



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

## **Учебно-методическое пособие**

по проведению практических занятий

по дисциплинам

«Сопротивление материалов»,

«Специальные вопросы сопротивления материалов»

**«Теории прочности и их применение**

**в решении задач**

**по сопротивлению материалов»**

Автор  
Бондаренко В.П.

Ростов-на-Дону, 2022

## Аннотация

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические положения, пример решения типовой задачи на тему «Теории прочности» по дисциплинам «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Техническая механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов», «Основы сопротивления материалов с элементами теории упругости».

Пособие ставит своей целью оказать помощь студентам, изучающих общий курс сопротивления материалов, в самостоятельном изучении важной для специалиста темы «Теории прочности».

В учебно-методическом пособии изложены основные сведения по классическим теориям прочности, изучаемым в курсе сопротивления материалов, а также рассматривается пример применения теорий прочности в решении ряда задач сопротивления материалов.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям:

08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология



художественной обработки материалов; 27.03.05 – Инновация и специальностям 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 27.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

## **Авторы**

Бондаренко В.П., к.т.н.



## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	<b>5</b>
<b>ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ</b> .....	<b>6</b>
<b>1. Основные теоретические положения</b> .....	<b>6</b>
1.1. Опасное состояние в точке деформируемого тела и причины его возникновения.....	6
1.2. Допускаемое состояние материала по различным критериям прочности.....	7
1.3. Классические теории прочности.....	7
1.3.1. Первая теория прочности.....	8
1.3.2. Вторая теория прочности.....	9
1.3.3. Третья теория прочности.....	9
1.3.4. Теория прочности Мора.....	10
1.3.5. Четвертая теория прочности.....	11
1.4. Применение теорий прочности при решении задач по сопротивлению материалов.....	11
<b>2. Примеры применения теорий прочности при решении задач на совместное действие изгиба и кручения стержней круглого поперечного сечения</b> .....	<b>14</b>
2.1. Преобразование формул условий прочности по третьей и четвертой теориям при расчетах стержней круглого поперечного сечения на совместное действие изгиба и кручения.....	14
2.2. Примеры решения задач на совместное действие изгиба и кручения.....	16
2.2.1. Пример решения задачи № 1.....	16
2.2.2. Пример решения задачи № 2.....	17
2.2.3. Пример решения задачи № 3.....	18
<b>3. Вопросы для самоконтроля</b> .....	<b>19</b>
<b>РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА</b> .....	<b>20</b>



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке инженеров любой специальности.

Сопротивление материалов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами технических направлений подготовки (специально-стей).

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи. Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями, а также обратиться за консультацией к преподавателю.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этих дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить обучающихся пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, для закрепления читаемого курса лекций, для подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся, при самостоятельном выполнении домашних, контрольных и расчетно-графических работ.



## ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

### 1. Основные теоретические положения

#### 1.1. Опасное состояние в точке деформируемого тела и причины его возникновения

При испытании материалов статической нагрузкой на центральное растяжение и сжатие устанавливается, так называемое, опасное (или предельное) состояние. Оно характеризуется наступлением текучести для пластичных материалов, сопровождаемой значительными остаточными деформациями, или появлением трещин для хрупких материалов, свидетельствующих о начале разрушения.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней в момент наступления опасного состояния при образце из пластичного материала равны пределу текучести  $\sigma_T$ , а при образце из хрупкого материала равны пределу прочности  $\sigma_{пл}$ .

***Пределом текучести** называется нормальное напряжение, при котором происходит нарастание пластических деформаций при практически постоянной нагрузке.*

***Пределом прочности** называется нормальное напряжение, которое может выдержать испытываемый образец не разрушаясь.*

Тело или элемент конструкции находится в опасном состоянии, если такое состояние имеется в какой-либо его точке.

Точка тела, в окрестности которой при пропорциональном возрастании нагрузки материал первым оказывается в опасном состоянии, называется **опасной точкой**.

Существуют различные взгляды на причины, вызывающие опасное состояние материала. Считают, например, что опасное состояние наступает в результате того, что нормальные напряжения достигают предельного значения, а поэтому следует ограничивать величину этих напряжений.

