



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплинам

«Сопротивление материалов»,

«Строительная механика для архитекторов»,

«Специальные вопросы сопротивления материалов»

Часть II

Автор: Еремин В.Д.



Ростов-на-Дону, 2021



АННОТАЦИЯ

Учебное пособие содержит материал для изучения обучающимися основных тем учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Специальные вопросы сопротивления материалов», для закрепления читаемого курса лекций, самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ, подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной (итоговой) аттестации.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Техническая механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов», в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Настоящее учебное пособие состоит из трех частей.

Содержание пособия соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования по техническим направлениям подготовки (специальностям), и «Примерной программе дисциплины "Сопротивление материалов", Москва, 2012 год», рекомендованной учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства.



Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ТЕМА 8. ИЗГИБ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ БРУСЬЕВ.....	7
8.1 Чистый и плоский поперечный изгибы. Основные определения и понятия	7
8.2 Основные типы опор и балок.....	8
8.3 Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок .	9
8.4 Определение опорных реакций в балках и рамах.....	11
8.5 Внутренние силовые факторы при изгибе. Основные определения и правила знаков	13
8.5.1 Правила знаков внутренних силовых факторов для балок.	14
8.5.2 Правила знаков внутренних силовых факторов для рам	16
8.6 Дифференциальные зависимости при плоском изгибе	17
8.7 Эпюры внутренних силовых факторов. Правила их построения	19
8.8 Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок.....	21
8.9 Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам.....	22
8.10 ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ	23
8.11 Определение нормальных напряжений.....	24
8.12 Расчет балок на прочность при изгибе	28
8.13 Рациональные формы поперечных сечений балок	35
8.14 ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ Касательные напряжения при изгибе	36
8.15 Касательные напряжения в балках прямоугольного поперечного сечения	40
8.16 Касательные напряжения в балках круглого поперечного сечения	42
8.17 Касательные напряжения в балках двутаврового поперечного сечения	43
8.18 Анализ напряженного состояния при изгибе. Главные напряжения при изгибе.....	47
8.19 Полная проверка прочности балки при плоском поперечном изгибе	49
8.20 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКЕ ПРИ ИЗГИБЕ.....	51
8.21 Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки	53
8.22 Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки.....	56



8.23	Правила уравнивания одноимённых постоянных интегрирования. Правила Клебша.....	59
8.24	Метод начальных параметров.....	60
8.25	Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов	65
8.26	Расчет балок на жесткость. Проверка выполнения условия жесткости балки.....	66
8.27	Раскрытие статической неопределимости упругих стержневых систем	66
8.28	Порядок решения статически неопределимых задач	69
8.29	Потенциальная энергия деформации балок	70
8.30	Метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации	72
8.31	Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора ⁷⁴	
8.32	Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора с использованием правила Верещагина	76
8.33	Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Изгиб прямолинейных брусев»	81
	Рекомендуемая литература.....	84
	ПРИЛОЖЕНИЕ.....	85



ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке инженеров любой специальности.

Сопротивление материалов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами технических направлений подготовки (специальностей).

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи. Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями, а также обратиться за консультацией к преподавателю.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этих дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить обучающихся пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Учебное пособие состоит из трех частей.

В первой части пособия анализируется напряженное состояние тела и излагаются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, испытывающих простые виды деформаций, по допускаемым напряжениям и предельным состояниям.

Во второй части учебного пособия рассматриваются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, работающих на изгиб.

В третьей части пособия рассматриваются вопросы расчета бруса на сложное сопротивление, на устойчивость, а также задачи учета динамических нагрузок в сопротивлении материалов.



Учебное пособие содержит материал для изучения студентами основных тем следующих учебных дисциплин кафедры:

- сопротивление материалов;
- специальные вопросы сопротивления материалов;
- механика;
- строительная механика для архитекторов;
- теоретическая механика для архитекторов.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, для закрепления читаемого курса лекций, для подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся, при самостоятельном выполнении домашних, контрольных и расчетно-графических работ.

ТЕМА 8. ИЗГИБ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ БРУСЬЕВ

8.1 Чистый и плоский поперечный изгибы. Основные определения и понятия

В строительных конструкциях широко применяются элементы, работающие на изгиб. Характерным признаком изгиба является изменение кривизны продольной оси бруса.

При изгибе первоначально прямая его ось стержня искривляется, а первоначально кривая изменяет свою кривизну.

Определение. Прямой брус (стержень), работающий на изгиб, называется балкой.

Определение. Продольная (геометрическая) ось балки – это линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений балки.

Определение. Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

При изгибе балки продольные волокна, находящиеся на выпуклой части, растягиваются, а находящиеся на вогнутой части – сжимаются. Слой промежуточных волокон, которые, искривляясь, не изменяют своей длины, называется *нейтральным слоем*.

Определение. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется нейтральной линией или нейтральной осью (нулевой линией).

Определение. Чистым изгибом называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только изгибающий момент $M_{изг}$, а остальные внутренние усилия (N , Q и M_k) равны нулю.

В условиях чистого изгиба может находиться вся балка или отдельные ее участки.

При действии на балку системы внешних сил, расположенных в плоскости,

проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения балки, и перпендикулярных к ее продольной оси, в каждом ее сечении могут возникнуть две внутренние силы – изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Эта плоскость называется *силовой плоскостью*.

Определение. Плоским поперечным изгибом называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают одновременно изгибающий момент $M_{изг}$ и поперечная сила Q , а остальные внутренние усилия (N и M_k) равны нулю.

Определение. Рамой называется геометрически неизменяемая стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой.

Некоторые узлы могут быть шарнирными или, в общем случае, упруго – податливыми. В жестких узлах взаимный поворот примыкающих стержней исключается как до деформаций, так и после деформаций, то есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Определение. Вертикальные элементы рамы называются *стойками*, а горизонтальные или близкие к горизонтальному расположению элементы рамы называются *ригелями*. Точки соединения стоек и ригелей рамы называются *узлами*.

Различают рамы пространственные и плоские. У *плоской* рамы все геометрические оси ее элементов лежат в одной плоскости, которая совпадает с плоскостью нагрузки и является главной плоскостью для всех элементов рамы.

8.2 Основные типы опор и балок

Для того чтобы балка (рама) могла воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями (опорами).

Как известно, существует три основных типа опорных устройств (в плоской системе сил):

- *Защемление или заделка* (рис. 8.1)

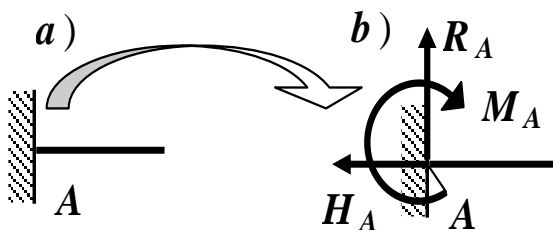


Рис. 8.1. Защемление или заделка

- *Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора* (рис. 8.2)

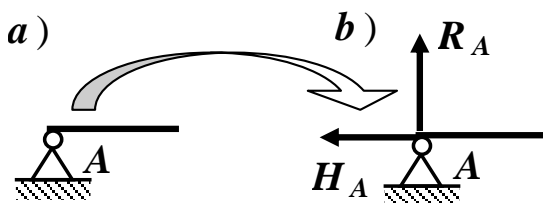


Рис. 8.2. Шарнирно-неподвижная опора

- Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (рис.8.3)

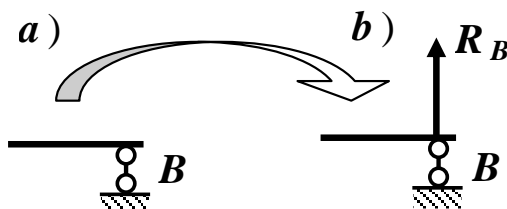


Рис. 8.3. Шарнирно-подвижная опора

Наименьшее число связей, не позволяющих балке (раме) перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.

Рассмотрим различные типы простейших балок, в зависимости от способа их закрепления (рис. 8.4):

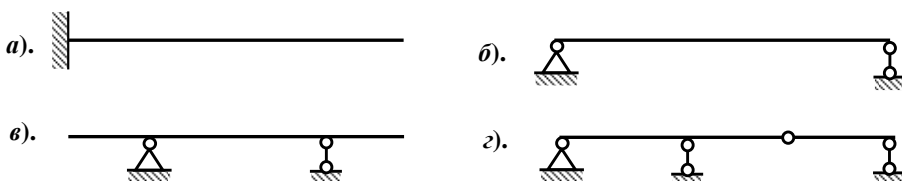


Рис. 8.4. Основные типы простейших балок

- Консольная или жестко зашцеplенная балка;
- Однопролетная шарнирно – опертая балка /балка на двух опорах/;
- Консольная шарнирно – опертая балка;
- Многопролетная балка (балка с промежуточным шарниром).

Балки с промежуточным шарниром представляют собой сложную систему,

состоящую из нескольких брусьев, соединенных между собой связями, позволяющими поворот сечений брусьев в соединении (в шарнире).

Поэтому, в промежуточном шарнире возникают только вертикальные и горизонтальные реактивные силы, а момент равен нулю.

8.3 Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок

Деформацию изгиба вызывают внешние нагрузки, действующие перпендикулярно к оси стержня.

На рис.8.5 показаны различные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб

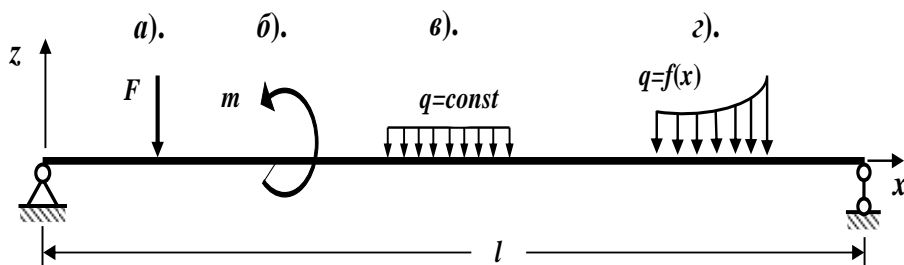


Рис. 8.5. Основные виды внешних нагрузок

a – сосредоточенная сила;

б – сосредоточенная пара сил с моментом m (кратко – сосредоточенный момент);

в – равномерно – распределенная нагрузка;

г – неравномерно – распределенная нагрузка.

В зависимости от способа приложения внешних нагрузок различают разные виды изгибов (рис. 8.6):

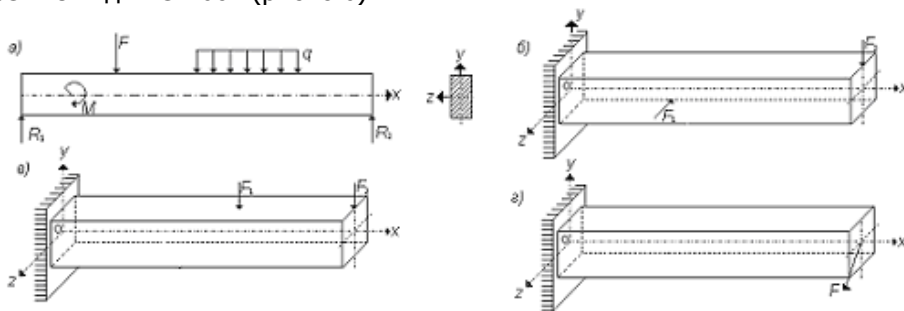


Рис. 8.6

- *пространственный изгиб* – нагрузки расположены в разных плоскостях (рис. 8.6, б);

- *плоский изгиб* – все внешние нагрузки расположены в одной плоскости (рис. 8.6, в).

Если плоскость действия нагрузок (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей сечения, то такой изгиб называется *плоским прямым изгибом* (рис. 8.6, в).

Если плоскость действия нагрузок не проходит ни через одну из главных центральных осей сечения, то такой изгиб называется *плоским косым изгибом* (рис. 8.6, г).

8.4 Определение опорных реакций в балках и рамах

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных

комбинациях:

а). Первая комбинация:

$\Sigma F_x = 0$ – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю;

$\Sigma F_z = 0$ – Сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю; (8.1)

$\Sigma M_A = 0$ – Сумма моментов всех сил относительно точки A равна нулю.

Уравнение $\Sigma M_B = 0$ (Сумма моментов всех сил относительно точки B равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

б). Вторая комбинация:

$\Sigma F_x = 0$ – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю;

$\Sigma M_A = 0$ – Сумма моментов всех сил относительно точки A равна нулю; (8.2)

$\Sigma M_B = 0$ – Сумма моментов всех сил относительно точки B равна нулю.

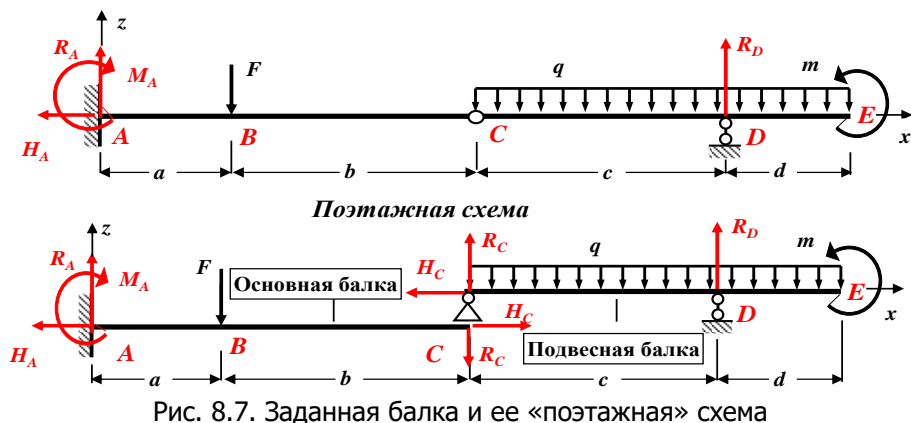
Уравнение $\Sigma F_z = 0$ (Сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

Все неизвестные опорные реакции в многопролетных балках, имеющих промежуточный шарнир, можно определить двумя способами.

1). *Метод моментной точки (способ, учитывающий свойство промежуточного шарнира).*

В этом случае необходимо записать три уравнения равновесия для всей балки и к ним добавить дополнительные уравнения, отражающие свойство промежуточного шарнира, то есть, сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира равна нулю (рис. 8.7):



$\Sigma F_x = 0$ – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю;

$\Sigma M_A = 0$ – Сумма моментов всех сил относительно опоры A равна нулю; (8.3)

$\Sigma M_D = 0$ – Сумма моментов всех сил относительно опоры D равна нулю;

$\Sigma M_C^{\text{левых сил}} = 0$ или $\Sigma M_C^{\text{правых сил}} = 0$ – Сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира, равна нулю.

