



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Сопротивление материалов»

**«Статистическая обработка результатов
испытаний»**

Авторы
Маяцкая И.А.,
Языев Б.М.

Ростов-на-Дону, 2022



Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для изучения методов статистической обработки экспериментальных данных по дисциплинам «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов».

Настоящее пособие ставит своей задачей ознакомление студентов, изучающих общий курс сопротивления материалов, с методами статистической обработки данных эксперимента.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

АВТОРЫ

канд. техн. наук, доц. Маяцкая И.А;

докт. техн. наук, профессор Языев Б.М/



ОГЛАВЛЕНИЕ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ	4
1. Статистическая обработка результатов механических испытаний материалов.....	4
2. Обработка результатов испытаний с использованием критерия Стьюдента.....	6
3. Применение инструментов EXCEL при статистической обработки результатов механических испытаний материалов	9
4. Использование специальных функций в мастере функций EXCEL.....	10
5. Примеры использования специальных функций в мастере функций EXCEL....	13
6. Использование инструментов пакета анализа EXCEL	15
7. Обработка результатов испытаний с использованием критерия Стьюдента.....	18
8. Применение инструментов EXCEL при проведении механических испытаний материалов	21
9. Использование специальных функций в пакете EXCEL	22
10. Примеры использования специальных функций в мастере функций EXCEL	24
11. Использование инструментов EXCEL	27
12. Использование пакета анализа программного комплекса Statistica.....	29
13. Контрольные вопросы.....	32
Приложение А.....	33
Приложение Б.....	36
Приложение В.....	37

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

Сопротивление материалов является наукой экспериментально - теоретической. Нельзя производить расчеты элементов конструкций или деталей машин, не зная свойств материалов, из которых они сделаны. Любой расчет заканчивается подстановкой в полученные формулы конкретных механических характеристик материала, из которого сделаны элементы строительной конструкции или деталь. Для определения механических свойств материалов и их способности сопротивляться внешним силовым воздействиям, необходимо проводить испытания образцов материалов при различных видах деформирования.

При испытаниях материалов приходится сталкиваться с необходимостью обработки и анализа данных, полученных в результате экспериментов.

Стохастическая природа экспериментальных данных обуславливает необходимость применения статистических методов для их анализа и обработки.

1. Статистическая обработка результатов механических испытаний материалов

Покажем, как проводят статистическую обработку полученных результатов на примере значений параметров напряжений и прогибов.

За результат испытания принимают среднее арифметическое не менее пяти определений каждого параметра (для пяти образцов) по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

где x_i – отдельное значение определяемого параметра x ;

n – количество отдельных значений определяемых параметров, входящих в расчет.

Средние значения характерных параметров округляют до двух значащих цифр после запятой и заносят в таблицу отчета.

Для каждого параметра вычисляют величину стандартного отклонения S_x по формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

и результаты вычислений заносят в таблицу отчета.

Это соотношение называется формулой Бесселя. Она используется для определения средней ошибки по данным выборки $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$.

Определяют границы доверительного интервала $\bar{x} \pm \Delta x$, в которых заключены искомые значения показателей x ,

где Δx – отклонение показателя x от среднего значения \bar{x} ($\Delta x = Q S$).

Коэффициент Q зависит от количества образцов, участвующих в испытании, и определяется по таблице 1.

Таблица 1

Значения коэффициента Q

Количество образцов	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	8,98	2,48	1,59	1,24	1,05	0,925	0,836	0,769
Количество образцов	10	11	13	15	17	19	21	25
Q	0,715	0,672	0,604	0,554	0,514	0,482	0,455	0,413

Вычисляют относительную ошибку ξ по каждому параметру по формуле:

$$\xi = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100, \%$$

Значения отклонения Δx и ошибки ξ по каждому параметру заносятся соответственно в таблицы отчета.

Пример отчета представлен в приложении А.

2. Обработка результатов испытаний с использованием критерия Стьюдента

Рассмотрим методику обработки экспериментальных данных с использованием критерия Стьюдента (приложение Б).

Приближенную оценку для среднего квадратичного отклонения величины \bar{x} получаем по формуле:

$$S_{cp} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Достоверность определения величины x по n испытаниям определяется неравенством:

$$-kS_{cp} < \bar{x} - x < kS_{cp}.$$

Относительная ошибка равна:

$$\frac{kS_{cp}}{\bar{x}}.$$

Значение параметра k определяется на основании функции $\psi(k)$, равной заданной достоверности.

Функция $\psi(k)$ – вероятность ошибки, лежащей в интервале от $-\alpha$ до $+\alpha$;
 δ – средняя ошибка.

Функция $\psi(k)$ определяется формулой:

$$\psi(k) = P(-\alpha < \delta < \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

или

$$\psi(k) = 2\Phi(k),$$

где $\Phi(k)$ – функция Лапласа (Приложение В).

Если же при выполнении эксперимента ограничиваются небольшим числом испытаний, то оценка результата с помощью среднего квадратичного отклонения S_{cp} может быть недостаточно достоверной, так как принимается

$$S_{cp} = \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ вместо точной величины } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad -\sigma_n < \sigma < \sigma_n.$$

Средняя квадратическая ошибка измерения величины x определяется по формуле:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2}.$$

Необходимое уточнение достигается с помощью распределения Стьюдента:

$$S(u, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция;

$$u = \frac{\bar{x} - x}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{x} - x}{S_{cp}}.$$

Гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ определяется интегралом:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$\text{и } \Gamma(n) = (n-1)!.$$

График распределения Стьюдента напоминает по форме нормальное распределение и с увеличением n приближается к нему, но при малых значениях сильно отличается от него (рис. 1).