Другим направлением в теории прочности является направление, согласно которому за критерий опасного состояния следует принимать наибольшую относительную линейную деформацию и поэтому следует ограничивать линейные относительные деформации.

Аналогично считают, что в ряде случаев следует ограничивать величины касательных напряжений или полной удельной потенциальной энергии изменения формы, если считать их причиной наступления опасного состояния материала.

В общем случае нагружения элемента конструкции определить его опасную точку можно лишь после выбора того или иного критерия опасного состояния.

Если причиной опасного состояния считать нормальное напряжение, то опасной точкой является та точка тела, в которой возникает наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение. Если же причиной опасного состояния считается касательное напряжение, то опасной точкой является та точка, в которой возникает наибольшее касательное напряжение. Таким образом, положение опасной точки зависит от того, что считается причиной опасного состояния материала.

## 1.2. Допускаемое состояние материала по различным критериям прочности

Опасное состояние материала допустить нельзя, поэтому при расчете сооружения на прочность ориентируются обычно на так называемое **допускаемое состояние**.

Допускаемое состояние соответствует нагрузке, получаемой путем деления опасной нагрузки, вызывающей опасное состояние, на некоторый коэффициент запаса большей единицы.

Таким образом, за показатели допускаемого состояния в зависимости от критерия, определяемого опасное состояние, принимаются допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma]$ , допускаемое касательное напряжение  $[\tau]$ , допускаемая относительная линейная деформация  $[\epsilon]$  или же допускаемое значение полной удельной потенциальной энергии деформации  $[u]$ .

В случае одноосного растяжения или сжатия элементов конструкции значение допускаемой нагрузки получится одинаковой независимо от того, будет ли она определена по значению  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$ ,  $[\epsilon]$  или  $[u]$ .

Это связано с тем, что при растягивающей или сжимающей силе, равной допускаемому ее значению, не только  $\sigma_{\max} = [\sigma]$ , но и  $\tau_{\max} = [\tau]$ ,  $\epsilon_{\max} = [\epsilon]$ ,  $u_{\max} = [u]$ .

*Поэтому в случае одноосного напряженного состояния при расчетах на прочность вопрос о том, что именно является причиной, вызывающей опасное состояние материала, не имеет практического значения.*

При двухосном (плоском) или трехосном (пространственном) напряженных состояниях возможны самые различные соотношения между величинами главных напряжений.

Для того чтобы экспериментально установить при каких значениях этих напряжений наступает опасное состояние материала, необходимо провести очень большое количество испытаний при различных соотношениях между главными напряжениями.

Практически осуществить такие эксперименты невозможно не только из-за большого их числа, но также в связи с трудностью их проведения. Поэтому приходится, используя результаты опытов на одноосное растяжение и сжатие материала, теоретически определять его порочность для любых случаев сложного напряженного состояния.

Таким образом, результаты испытаний на одноосное растяжение и сжатие становятся как бы эталоном прочности, с помощью которого производятся расчеты на прочность конструкций и их элементов для любых случаев сложного напряженного состояния.

## 1.3. Классические теории прочности

Рассмотрим основные, так называемые, классические теории прочности, используемые при расчетах на прочность различных конструкций и их элементов.

Теории прочности представляют собой гипотезы о критериях, определяющих условиях перехода материала в опасное состояние.

Расчеты по различным теориям прочности часто дают противоречивые результаты, не соответствующие опытным данным. Поэтому в каждом частном случае следует выполнять расчет по той теории прочности, которая является наиболее достоверной, то есть наиболее хорошо согласующейся с

результатами экспериментов для данного материала и того типа напряженного состояния, которое имеется в опасной точке тела.

В расчетных формулах, соответствующих различным теориям прочности, напряженное состояние материала выражается через значения главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , где  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

### 1.3.1. Первая теория прочности

Первая (I) теория прочности, или теория наибольших нормальных напряжений, представляет собой гипотезу о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда какое-либо из главных напряжений достигает опасного значения.

В соответствии с этим при расчетах на прочность ограничивается величина наибольших главных напряжений, которая не должна превышать допускаемого нормального напряжения  $[\sigma]$ , устанавливаемого из опыта на одноосное растяжение и сжатие.