Уравнение $\Sigma F_z = 0$ (Сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

2). Метод построения «поэтажной» схемы балки.

Для удобства расчета и наглядности представления о характере работы отдельных частей многопролетной балки строится ее «поэтажная» схема.

В этом случае заданную балку мысленно разрезают по промежуточному шарниру (промежуточным шарнирам) и выделяют основную балку (их может быть одна или несколько) и подвесные балки (рис. 8.7).

При этом вначале выделяют основные балки, то есть те, которые способны самостоятельно нести нагрузку, а затем вспомогательные, которые имеют только одну опору или не имеют их вовсе. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры.

Таким образом, основными или главными является те балки, которые могут самостоятельно сопротивляться приложенным внешним силам (нести внешнюю нагрузку) после разрезания заданной балки по промежуточным шарнирам, так как они имеют три кинематические связи (балка **ABC** на рис.

8.7).

Остальные балки называются подвесными или второстепенными (балка **CDE** на рис. 8.7).

После построения «поэтажной» схемы, заданную балку с промежуточными шарнирами, можно рассматривать как состоящую из ряда простых балок.

Затем рассчитывают каждую простую балку в отдельности.

Расчет простых балок производят, начиная с самых верхних подвесных и последовательно переходя к ниже лежащим балкам.

Расчет простых балок сводится к определению опорных реакций и построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

При расчете ниже лежащих балок необходимо учитывать не только заданную внешнюю нагрузку, которая к ним приложена, но и силы, равные по величине опорным реакциям выше лежащих подвесных балок и противоположно направленные (рис. 8.7).

Таким образом, передача нагрузки с верхних подвесных балок на ниже лежащие осуществляется с помощью условных сосредоточенных сил в промежуточных шарнирах. Эти силы численно равны соответствующим условным опорным реакциям в подвесных балках (рис. 8.7).

Составляя уравнения равновесия (статики), обычно используют правило знаков, показанное на рис. 8.8,

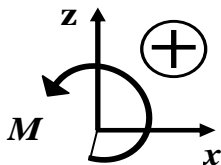


Рис. 8.8. Правила знаков

Правило знаков. Горизонтальные и вертикальные силы положительны, если их направления совпадают с направлениями осей x и z .

Положительное направление моментов – против хода часовой стрелки.

Определение. Балки (рамы), у которых все опорные реакции могут быть определены только из уравнений равновесия (статики), называются статически определимыми.

8.5 Внутренние силовые факторы при изгибе. Основные определения и правила знаков

Ранее было установлено, что при действии на балку внешней нагрузки, перпендикулярной к геометрической оси балки и расположенной в одной



из главных плоскостей инерции каждого поперечного сечения балки, в ее сечениях, в общем случае, возникают изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Внутренние силы, возникающие в любом поперечном сечении стержня (элемента) плоской рамы, в общем случае приводятся к трем внутренним силовым факторам: продольной силе N , поперечной силе Q и изгибающему моменту M .

Внутренние силовые факторы определяются через внешние силы, действующие на балку /раму/, с помощью метода сечений, применение которого позволяет сформулировать общие правила для нахождения указанных внутренних усилий на каждом участке балки (рамы).

Определение. Участком называется часть балки (рамы), в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия постоянен.

Границами участка являются точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, точки начала и конца распределенной нагрузки.

Суть метода сечений сводится к следующему:

1. Мысленно проводим поперечное сечение, которое разбивает балку /раму/ на две части.

2. Выбираем ту часть балки /рамы/, на которую действуют известные нагрузки (наименьшее число известных нагрузок).

3. Составляем выражения для изгибающего момента M , поперечной силы Q и продольной силы N . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определение. Изгибающий момент M в произвольном поперечном сечении балки /рамы/ численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от проведенного сечения, относительно нейтральной оси этого поперечного сечения (или относительно той точки продольной оси балки /рамы/, через которую проходит рассматриваемое сечение).

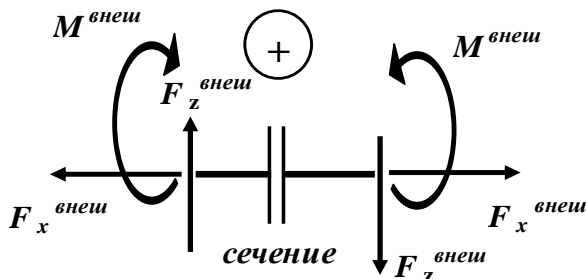
Определение. Поперечная сила Q в произвольном поперечном сечении балки /рамы/ численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на ось, перпендикулярную к геометрической оси балки /рамы/.

Определение. Продольная сила N в произвольном поперечном сечении балки /рамы/ численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на геометрическую ось рассматриваемого элемента балки /рамы/.

8.5.1 Правила знаков внутренних силовых факторов для балок

Правило знаков. Изгибающий момент M в поперечном сечении балки положителен ($M = +M^{\text{внеш}}$), если момент внешней силы ($M^{\text{внеш}}$) направлен по ходу часовой стрелки – от сечения слева, и против хода часовой стрелки – от сечения справа (рис. 8.9),

Рис. 8.9.. Правила знаков



или изгибающий момент M считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис. 8.10).

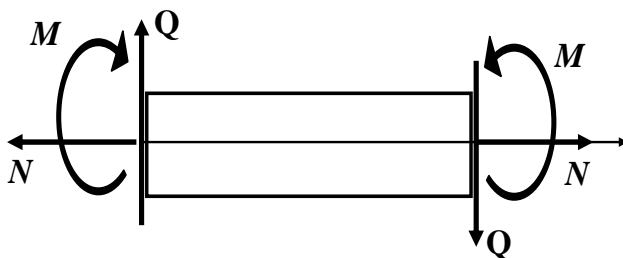


Рис. 8.10. Положительные направления внутренних силовых факторов для балок

Правило знаков. Поперечная сила Q в поперечном сечении балки положительная ($Q = +F_z^{\text{внеш}}$), если внешняя сила ($F_z^{\text{внеш}}$) направлена вверх – от

сечения слева и вниз – от сечения справа (рис. 8.9), или поперечная сила Q считается положительной, если внешние силы стремятся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения по ходу часовой стрелки (рис. 8.10).

Правило знаков. Продольная сила N в поперечном сечении балки положительная ($N = +F_x^{\text{внеш}}$), если внешняя сила ($F_x^{\text{внеш}}$) направлена влево – от

сечения слева и вправо – от сечения справа (рис. 8.9), или продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение (удлинение) рассматриваемой части балки (рис. 8.10).

Вывод. Изгибающий момент M в поперечном сечении балки считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки, поперечная сила Q считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части балки.

Положительные направления этих силовых факторов показаны на рис. 8.10.

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы для балок отрицательны, если направления этих силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 8.10.

8.5.2 Правила знаков внутренних силовых факторов для рам

Правила знаков внутренних силовых факторов (продольной силы N , поперечной силы Q и изгибающего момента M) для горизонтальных участков рамы (ригелей) остаются такими же, что и для балок.

Для получения правила знаков внутренних силовых факторов для вертикальных участков рамы (стоек) сведем их к горизонтальным путем условного поворота рамы (стоек) по ходу часовой стрелки.

Таким образом, при определении внутренних силовых факторов в стойках и ригелях рамы будем пользоваться следующими правилами знаков:

- изгибающий момент M считается положительным, если он вызывает растяжение *нижних* волокон ригелей рамы и *правых* волокон стоек рамы;
- поперечная сила Q считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы (стойки и ригели) по ходу часовой стрелки;
- продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части рамы (стоек и ригелей).

Положительные направления внутренних силовых факторов для элементов рамы (узла в виде креста) показаны на рис. 8.11

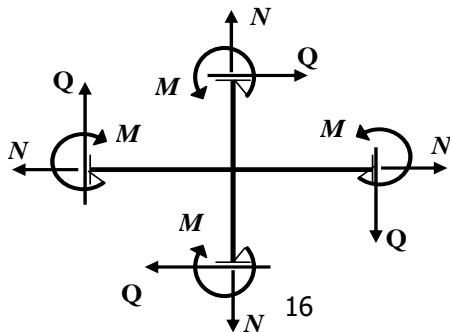


Рис. 8.11. Положительные направления внутренних силовых факторов для рам

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы для рам отрицательны, если направления этих силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 8.11.

8.6 Дифференциальные зависимости при плоском изгибе

Изгибающий момент M , поперечная сила Q и интенсивность внешней распределенной нагрузки q связаны между собой определенной зависимостью.

Рассмотрим балку, находящуюся под действием плоской системы сил (рис. 8.12)

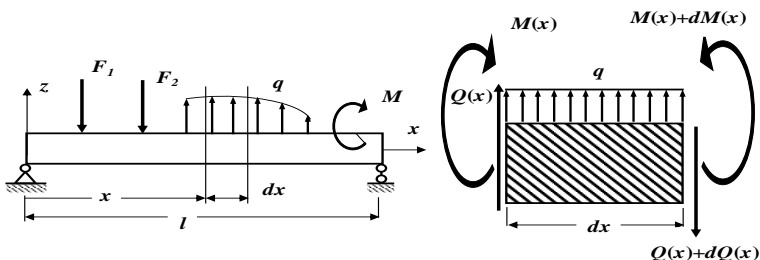


Рис. 8.12

Двумя поперечными сечениями x и $(x + dx)$ вырежем из балки элемент так, чтобы на него не действовали внешние сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты. Интенсивность внешней распределенной нагрузки q на длине dx считаем постоянной.

Действие отброшенных частей заменим внутренними силовыми факторами. Действие левой части заменим изгибающим моментом $M(x)$ и поперечной силой $Q(x)$, которые будем считать положительными. Аналогично заменим действие правой части моментом $M_1 = M(x) + dM(x)$ и поперечной силой $Q_1 = Q(x) + dQ(x)$. Так как на длине элемента dx не приложены сосредоточенные силы и моменты, то в эпюрах M и Q не должно быть разрыва, поэтому изгибающий момент и поперечная сила в правом сечении будут отличаться от их значений в левом сечении на величину малых приращений $dM(x)$ и $dQ(x)$.

Вся балка в целом находится в равновесии, следовательно, и ее выделенный элемент dx со всеми приложенными к нему силами также должен находиться в равновесии.

Составим уравнения равновесия:



1. Сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю:

$$\Sigma F_z = 0: Q_{(x)} + q \cdot dx - (Q_{(x)} + dQ_{(x)}) = 0; \rightarrow q \cdot dx - dQ_{(x)} = 0.$$

Из этого равенства получим

$$\frac{dQ_{(x)}}{dx} = q \quad (8.4)$$

Следовательно,

первая производная от поперечной силы по абсциссе x равна интенсивности распределенной нагрузки в сечении.

2. Сумма моментов всех сил относительно центра правого сечения равна нулю:

$$\Sigma M_k = 0: -M_{(x)} - Q_{(x)} \cdot dx - q \cdot dx \cdot \quad + (M_{(x)} + dM_{(x)}) = 0.$$

Отсюда

$$dM_{(x)} = Q_{(x)} \cdot dx + q \cdot \quad .$$

В этом равенстве последнее слагаемое является малой величиной высшего порядка по сравнению с другими членами, поэтому его можно отбросить, тогда получим

$$dM_{(x)} = Q_{(x)} \cdot dx,$$

откуда

$$Q_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx} \quad (8.5)$$

Таким образом,

первая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна поперечной силе.

Формула (8.4), очевидно, не применима для сечений, в которых приложены внешние сосредоточенные силы. Аналогично, формула (8.5) не применима для сечений, в которых приложены внешние сосредоточенные моменты.

Из найденных выше двух дифференциальных зависимостей следует третья

$$\frac{d^2 M_{(x)}}{dx^2} = \frac{dQ_{(x)}}{dx} \quad (8.6)$$

то есть

вторая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна первой производной от поперечной силы $\frac{dQ_{(x)}}{dx}$ или равна интенсивности распределенной нагрузки.

Выражения (8.4) ÷ (8.6) представляют собой дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки при изгибе.

Эти формулы были получены русским ученым и инженером Журавским Д.И. Они используются при анализе различных вопросов, связанных с изгибом балок, в частности, для проверки правильности построения эпюр



изгибающих моментов и поперечных сил.

Для отыскания экстремальных значений изгибающих моментов (наибольшего или наименьшего) необходимо первую производную от момента приравнять нулю. Следовательно, в сечениях, где изгибающий момент принимает наибольшее или наименьшее значение (M экстр), поперечная сила равна нулю ($Q = 0$).

Можно выписать следующие две зависимости, иллюстрирующие нахождение $Q(x)$ и $q(x)$ по моменту $M(x)$.

1. Поперечная сила $Q(x)$:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

2. Интенсивность распределенной нагрузки $q(x)$:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x)$$

Эти дифференциальные зависимости справедливы для участков действия сплошной распределенной нагрузки.

Обратные (интегральные) зависимости показывают, что зная интенсивность распределенной нагрузки $q(x)$ и начальные значения Q_0 и M_0 можно определить $Q(x)$ и $M(x)$.

1. Поперечная сила $Q(x)$:

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q(x) dx$$

2. Изгибающий момент $M(x)$:

$$M(x) = M_0 + \int_0^x Q(x) \cdot dx$$

В итоге получим уравнение для изгибающего момента $M(x)$ при действии сплошной распределенной нагрузки $q(x)$:

$$M(x) = M_0 + Q_0 \cdot x + \int_0^x dx \int_0^x q(x) \cdot dx$$

8.7 Эпюры внутренних силовых факторов. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния балки необходимо знать, как изменяются внутренние усилия (Q и M) по длине балки.

Чтобы иметь наглядное представление об изменении Q и M по длине балки, строят эпюры этих внутренних усилий.

Аналитический расчет плоской рамы также заключается в

определении внутренних усилий (N , Q и M) от заданных внешних воздействий и в построении соответствующих эпюр на геометрической схеме рамы по осям стоек и ригелей.

Выражения для продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента представляют собой функции координаты x и для них можно построить графики (эпюры) изменения N , Q и M по длине стержня.