При малых выборках для оценки достоверности вместо интеграла вероятности $\psi(k)$ используется функция $S(u, n)$, которая зависит не только от k , но и от объема выборки n .

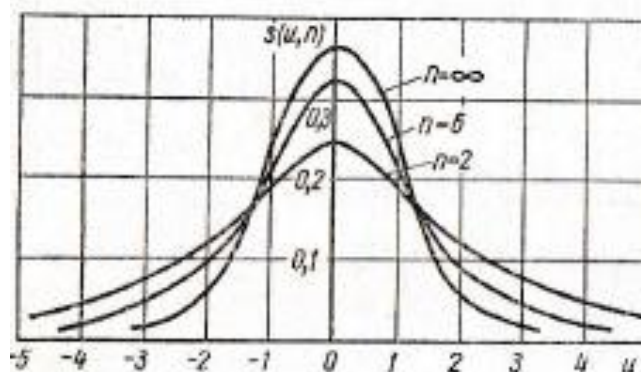


Рис. 1. График распределения Стьюдента

В таблице 2 приводятся сравнительные значения этих функций.

Таблица 2

k	$S(k, n)$ при значениях n						$\psi(k)$
	2	3	4	5	8	12	
0,1	0,063	0,071	0,073	0,075	0,077	0,078	0,07966
0,2	0,126	0,140	0,146	0,149	0,153	0,155	0,15852
0,5	0,295	0,333	0,349	0,356	0,368	0,373	0,38292
1,0	0,500	0,577	0,609	0,626	0,649	0,661	0,68269
2,0	0,705	0,817	0,861	0,884	0,914	0,926	0,95450
3,0	0,795	0,905	0,942	0,960	0,980	0,988	0,99730
5,0	0,874	0,962	0,985	0,992	0,998	0,999	0,99999

Рассмотрим методику обработки экспериментальных данных при определении модуля упругости.

1. Для каждого испытания находим значение модуля упругости и его среднее значение:

$$E_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i, i=1, \dots, n,$$

где n – число измерений.

2. Вычисляем отклонение значений E_i от среднего:

$$\Delta E_i = E_{cp} - E_i.$$

3. Определяем среднее квадратическое отклонение измерений:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (\Delta E_i)^2}{n-1}}.$$

4. Определяем доверительный интервал средней арифметической величины для заданной доверительной вероятности (принять 0,95):

$$t = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где t – критерий Стьюдента, принимается из таблицы в зависимости от доверительной вероятности и числа степеней свободы $k = n - 1$.

Достоверное значение модуля продольной упругости определяется доверительным интервалом:

$$E_{cp} - t \frac{S}{\sqrt{n}} \leq E \leq E_{cp} + t \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

3. Применение инструментов EXCEL при статистической обработке результатов механических испытаний материалов

Пакет Excel оснащен средствами обработки данных. В него включены: средства описательной статистики, которые охватывают методы описания статистических данных, представление их в форме таблиц, распределений,

критерии различия, корреляционные, дисперсионные и регрессионные методы, позволяющие проводить необходимый анализ экспериментальных данных.

Наиболее часто используются методы, реализованные в мастере функций и пакете анализа Excel.

4. Использование специальных функций в мастере функций EXCEL

В мастере функций Excel имеется ряд специальных функций, предназначенных для вычисления основных статистических характеристик.

Мода – это элемент выборки экспериментальных данных с наиболее часто встречающимся значением.

Средним значением называется величина:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где x_i – экспериментальные данные (варианты).

Медиана – это число, которое является серединой выборки.

Интервал (амплитуда, вариационный размах) – это разница между максимальным и минимальным значением вариант.

Интервал является мерой вариации или рассеяния элементов выборки.

Дисперсией выборки называется величина

$$D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

которая характеризует степень разброса элементов выборки относительно среднего значения.

Стандартное отклонение – это величина, определяемая по формуле:

$$S_x = \sqrt{D}.$$

Стандартная ошибка или ошибка среднего находится по формуле:

$$m = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

Этот параметр характеризует степень возможного отклонения среднего значения, полученного на исследуемой ограниченной выборке, от истинного среднего значения, полученного на всей совокупности элементов.

Перечень ряда специальных функций в мастере функций Excel позволяющий определить основные статистические характеристики:

- 1) Функция СРЗНАЧ вычисляет среднее арифметическое их нескольких массивов данных.
- 2) Функция МЕДИАНА позволяет получить медиану заданной выборки.
- 3) Функция МОДА вычисляет наиболее часто встречающееся значение в выборке.
- 4) Функция ДИСП позволяет оценить дисперсию по выборочным данным.
- 5) Функция СТАНДОТКЛОН вычисляет стандартное отклонение.

Рассмотрим пример 1. В результате механических испытаний определили модуль упругости при растяжении полипропилена.

Таблица 3

№ испытания	Модуль упругости полипропилена, МПа
1	$8,02 \cdot 10^{-3}$
2	$11,51 \cdot 10^{-3}$
3	$10,97 \cdot 10^{-3}$
4	$8,37 \cdot 10^{-3}$
5	$7,89 \cdot 10^{-3}$

6	$9,57 \cdot 10^{-3}$
7	$8,75 \cdot 10^{-3}$

Введем полученные данные в рабочую таблицу.

Откроем рабочую таблицу. Введем в ячейку A1 слово «Полипропилен», а затем в ячейку A2÷A8 соответствующие значения модуля упругости полипропилена. Для определения среднего значения экспериментальных данных необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку A9.