Если допускаемые напряжения на растяжение и сжатие одинаковы (пластичные материалы), то условие прочности по I теории прочности имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq [\sigma] \text{ – при растяжении;} \\ | \sigma_3 | &\leq [\sigma] \text{ – при сжатии.} \end{aligned} \quad (1)$$

Если же допускаемые напряжения на растяжение  $[\sigma_p]$  и на сжатие  $[\sigma_c]$  различны (хрупкие материалы), то условие прочности по этой теории выражается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq [\sigma_p] \text{ – при растяжении;} \\ | \sigma_3 | &\leq [\sigma_c] \text{ – при сжатии.} \end{aligned} \quad (2)$$

В данном случае возможны три варианта:

1) при  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ , то есть все три главные напряжения растягивающие, условие прочности проверяется по первой формуле (1).

2) при  $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < 0$ , то есть все три главные напряжения сжимающие, условие прочности проверяется по второй формуле (1);

3) при  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$  и  $\sigma_3 < 0$  или  $\sigma_1 > 0$  и  $\sigma_3 < \sigma_2 < 0$  условие прочности проверяется по двум из приведенных формул (2).

Первая теория прочности дает удовлетворительные результаты, совпадающие с экспериментальными данными, в случаях, когда одно из главных напряжений  $\sigma_1$  или  $\sigma_3$  по абсолютной величине значительно больше остальных, то есть когда напряженное состояние можно представить как одноосное.

В этом случае работу элементов конструкции можно расценивать как центральное растяжение или сжатие, а это, как известно, простой вид сопротивления, при котором применение теорий прочности не требуется.

В связи с этим в практических расчетах первая теория прочности в настоящее время почти не применяется.

Кроме того, формулы (1) и (2) не учитывают влияние главного напряжения  $\sigma_2$  на прочность материала. Между тем, как показывают опытные данные, влияние его на прочность весьма существенно.

Этот недостаток первой теории прочности устраняется во второй теории прочности, которая также основана на предположении, что разрушение материала происходит в результате отрыва.

### 1.3.2. Вторая теория прочности

Вторая (II) теория прочности или теория наибольших относительных линейных удлинений основана на гипотезе о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда относительное линейное удлинение  $\epsilon$  достигает своего предела.

В соответствии с этим при расчетах на прочность ограничивается величина наибольших относительных удлинений, которая не должна превышать допустимого значения  $[\epsilon]$ , устанавливаемого испытаниями на одноосное растяжение.

Общий вид условия прочности по II теории прочности для пластичного материала имеет вид:

$$\epsilon_1 \leq [\epsilon]. \quad (3)$$

Используя закон Гука, можно представить  $[\epsilon]$  в следующем виде:

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \quad (4)$$

а согласно обобщенному закону Гука для упругого изотропного тела имеем:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 - \sigma_3)]. \quad (5)$$

Здесь:

$E$  – модуль упругости материала на растяжение (модуль Юнга);

$\nu$  – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Подставив выражения (4) и (5) в формулу (3), получим:

$$\frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 - \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E}$$

или

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 - \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (6)$$

Для хрупких материалов условие прочности по II теории принимает вид

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 - \sigma_3) \leq [\sigma_p]. \quad (7)$$

Из опытов известно, что достигнуть разрушения материала при всестороннем равномерном сжатии не удается даже при очень больших давлениях.

Первая и вторая теории прочности объясняют это тем, что при всестороннем сжатии в материале не возникают растягивающие напряжения и деформации удлинения.

В тоже время, эти теории не могут объяснить причину разрушения образца при одноосном сжатии.