Определение. Графики, изображающие законы изменения N , Q и M вдоль геометрической оси балки (рамы), называются соответственно эпюрой продольных сил, эпюрой поперечных сил и эпюрой изгибающих моментов.

Ординаты этих эпюр представляют собой численные значения N , Q и M в соответствующих сечениях балки (рамы).

При построении эпюр N , Q и M в статически определимых системах рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему балки (рамы) на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает балку (раму) на две части.

Выбираем ту часть балки /рамы/, на которую действует наименьшее число известных нагрузок. Для определения внутренних усилий в сечении совершенно безразлично, какую часть балки (рамы) рассматривать. Величины внутренних усилий будут одни и те же.

4. Составляем выражения (уравнения), показывающие закон изменения в пределах рассматриваемого участка продольной силы N , поперечной силы Q и изгибающего момента M . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычисляем численные значения продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях участка (на его границах). Если функциональная зависимость указанных силовых факторов нелинейная, вычисление производим еще и в промежуточной точке, например,

в середине участка или в сечении, где функция достигает экстремального значения.

6. По полученным численным значениям продольных сил N , поперечных

сил Q и изгибающих моментов M строим эпюры (графики) этих внутренних усилий.

Эюра каждого внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси балки (рамы). Для балок эпюры располагаются непосредственно под ней.

В проектных строительных организациях при построении эпюр для балок положительные значения продольных сил N и поперечных сил Q

откладываются вверх от базисной прямой, а отрицательные значения – вниз.

Положительные значения изгибающих моментов M откладываются со стороны «растянутых» волокон, то есть вниз от базисной прямой, а отрицательные значения – со стороны «сжатых» волокон, то есть вверх от базисной прямой.

Таким образом, эпюра изгибающих моментов M строится на «растянутом» волокне.

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

7. Делаем проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов.

8. Отмечаем опасные сечения балки, где действуют максимальные (наибольшие) по абсолютной величине значения внутренних силовых факторов.

Правила построения эпюр внутренних силовых факторов (внутренних усилий) в рамах такие же, как и в балках.

8.8 Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок

Дифференциальные зависимости Д.И. Журавского между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью внешней распределенной нагрузки определяют связь между эпюрами M и Q , построенными от любой внешней нагрузки. Эта взаимная связь имеет важное практическое значение для контроля правильности выполненного построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*:

- «Скачки» на эпюре Q возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре Q имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз – имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре M возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре M имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре M имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила Q положительная,

эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила Q отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на участках балки, где поперечная сила Q равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ($M = const$).

- Изгибающий момент M достигает \max или \min ($M_{экстр}$) в тех сечениях балки, где поперечная сила равна нулю ($Q = 0$).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью q , поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов M на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью q отсутствует, поперечная сила Q постоянная ($Q = const$), а эпюра изгибающих моментов M изменяется по линейному закону.

8.9 Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам

Построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в раме проверяются по правилам контроля для прямолинейных балок.

Кроме этого в раме необходимо проверить равновесие всех узлов.

Эта проверка состоит в том, что вырезанный узел под действием приложенных к нему всех внешних сосредоточенных нагрузок (сосредоточенных сил и моментов), а также внутренних силовых факторов (поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов) должен находиться в равновесии.

Для этого вырезают узел и прикладывают к нему внешние сосредоточенные нагрузки (сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты, если они приложены к узлу).

Затем к узлу прикладывают внутренние силовые факторы (поперечные силы Q , продольные силы N и изгибающие моменты M), которые выражают действие отброшенных частей рамы на узел (с помощью эпюр Q , N и M).

Составляют три уравнения равновесия (статики), которые должны быть равны нулю:

$\Sigma F_x = 0$ – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю;

$\Sigma F_z = 0$ – Сумма проекций всех сил на вертикальную ось z равна нулю;

$\Sigma M_A = 0$ – Сумма моментов всех сил относительно узла равна нулю.

8.10 ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ

Основные гипотезы

Ранее было установлено, что при внешней нагрузке, перпендикулярной геометрической оси балки, в каждом ее поперечном сечении может возникать одновременно изгибающий момент и поперечная сила.

Изучение напряженного состояния балки удобнее начинать с частного случая, когда поперечная сила равна нулю, то есть с чистого изгиба.

Рассмотрим деформацию чистого изгиба балки. С помощью эксперимента установлено, что если на боковую поверхность балки из резинового бруса прямоугольного поперечного сечения нанести ортогональную сетку в виде продольных и поперечных прямых, то после деформирования на участке чистого изгиба продольные прямые принимают криволинейное очертание, а поперечные остаются прямыми. При этом сетка остается ортогональной (рис. 8.13)



Рис. 8.13

Отсюда можно сделать вывод, что угловые деформации в плоскости изгиба отсутствуют, а поперечные сечения балки при изгибе не искривляются.

Из рисунка видно, что продольные волокна балки, расположенные в нижней ее части, растянуты, а в верхней части – сжаты.

Определение. Граница между растянутыми и сжатыми волокнами называется нейтральным слоем.

Нейтральный слой не испытывает растяжения и сжатия.

Ниже нейтрального слоя в поперечных сечениях действуют растягивающие нормальные напряжения, а выше – сжимающие (рис. 8.13)

Определение. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется нейтральной линией (*нулевой линией*) сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования чистого изгиба балок делают возможным принять следующие гипотезы:

1. *Гипотеза плоских сечений (гипотеза Я. Бернулли).* Поперечные сечения балки, плоские и нормальные к его геометрической оси (нейтральному слою) до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации.

Эта гипотеза равносильна предположению, что при изгибе поперечные сечения поворачиваются на некоторый угол относительно нейтральной линии, а угловые деформации в продольных сечениях балки отсутствуют.

2. *Продольные слои не дают друг на друга* (взаимное давление между продольными слоями отсутствует).

Отсюда следует, что продольные волокна испытывают центральное (одноосное) растяжение или сжатие.

3. *Деформации продольных волокон не зависят от их положения по ширине сечения.*

Из этого следует, что нормальные напряжения остаются одинаковыми по ширине сечения.

Задача об отыскании закона распределения напряжений по сечению балки является статически неопределимой и для ее решения необходимо дополнительно к уравнениям равновесия привлечь уравнения деформаций, которые можно сформулировать на основании экспериментальных наблюдений.

Вывод формулы для определения нормальных напряжений σ в поперечных сечениях балки проводится по следующей схеме:

1. Рассматривается *статическая сторона* задачи, то есть анализируются уравнения статики.

2. Рассматривается *геометрическая сторона* задачи. На основе опытного изучения данного вида деформации балки и принимаемых гипотез, устанавливаются зависимости между перемещением точек балки и их положением в сечении относительно принятой системы координат.

3. Рассматривается *физическая сторона* задачи – определяется зависимость между напряжениями и деформациями.

4. Производится синтез уравнений, то есть их совместное решение.

8.11 Определение нормальных напряжений

Изучим закон распределения напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе. Будем рассматривать балку с поперечным

сечением, обладающим хотя бы одной осью симметрии, которая совпадает с силовой плоскостью.

Так как поперечные сечения симметричны относительно силовой плоскости, то для упрощения примем их прямоугольной формы (рис. 8.14).

В плоскости поперечного сечения проведем координатные оси y и z . Обозначим горизонтальную ось через z , а вертикальную ось через y .

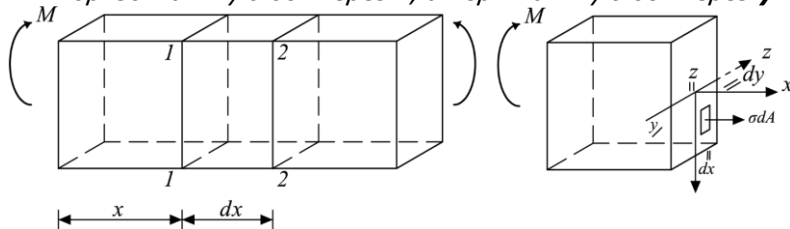


Рис. 8.14

Ось y совместим с силовой линией, а ось z проведем пока на произвольной высоте перпендикулярно оси y .

Изгибающий момент M (силовая плоскость) действует в силовой плоскости xy . В плоскости поперечного сечения выделим элементарную площадку dA .

При чистом изгибе изгибающий момент M в поперечном сечении балки вызывает нормальные напряжения σ , а касательные напряжения τ равны нулю.

I. Статическая сторона задачи.

Составим уравнения статики:

1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось x равна нулю:

$$\Sigma F_x = 0: \int_A \sigma \cdot dA = 0 \quad (8.7)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно оси z равна нулю:

$$\Sigma M_z = 0: M - \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = 0 \quad (8.8)$$

3. Сумма моментов всех сил относительно оси y равна нулю:

$$\Sigma M_y = 0: \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0 \quad (8.9)$$

II. Геометрическая сторона задачи.

Рассмотрим деформацию той же балки. Выделим из балки сечениями $1-1$ и $2-2$ элемент длиной dx (рис. 8.15).

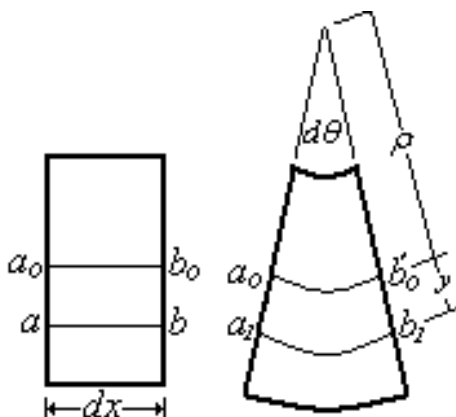


Рис. 8.15

В результате деформации происходит изменение расстояний между поперечными сечениями – нижние волокна удлиняются, а верхние – укорачиваются. Естественно предположить, что можно найти и такие волокна, длина которых при изгибе не изменяется.

Совокупность волокон, не изменяющих своей длины при изгибе балки, называется нейтральным слоем.

Волокна, принадлежащие нейтральному слою, до деформации лежат в одной плоскости, а в деформированном состоянии образуют цилиндрическую поверхность. До и после деформации каждое поперечное сечение пересекается с нейтральным слоем по прямой, которая называется *нейтральной (нулевой) линией сечения*.

При плоском изгибе нейтральный слой перпендикулярен силовой плоскости, а значит и нейтральная линия перпендикулярна силовой линии.

Будем считать, что ось z совпадает с нейтральной линией. Из рисунка (8.15) имеем:

$$a_0 b_0 \rightarrow a'_0 b'_0 - \text{с радиусом } \rho;$$

$$ab \rightarrow a_1 b_1 - \text{с радиусом } \rho + y.$$

Найдем относительное удлинение произвольного волокна ab :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (a_1 b_1 - ab) / ab; \\ a_1 b_1 &= (\rho + y) \cdot d\theta; \quad ab = dx. \rightarrow \\ \rightarrow \varepsilon &= [(\rho + y)d\theta - dx] / dx. \end{aligned}$$



Найдем относительное удлинение волокна $a_0 b_0 = dx$, принадлежащее нейтральному слою:

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= a'_0 b'_0 = \rho \cdot d\theta = dx \rightarrow \\ \rightarrow \varepsilon &= [(\rho + y)d\theta - \rho d\theta] / (\rho d\theta) = y / \rho \rightarrow \\ \varepsilon &= \frac{y}{\rho}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

III. Физическая сторона задачи.

Определим, в каком напряженном состоянии находится произвольное продольное волокно **ab**. На торцевой поверхности волокна (в сечении) касательные напряжения τ равны нулю. Следовательно, в соответствии с законом парности касательных напряжений нет их и в сечениях, параллельных оси балки.

Нормальные напряжения σ_y , выражающие взаимодействие рассматриваемого волокна с соседними волокнами, в силу второй гипотезы равны нулю.

Таким образом, продольное волокно находится в линейном напряженном состоянии. Закон Гука для линейного напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (8.11)$$

IV. Синтез уравнений.

Решая систему уравнений (8.10) и (8.11), получим:

$$\sigma = (E \cdot y) / \rho \rightarrow \sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (8.12)$$

Подставляя выражение (8.12) в уравнение (8.8), получим:

$$\begin{aligned} M &= \int_A \frac{y}{\rho} E \cdot y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E \cdot I_z}{\rho} \rightarrow \\ 1 / \rho &= M / (EI_z) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Из выражений (8.12) и (8.13), следует:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y \quad (8.14)$$

Положение нейтральной оси (нулевой линии) определим из условия, что продольная сила в поперечном сечении балки при чистом изгибе равна нулю.

Рассмотрев уравнение равновесия (8.7), получим:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma \cdot dA &= 0 \rightarrow \int_A \frac{M}{I_z} \cdot y \cdot dA = \frac{M}{I_z} \cdot \int_A y \cdot dA = 0 \rightarrow \\ S_z &= \int_A y \cdot dA = 0 \rightarrow S_z = 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Статический момент сечения S_z относительно нейтральной оси z равен нулю лишь в том случае, когда *эта ось центральная*.

Рассмотрев уравнение равновесия (8.9), получим:

$$\int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{M}{I_z} \cdot y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow \frac{M}{I_z} \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow$$

$$I_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \rightarrow I_{yz} = 0 \quad (8.16)$$

Центробежный момент инерции равен нулю относительно осей y и z лишь в том случае, когда они являются *главными центральными осями инерции*.

Следовательно, ось z (нейтральная линия) проходит, через центр тяжести площади поперечного сечения, так как статический момент равен нулю ($S_z = 0$), а оси y и z – главные центральные оси инерции, так как центробежный момент инерции сечения равен нулю ($I_{yz} = 0$).

Таким образом, мы получили формулу (8.14) для определения нормального напряжения σ при чистом изгибе в произвольной точке поперечного сечения балки с координатой y относительно главных центральных осей.

По формуле (8.14) можно определять абсолютную величину нормального напряжения σ , а его знак устанавливать в зависимости от того, в сжатой или растянутой зоне находится рассматриваемая точка. В этом случае величины M и y берутся по абсолютным значениям.

Если же учитывать знаки изгибающего момента M и координаты y , то формула (8.14) позволяет определять численное значение нормального напряжения σ и его знак.

Правило знаков. При определении численных значений нормального напряжения σ по формуле (8.14) изгибающий момент M считается положительным, если он вызывает растяжение в точках первой четверти, принятой системы координат, поперечного сечения балки.

8.12 Расчет балок на прочность при изгибе

Опытами установлено, что поперечная сила Q , возникающая в поперечных сечениях балки при плоском поперечном изгибе, мало влияет на нормальные напряжения балок и этим влиянием можно пренебречь.