На панели инструментов нажать кнопку «Вставка функции (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» выбрать категорию «Статистические» и функцию СРЗНАЧ, после чего нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СРЗНАЧ за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке. Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A8). Нажать кнопку ОК. В ячейке A9 появиться среднее значение выборки.

Для определения стандартного отклонения в выборке необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку (A10).

На панели инструментов нажать кнопку «Вставка функций (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» выберите категорию «Статистические» и функцию СТАНД ОТКЛОН, после чего нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СТАНД ОТКЛОН за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке.

Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A8). Нажать кнопку ОК.

В ячейке A10 появиться стандартное отклонение выборки.

Данные должны лежать в диапазоне $\bar{x} \pm 3S_x$.

5. Примеры использования специальных функций в мастере функций EXCEL

Получили выборку экспериментальных данных: $x_1 = 8,02$; $x_2 = 11,51$;
 $x_3 = 10,97$; $x_4 = 8,37$; $x_5 = 7,89$; $x_6 = 9,57$; $x_7 = 8,75$.

На панели инструментов выбираем «Вставка функции (f_x)».

В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» нужно выбрать категорию «Статистические» и функцию СРЗНАЧ, после чего нажать кнопку ОК.

Затем необходимо ввести диапазон опытных данных для определения среднего значения (A2÷A8). Нажать кнопку ОК. В ячейке A9 появится среднее значение выборки – 9,297143 .

Для определения стандартного отклонения (или дисперсии, или моды, или медианы) в выборке необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку A10 (или A11, или A12, или A13). Затем аналогичным способом, используя панель инструментов и «Вставка функций (f_x)»; категорию «Статистические» и функцию СТАНД ОТКЛОН (или ДИСП, или МОДА, или МЕДИАНА)», определяем в вышеуказанных ячейках: стандартное отклонение выборки – 1,445668 (или дисперсия – 2,089957, или мода – 0, или медиана – 8,75).

Результаты вычислений показаны на рис. 2.

8,02	Данные эксперимента
11,51	
10,97	
8,37	
7,89	
9,57	
8,75	
9,297143	Среднее значение =СРЗНАЧ(A1:A7)
1,445668	Стандартное отклонение =СТАНДОТКЛОН(A1:A7)

Рис. 2

Рассмотрим пример 2. Обработка результатов испытаний на примере определения ударной вязкости по Шарпи с применением инструментов EXCEL.

Получили выборку экспериментальных данных $x_1 = 37,54$; $x_2 = 36,78$; $x_3 = 38,79$; $x_4 = 28,78$; $x_5 = 43,79$.

Введем данные в рабочую таблицу.

Откроем рабочую таблицу. Введем в ячейку A1 слово «Армамид ПА 6-2УП», а затем в ячейку A2÷A6 соответствующие значения модуля упругости полипропилена. Для определения среднего значения экспериментальных данных необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку A7.

На панели инструментов нажмем кнопку «Вставка функции (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» выберем категорию «Статистические» и функцию СРЗНАЧ, после чего необходимо нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СРЗНАЧ за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке.



Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A6). Нажать кнопку ОК. В ячейке A7 появиться среднее значение выборки - 37,14.

Для определения стандартного отклонения в выборке необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку (A8). На панели инструментов нажать кнопку «Вставка функций (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» необходимо выбрать категорию «Статистические» и функцию СТАНД ОТКЛОН, после чего нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СТАНД ОТКЛОН за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке.

Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A6). Нажать кнопку ОК. В ячейке A8 появиться стандартное отклонение выборки - 5,41.

Данные должны лежать в диапазоне $\bar{x} \pm S_x$ (то есть $31,73 \pm 42,55$).

6. Использование инструментов пакета анализа EXCEL

В пакете Excel имеется набор инструментов для работы с несколькими выборками и проведение корреляционного и регрессионного анализа («Пакет анализа»).

Для установки раздела «Анализ данных» в пакете Excel необходимо выполнить следующие действия.

- 1) Установить «Пакет анализа», выбрать в меню «Сервис» «Команду» «Настройки», в появившемся описке установить флажок «Пакет анализа».
- 2) Ввод данных «Экспериментальные данные» следует представить в виде таблицы, где в столбцы вводятся исходные данные. При создании таблицы информацию следует вводить в отдельные ячейки (например, 7).

Совокупность ячеек, содержащих исходную информацию, называется Входным диапазоном.

3) Последовательность обработки данных:

- указать курсором мыши на пункт меню «Сервис» и щелкнуть левой кнопки мыши;

- в раскрывающемся списке выбрать команду «Анализ данных».

Если команда «Анализ данных» отсутствует в меню «Сервис», то необходимо установить в Excel пакет анализа данных;

- выбрать необходимую строчку в появившемся списке «Инструменты анализа»;

- ввести входной и выходной диапазоны и выбрать необходимые параметры.

4) Нахождение основных статистических характеристик:

- выполнить команду «Сервис → Анализ данных»;

- в появившемся списке «Инструменты анализа» выполнить строку «Описательная статистика» и нажать кнопку ОК;

- в появившемся диалоговом окне указать входной диапазон, то есть ввести ссылку на ячейки, содержащие экспериментальные данные, и указателем мыши навести на верхнюю ячейку данных и нажать левую кнопку мыши и, не отпуская её, протянуть указатель, содержащей анализируемые данные, и отпустить левую кнопку мыши;

- указать выходной диапазон, то есть ввести ссылку на ячейки, в которые будут выведены результаты анализа. Для этого поставить переключатель в положение «Выходной диапазон» указателем мыши и щелкнув левой клавишей. Затем навести указателем мыши в поле ввода «Выходной диапазон» и щелкнуть левой кнопкой мыши, затем указатель мыши навести на левую верхнюю ячейку выходного диапазона и щелкнуть левой кнопкой мыши;

- в разделе «Группировка» переключатель установить в положение «по столбцам»;

- установить флажок в поле «Итоговая статистика»;

- нажать кнопку ОК.