### 1.3.3. Третья теория прочности

Третья (III) теория прочности или теория наибольших касательных напряжений, которую иногда называют теорией прочности **Треска – Сен-Венана**, основана на предположении, что разрушение материала происходит в результате среза и поэтому опасное состояние материала наступает тогда, когда касательное напряжение в нем достигает опасного значения. В соответствии с этим при расчетах на прочность ограничивается значение наибольшего касательного напряжения, которое не должно превышать допустимого значения  $[\tau]$ , устанавливаемого опытным путем для одноосного напряженного состояния, то есть

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Наибольшее касательное напряжение в общем случае напряженного состояния определяется из выражения:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (8)$$

Для одноосного напряженного состояния можно записать:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (9)$$

Тогда условие прочности по III теории прочности будет иметь вид:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (10)$$

Третья теория прочности, как и первые две, объясняет, почему в случае всестороннего равномерного сжатия материал может не разрушаясь выдерживать весьма большие напряжения.

Однако, эта теория не может объяснить причину разрушения материала при всестороннем равномерном растяжении.

Недостатком третьей теории прочности является также то, что она не учитывает промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$ , значение которого, как показывает опыт, влияет на прочность материала.

Расхождение результатов расчетов и опытных данных из-за не учёта величины главного напряжения  $\sigma_2$  может достигать порядка  $10 \div 15\%$ .

Однако, во многих практических случаях третья теория прочности дает удовлетворительное совпадение результатов теоретических расчетов с опытными данными для пластичных материалов, поэтому она широко используется при расчетах на прочность конструкций из пластичного материала. Для хрупких материалов эта теория неприемлема.

### 1.3.4. Теория прочности Мора

Как отмечалось выше, третья теория прочности вполне применима для расчетов на прочность конструкций из пластичного материала. Для конструкций из хрупкого материала эта теория прочности не подходит из-за достаточно сильного различия теоретических расчетов с опытными данными.

Английским исследователем **Томасом Мором** третья теория прочности была преобразована к виду, позволяющему производить прочностные расчеты конструкций, выполненных из хрупких материалов. Эта теория получила название **упрощенной теории прочности Мора**.

Условие прочности по теории Мора имеет вид:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_p] \quad (11)$$

Теория прочности Мора широко используется при расчетах конструкций из хрупких материалов.

Для пластичных материалов допускаемые напряжения  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  на одноосное растяжение и сжатие одинаковы и теория прочности Мора совпадает с третьей теорией прочности. Поэтому теорию прочности Мора иногда рассматривают как обобщение третьей теории применительно к хрупким

материалам, неодинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию.

Недостатком теории прочности Мора, так же как и III теории, является то, что она не учитывает влияние на прочность главного напряжения  $\sigma_2$  при наличии объемного напряженного состояния.

### 1.3.5. Четвертая теория прочности

Четвертая (IV) теория прочности или **энергетическая теория** основана на гипотезе о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает опасного значения  $[u_\phi]$ , определяемого опытным путем для одноосного напряженного состояния.

Четвертая теория прочности широко применяется при расчетах на прочность конструкций из пластичных материалов. Для хрупких материалов она неприемлема.

Условие прочности по энергетической теории прочности и имеет вид:

$$u_\phi \leq [u_\phi]. \quad (12)$$

Здесь

$[u_\phi]$  – удельная потенциальная энергия изменения формы.

При объемном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия изменения формы выражается формулой:

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1). \quad (13)$$

При одноосном растяжении – сжатии имеем:

$$[u_\phi] = \frac{1+\nu}{3E} \cdot [\sigma]^2. \quad (14)$$

Подставив выражения (13) и (14) в формулу (12), получим:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} = [\sigma]. \quad (15)$$

Формулу (15) можно представить в виде:

$$\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \leq [\sigma]. \quad (16)$$

Достоинством энергетической теории является то, что она учитывает все три главных напряжения.

Однако, она, как и третья теория прочности, объясняет высокую прочность материала при все-стороннем равномерном сжатии, но не может объяснить причины разрушения материала при равномерном всестороннем растяжении.

Нагрузка, которую можно допустить на конструкцию, рассчитанная по четвертой теории прочности, либо равна допускаемой нагрузке, установленной по третьей теории прочности, либо превышает ее, но не более чем на 15%.

## 1.4. Применение теорий прочности при решении задач по сопротивлению материалов

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности конструкции или ее эле-

ментов по известному напряженному состоянию.

Если напряженное состояние в элементах сооружения является одноосным (линейным), то определение момента появления опасных деформаций или разрушения осуществляется достаточно просто путем сопоставления максимальных деформаций или напряжений в опасном сечении элемента конструкции с допускаемым.