Следовательно, формула (8.14) для вычисления нормальных напряжений в случае чистого изгиба балки вполне приемлема для расчета всех балок, работающих на изгиб, вызванный действием не только изгибающих моментов, но и поперечных сил.

Определим нормальные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 8.16 ÷ 8.18).

Формула (8.14) для определения нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки с координатой y

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y$$

показывает, что какую бы форму и размеры ни имело сечение, нормальные напряжения в точках **2 – 2** поперечного сечения балки, лежащих на главной оси **z** (на нейтральной оси **y = 0**), равны нулю.

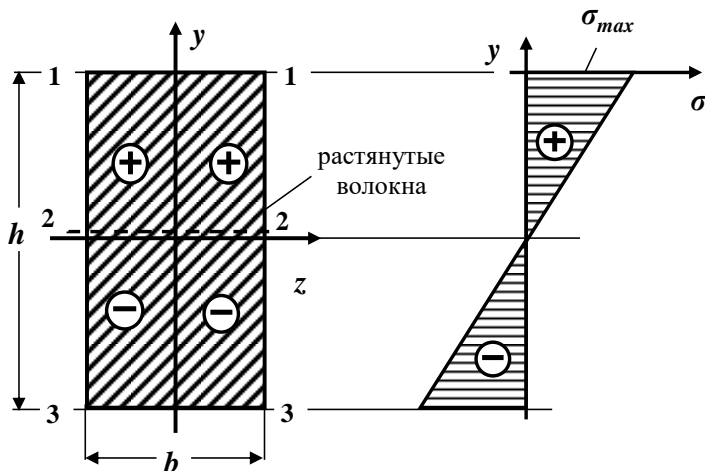


Рис. 8.16. Эпюра нормальных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки

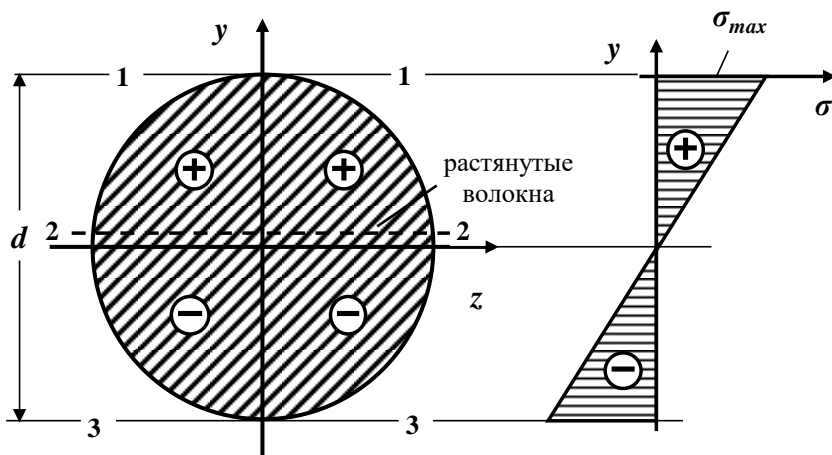


Рис. 8.17. Эпюра нормальных напряжений по высоте круглого поперечного сечения балки

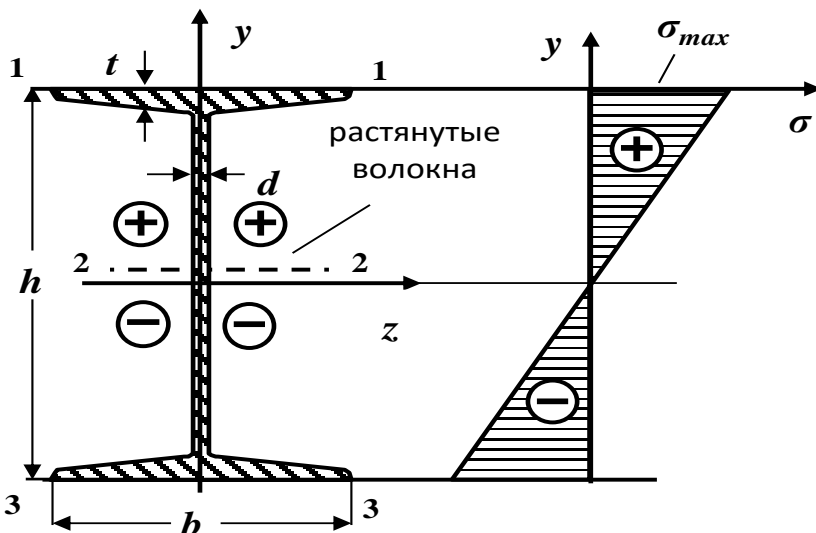


Рис. 8.18. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки

Определение. Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Нейтральная ось при плоском изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярна к силовой плоскости.

Нормальные напряжения линейно возрастают по мере удаления от нейтральной линии. При этом напряжения оказываются постоянными по ширине сечения (вдоль линии $y = \text{const}$).

Наибольшей величины нормальные напряжения достигают в точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной линии ($y = y_{\text{max}}$):

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{I_z} \cdot y_{\text{max}}$$

Обозначая $\frac{I_z}{y_{\text{max}}} = W_z$, получаем формулу для определения максимальных напряжений в произвольном сечении балки:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_z} \quad (8.17)$$

В этих формулах:

I_z – главный момент инерции поперечного сечения относительно оси

y ,



y_{max} – максимальное расстояние (координата), измеряемое по оси y от главной оси z до наиболее удаленной точки поперечного сечения;

W_z – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси z .

Определение. Опасными точками поперечного сечения называются точки, напряжения в которых достигают наибольших по величине значений.

Максимальное нормальное напряжение в балке в случае чистого или плоского изгибов возникает в сечении, где изгибающий момент достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором изгибающий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение M_{max} , называется опасным сечением балки по нормальным напряжениям.

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки.

Следовательно, наибольшие нормальные напряжения в балке при чистом и плоском изгибах будут равны:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \quad (8.18)$$

Построим эпюры нормальных напряжений σ для некоторых типов поперечных сечений.

Определение. График, изображающий закон изменения нормальных напряжений σ по высоте поперечного сечения, называется эпюрой нормальных напряжений.

Как следует из формулы (8.14), нормальные напряжения σ зависят линейно от координаты y , и по высоте поперечного сечения закон изменения нормальных напряжений представляет прямую линию.

На рис. 8.16÷8.18 показаны в общем виде эпюры нормальных напряжений σ для прямоугольного, круглого и двутаврового поперечных сечений балки *(для случая растянутых верхних волокон)*.

Размеры элементов конструкций (поперечные сечения и длина) необходимо подбирать такими, чтобы под действием внешних нагрузок они не разрушались и не получали деформаций выше допустимого предела.

В условиях массового строительства также возникает проблема экономии строительных материалов при полной гарантии прочности конструкций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в ее элементах, были ниже предельных значений.

Поэтому при проектировании необходимо правильно установить напряжения, обеспечивающие безопасность конструкции.

В настоящее время применяются, в основном, два метода расчета на прочность: *по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям*. Оба



метода преследуют одну цель – обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Первый метод еще недавно широко использовался в строительном деле и частично используется в настоящее время. По этому методу размеры элементов конструкции должны быть такими, чтобы во всех сечениях напряжения, вызываемые нагрузкой, не превышали допускаемой величины.

Второй, более прогрессивный метод расчета по предельным состояниям, был разработан советскими учеными. В настоящее время он является основным методом, применяемым при проектировании сооружений в нашей стране.

Нормами установлены три вида предельных состояний. В сопротивлении материалов рассматривается главным образом первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу допускаемых напряжений* имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (8.19)$$

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу предельных состояний* имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_z} \leq R^H \cdot k \cdot m_B \quad (8.20)$$

В этих формулах:

σ_{\max} – максимальное нормальное напряжение;

M_{\max} – наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

W_z – момент сопротивления поперечного сечения относительно главной оси z (нейтральная ось);

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение материала элементов конструкции;

R^H – нормативное сопротивление материала элементов конструкции;

n – коэффициент перегрузки;

k – коэффициент однородности материала элементов конструкции;

m_B – коэффициент условий работы элементов конструкции.

Величина допускаемых напряжений $[\sigma]$ назначается в зависимости от материала, из которого изготовлена балка.

Пластичные материалы обладают примерно равными пределами текучести на сжатие и на растяжение, поэтому

$$[\sigma_c] = [\sigma_p] = [\sigma].$$

Для хрупких материалов, у которых прочность на сжатие выше, чем на растяжение, допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, как



правило, не равны между собой $[\sigma_c] \geq [\sigma_p]$ и, поэтому, необходимо записывать два условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max_p} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max_c} \leq [\sigma_c], \quad (8.21)$$

где

y_{\max_p} и y_{\max_c} – расстояния (координаты) от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон.

Величина R , равная

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B, \quad (8.22)$$

называется *расчетным сопротивлением* материала элементов конструкции.

Пользуясь условием прочности при чистом и плоском изгибах по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (8.19) и методу предельных состояний (8.20), можно решать применительно к изгибу известные нам три типа задач:

1). Проектный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка и материал элементов конструкции ($[\sigma]$ или R^H). По заданной нагрузке определяют наибольший изгибающий момент M_{\max} (по эпюре изгибающих моментов) и из условия прочности (8.19) или (8.20) находят величину требуемого момента сопротивления поперечного сечения по формулам:

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$W_z^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (8.23)$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$W_z^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max} \cdot n}{R^H \cdot k \cdot m_B} \quad (8.24)$$

По полученной величине требуемого момента сопротивления $W_z^{\text{треб}}$ подбирают размеры поперечных сечений балки таким образом, чтобы действительный момент сопротивления W_z примерно равнялся бы требуемому

$$W_z \approx W_z^{\text{треб}}.$$

Как известно, момент сопротивления W_z для простых поперечных сечений определяется по формулам через размеры сечения или по сортаментам для прокатных профилей.

Подбор сечения производят следующим образом:

- если балка проектируется из прокатного профиля, то необходимый номер профиля берется по таблицам сортамента прокатных сталей в зависимости от величины требуемого момента сопротивления $W_z^{\text{треб}}$;

- в случае подбора круглого сплошного сечения балки диаметром d , известно, что момент сопротивления W_z определяется по формуле:



$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

Приравнявая $W_z \approx W_z^{треб}$, находят требуемый диаметр балки:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_y^{треб}}{\pi}}$$

• в случае подбора прямоугольного поперечного сечения балки размером $b \times h$, предварительно задаются соотношением $\beta = h/b$, то есть $h = \beta \cdot b$.

Известно, что момент сопротивления W_z для прямоугольного поперечного сечения балки определяется по формуле:

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (\beta \cdot b)^2}{6} = \frac{\beta^2 \cdot b^3}{6}$$

Приравнявая $W_z \approx W_z^{треб}$, находят требуемые размеры балки:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_z^{треб}}{\beta^2}}; \rightarrow h = \beta \cdot b$$

2). Определение допускаемой нагрузки (несущей способности). В этом случае известны размеры поперечного сечения (W_z) и материал элементов конструкции ($[\sigma]$ или R^n).

Из условия прочности (8.19) или (8.20) находят наибольшую допускаемую величину изгибающего момента:

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_z \cdot [\sigma]. \quad (8.25)$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_z \cdot R^n \cdot k \cdot m_b \cdot 1/n. \quad (8.26)$$

По найденному допускаемому значению изгибающего момента $[M_{\max}]$ определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

3). Проверочный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка, размеры поперечного сечения (W_z) и материал элементов конструкции ($[\sigma]$ или R^n).

Требуется определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в элементах конструкции, и сравнить с допускаемым напряжением или расчетным сопротивлением, то есть проверить выполнение условия прочности (8.19) или (8.20):

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_z} \leq R^n \cdot k \cdot m_b.$$

8.13 Рациональные формы поперечных сечений балок

Характер распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях балки позволяет сделать выводы о рациональной форме поперечного сечения при чистом и плоском изгибах.

В отличие от центрального растяжения (сжатия) напряжения в сечении распределяются неравномерно. Материал, расположенный у нейтрального слоя, нагружен незначительно.

Поэтому, в целях экономии материала и снижения веса конструкции, для

стержней, работающих на изгиб, следует выбирать такие формы сечения, чтобы

значительная часть материала была наиболее удалена от нейтральной линии.

Идеальным является сечение, изображенное на рисунке (8.19)

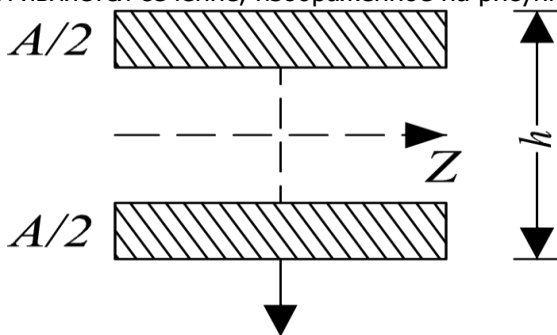


Рис. 8.19

Из практически встречающихся профилей наиболее близко к идеальному сечению – это двутавровое сечение.

Несущая способность балки определяется выражением (8.25) или (8.26):

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям:

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_z \cdot [\sigma].$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям:

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_z \cdot R^H \cdot k \cdot m_b \cdot 1/n.$$

Расход же материала пропорционален площади сечения **A**. Следовательно, чем больше отношение W_z / A , тем больший изгибающий момент выдерживает сечение с заданной площадью. Отношение $k = W_z / A$ можно принять за критерий, оценивающий качество формы поперечного сечения.

Рассмотрим несколько видов поперечных сечений (рис. 8.20):

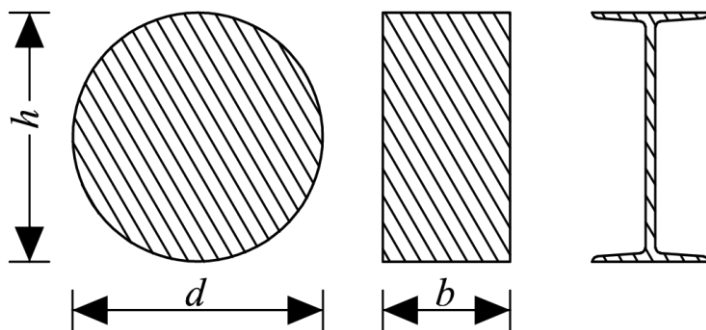


Рис. 8.20

– для круглого сечения:

$$\kappa = \frac{\frac{\pi d^3}{32}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{8} = 0,125d = (0,125h) ;$$

– для прямоугольного сечения :

$$\kappa = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6} = 0,167h ;$$

– для двутаврового сечения:

$$\kappa = (0,29 \div 0,31) \cdot h$$

8.14 ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ Касательные напряжения при изгибе

В отличие от чистого изгиба при плоском поперечном изгибе в сечении балки возникает не только изгибающий момент M , но и поперечная сила Q .