В результате анализа экспериментальных данных, находящихся в каждом столбце, в указанном выходном диапазоне выводятся следующие статистические характеристики:

1. Среднее арифметическое.
2. Стандартная ошибка среднего.
3. Медиана.
4. Мода.
5. Стандартное отклонение.
6. Дисперсия выборки.
7. Эксцесс.
8. Ассиметричность.
9. Интервал.
10. Минимум.
11. Максимум.
12. Сумма (сумма значения всех элементов выборки).
13. Счет (количество экспериментальных данных).
14. Наибольшее значение.
15. Наименьшее значение.
16. Уровень надёжности.

Если необходимо провести более детальный анализ экспериментальных данных, сделать выводы, проверить статистические гипотезы, а также провести анализ различий и взаимосвязи между сериями экспериментов, то в пакете EXCEL имеются возможности, позволяющие провести и этот анализ.

7. Обработка результатов испытаний с использованием критерия Стьюдента

Рассмотрим методику обработки экспериментальных данных с использованием критерия Стьюдента (приложение Б).

Приближенную оценку для среднего квадратичного отклонения величины \bar{x} получаем по формуле:

$$S_{cp} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Достоверность определения величины x по n испытаниям определяется неравенством:

$$-kS_{cp} < \bar{x} - x < kS_{cp}.$$

Относительная ошибка равна:

$$\frac{kS_{cp}}{\bar{x}}.$$

Значение параметра k определяется на основании функции $\psi(k)$, равной заданной достоверности.

Функция $\psi(k)$ – вероятность ошибки, лежащей в интервале от $-\alpha$ до $+\alpha$; δ – средняя ошибка.

Функция $\psi(k)$ определяется формулой:

$$\psi(k) = P(-\alpha < \delta < \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

или

$$\psi(k) = 2\Phi(k),$$

где $\Phi(k)$ – функция Лапласа (Приложение В).

Если же при выполнении эксперимента ограничиваются небольшим числом испытаний, то оценка результата с помощью среднего квадратичного отклонения S_{cp} может быть недостаточно достоверной, так как принимается

$S_{cp} = \frac{S}{\sqrt{n}}$ вместо точной величины $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $-\sigma_n < \sigma < \sigma_n$.

Средняя квадратическая ошибка измерения величины x определяется по формуле:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2}.$$

Необходимое уточнение достигается с помощью распределения Стьюдента:

$$S(u, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция;

$$u = \frac{\bar{x} - x}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{x} - x}{S_{cp}}.$$

Гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ определяется интегралом:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$\text{и } \Gamma(n) = (n-1)!.$$

График распределения Стьюдента напоминает по форме нормальное распределение и с увеличением n приближается к нему, но при малых значениях сильно отличается от него (рис. 1).

При малых выборках для оценки достоверности вместо интеграла вероятности $\psi(k)$ используется функция $S(u, n)$, которая зависит не только от k , но и от объема выборки n .

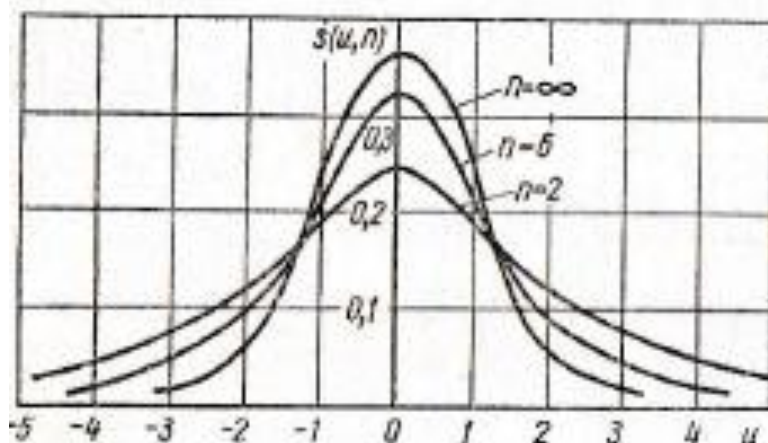


Рис. 1. График распределения Стьюдента

В таблице 2 приводятся сравнительные значения этих функций.

Таблица 2

k	S (k, n) при значениях n						ψ (k)
	2	3	4	5	8	12	
0,1	0,063	0,071	0,073	0,075	0,077	0,078	0,07966
0,2	0,126	0,140	0,146	0,149	0,153	0,155	0,15852
0,5	0,295	0,333	0,349	0,355	0,368	0,373	0,38292
1,0	0,500	0,577	0,609	0,626	0,649	0,661	0,68269
2,0	0,705	0,817	0,861	0,884	0,914	0,926	0,95450
3,0	0,795	0,905	0,942	0,960	0,980	0,988	0,99730
5,0	0,874	0,962	0,985	0,992	0,998	0,999	0,99999

Рассмотрим методику обработки экспериментальных данных при определении модуля упругости.

5. Для каждого испытания находим значение модуля упругости и его среднее значение:

$$E_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i, i = 1, \dots, n,$$

где n – число измерений.

6. Вычисляем отклонение значений E_i от среднего:

$$\Delta E_i = E_{cp} - E_i.$$

7. Определяем среднее квадратическое отклонение измерений:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (\Delta E_i)^2}{n-1}}.$$

8. Определяем доверительный интервал средней арифметической величины для заданной доверительной вероятности (принять 0,95):

$$t = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где t – критерий Стьюдента, принимается из таблицы в зависимости от доверительной вероятности и числа степеней свободы $\kappa = n - 1$.