При сложном напряженном состоянии (плоском или объемном) опасное состояние для одного и того же материала может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений в зависимости от соотношения между ними.

Экспериментально найти величины этих предельных напряжений не представляется возможным, так как число сочетаний величины и направления главных напряжений при сложном напряженном состоянии бесконечно велико.

Поэтому приходится вводить некоторый критерий прочности позволяющий перейти от сложного напряженного состояния к эквивалентному ему простому одноосному состоянию.

Эта задача решается путем применения рассмотренных выше теорий прочности.

Введем понятие **эквивалентного напряжения** ( $\sigma_{\text{экр}}$ ). Эквивалентное напряжение – это напряжение, под действием которого материал в условиях простого растяжения-сжатия оказывается в равно опасном состоянии с рассматриваемым сложным напряженным состоянием.

Таким образом, для случая сложного напряженного состояния условие прочности в общем виде будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma], \quad (17)$$

где  $\sigma_{\text{экр}}$  определяется в соответствии с принимаемой теорией прочности.

В курсе сопротивления материалов при расчетах на прочность элементов конструкций, выполненных из пластичных материалов, наибольшее распространение получили III и IV теории прочности.

Применение этих теорий рассматривается при изучении раздела «Сложное сопротивление» в случае совместного действия изгиба и кручения.

При совместном действии изгиба и кручения изгибающий момент вызывает в точках поперечного сечения возникновение нормальных напряжений  $\sigma$ , а крутящий момент – касательных напряжений  $\tau$ .

Таким образом, любая точка поперечного сечения элемента (кроме точки в центре тяжести) находится в плоском напряженном состоянии. Главные напряжения при этом определяются по формуле:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \quad (18)$$

где

$\sigma$  – нормальное напряжение, вызываемое действием изгибающего момента;

$\tau$  – касательное напряжение от действия крутящего момента.

При этом считается, что  $\sigma_2 = 0$ .

Рассмотрим, как преобразуются формулы условий прочности по третьей и четвертой теориям в случае совместного изгиба и кручения.

Условие прочности по третьей теории имеет вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

В этом случае

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (19)$$

где

$\sigma_1$  и  $\sigma_3$  – главные напряжения, которые определяются по формуле (18).

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив эти выражения в формулу (19), получим:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \frac{1}{2} \cdot \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (21)$$

Таким образом, условие прочности при совместном действии изгиба и кручения по III теории можно представить в виде:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (22)$$

Рассмотрим четвертую теорию прочности. Условие прочности по этой теории запишем в виде:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = [\sigma].$$

Эта формула при  $\sigma_2 = 0$  примет вид:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} = [\sigma]. \quad (23)$$

В этом случае

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} \quad (24)$$

Подставив в это выражение значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  из формул (20), после ряда несложных преобразований получим:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (25)$$

Таким образом, условие прочности при совместном действии изгиба и кручения по IV теории будет иметь вид:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (26)$$

## 2. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

### 2.1. Преобразование формул условий прочности по третьей и четвертой теориям при расчетах стержней круглого поперечного сечения на совместное действие изгиба и кручения

Как уже отмечалось выше, в сопротивлении материалов при расчетах на прочность элементов конструкций, работающих в условиях сложного сопротивления, наиболее часто используются III и IV теории прочности.

Рассмотрим, как выглядят формулы условий прочности по этим теориям для случая совместного действия изгиба и кручения стержней круглого поперечного сечения.

Рассмотрим третью теорию прочности – теорию наибольших касательных напряжений. Условие прочности по III теории имеет вид (22):

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

где

$\sigma$  – нормальное напряжение, вызываемое изгибающим моментом;

$\tau$  – касательное напряжение от действия крутящего момента.

При совместном действии изгиба и кручения опасными точками являются точки внешнего контура поперечного сечения, в которых возникают наибольшие по абсолютной величине нормальные и касательные напряжения,  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\min}$ .