Поэтому при плоском изгибе в поперечных сечениях балки наряду с нормальными напряжениями σ , вызванными изгибающим моментом, возникают и касательные напряжения τ , вызванные поперечными силами.

Вследствие сдвигов гипотеза плоских сечений при плоском изгибе нарушается, плоские до деформации сечения слегка искривляются.

Исследования этого вопроса показали, что влияние указанного эффекта на величину нормальных напряжений невелико и поэтому влиянием сдвигов на закон распределения нормальных напряжений при плоском (поперечном) изгибе пренебрегают.

Таким образом, гипотеза плоских сечений распространяется и на плоский поперечный изгиб.

Задача определения напряжений в поперечных сечениях балки статически неопределима и требует рассмотрения трех сторон задачи

(статической, геометрической и физической).

Однако иногда можно принять такие гипотезы о распределении напряжений, при которых задача становится статически определимой и отпадает необходимость в привлечении геометрических и физических сторон задачи.

Для определения касательных напряжений в случае плоского поперечного изгиба примем следующие гипотезы:

1. Направления всех касательных напряжений в сечении параллельны поперечной силе, которая является их равнодействующей.

2. Касательные напряжения равномерно распределены по ширине сечения

балки [при $b \ll h$].

3. Величина нормальных напряжений принимается как при чистом изгибе, то есть выполняется гипотеза плоских сечений.

Проведем вывод формулы касательных напряжений при плоском изгибе на примере балки прямоугольного поперечного сечения шириной b (рис.8.21).

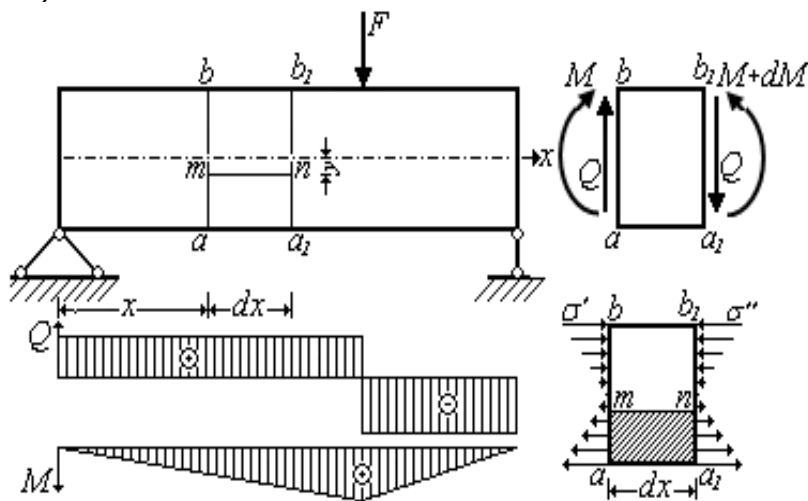


Рис. 8.21

Для вывода формулы касательных напряжений вырежем из балки двумя сечениями $a - b$ и $a_1 - b_1$ элементарный элемент длиной dx .

В сечении $a - b$ изгибающий момент вызывает нормальные напряжения σ' ,

а поперечная сила вызывает касательные напряжения $\tau_1 = \tau$.

В сечении $a_1 - b_1$ изгибающий момент вызывает нормальные

напряжения σ'' , а поперечная сила касательные напряжения τ_2 .

Для определения касательных напряжений в плоскости сечения, расположенной параллельно нейтральному слою, разрежем вырезанную часть балки плоскостью $m - n$ и отбросим верхнюю часть. Действие отброшенной части на оставшуюся нижнюю часть (заштрихованная часть, рис.8.21) заменим предполагаемой сдвигающей силой dT .

Таким образом, на передней, задней и нижней гранях отсеченной части выделенного элемента (заштрихованная часть, рис. 8.21) нет напряжений, так как эти грани свободны от поверхностной нагрузки.

По боковым граням отсеченной части выделенного элемента (сечения $a - b$ и $a_1 - b_1$) действуют нормальные напряжения σ' и σ'' , вызванные изгибающими моментами, и касательные напряжения τ_1 и τ_2 , вызванные поперечными силами.

В плоскости сечения, расположенной параллельно нейтральному слою, действует сдвигающая сила $dT = \tau' \cdot b \cdot dx$ (рис. 8.22).

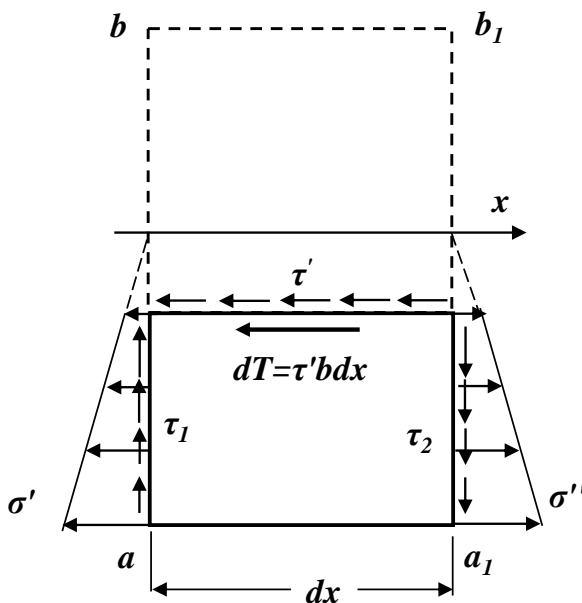


Рис. 8.22

Составим уравнение равновесия (уравнения статики):

$$\sum x = 0. \rightarrow -\tau' \cdot b \cdot dx - \int_{A_{\text{омс}}} \sigma' \cdot dA + \int_{A_{\text{омс}}} \sigma'' \cdot dA = 0$$

Нормальные напряжения, действующие на гранях выделенного элемента, равны:

$$\sigma' = My/I_z; \quad \sigma'' = (M + dM)y/I_z.$$

Подставив в уравнение равновесия, получим:

$$-\tau' b dx - \int_{A_{омс}} \frac{M \cdot y}{I_z} dA + \int_{A_{омс}} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA = 0$$

$$\rightarrow -\tau' \cdot b \cdot dx + \frac{dM}{I_z} \cdot S_z^{омс} = 0. \rightarrow \tau' = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_z^{омс}}{b \cdot I_z}$$

Так как

$$dM / dx = Q,$$

то

$$\tau' = \frac{Q \cdot S_z^{омс}}{b \cdot I_z}.$$

На основании закона парности касательных напряжений имеем:

$$\tau' = \tau = \frac{Q \cdot S_z^{омс}}{b \cdot I_z}$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{отс}}{b(y) \cdot I_z} \quad (8.27)$$

Полученное выражение представляет собой формулу Д.И. Журавского для определения касательных напряжений в произвольной точке поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе.

В этой формуле

Q – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_z^{отс}$ – абсолютное значение статического момента «отсеченной» части поперечного сечения балки относительно нейтральной оси (главной оси z);

$b(y)$ – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки;

I_z – главный момент инерции поперечного сечения балки.

y – координата точки поперечного сечения, в которой определяется касательное напряжение.

«Отсеченной» частью поперечного сечения балки является часть поперечного сечения, расположенная по одну сторону от прямой, проведенной

через исследуемую точку параллельно нейтральной оси (главной оси z).

Таким образом, касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе равно произведению поперечной силы Q , действующей в рассматриваемом



сечении балки, на статический момент $S_z^{отс}$ части поперечного сечения, лежащей выше (или ниже) рассматриваемого слоя, относительно нейтральной оси, и деленному на ширину $b(y)$ слоя поперечного сечения и на главный момент инерции I_z всего сечения относительно нейтральной оси.

В любом поперечном сечении балки статический момент отсеченной части $S_z^{отс}$ для самых отдаленных от нейтральной оси (главной оси z) точек сечения равен нулю, поэтому касательные напряжения τ в них равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси (главной оси z), $S_z^{отс} = S_z^{1/2} = S_{max}$, следовательно, касательные напряжения в них достигают максимальных значений (*опасные точки*).

Здесь $S_z^{1/2} = S_{max}$ – статический момент половины поперечного сечения.

Определение. Сечение, в котором поперечная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение Q_{max} , называется опасным сечением балки по касательным напряжениям.

Таким образом, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки:*

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_z^{1/2}}{b(y) \cdot I_z}. \quad (8.28)$$

Рассмотрим распределение касательных напряжений при изгибе по высоте некоторых типов поперечных сечений (эпюры τ).

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения.

Определение. График, изображающий закон изменения напряжений τ по высоте поперечного сечения, называется эпюрой касательных напряжений.

Из формулы (8.27) видно, что касательные напряжения в балке изменяются по высоте поперечного сечения по тому же закону, что $\frac{S_z^{отс}}{b(y)}$.

8.15 Касательные напряжения в балках прямоугольного поперечного сечения

В прямоугольном сечении $b(y) = b = const$, поэтому закон распределения будет таким же, что и для статического момента «отсеченной» части поперечного сечения $S_z^{отс}$:

$$S_z^{omc} = \int_y^{\frac{h}{2}} b \cdot y \cdot dy = b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Следовательно, касательные напряжения в произвольной точке прямоугольного поперечного сечения балки с координатой y вычисляются по формуле:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{omc}}{b(y) \cdot I_z} = \frac{6Q}{bh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (8.29)$$

Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте прямоугольного поперечного сечения изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1–1**, **2–2** и **3–3** (рис. 8.23).

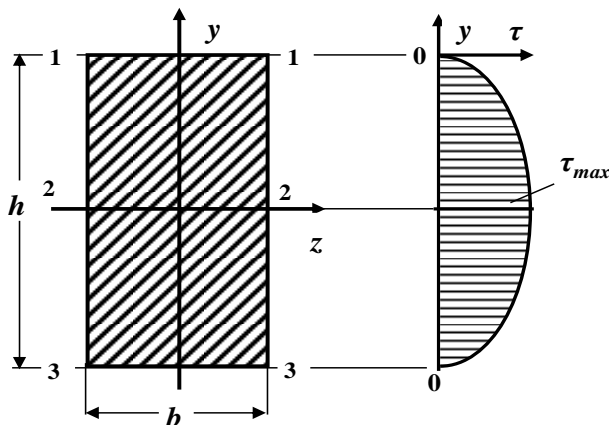


Рис. 8.23. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения балки

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1–1** и **3–3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (**при $y = \pm \frac{h}{2}$**), касательные напряжения равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2–2** (**при $y = 0$**), возникают наибольшие касательные напряжения (**опасные точки**).

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (8.30)$$

В этой формуле:

τ_{max} – максимальное касательное напряжение;

Q – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = b \cdot h$ – площадь прямоугольного поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине

касательных напряжений в балке необходимо в формулу (8.30) подставить $Q = Q_{max}$:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{A} \quad (8.31)$$

На рис. 8.23 показан общий вид эпюры касательных напряжений τ для прямоугольного поперечного сечения балки.

8.16 Касательные напряжения в балках круглого поперечного сечения

Предполагается, что вертикальные проекции касательных напряжений равномерно распределены по ширине круглого сечения. Эти составляющие касательного напряжения определяются по формуле (8.27). Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте круглого поперечного сечения также изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 8.24)

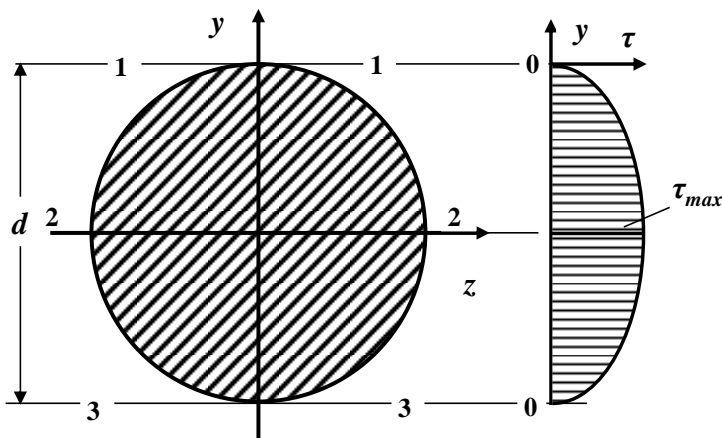


Рис. 8.24. Эпюра касательных напряжений для круглого поперечного сечения балки



В точках круглого поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (*при $y = \pm \frac{d}{2}$*), касательные напряжения равны нулю, так как $S_z^{отс} = 0$.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2 – 2** (*при $y = 0$*), возникают наибольшие касательные напряжения (*опасные точки*), так как $S_z^{отс} = S_z^{1/2} = S_{max}$.

Здесь $S_z^{1/2}$ – статический момент половины поперечного сечения относительно нейтральной оси (главной оси **z**).

Максимальное касательное напряжение для круглого поперечного сечения балки можно вычислить по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (8.32)$$

В этой формуле

τ_{max} – максимальное касательное напряжение;

Q – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ – площадь круглого поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (8.32) подставить

$Q = Q_{max}$:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{max}}{A}. \quad (8.33)$$

На рис. 8.24 показан общий вид эпюры касательных напряжений τ для круглого поперечного сечения балки.

8.17 Касательные напряжения в балках двутаврового поперечного сечения

Характерной особенностью этого сечения является резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки двутавра к его полке.

При определении касательных напряжений в *полке* двутавра необходимо иметь в виду, что для их определения нельзя использовать формулу Журавского Д.И. (8.27), так как предположение о равномерности распределения касательных напряжений по ширине полки здесь не выполняется.

Таким образом, вопрос о величине и законе распределения касательных напряжений в полках двутавра остается неразрешенным.

Однако, ввиду того, что в этих сечениях касательные напряжения

невелики, то их обычно не вычисляют.

Значительно больший интерес представляют касательные напряжения в **стенке** двутавра, так как, в основном, поперечную силу воспринимает стенка.