Достоверное значение модуля продольной упругости определяется доверительным интервалом:

$$E_{cp} - t \frac{S}{\sqrt{n}} \leq E \leq E_{cp} + t \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

8. Применение инструментов EXCEL при проведении механических испытаний материалов

Пакет Excel оснащен средствами обработки данных. В него включены: средства описательной статистики, которые охватывают методы описания статистических данных, представление их в форме таблиц, распределений, критерии различия, корреляционные, дисперсионные и регрессионные методы, позволяющие проводить необходимый анализ экспериментальных данных.

Наиболее часто используются методы, реализованные в мастере функций и пакете анализа Excel.

9. Использование специальных функций в пакете EXCEL

В мастере функций Excel имеется ряд специальных функций, предназначенных для вычисления основных статистических характеристик.

Мода – это элемент выборки экспериментальных данных с наиболее часто встречающимся значением.

Средним значением называется величина:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где x_i – экспериментальные данные (варианты).

Медиана – это число, которое является серединой выборки.

Интервал (амплитуда, вариационный размах) – это разница между максимальным и минимальным значением вариант.

Интервал является мерой вариации или рассеяния элементов выборки.

Дисперсией выборки называется величина

$$D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

которая характеризует степень разброса элементов выборки относительно среднего значения.

Стандартное отклонение – это величина, определяемая по формуле:

$$S_x = \sqrt{D}.$$

Стандартная ошибка или ошибка среднего находится по формуле:

$$m = \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Этот параметр характеризует степень возможного отклонения среднего значения, полученного на исследуемой ограниченной выборке, от истинного среднего значения, полученного на всей совокупности элементов.

Перечень ряда специальных функций в мастере функций Excel

позволяющий определить основные статистические характеристики:

6) Функция СРЗНАЧ вычисляет среднее арифметическое их нескольких массивов данных.

7) Функция МЕДИАНА позволяет получить медиану заданной выборки.

8) Функция МОДА вычисляет наиболее часто встречающееся значение в выборке.

9) Функция ДИСП позволяет оценить дисперсию по выборочным данным.

10) Функция СТАНДОТКЛОН вычисляет стандартное отклонение.

Рассмотрим пример 1. В результате механических испытаний определили модуль упругости при растяжении полипропилена.

Таблица 3

№ испытания	Модуль упругости полипропилена, МПа
1	$8,02 \cdot 10^{-3}$
2	$11,51 \cdot 10^{-3}$
3	$10,97 \cdot 10^{-3}$
4	$8,37 \cdot 10^{-3}$
5	$7,89 \cdot 10^{-3}$
6	$9,57 \cdot 10^{-3}$
7	$8,75 \cdot 10^{-3}$

Введем полученные данные в рабочую таблицу.

Откроем рабочую таблицу. Введем в ячейку A1 слово «Полипропилен», а затем в ячейку A2÷A8 соответствующие значения модуля упругости

полипропилена. Для определения среднего значения экспериментальных данных необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку A9.

На панели инструментов нажать кнопку «Вставка функции (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» выбрать категорию «Статистические» и функцию СРЗНАЧ, после чего нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СРЗНАЧ за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке. Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A8). Нажать кнопку ОК. В ячейке A9 появиться среднее значение выборки.

Для определения стандартного отклонения в выборке необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку (A10).

На панели инструментов нажать кнопку «Вставка функций (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» выберите категорию «Статистические» и функцию СТАНД ОТКЛОН, после чего нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СТАНД ОТКЛОН за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке.

Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A8). Нажать кнопку ОК.

В ячейке A10 появиться стандартное отклонение выборки.

Данные должны лежать в диапазоне $\bar{x} \pm 3S_x$.

10. Примеры использования специальных функций в мастере функций EXCEL

Получили выборку экспериментальных данных: $x_1 = 8,02$; $x_2 = 11,51$;
 $x_3 = 10,97$; $x_4 = 8,37$; $x_5 = 7,89$; $x_6 = 9,57$; $x_7 = 8,75$.

На панели инструментов выбираем «Вставка функции (f_x)».

В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» нужно выбрать категорию «Статистические» и функцию СРЗНАЧ, после чего нажать кнопку ОК.

Затем необходимо ввести диапазон опытных данных для определения среднего значения (A2÷A8). Нажать кнопку ОК. В ячейке A9 появится среднее значение выборки – 9,297143 .

Для определения стандартного отклонения (или дисперсии, или моды, или медианы) в выборке необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку A10 (или A11, или A12, или A13). Затем аналогичным способом, используя панель инструментов и «Вставка функций (f_x); категорию «Статистические» и функцию СТАНД ОТКЛОН (или ДИСП, или МОДА, или МЕДИАНА)», определяем в вышеуказанных ячейках: стандартное отклонение выборки – 1,445668 (или дисперсия – 2,089957, или мода – 0, или медиана – 8,75).

Результаты вычислений показаны на рис. 2.

8,02	Данные эксперимента
11,51	
10,97	
8,37	
7,89	
9,57	
8,75	
9,297143	Среднее значение =СРЗНАЧ(A1:A7)
1,445668	Стандартное отклонение =СТАНДОТКЛОН(A1:A7)

Рис. 2

Рассмотрим пример 2. Обработка результатов испытаний на примере определения ударной вязкости по Шарпи с применением инструментов EXCEL.

Получили выборку экспериментальных данных $x_1 = 37,54$; $x_2 = 36,78$;
 $x_3 = 38,79$; $x_4 = 28,78$; $x_5 = 43,79$.

