятся только два стержня. В этом случае число неизвестных сил будет равно двум и их можно найти, используя графический метод решения. Последовательность выбора последующих узлов может быть произвольной, но при условии, что число неизвестных сил для любого узла не должно быть больше двух.

К полученному многоугольнику внешних сил последовательно пристраиваем силовые многоугольники для узлов I, II, III, …, XIII. Построение начинается для каждого узла с известных сил, откладывая все силы в том порядке, в котором они встречаются при обходе узла по ходу часовой стрелки. Обход узлов показан на рис. 24.

В результате получается диаграмма Максвелла-Кремоны (рис. 26), на которой показаны все усилия, реакции опор и внешние силы.

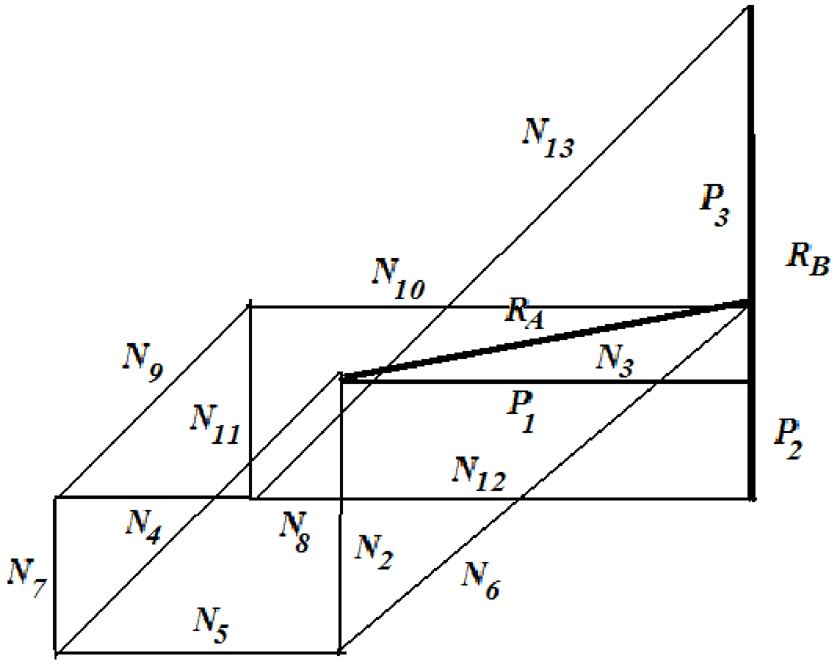


Рис. 26

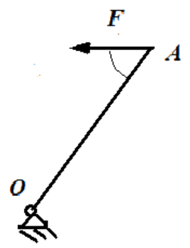
Далее необходимо определить, какой стержень растянут, а какой сжат. Для этого вектора силовых многоугольников каждого узла мысленно переносим на соответствующие стержни и далее определяем, куда они направлены. Если усилие направлено от узла, то стержень растянут, если имеет противоположное направление, то он сжат.

9. Тестовые задания

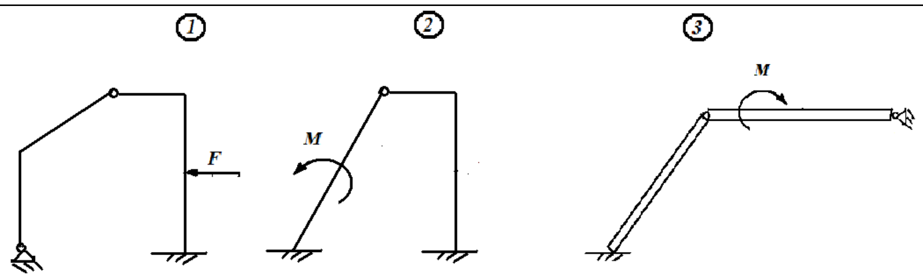
Задание 1	**Ответ**	
На закрепленную балку действует плоская система параллельных сил. Сколько независимых уравнений равновесия балки можно составить?	1	2
	2	3
	3	1
	4	6

Задание 2	**Ответ**	
На закрепленную балку действует произвольная плоская система сил. Сколько независимых уравнений	1	3
	2	2

равновесия балки можно составить?	3	1
	4	6

Задание 3	Ответ	
	1	$F \cdot \sin\alpha \cdot OA$
	2	$F \cdot \cos\alpha \cdot OA$
	3	$F \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot OA$
Найти момент относительно точки О, если задана сила $\overline{F}$, α = 30° – угол между ОА и направлением силы.	4	$F \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} OA$

Задание 4	Ответ	
Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 5Н$, образующих между собой угол α = 45°.	1	9,24
	2	5
	3	10
	4	0

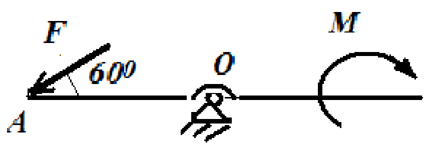
Задание 5	Ответ	
	1	3
	2	2
	3	1
Укажите номер статически определимой конструкции.	4	Нет статически определимой конструкции.