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д.И. Журавского (8.27):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{отс}}{b(y) \cdot I_z}$$

Для этого обычно определяют численные значения касательных напряжений в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях **4–4**, **2–2** и **5–5** **стенки двутавра** (рис. 8.25).

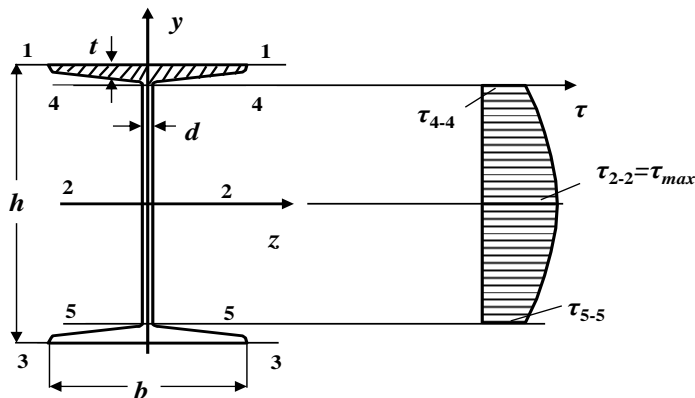


Рис. 8.25. Эпюра касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения балки

Максимальные касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии **2–2** (на главной оси **z**) двутавра (*опасные точки*), поэтому для поперечного сечения балки из двутавра

$$b(y) = d \quad (8.25).$$

Отсеченная часть фигуры, в этом случае, – верхняя половина поперечного сечения, поэтому:

$$S_z^{отс} = S_z^{1/2},$$

где $S_z^{1/2}$ – статический момент половины сечения относительно главной оси **z**. (Для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте).

Для определения касательных напряжений в точках, лежащих на линиях

4–4 и **5–5**, находят статический момент полки (отсеченная часть сечения



– заштрихованная полочка двутавра, рис. 8.25):

$$\begin{aligned} S_z^{\text{отс}} = S_z^{\text{полки}} &= S_z^{1/2} - S_z^{1/2 \text{стенки}} = S_z^{1/2} - d \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) = \\ &= S_z^{1/2} - \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)^2. \end{aligned}$$

По полученным численным значениям τ в сечениях **2-2**, **4-4** и **5-5** строят эпюру касательных напряжений по высоте **стенки** двутавра (рис. 8.25).

При рассмотрении касательных напряжений в полках, как было указано выше, уже нельзя предполагать, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине b полки.

Например, видно, что при $y = \pm \left[\left(\frac{h}{2} - t\right)\right]$ касательные напряжения на нижней грани верхней полки и на верхней грани нижней полки должны быть равны нулю, в то время как в месте соединения полки со стенкой эти напряжения не равны нулю.

Следовательно, применение формулы Д.И. Журавского для определения касательных напряжений в полке приводит к ошибочным, по существу, результатам. Можно лишь утверждать, что при небольшой толщине полки касательные напряжения в полке весьма малы.

В то же время в месте резкого изменения ширины сечения возникает значительная концентрация напряжений. В действительности, в прокатных двутавровых балках в вершинах входящих углов делаются закругления, снижающие концентрацию напряжений.

Таким образом, величина касательных напряжений в районе границы полки и стенки не может быть точно установлена методами сопротивления материалов.

Для определения горизонтальных составляющих касательных напряжений в точках полки можно воспользоваться формулой Д.И. Журавского, принимая в ней за $S_z^{\text{отс}}$ статический момент относительно нейтральной оси части полки, а за b_y – толщину полки t (рис. 8.26).]

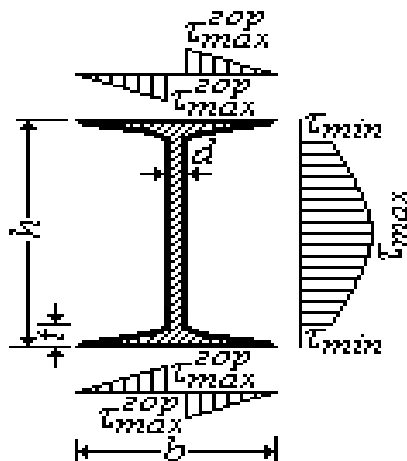


Рис. 8.26

В результате получим:

$$S_z^{\text{отс}} = t \cdot [(b/2) - z] \cdot (h - t) / 2.$$

Касательные напряжения будут равны:

$$\tau^{\text{top}} = \frac{Q \cdot t}{t \cdot I_z} \cdot \left(\frac{b}{2} - z\right) \cdot \left(\frac{h-t}{2}\right) = \frac{Q}{2I_z} \cdot \left(\frac{b}{2} - z\right) \cdot (h-t)$$

Таким образом, τ^{top} изменяется в пределах полки по линейному закону.

Максимальное значение τ^{top} принимает при $z = d/2$

$$\tau_{\text{max}}^{\text{top}} = \frac{Q}{2I_z} \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right) (h-t) = \frac{Q}{4I_z} \cdot (b-d) \cdot (h-t)$$

В балках сплошного сечения чаще всего величина касательных напряжений по сравнению с нормальными напряжениями невелика, и большей частью производить проверку прочности балки по касательным напряжениям нет необходимости.

В коротких балках, сильно нагруженных вблизи опор, и в балках тонкостенного профиля касательные напряжения могут иметь сравнительно большую величину.

Поэтому на практике обычно подбирают размеры поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям, а затем уже проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение балки условию прочности по

касательным напряжениям.

В этом случае проверка прочности по методу допускаемых касательных напряжений производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y} \leq [\tau], \quad (8.34)$$

где

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Для стальных балок обычно принимают допускаемое касательное напряжение равным

$$[\tau] \approx 0,6 \cdot [\sigma].$$

8.18 Анализ напряженного состояния при изгибе. Главные напряжения при изгибе

Выделим на всю ширину балки в окрестности некоторой точки элементарный параллелепипед **1–2–3–4** (рис. 8.27).

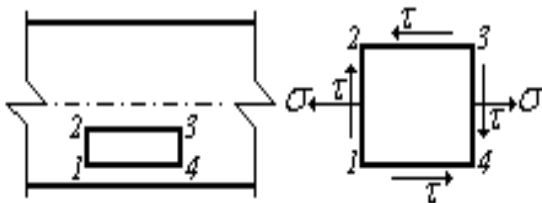


Рис. 8. 27

По граням **1–2** и **3–4** действуют нормальные σ и касательные τ напряжения, а по граням **2–3** и **1–4** – только касательные напряжения τ .

Величины напряжений σ и τ определяются по формулам (8.14) и (8.27) соответственно:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_z^{0TC}}{b(y) \cdot I_z}$$

Передняя и задняя грани элементарного параллелепипеда совпадают с боковыми поверхностями балки, свободными от нагрузки, а потому на этих гранях напряжения равны нулю. Следовательно, параллелепипед находится в *условиях плоского напряженного состояния*.

На площадках, наклоненных под различными углами к боковым граням элементарного параллелепипеда, действуют нормальные и касательные напряжения, величины которых можно определить по формулам:

$$\sigma_a = \sigma_x \cdot \cos^2 a + \sigma_y \cdot \sin^2 a - \tau_{yx} \cdot \sin 2a; \quad (8.35)$$

$$\tau_a = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2a / 2 + \tau_{yx} \cdot \cos 2a$$

Имеются две взаимно перпендикулярные площадки, на которых

касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие на них, – *главными нормальными напряжениями*.

На площадках, наклоненных под углами $\alpha = 45^\circ$ к главным площадкам, действуют экстремальные (максимальные) касательные напряжения. Эти площадки называются *площадками сдвига*.

Главные нормальные и экстремальные (максимальные) касательные напряжения для плоского изгиба определяются по формулам, исходя из *общего случая плоского напряженного состояния*.

В нашем случае $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xz} = \tau$. Величиной нормальных напряжений в горизонтальных площадках σ_z будем пренебрегать, поэтому для рассматриваемого случая формулы главных напряжений и экстремальных (максимальных) касательных напряжений (4.8) и (4.11) для плоского изгиба примут следующий вид:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (8.36)$$

Угол наклона главных площадок определяется по формуле (4.9):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma} \quad (8.37)$$

Здесь:

σ – нормальное напряжение в рассматриваемой точке, действующее по площадке, совпадающей с поперечным сечением балки;

τ – касательное напряжение в рассматриваемой точке, действующее по площадке, совпадающей с поперечным сечением балки.

Рассмотрим напряженное состояние в точках прямоугольного поперечного сечения балки (рис. 8.28)

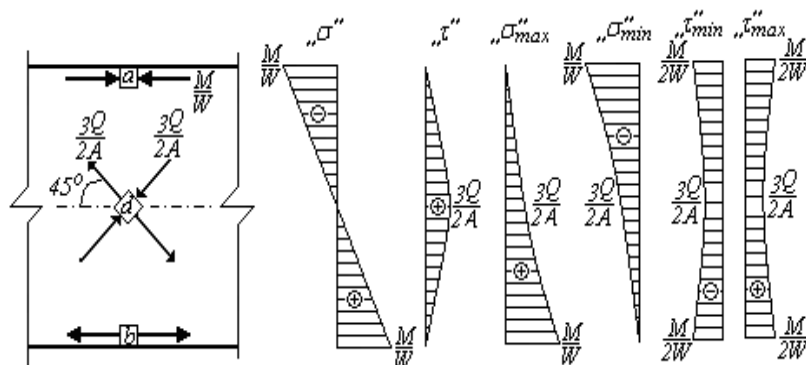


Рис. 8.28

В поперечном сечении на наружной поверхности балки (в точках *a* и *b*),



касательные напряжения τ равны нулю, а нормальные напряжения σ равны (8.17):

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M}{W_z}$$

В этих точках возникает одноосное (линейное) напряженное состояние.

Экстремальные (максимальные) касательные напряжения в точках **a** и **b** определяются по формуле (4.5):

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma}{2} \quad (8.38)$$

В точке **d** нормальное напряжение σ равно нулю, а касательное напряжение τ равно (8.30):

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}$$

В этих точках напряженное состояние представляет собой *чистый сдвиг* с касательными напряжениями

$$\tau = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}$$

Две главные площадки наклонены под углами $\alpha = \pm 45^\circ$ к оси балки, а главные напряжения на них равны (8.30):

$$\frac{\sigma_{\max}}{\min} = \pm \tau = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A} \quad (8.39)$$

Вычисляя главные напряжения для целого ряда точек, какого – либо поперечного сечения, можно построить эпюры главных растягивающих, главных сжимающих, а также наибольших касательных напряжений, которые развиваются в площадках, наклоненных к главным площадкам под углом $\alpha = \pm 45^\circ$ (рис. 8.28).

8.19 Полная проверка прочности балки при плоском поперечном изгибе

Обычно, дополнительную проверку на прочность по главным напряжениям производят для поперечных сечений, у которых ширина резко меняется вблизи краев сечения, например, в двутавре, швеллере или пустотелом прямоугольном профиле. Эпюры нормальных и касательных напряжений для таких профилей (например, рис. 8.18 и 8.25) показывают, что на уровне перехода от полки к стенке (точки **4 – 4** и **5 – 5**) касательные и нормальные напряжения имеют величину, близкую к максимальной.

По главным напряжениям проверяются те сечения балки по ее длине, где одновременно изгибающий момент и поперечная сила достигают большой величины. Причем, если таких сечений несколько, то проверяются все эти сечения.

В этом случае дополнительная проверка на прочность по главным

напряжениям при изгибе производится в зависимости от принятой теории прочности.

Эти условия прочности имеют вид:

– 1-я теория – теория наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma^I = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.40)$$

– 2-я теория – теория наибольших деформаций (удлинений):

$$\sigma^{II} = [0,35 \cdot \sigma + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}] \leq [\sigma] \quad (8.41)$$

– 3-я теория – теория наибольших касательных напряжений:

$$\sigma^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.42)$$

– 4-я теория – энергетическая теория (теория потенциальной энергии формoизменения):

$$\sigma^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.43)$$

В настоящее время для проверки балок на прочность по главным напряжениям чаще всего применяются третья теория (наибольших касательных напряжений) (8.42) и четвертая (энергетическая) теория прочности (8.43).

Однако на практике при расчете балок до сих пор сохранилось применение теории наибольших нормальных напряжений (8.40), дающей часто более экономичные размеры поперечных сечений.

Таким образом, для уточнения размеров поперечного сечения балки производится проверка прочности в отдельных его точках.

Например, для балок двутаврового сечения (рис. 8.29) такая проверка производится в точках **1 – 1** и **3 – 3** поперечного сечения по нормальным напряжениям /формулы (8.19) или (8.20)/, в точках **4 – 4** и **5 – 5** – по главным напряжениям /формулы (8.40) – (8.43)/, в точках **2 – 2** – по касательным напряжениям /формула (8.34)/.

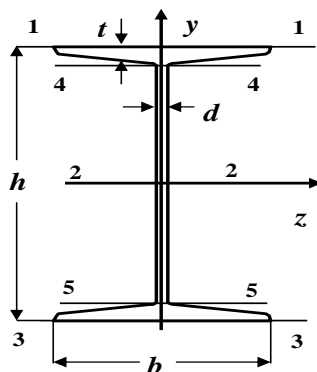


Рис. 8.29. Сечения балки, в которых производится проверки прочности

8.20 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Деформация балок. Основные понятия и определения

В предыдущих разделах были рассмотрены вопросы, относящиеся к расчету балок на прочность. Однако в большом количестве случаев практического расчета стержневых и рамных систем, работающих на изгиб, необходимо также производить их расчет на жесткость.

Под расчетом на жесткость понимается оценка упругой податливости плоских стержневых систем под действием нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать допустимых величин.

Для выполнения таких расчетов необходимо научиться вычислять перемещения поперечных сечений плоских стержневых систем под действием любой внешней нагрузки. Кроме этого, перемещения приходится определять и при расчете статически неопределимых конструкций.

Под действием внешних нагрузок балка деформируется и ее ось искривляется.

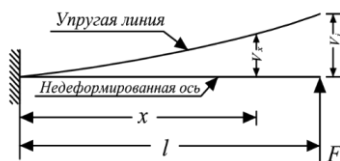
Определение. Плоская кривая, форму которой принимает ось балки при изгибе, называется изогнутой осью, или упругой линией.

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей.

Пренебрегая деформациями сдвига, можно считать угол поворота поперечного сечения балки φ равным углу между касательной, проведенной к изогнутой оси балки в этом сечении, и недеформированной осью балки, то есть углу поворота оси балки.