При плоском изгибе величина максимальных нормальных напряжений определяется по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}. \quad (27)$$

Здесь

$M$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении стержня;

$W$  – осевой момент сопротивления, который для круглого сечения равен:

$$W = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (28)$$

Величина наибольших касательных напряжений при кручении стержня круглого поперечного сечения определяется по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (29)$$

Здесь

$M_k$  – крутящий момент в рассматриваемом сечении стержня;

$W_p$  – полярный момент сопротивления, который для круглого сечения вычисляется по формуле:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (30)$$

Из формул (28) и (30) следует, что  $W_p = 2W$ .

Тогда для  $\tau_{\max}$  имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{2W}. \quad (31)$$

Подставим приведенные выражения для нормальных и касательных напряжений в формулу условия прочности по третьей теории:

$$\sqrt{\frac{M^2}{W^2} + 4 \frac{M_k^2}{4W^2}} \leq [\sigma]$$

или

$$\frac{\sqrt{M^2 + M_k^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (32)$$

Введем обозначение:

$$M_p^{III} = \sqrt{M^2 + M_k^2}, \quad (33)$$

где

$M_p^{III}$  – приведенный момент по третьей теории прочности.

Тогда общий вид условия прочности по третьей теории прочности при совместном действии изгиба и кручения можно представить в следующем виде:

$$\frac{M_p^{III}}{W} \leq [\sigma]. \quad (34)$$

Рассмотрим четвертую (энергетическую) теорию прочности, условие прочности по которой записывается в виде (26):

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Подставив в это выражение значения нормального (27) и касательного (31) напряжений, получим условие прочности по четвертой (энергетической) теории прочности:

$$\sqrt{\frac{M^2}{W^2} + 3 \frac{M_k^2}{4W^2}} \leq [\sigma]$$

или

$$\frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_k^2}}{W} \leq [\sigma].$$

Введем обозначение:

$$M_p^{IV} = \sqrt{M^2 + 0.75M_k^2}, \quad (35)$$

где

$M_p^{IV}$  – приведенный момент по четвертой теории прочности.

Тогда общий вид условия прочности по четвертой теории прочности при совместном действии изгиба и кручения можно представить в следующем виде:

$$\frac{M_p^{IV}}{W} \leq [\sigma]. \quad (36)$$

Таким образом, расчет стержня круглого поперечного сечения на прочность при совместном дей-

ствии изгиба и кручения по форме совпадает с расчетом на прочность при прямом изгибе, но в расчетную формулу вместо изгибающего момента входит приведенный момент, величина которого зависит от изгибающих и крутящих моментов, а также от принятой теории прочности.

## 2.2. Примеры решения задач на совместное действие изгиба и кручения

### 2.2.1. Пример решения задачи № 1

**Задача.** Сплошной стальной вал круглого поперечного сечения в опасном сечении подвергается действию крутящего момента  $M_k = 10$  Кнм и изгибающего момента  $M = 12$  Кнм.

Из условия прочности по третьей теории прочности определить необходимый диаметр вала, если допускаемое напряжение  $[\sigma] = 80$  МПа.

Какой диаметр должен был бы иметь вал, если расчет произвести, пользуясь четвертой теорией прочности?

#### Решение

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

1. Определяем необходимый диаметр вала по третьей теории прочности.

Условие прочности вала круглого поперечного сечения по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{M_p^{\text{III}}}{W} \leq [\sigma],$$

где

$M_p^{\text{III}}$  – приведенный момент по третьей теории прочности, который равен:

$$M_p^{\text{III}} = \sqrt{M^2 + M_k^2} = \sqrt{12^2 + 10^2} = 15,6 \text{ Кнм}$$

Из условия прочности имеем:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_p^{\text{III}}}{[\sigma]} \rightarrow d_{\text{вала}} = \sqrt[3]{\frac{32 M_p^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15,6 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} = 0,126 \text{ м} = 126 \text{ мм}$$

2. Определяем необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности.