Задание 6	Ответ	
Определить модуль равнодействующей сходящихся	1	12,8

сил F_1 и F_2, если известны их проекции на декартовые оси координат: $F_{1X} = 3$ Н и $F_{2X} = 5$ Н, $F_{1Y} = 6$ Н и $F_{2Y} = 4$ Н.	2	5
	3	6
	4	0

Задание 7	Ответ	
Для плоской системы сходящихся сил $\overline{F_1} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$, $\overline{F_2} = 5\overline{j}$, $\overline{F_3} = 2\overline{i}$ определить модуль равнодействующей силы.	1	7,35
	2	3
	3	5
	4	0

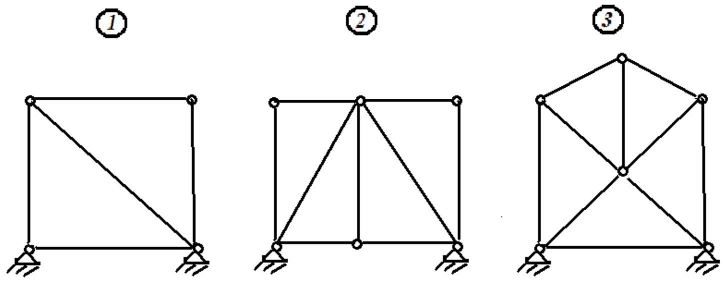
Задание 8	Ответ	
Определить главный вектор плоской системы сил, если заданы его проекции на координатные оси $R_X = 3$ кН и $R_Y = 4$ кН.	1	5
	2	4
	3	3
	4	7

Задание 9	Ответ	
 Составить уравнение моментов относительно точки O, если задана сила $\overline{F_1}$ и момент M, α = 60°.	1	$F_1 \cdot \sin 60° \cdot OA - M = 0$
	2	$F_1 \cdot \sin 30° \cdot OA - M = 0$
	3	$F_1 \cdot \sin 60° \cdot OA = 0$
	4	$F_1 \cdot \sin 60° - M = 0$

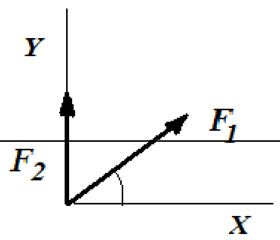
Задание 10	Ответ	
Определить модуль равнодействующей сходящихся сил F_1 и F_2, если известны их проекции на декартовые	1	8,6
	2	5

оси координат: $F_{1X} = 10$ Н и $F_{2X} = –5$ Н, $F_{1Y} = 2$ Н и $F_{2Y} = 5$ Н.	3	7
	4	0

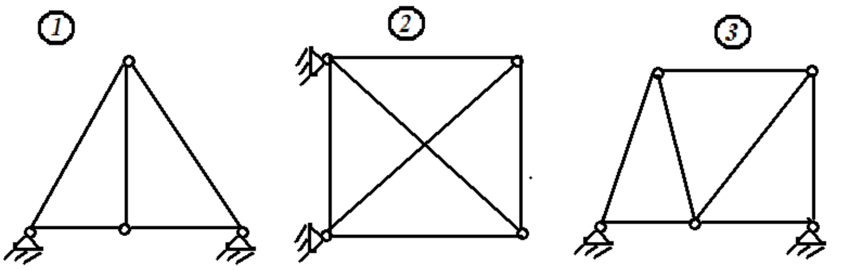
Задание 11	**Ответ**	
Каким может быть максимальное число уравнений с неизвестными реакциями связей, приложенных к вырезаемому узлу плоской фермы, при определении усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов?	1	2
	2	3
	3	1
	4	6

Задание 12	**Ответ**	
 Которая из изображенных ферм является статически неопределимой?	1	3
	2	2
	3	1
	4	Все определимы

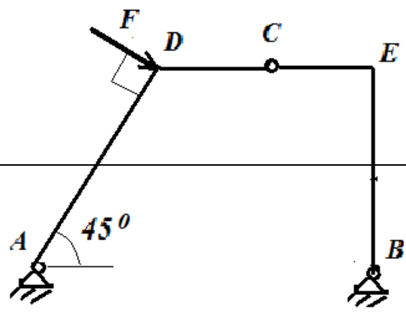
Задание 13	**Ответ**	
Определить модуль равнодействующей сходящихся сил F_1 и F_2, F_3 и F_4, если известны их проекции на декартовые оси координат: $F_{1X} = 3$ Н, $F_{2X} = 4$ Н, $F_{1Y} = 6$ Н, $F_{2Y} = 7$ Н, $F_{3X} = –5$ Н $F_{4X} = –5$ Н, $F_{3Y} = –5$ Н и $F_{4Y} = 2$ Н.	1	10,44
	2	17
	3	7
	4	0