Введем данные в рабочую таблицу.

Откроем рабочую таблицу. Введем в ячейку A1 слово «Армамид ПА 6-2УП», а затем в ячейку A2÷A6 соответствующие значения модуля упругости полипропилена. Для определения среднего значения экспериментальных данных необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку A7.

На панели инструментов нажмем кнопку «Вставка функции (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» выберем категорию «Статистические» и функцию СРЗНАЧ, после чего необходимо нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СРЗНАЧ за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке.

Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A6). Нажать кнопку ОК. В ячейке A7 появиться среднее значение выборки - 37,14.

Для определения стандартного отклонения в выборке необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку (A8). На панели инструментов нажать кнопку «Вставка функций (f_x)». В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» необходимо выбрать категорию «Статистические» и функцию СТАНД ОТКЛОН, после чего нажать кнопку ОК.

Появившееся диалоговое окно СТАНД ОТКЛОН за серое поле мышью отодвинуть вправо от данных при нажатой левой кнопке.

Указателем мыши ввести диапазон данных для определения среднего значения (A2÷A6). Нажать кнопку ОК. В ячейке A8 появиться стандартное

отклонение выборки - 5,41.

Данные должны лежать в диапазоне $\bar{x} \pm S_x$ (то есть $31,73 \pm 42,55$).

11. Использование инструментов пакета анализа EXCEL

В пакете Excel имеется набор инструментов для работы с несколькими выборками и проведение корреляционного и регрессионного анализа («Пакет анализа»).

Для установки раздела «Анализ данных» в пакете Excel необходимо выполнить следующие действия.

4) Установить «Пакет анализа», выбрать в меню «Сервис» «Команду» «Настройки», в появившемся описке установить флажок «Пакет анализа».

5) Ввод данных «Экспериментальные данные» следует представить в виде таблицы, где в столбцы вводятся исходные данные. При создании таблицы информацию следует вводить в отдельные ячейки (например, 7).

Совокупность ячеек, содержащих исходную информацию, называется Входным диапазоном.

б) Последовательность обработки данных:

- указать курсором мыши на пункт меню «Сервис» и щелкнуть левой кнопки мыши;

- в раскрывающемся списке выбрать команду «Анализ данных».

Если команда «Анализ данных» отсутствует в меню «Сервис», то необходимо установить в Excel пакет анализа данных;

- выбрать необходимую строчку в появившемся списке «Инструменты анализа»;

- ввести входной и выходной диапазоны и выбрать необходимые параметры.

4) Нахождение основных статистических характеристик:

- выполнить команду «Сервис → Анализ данных»;
- в появившемся списке «Инструменты анализа» выполнить строку «Описательная статистика» и нажать кнопку ОК;
- в появившемся диалоговом окне указать входной диапазон, то есть ввести ссылку на ячейки, содержащие экспериментальные данные, и указателем мыши навести на верхнюю ячейку данных и нажать левую кнопку мыши и, не отпуская её, протянуть указатель, содержащей анализируемые данные, и отпустить левую кнопку мыши;
- указать выходной диапазон, то есть ввести ссылку на ячейки, в которые будут выведены результаты анализа. Для этого поставить переключатель в положение «Выходной диапазон» указателем мыши и щелкнув левой клавишей. Затем навести указателем мыши в поле ввода «Выходной диапазон» и щелкнуть левой кнопкой мыши, затем указатель мыши навести на левую верхнюю ячейку выходного диапазона и щелкнуть левой кнопкой мыши;
- в разделе «Группировка» переключатель установить в положение «по столбцам»;
- установить флажок в поле «Итоговая статистика»;
- нажать кнопку ОК.

В результате анализа экспериментальных данных, находящихся в каждом столбце, в указанном выходном диапазоне выводятся следующие статистические характеристики:

1. Среднее арифметическое.
2. Стандартная ошибка среднего.
3. Медиана.
4. Мода.
5. Стандартное отклонение.
6. Дисперсия выборки.

7. Эксцесс.
8. Ассиметричность.
9. Интервал.
10. Минимум.
11. Максимум.
12. Сумма (сумма значения всех элементов выборки).
13. Счет (количество экспериментальных данных).
14. Наибольшее значение.
15. Наименьшее значение.
16. Уровень надёжности.

Если необходимо провести более детальный анализ экспериментальных данных, сделать выводы, проверить статистические гипотезы, а также провести анализ различий и взаимосвязи между сериями экспериментов, то в пакете EXCEL имеются возможности, позволяющие провести и этот анализ.

12. Использование пакета анализа программного комплекса Statistica

Программный комплекс Statistica – это универсальный инструмент, предназначенный для статического анализа и визуализации экспериментальных данных.

Это современный пакет, в котором реализованы компьютерные и математические методы статистического анализа данных, который позволяет быстро проводить анализ и наглядно отображать результаты. Оптимально проводить испытания.

Программный комплекс Statistica обладает следующими достоинствами:

1. Содержит полный набор методов статистического анализа.
2. Удобен в использовании.
3. Полностью совместим с приложениями операционной системы Windows.

4. Является средством построения приложений в практических областях.

5. Данные системы Statistica легко конвертировать в различные базы данных и в электронные таблицы.

6. В пакете есть примеры, позволяющие освоить методы анализа.

7. Поддерживает большинство Интернет-форматов.

8. Позволяет визуализировать данные и проводить графический анализ.

На рис. 3 представлено главное меню пакета Statistica.