Условие прочности вала круглого поперечного сечения по четвертой теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{M_p^{\text{IV}}}{W} \leq [\sigma],$$

где

$M_p^{\text{IV}}$  – приведенный момент по четвертой теории прочности, который равен:

$$M_p^{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_k^2} = \sqrt{12^2 + 0,75 \cdot 10^2} = 14,8 \text{ Кнм.}$$

Тогда

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_p^{\text{IV}}}{[\sigma]} \rightarrow d_{\text{вала}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14,8 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} = 0,124 \text{ м} = 124 \text{ мм.}$$

Отличие результатов расчета по III и IV теориям прочности составляет:

$$\frac{126-124}{126} \cdot 100\% = 1.6 \%,$$

следовательно, для расчета диаметра вала по методу допускаемых напряжений можно применять обе эти теории прочности.

### 2.2.2. Пример решения задачи № 2

**Задача.** Определить наибольшее расчетное напряжение в стальном стержне **AB** круглого поперечного сечения диаметром  $d = 4$  см, нагруженного двумя одинаковыми грузами  $P = 100$  кг (1 Кн), приложенными как показано на рисунке 1. Размеры на рисунке даны в сантиметрах.

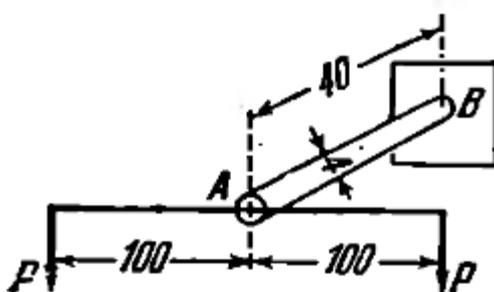


Рис. 1. Расчетная схема

Чему будет равно наибольшее расчетное напряжение в стержне, если один из грузов будет снят? Использовать четвертую теорию прочности.

#### Решение

1. При наличии двух грузов равнодействующая сил будет приложена в сечении **A**, следовательно, стержень **AB** будет испытывать плоский изгиб.

Наибольший по величине изгибающий момент будет возникать в сечении **B** (опасное сечение):

$$M_{\max} = 2P \cdot 40 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 1 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ Кнм.}$$

Осевой момент сопротивления стержня круглого сечения равен:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{32} = 6,28 \text{ см}^3$$

Наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении стержня будет равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 127 \text{ МПа.}$$

2. Если один из грузов будет снят, то стержень **AB** будет работать на совместное действие изгиба и кручения.

Опасным сечением будет сечение **B**, в котором будут возникать:

– изгибающий момент  $M = P \cdot 40 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ Кнм}$ ,

– крутящий момент  $M_k = P \cdot 100 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ Кнм}$ .

Приведенный момент по четвертой теории прочности будет равен:

$$M_p^{IV} = \sqrt{M^2 + 0.75 \cdot M_k^2} = \sqrt{0.4^2 + 0.75 \cdot 1^2} = 0.95 \text{ Кнм}$$

Наибольшее расчетное напряжение в стержне **АВ** при действии одного груза будет равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_p^{IV}}{W} = \frac{0.95 \cdot 10^{-3}}{6.28 \cdot 10^{-6}} = 151 \text{ МПа.}$$

Таким образом, во втором случае, несмотря на то, что нагрузка снизилась в 2 раза, напряжение увеличилось в  $\frac{151}{127} = 1.2$  раза.

### 2.2.3. Пример решения задачи № 3

*Задача.* Из условия прочности по теории наибольших касательных напряжений определить наибольшую допускаемую величину груза **P**, которую можно поднять при помощи ворота (рис. 2).

Вал ворота круглого поперечного сечения диаметром **d** = 30 мм. Допускаемое напряжение для материала вала  $[\sigma] = 800 \text{ кг/см}^2 = 80 \text{ МПа}$ .

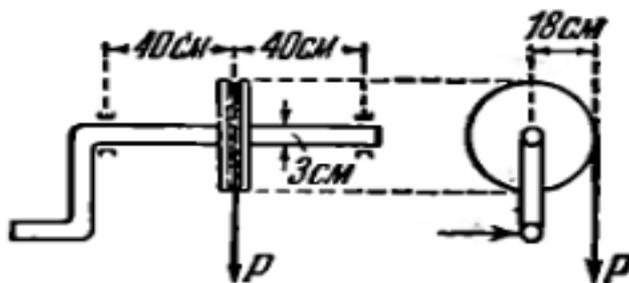


Рис. 2. Расчетная схема

#### Решение

I. Теория наибольших касательных напряжений – это третья теория прочности, приведенный момент по которой вычисляется по формуле:

$$M_p^{III} = \sqrt{M^2 + M_k^2},$$

где

$M_p^{III}$  – приведенный момент по третьей теории прочности.