Задание 14	**Ответ**	
	1	$R_x = F_1 cos\alpha$, $R_y = F_1 sin\alpha + F_2$, $R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$

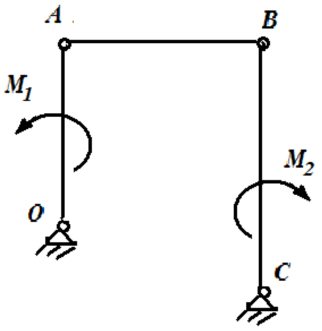
Определить модуль равнодействующей двух сходящихся сил F_1, F_2, угол α – угол между силой F_1 и осью x.	2	$R_x = F_1, \; R_y = F_1 + F_2,$ $R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$
	3	$R_x = F_1 cos\alpha, R_y = F_1 sin\alpha - F_2$, $R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$
	4	$R_x = F_1 cos\alpha, R_y = F_2$, $R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}}$

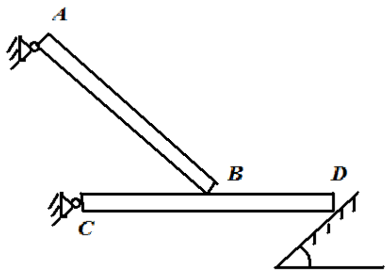
Задание 15	Ответ	
Которая из изображенных ферм является статически неопределимой? 	1	2
	2	3
	3	1
	4	Все определимы

Задание 16	Ответ	
Сколько независимых уравнений равновесия можно составить для системы четырех тел, находящихся в равновесии под действием плоской системы сил?	1	12
	2	6
	3	2
	4	24

Задание 17	Ответ	
	1	401
	2	100
	3	200

Определить вертикальную составляющую реакции в точке B, если сила F = 850 H, CD = CE = BE.	4	0

Задание 18	Ответ	
	1	100
	2	400
	3	200
На звено BC шарнирной конструкции действует пара сил с моментом M_2 = 200 H·м. Определить момент пары сил M_1, который надо приложить к кривошипу OA, для того чтобы механизм находился в равновесии, если длины равны BC = 2OA = 400 мм.	4	0

Задание 19	Ответ	
	1	100
	2	200
	3	400
Однородная балка AB, вес которой равен 200 H, концом B опирается на горизонтальный стержень CD. Весом стержня CD пренебречь. BC = BD. Определить, с какой силой балка CD действует на опорную плоскость в точке D, α = 60°.	4	0

Задание 20	Ответ	
Через какое максимальное число стержней, усилия в которых неизвестны, может проходить сечение при определении усилий в стержнях плоской фермы спосо-	1	3
	2	2
	3	1

бом сечений?	4	6

10. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Сколько уравнений равновесия можно составить для системы двух тел, находящихся в равновесии под действием плоской системы сил?

2. Сколько уравнений равновесия можно составить для тела под действием плоской системы сил?

3. Сколько уравнений равновесия можно составить для тела под действием пространственной системы сил?

4. Дайте определение статики.

5. Какие силы называются внешними?

6. Какие силы называются внутренними?

7. Сформулируйте аксиому о равенстве сил действия и противодействия.

8. Какая конструкция называется фермой?

9. Дайте определение узла фермы.

10. Какие виды статически определимых плоских ферм вы знаете?

11. В чем суть метода вырезания узлов при расчете ферм?

12. В чем суть метода Риттера при расчете ферм?

13. Какие центры называются точками Риттера?

14. В чем суть метода расчета ферм с использованием диаграммы Максвелла-Кремоны?

11. Список рекомендуемой литературы

1. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика Т.1: Учебное пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - СПб.: Лань, 2012. - 672 с.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/С.М.Тарг.- М.:Высш.шк.,2007. - 415 с

3. Акимов, В.А. Теоретическая механика. Кинематика. Практикум: Учебное пособие / В.А. Акимов, О.Н. Скляр, А.А. Федута; Под общ. ред. проф. А.В. Чигарев. - М.: ИНФРА-М, Нов. знание, 2017. - 635 с.

4. Иосилевич, Г.Б. Прикладная механика: Для студентов втузов / Г.Б. Иосилевич, П.А. Лебедев. - М.: Машиностроение, 2016. - 576 с.

5. Поляхов, Н.Н. Теоретическая механика: Учебник для бакалавров / Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков; Под ред. П.Е. Товстика. - М.: Юрайт, 2016. - 593 с.

6. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. - М.: Изд-во МТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. - 736 с.