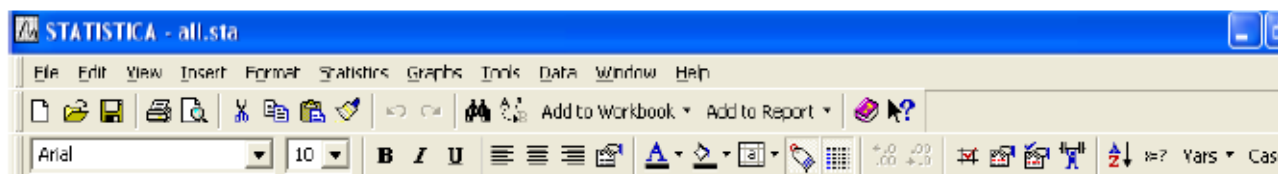


Рис. 3 Главное меню пакета Statistica

Панель состоит из следующих опций:

- 1). Файл (File);
- 2). Редактирование (Edit);
- 3). Просмотр (View);
- 4). Вставка (Insert);
- 5). Формат (Format);
- 6). Статистика (Statistics);
- 7). Графики (Graphs);
- 8). Инструменты (Tools);
- 9). Данные (Data);
- 10). Окно (Window);
- 11). Справка (Help).

При работе наиболее часто используются опции «Statistics» и «Graphs».

Это позволяет:

- вычислить вероятность, среднее значение и другие величины с помощью вероятностного калькулятора (Statistics/Probability Calculator);
- провести регрессионный анализ (Statistics/Advanced Linear/Nonlinear Model/ Nonlinear Tstimation);
- провести корреляционный анализ (Statistics/ Basic Statistics/Correlation Matrices);
- рассчитать статистические характеристики переменных (Statistics/ Basic Statistics/Descriptive Statistics);
- провести анализ временных рядов (Statistics/ Advanced Linear/Nonlinear Model/Time Series Analysis/Forecasting).

А также организовать анализ с помощью других статистических методов, используемых для обработки экспериментальных данных.

Программный пакет Statistica позволяет построить различные графики:

- гистограммы (Graphs/Histograms);
- графики рассеяния (Graphs/Scatterplots);
- круговые диаграммы (Graphs/2D Graphs/Pie Charts);
- построить 3D модели (Graphs/),

а также построить и другие графики.

Из зарубежных программных комплексов наиболее распространены Statistica, BAS, SPSS, Statgraphics, Systat, ODA, WinSTAT.

Из российских пакетов наиболее известны STADIA, Олимп, Класс-Мастер, Статистик-Консультант.

Использование компьютерных комплексов позволяет проводить обработку экспериментальных данных на новом современном уровне.

13. Контрольные вопросы

1. Каковы правила отбраковки образцов, прошедших испытания?
2. Какова в целом последовательность обработки результатов испытаний?
3. Какова последовательность статистической обработки результатов испытаний?
4. По каким формулам определяются параметры испытания?
5. Как найти среднее арифметическое результатов измерения?
6. Как найти величину стандартного отклонения результатов измерения?
7. Как определить границы доверительного интервала результатов измерения?
8. Как найти относительную ошибку результатов измерения?
9. Как вводятся экспериментальные данные в *Excel*?
10. Как использовать стандартные математические функции на панели инструментов *Excel*?
11. Как отображаются результаты вычислений при автоматизированной их обработке?

Приложение А

Пример отчета по статистической обработке результатов механических испытаний материалов при изгибе балки

Таблица 1.1

№ об- № образца	Характерные значения нагрузки, Н			Числовые значения характерных прогибов (мм)		
	F_M	F_p	$F_{и}$	f_M	f_p	$f_{и} = 1,5h$
1						
2						

Таблица 1.2

Характерные значения прочностных характеристик, н/мм² (МПа)

№ образца	σ_M	σ_p	$\sigma_{и}$
1			
2			

Таблица 1.3

Средние арифметические значения параметров испытаний

Параметры прочности, МПа	Прогиб, мм
--------------------------	------------

$\bar{\sigma}_m$	$\bar{\sigma}_p$	$\bar{\sigma}_и$	\bar{f}_m	\bar{f}_p	$\bar{f}_и$

Таблица 1.4

Значения стандартного отклонения параметров испытаний

Параметры прочности, МПа			Прогиб, мм		
$S\sigma_m$	$S\sigma_p$	$S\sigma_и$	S_{f_m}	S_{f_p}	$S_{f_и}$

Таблица 1.5

**Значения стандартного отклонения ΔX
от номинального значения измеряемых параметров**

Параметры прочности, МПа			Прогиб, мм		
$\Delta X\sigma_m$	$\Delta X\sigma_p$	$\Delta X\sigma_и$	ΔX_{f_m}	ΔX_{f_p}	$\Delta X_{f_и}$