Допущение о малости перемещения позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной (геометрической) оси недеформируемого бруса (рис. 8.30).

а)



б)

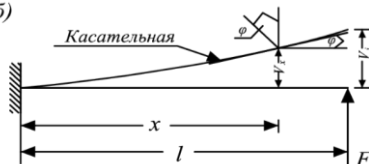


Рис. 8.30

Определение. Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному геометрической оси балки, называется прогибом балки в данном сечении и обозначается буквой v .

Определение. Наибольший прогиб называется стрелой прогиба и

обозначается буквой f .

Прогибы балки малы по сравнению с ее длиной, а поэтому их принято изображать в более крупном масштабе, чем длину оси.

Длина оси балки при изгибе остается неизменной, так как ось расположена в нейтральном слое, а нормальные напряжения в поперечных сечениях балки на

уровне нейтрального слоя равны нулю.

Искривление оси балки вызывает не только прогибы, но и смещения точек оси балки по горизонтали.

Эти смещения, как правило, весьма малы не только с длиной балки, но и с прогибами ее оси; поэтому ими при расчете пренебрегают.

Определение. Угол φ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Таким образом, при изгибе балок точки ее геометрической оси (x) получают вертикальные перемещения или прогибы (v), а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей (z) на угол φ (рис. 8.31).

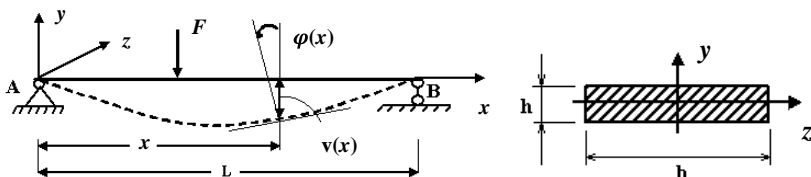


Рис. 8.31. Деформация балки при изгибе

Определение. Прогибы (v) и углы поворота (φ) часто называют линейными и угловыми перемещениями соответственно.

Правила знаков. Прогиб (v) считается положительным, если он происходит

вверх – в сторону положительной оси ординат y . Угол поворота (φ) считается

положительным, если поперечное сечение поворачивается против хода часовой стрелки, когда ось абсцисс x направлена слева направо (на рис. 8.31 $v(x) < 0$, а $\varphi(x) > 0$).

Прогибы балок измеряются в единицах длины (сантиметрах или миллиметрах), а углы поворота – в градусах или радианах.

Здесь и далее начало отсчета для координат x , y и z выбирается на левом конце балки.

Теория деформации балок, изучаемая в курсе сопротивления материалов, основывается на следующих предположениях (гипотезах):

1. Материал балки подчиняется закону Гука



($\sigma = E \cdot \varepsilon$), то есть напряжения в балке не выходят за предел пропорциональности.

2. Размеры поперечных сечений балки невелики по сравнению с ее длиной.

3. Прогибы балки (v) малы по сравнению с ее длиной L /расстоянием между опорами балки/, то есть отношение наибольшего прогиба f к длине пролета L балки устанавливается в следующих пределах

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000},$$

где

L – длина пролета балки (для консолей пролет L равен удвоенному вылету консоли).

4. Углы поворота поперечных сечений (φ) не превышают 1°

$$|\varphi_{\max}| \leq 1^\circ = 0,0175 \text{ рад.}$$

8.21 Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Выберем прямоугольную систему координат xOy с началом на левом конце оси балки. Ось x направим вправо (вдоль недеформированной оси балки), а ось y – вверх (рис. 8.31).

При таких условиях уравнение $v = f(x)$ представляет собой уравнение кривой, по которой изогнется ось балки под нагрузкой. Это и будет уравнение

изогнутой оси балки.

Касательная к изогнутой оси балки в рассматриваемом сечении составляет с осью x угол φ , то есть угол поворота поперечного сечения относительно первоначального положения.

Первая производная $\frac{dv}{dx}$ от $v = f(x)$ представляет собой тангенс угла φ между осью x и касательной к упругой линии

$$v'(x) = \operatorname{tg}\varphi(x),$$

Практически углы φ весьма малы. Они, как правило, менее $0,01$ радиана, поэтому, в связи с малостью деформаций балок, можно считать, что

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi,$$

следовательно, можно записать

$$v'(x) = \operatorname{tg}\varphi(x) \approx \varphi(x),$$

то есть

$$\varphi = \frac{dv}{dx} \tag{8.44}$$

Угол поворота φ поперечного сечения балки равен первой производной по x от прогиба v в этом сечении.

Для определения деформации балки в ее произвольном сечении



необходимо получить уравнение упругой линии $v = f(x)$.

Исходя из физической природы изогнутой оси балки, можно считать, что упругая линия должна быть непрерывной и гладкой (без изломов) кривой.

Следовательно, на протяжении всей оси балки должны быть непрерывны функция $v = f(x)$ и ее первая производная.

Плоскости двух смежных поперечных сечений деформированной балки, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , пересекаются в центре кривизны участка dx оси балки. Расстояние ρ от центра кривизны до оси балки называется радиусом кривизны оси.

При определении напряжений в случае чистого изгиба была получена формула кривизны (8.13):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}, \quad (8.45)$$

выражающая связь между радиусом кривизны оси балки, изгибающим моментом в поперечном сечении балки и жесткостью поперечного сечения при изгибе.

Величина EI_z , характеризующая сопротивляемость балки изменению ее первоначальной формы, называется жесткостью балки при изгибе.

Пренебрегая незначительным влиянием поперечной силы на величину деформаций, будем полагать эту формулу действительной и в общем случае плоского изгиба.

Из курса математического анализа известно уравнение кривизны плоской кривой:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (8.46)$$

Подставляя выражение (8.45) в формулу (8.46), получим

$$\frac{M}{EI_z} = \pm \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (8.47)$$

Мы получили точное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки.

Так как угол φ менее 0,01 радиана, то величиной $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 0,0001$ можно пренебречь.

Тогда уравнение (8.47) принимает вид:

$$\frac{M}{EI_z} = \pm \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (8.48)$$

или

$$v'' = \pm \frac{M}{EI_z} \quad (8.49)$$

Мы получили приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки.

Правила знаков для изгибающего момента установлены независимо от направления координатных осей (изгибающий момент M в поперечном сечении балки считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки).

Вторая же производная положительна, если в сторону положительного направления оси y обращена вогнутость кривой, и отрицательна – если выпуклость кривой (рис.8.32).

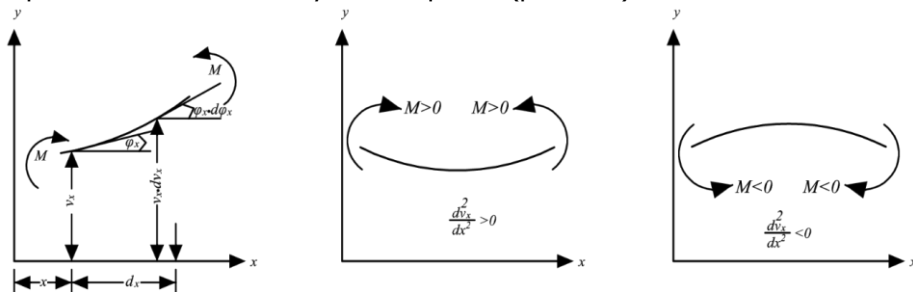


Рис. 8.32

При принятом правиле знаков для изгибающего момента, положительной второй производной соответствует положительный момент, а поэтому в формуле (8.49)

$$v'' = \pm \frac{M}{EI_z}$$

необходимо брать знак «плюс»

$$EI_z \cdot v'' = M \quad (8.50)$$

Полученное уравнение называется основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

Уравнение изогнутой оси балки (8.50) иногда удобно записать в иной форме, считая заданным не изгибающий момент M , а интенсивность внешней распределенной нагрузки.

Известно, что (8.5)

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2}.$$

В результате получим:

$$EI_z \cdot v''' = \frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad EI_z \cdot v^{IV} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x).$$

8.22 Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Этот метод заключается в том, что для каждого участка балки составляют выражение изгибающего момента, которое подставляют в *основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки* (8.50), и интегрируют два раза.

Проинтегрировав выражение (8.50) /для балки постоянного поперечного сечения/, получим уравнение углов поворота сечений балки:

$$EI_z \cdot v' = \int M \cdot dx + C.$$

Интегрируя второй раз, получаем уравнение прогибов (уравнение упругой линии):

$$EI_z \cdot v = \int dx \int M \cdot dx + C \cdot x + D.$$

При этом после каждого интегрирования появится некоторая постоянная величина и, следовательно, окончательный результат на каждом участке балки будет содержать *две постоянные неизвестные величины*.

Неизвестные произвольные постоянные интегрирования **C** и **D** определяют из граничных условий (*из условий закрепления балки*) и на границах смежных участков.

Граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и составляются относительно прогибов и углов поворота.

Так, например, для шарнирно опертой балки (рис. 8.33) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах:

$$v_B = 0 \text{ и } v_D = 0 \quad (8.51)$$

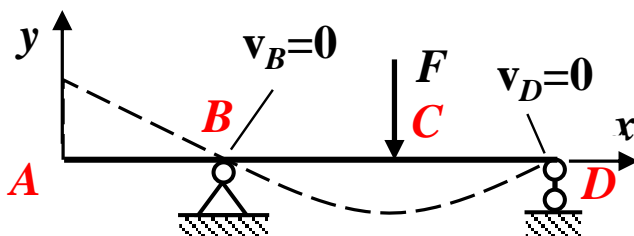


Рис. 8.33. Шарнирно опертая балка

Для жестко заделанной балки (рис. 8.34) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке:

$$v_A = 0 \text{ и } \varphi_A = 0 \quad (8.52)$$

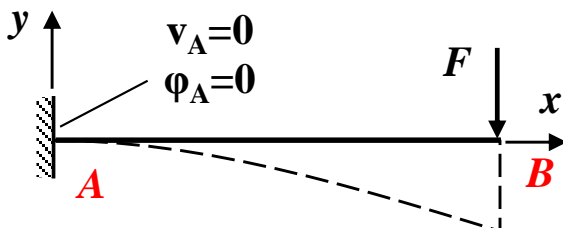


Рис. 8.34. Жестко защемленная балка

На границах двух смежных участков (рис. 8.35) прогиб и угол поворота для левого и правого участков равны между собой

$$v_{\text{лев}} = v_{\text{прав}}; \quad \varphi_{\text{лев}} = \varphi_{\text{прав}} \quad (8.53)$$

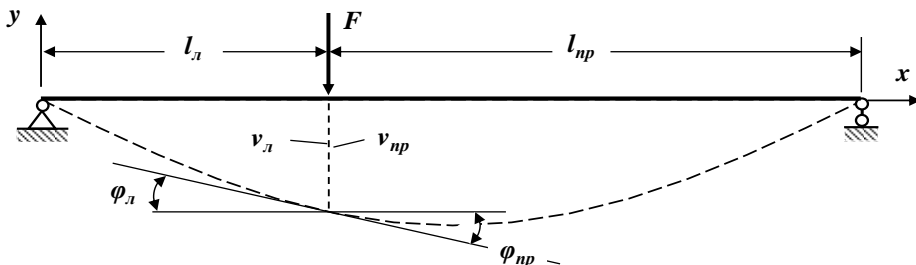


Рис. 8.35

В каждом конкретном случае необходимо выбрать то или иное граничное условие.

Рассмотрим балку, жестко заделанную правым концом и нагруженную на свободном конце сосредоточенной силой F , линия действия которой совпадает с вертикальной главной осью поперечного сечения балки.

Определим прогиб и угол поворота поперечного сечения балки на ее свободном левом конце (рис. 8.36).

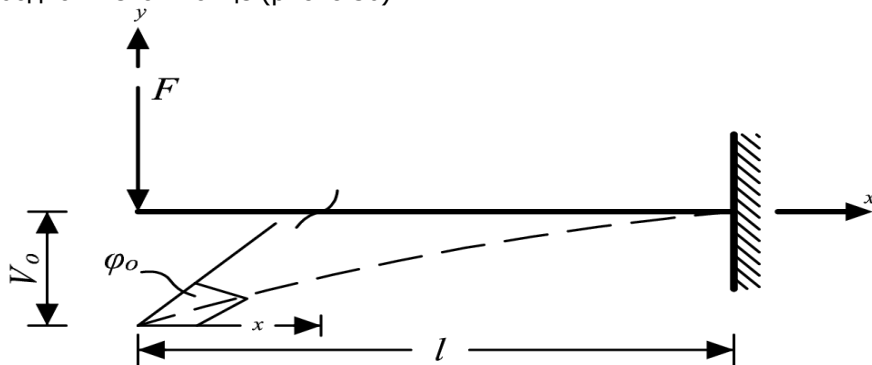


Рис. 8.36

Балка имеет один участок.

Изгибающий момент в сечении балки с абсциссой x равен

$$M = -F \cdot x.$$

Подставив это выражение в дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (8.50), получим:

$$EI_z \cdot v'' = -F \cdot x.$$

Постоянные интегрирования C и D определим из условий закрепления правого конца балки. Здесь (при $x = \ell$) прогиб v_ℓ и угол поворота сечения φ_ℓ равны нулю.

Подставим значения $x = \ell$ в выражения для v и φ , получим значения постоянных интегрирования и уравнения для определения углов поворота и прогибов для этой балки:

$$C = \frac{F \cdot \ell^2}{2}; D = \frac{F \cdot \ell^3}{3} \rightarrow \varphi = \frac{F}{2E \cdot I_z} (\ell^2 - x^2); v = \frac{F}{6E \cdot I_z} (2\ell^3 - 3\ell^2 \cdot x + x^3) \quad (8.54)$$

По этим уравнениям можно определить прогиб v и угол поворота φ любого поперечного сечения этой балки с координатой x .

Прогиб свободного конца балки и угол поворота сечения ($x = 0$) будут равны:

$$v_{(0)} = v_{\max} = -\frac{F \cdot \ell^3}{3E \cdot I_z}; \quad (8.55)$$

$$v'_{(0)} = \varphi_{(0)} = -\frac{F \cdot \ell^2}{2E \cdot I_z}. \quad (8.56)$$

Сравнивая выражения для C и D (8.54) с выражениями (8.55 и 8.56) для прогиба и угла поворота в начальном сечении ($x = 0$), видим, что C равно начальному углу поворота, а D равно начальному прогибу (с множителем EI_z).