**M** – изгибающий момент в опасном сечении стержня;

**M<sub>к</sub>** – крутящий момент в опасном сечении стержня.

Расчетная схема работы вала ворота на изгиб и эпюра изгибающих моментов имеют вид (рис.3):

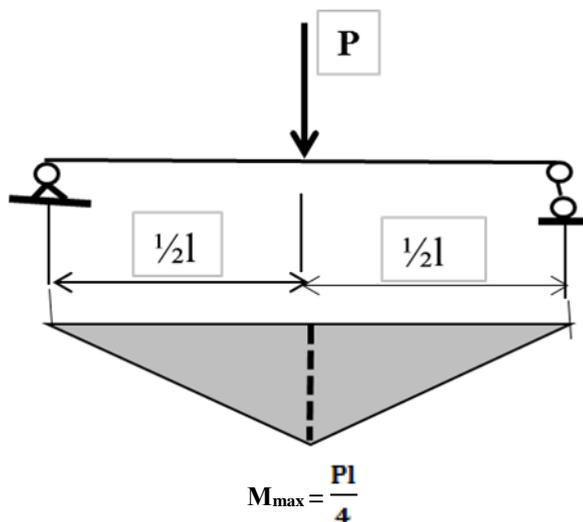


Рис. 3. Расчетная схема работы вала ворота на изгиб

Следовательно, в опасном сечении вала действуют:

– изгибающий момент  $M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{P \cdot 80 \cdot 10^{-2}}{4} = P \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ Кнм};$

– крутящий момент  $M_k = P \cdot 18 \cdot 10^{-2} \text{ Кнм}.$

Приведенный момент по третьей теории прочности будет равен:

$$M_p^{\text{III}} = \sqrt{M^2 + M_k^2} = \sqrt{[(P \cdot 20)^2 + (P \cdot 18)^2] \cdot 10^{-4}} = 26,9 \cdot P \cdot 10^{-2} \text{ Кнм}.$$

II. Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_p^{\text{III}} = \frac{M_p^{\text{III}}}{W} \leq [\sigma].$$

Тогда

$$M_p^{\text{III}} \leq W \cdot [\sigma] \leq \frac{\pi d^3}{32} \cdot [\sigma]$$

или

$$26,9 \cdot P \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \leq \frac{\pi d^3}{32} \cdot [\sigma].$$

III. Наибольшая допустимая величина груза  $P$  будет равна:

$$P_{\text{доп}} \leq \frac{\pi \cdot d^3 \cdot [\sigma]}{32 \cdot 26,9 \cdot 10^{-5}} = \frac{3,14 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 80}{32 \cdot 26,9 \cdot 10^{-5}} \leq 0,79 \text{ кН} \leq 79 \text{ кг}.$$

### 3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое опасное состояния материала?
2. Основные гипотезы о возникновении опасного состояния.
3. Какие критерии используются для оценки прочности конструкций и их элементов?
4. Что такое теории прочности?
5. Когда возникает необходимость в применении теорий прочности?
6. Первая теория прочности и область ее применения. Недостатки первой теории прочности.
7. Вторая теория прочности. Область ее применения.
8. Теория наибольших касательных напряжений. Для каких материалов она примени-

ма и в чем ее недостаток?

9. Теория прочности Мора. Для каких материалов она применима?

10. Четвертая теория прочности и область ее применения.

11. Чему равны эквивалентные напряжения по III и IV теориям прочности при совместном действии изгиба и кручения?

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. – 333 с.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011. – 560 с.
3. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011. – 500 с.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.– 319 с.
5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – СПб.: Лань, 2005. – 655 с.
6. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003. – 351 с.
7. Сборник задач по сопротивлению материалов, под редакцией В.К. Качурина – М.: Наука. 1970. – 432с.