Таблица 1.6

Значения относительной ошибки измерения параметров испытания

Параметры прочности, МПа	Прогиб, мм
--------------------------	------------



Название дисциплины

$\xi\sigma_M$	$\xi\sigma_P$	$\xi\sigma_H$	ξf_M	ξf_P	ξf_H

Приложение Б

Таблица распределения Стьюдента

n-1	Доверительная вероятность			
	0.90	0.95	0.99	0.999
1	6.3137515148	12.7062047364	63.6567411629	636.619249432
2	2.91998558036	4.30265272991	9.92484320092	31.599054577
3	2.3533634348	3.18244630528	5.84090929976	12.9239786366
4	2.13184678134	2.7764451052	4.60409487142	8.61030158138
5	2.01504837267	2.57058183661	4.03214298356	6.86882663987
6	1.94318028039	2.44691184879	3.70742802132	5.95881617993
7	1.89457860506	2.36462425101	3.49948329735	5.40788252098
8	1.85954803752	2.30600413503	3.35538733133	5.04130543339
9	1.83311293265	2.26215716274	3.24983554402	4.78091258593
10	1.81246112281	2.22813885196	3.16927266718	4.5868938587
11	1.7958848187	2.20098516008	3.10580651322	4.43697933823
12	1.78228755565	2.17881282966	3.05453958834	4.31779128361
13	1.77093339599	2.16036865646	3.01227583821	4.22083172771
14	1.76131013577	2.14478668792	2.97684273411	4.14045411274
15	1.75305035569	2.13144954556	2.94671288334	4.0727651959
16	1.74588367628	2.11990529922	2.92078162235	4.0149963326
17	1.73960672608	2.10981557783	2.89823051963	3.96512626361
18	1.73406360662	2.10092204024	2.87844047271	3.92164582001
19	1.72913281152	2.09302405441	2.86093460645	3.88340584948
20	1.72471824292	2.08596344727	2.84533970978	3.84951627298
21	1.72074290281	2.07961384473	2.83135955802	3.81927716303
22	1.71714437438	2.0738730679	2.8187560606	3.79213067089
23	1.71387152775	2.06865761042	2.80733568377	3.76762680377
24	1.71088207991	2.06389856163	2.79693950477	3.74539861893
25	1.70814076125	2.05953855275	2.78743581368	3.72514394948
26	1.70561791976	2.05552943864	2.77871453333	3.70661174331
27	1.70328844572	2.05183051648	2.77068295712	3.68959171334
28	1.70113093427	2.0484071418	2.76326245546	3.67390640062
29	1.69912702653	2.04522964213	2.75638590367	3.6594050194
30	1.69726089436	2.0422724563	2.74999565357	3.645958635

Название дисциплины

Приложение В

Функция Лапласа

y	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,490097	0,490358	0,490613	0,490863	0,491106	0,491344	0,491576
2,4	0,491802	0,492024	0,492240	0,492451	0,492656	0,492857	0,493053	0,493244	0,493431	0,493613
2,5	0,493790	0,493963	0,494132	0,494297	0,494457	0,494614	0,494766	0,494915	0,495060	0,495201
2,6	0,495339	0,495473	0,495604	0,495731	0,495855	0,495975	0,496093	0,496207	0,496319	0,496427
2,7	0,496533	0,496636	0,496736	0,496833	0,496928	0,497020	0,497110	0,497197	0,497282	0,497365
2,8	0,497445	0,497523	0,497599	0,497673	0,497744	0,497814	0,497882	0,497948	0,498012	0,498074
2,9	0,498134	0,498193	0,498250	0,498305	0,498359	0,498411	0,498462	0,498511	0,498559	0,498605
3,0	0,498650	0,498694	0,498736	0,498777	0,498817	0,498856	0,498893	0,498930	0,498965	0,498999
3,1	0,499032	0,499064	0,499095	0,499126	0,499155	0,499183	0,499211	0,499237	0,499263	0,499288
3,2	0,499312	0,499336	0,499359	0,499381	0,499402	0,499423	0,499442	0,499462	0,499481	0,499499
3,3	0,499516	0,499533	0,499549	0,499565	0,499581	0,499595	0,499610	0,499624	0,499637	0,499650
3,4	0,499663	0,499675	0,499686	0,499698	0,499709	0,499719	0,499729	0,499739	0,499749	0,499758
3,5	0,499767	0,499775	0,499784	0,499792	0,499799	0,499807	0,499814	0,499821	0,499828	0,499834
3,6	0,499840	0,499846	0,499852	0,499858	0,499863	0,499868	0,499873	0,499878	0,499883	0,499887
3,7	0,499892	0,499896	0,4999003	0,4999042	0,4999079	0,4999115	0,4999150	0,4999183	0,4999215	0,4999246
3,8	0,4999276	0,4999305	0,4999332	0,4999359	0,4999384	0,4999409	0,4999433	0,4999455	0,4999477	0,4999498
3,9	0,4999519	0,4999538	0,4999557	0,4999575	0,4999592	0,4999609	0,4999625	0,4999640	0,4999655	0,4999669
4,0	0,4999683	0,4999696	0,4999709	0,4999721	0,4999732	0,4999743	0,4999754	0,4999764	0,4999774	0,4999784
4,1	0,4999793	0,4999802	0,4999810	0,4999818	0,4999826	0,4999833	0,4999840	0,4999847	0,4999854	0,4999860
4,2	0,4999866	0,4999872	0,4999877	0,4999883	0,4999888	0,4999893	0,4999897	0,4999902	0,4999906	0,49999106
4,3	0,49999146	0,49999183	0,49999219	0,49999254	0,49999287	0,49999319	0,49999349	0,49999378	0,49999406	0,49999433
4,4	0,49999458	0,49999483	0,49999506	0,49999528	0,49999550	0,49999570	0,49999590	0,49999608	0,49999626	0,49999643
4,5	0,49999660	0,49999675	0,49999690	0,49999705	0,49999718	0,49999731	0,49999744	0,49999756	0,49999767	0,49999778
4,6	0,49999788	0,49999798	0,49999808	0,49999817	0,49999825	0,49999834	0,49999841	0,49999849	0,49999856	0,49999863
4,7	0,49999869	0,49999876	0,49999882	0,49999887	0,49999893	0,49999898	0,49999903	0,49999907	0,49999912	0,49999916
4,8	0,499999206	0,499999245	0,499999282	0,499999317	0,499999350	0,499999382	0,499999413	0,499999442	0,499999469	0,499999495
4,9	0,499999520	0,499999544	0,499999567	0,499999588	0,499999609	0,499999628	0,499999647	0,499999665	0,499999682	0,499999698