Таков физический смысл произвольных постоянных интегрирования для любой балки при произвольной нагрузке.

Если на балку будут действовать несколько внешних сил, приложенных в разных ее сечениях, то применяя этот метод к отдельным участкам балки, получим в результате систему уравнений с большим числом неизвестных.

8.23 Правила уравнивания одноимённых постоянных интегрирования. Правила Клебша

Если балка имеет несколько участков, то для каждого из них выражения для изгибающего момента будут различными.

Следовательно, для каждого участка должно быть составлено и дважды проинтегрировано дифференциальное уравнение упругой линии балки. При этом на каждом участке будет по две неизвестных постоянных интегрирования.

Для их определения к двум опорным условиям балки должны быть добавлены условия плавного и непрерывного сопряжения участков балки между собой. Эти дополнительные условия выражают отсутствие разрывов и изломов упругой линии балки на границах участков (8.53).

Применяя правила Клебша можно добиться равенства между собой одноименных постоянных интегрирования на всех соседних участках.

То есть

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n; \quad D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D_n \quad (8.57)$$

Для уравнивания между собой одноименных постоянных интегрирования на всех соседних участках необходимо непременно выполнить следующие требования Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси y (v) – вверх.

2. При включении в уравнение внешнего сосредоточенного момента M_n его необходимо умножать на множитель $(x - a)^0$, равный единице. Здесь a координата сечения, в котором приложен сосредоточенный момент.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений на всех участках балки выполняется без раскрытия скобок, то есть по новой переменной $(x - a)$.

Следовательно, выражение $F \cdot (x - a_n) \cdot dx$ заменяется выражением $F \cdot (x - a_n) \cdot d(x - a_n)$.

Отсюда,

$$\int F(x - a_n) dx = \int F(x - a_n) d(x - a_n) = \frac{F \cdot (x - a_n)^2}{2} + C.$$

Выражение $M_n \cdot dx$ заменяется выражением $M_n \cdot (x - a_n)^0 \cdot d(x - a_n)$.

Отсюда,

$$\int M_n dx = \int M_n (x - a_n)^0 d(x - a_n) = M_n (x - a_n) + C.$$

4. При действии на балку распределенной нагрузки, не доходящей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого концевое сечения, одновременно уравновесивая ее противоположно направленной

нагрузкой той же интенсивности, как это показано на рис. 8.37.

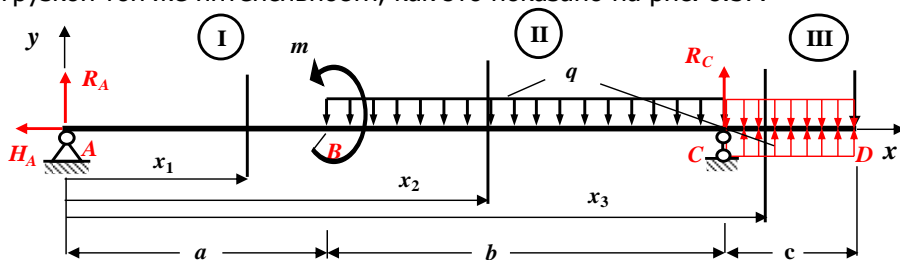


Рис. 8.37. Требования Клебша

Для расчета балок на жесткость (определение перемещений в плоских стержневых системах) в курсе сопротивления материалов обычно изучают метод начальных параметров и метод Мора (интеграл Мора) с использованием

правила Верещагина (правила «перемножения» эпюр).

Метод начальных параметров удобно применять в том случае, когда необходимо определить перемещения в нескольких сечениях балки. Основным недостатком этого метода является то, что его можно применять только для расчета балок.

Метод Мора, в отличие от метода начальных параметров, является универсальным. Его можно применять для определения перемещений любых объектов – балок, плоских и пространственных рам, арок и др.

8.24 Метод начальных параметров

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси для балок с большим количеством участков сопряжено с большими трудностями. Задача определения прогибов и углов поворота может быть значительно упрощена, если применять так называемое универсальное уравнение изогнутого бруса (метод начальных параметров).

Академиком А.Н. Крыловым подобная задача была решена в общем виде для балки, условно нагруженной всеми возможными типами внешних нагрузок.

Метод начальных параметров не требует составления выражений изгибающих моментов и дифференцирования уравнений. Число неизвестных постоянных, подлежащих определению, не превышает двух, независимо от числа участков балки.

По методу начальных параметров прогиб в любом сечении балки определяется через перемещения и силовые факторы, взятые в начале координат, с учетом приложенной к балке нагрузки.

Рассмотрим балку постоянного поперечного сечения ($EI_z = \text{const}$),

загруженную произвольной внешней нагрузкой (рис. 8.38).

Правило знаков. Условимся считать направления внешних нагрузок, показанных на рис. 8.38, положительными.

Будем выполнять требования Клебша.

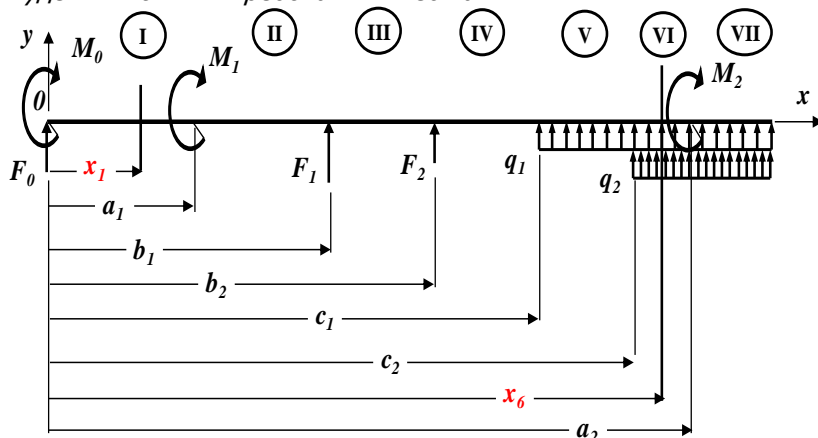


Рис. 8.38

Разобьем балку на ряд участков таким образом, чтобы на протяжении каждого участка изгибающий момент выражался с помощью непрерывной функции.

Рассмотрим первый участок, прилегающий к началу координат.

1 участок: $0 \leq x_1 \leq a_1$ (начало отсчета на левой границе участка).

Составляем выражение для изгибающего момента:

$$M_1 = M(x_1) = M_0 + F_0 \cdot x_1$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для этого участка балки имеет вид:

$$v_1'' = \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{M_1}{EI_z}$$

Следовательно,

$$v_1'' = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 + F_0 \cdot x_1]$$

Проинтегрируем это уравнение дважды

$$v_1' = \varphi(x_1) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot x_1 + F_0 \cdot \frac{x_1^2}{2}] + C_1;$$

$$v_1 = v(x_1) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot \frac{x_1^2}{2} + F_0 \cdot \frac{x_1^3}{6}] + C_1 \cdot x_1 + D_1.$$

Подставив $x_1 = 0$ в выражения для v_1' и v_1 , получим значения произвольных постоянных интегрирования:

$$v_1' = \varphi(0) = \varphi_0 = C_1,$$



то есть

$$C_1 = \varphi_0. \quad (8.58)$$

$$v_1 = v(0) = v_0 = D_1,$$

то есть

$$D_1 = v_0. \quad (8.59)$$

В этих формулах:

v_0 и φ_0 – прогиб и угол поворота поперечного сечения, расположенного в начале координат (в крайнем левом сечении балки).

Аналогично рассмотрим еще один произвольный участок балки, например **б – й** участок.

б участок: $c_2 \leq x_6 \leq a_2$ (начало отсчета на левой границе участка).

Составляем выражение для изгибающего момента:

$$M_6 = M(x_6) = M_0 + F_0 \cdot x_6 + M_1 \cdot (x_6 - a_1)^0 + F_1 \cdot (x_6 - b_1) + F_2 \cdot (x_6 - b_2) + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^2}{2} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^2}{2}.$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для этого участка балки имеет вид:

$$v_6'' = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 + F_0 \cdot x_6 + M_1 \cdot (x_6 - a_1)^0 + F_1 \cdot (x_6 - b_1) + F_2 \cdot (x_6 - b_2) + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^2}{2} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^2}{2}].$$

Проинтегрируем это уравнение дважды:

$$v_6' = \varphi(x_6) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot x_6 + F_0 \cdot \frac{x_6^2}{2} + M_1 \cdot (x_6 - a_1) + F_1 \cdot \frac{(x_6 - b_1)^2}{2} + F_2 \cdot \frac{(x_6 - b_2)^2}{2} + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^3}{6} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^3}{6}] + C_6;$$

$$v_1 = v(x_6) = \frac{1}{EI_z} \cdot [M_0 \cdot \frac{x_6^2}{2} + F_0 \cdot \frac{x_6^3}{6} + M_1 \cdot \frac{(x_6 - a_1)^2}{2} + F_1 \cdot \frac{(x_6 - b_1)^3}{6} + F_2 \cdot \frac{(x_6 - b_2)^3}{6} + q_1 \cdot \frac{(x_6 - c_1)^4}{24} + q_2 \cdot \frac{(x_6 - c_2)^4}{24}] + C_6 \cdot x_6 + D_6$$

Так как мы выполнили все требования Клебша, то имеем право записать, учитывая (8.58) и (8.59), что

$$C_1 = C_2 = \dots = C_6 = \dots = C_n = \varphi_0; \quad D_1 = D_2 = \dots = D_6 = \dots = D_n = v_0 \quad (8.60)$$

Следовательно, окончательно для **n-го** участка балки можно записать, расставив слагаемые в правой части в порядке возрастания степени:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2EI_z} + F_0 \cdot \frac{x^3}{6EI_z} + \sum M_i \cdot \frac{(x - a_i)^2}{2EI_z} + \sum F_j \cdot \frac{(x - b_j)^3}{6EI_z} + \sum q_k \cdot \frac{(x - c_k)^4}{24EI_z} \quad (8.61)$$

Мы получили универсальное уравнение изогнутой оси балки, выраженное через начальные параметры z_0 , φ_0 , M_0 и P_0 .

Так как

$$\varphi = \frac{dv}{dx}$$

то, продифференцировав это универсальное уравнение изогнутой оси балки по x , получим универсальное уравнение для углов поворота:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + M_0 \cdot \frac{x}{EI_z} + F_0 \cdot \frac{x^2}{2EI_z} + \sum M_i \cdot \frac{(x - a_i)}{EI_z} + \sum F_j \cdot \frac{(x - b_j)^2}{2EI_z} + \sum q_k \cdot \frac{(x - c_k)^3}{6EI_z} \quad (8.62)$$

В этих формулах:

$v(x)$ – величина прогиба в произвольном сечении балки на расстоянии x от начала отсчета;

v_0, φ_0 – прогиб и угол поворота поперечного сечения балки в начале системы координат (кинематические начальные параметры);

M_0, F_0 – сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат (статические начальные параметры);

M_i – сосредоточенный момент на расстоянии $a_i > 0$ от начала координат;

F_j – сосредоточенная сила на расстоянии $b_j > 0$ от начала координат;

q_k – интенсивность распределенной нагрузки, которая начинается на расстоянии $c_k > 0$ от начала координат;

EI_z – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Статические начальные параметры M_0 и F_0 (сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат) могут быть

известны (внешняя нагрузка) или должны быть определены из условий статики (опорные реакции).

Неизвестные кинематические начальные параметры v_0 и φ_0 определяются из условий закрепления балки (кинематические граничные условия).

Кинематические граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и состояются относительно прогибов и углов поворота.

Так, например, для шарнирно опертой балки граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах (рис. 8.39):

$$v_A = 0 \text{ и } v_B = 0.$$

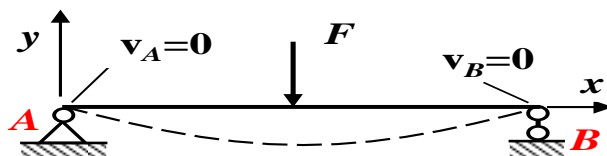


Рис. 8.39. Шарнирно опертая балка

Для жестко защемленной балки граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке (рис. 8.40)

$$v_A = 0 \text{ и } \varphi_A = 0.$$

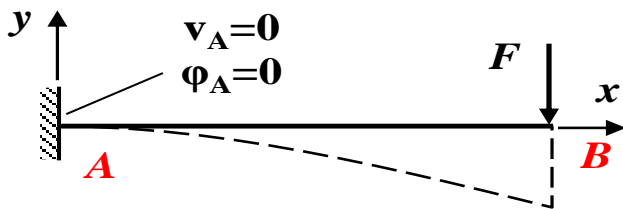


Рис.8.40. Жестко защемленная балка

Таким образом, для определения прогибов и углов поворота в произвольных поперечных сечениях балок методом начальных параметров достаточно лишь знаний величин прогиба v_0 и угла поворота φ_0 в начале системы координат, то есть так называемых кинематических начальных параметров. Поэтому данный метод называется *методом начальных параметров*.

Применение метода начальных параметров требует неизменного выполнения следующих требований Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси y (v) – вверх.

2. При действии распределенной нагрузки, не достигающей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого конечного сечения, одновременно

уравновешивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано на рис. 8.37.

Нагрузки (M_0 , F_0 , M_i , F_j , q_k) считаются положительными, если они направлены так, как показано на рис. 8.41, и отрицательными – в противном случае.

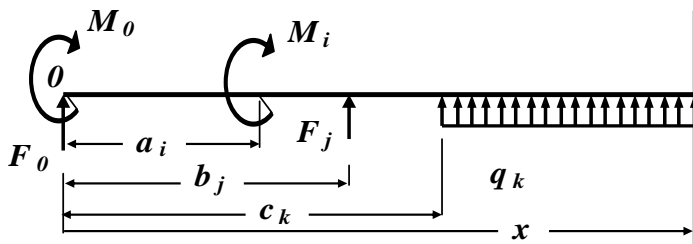


Рис. 8.41 Правила знаков метода начальных параметров

После того, как будут найдены все начальные параметры, можно написать окончательные уравнения прогибов, а продифференцировав их, и углов поворота для каждого участка балки.



Придавая величине x ряд значений, и вычисляя в соответствующих характерных точках численные значения прогибов и углов поворота, можно построить *эпюры прогибов и углов поворота оси балки*.

8.25 Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов

Из теории изгиба балок известно, что величины Q , M , φ и v связаны между собой дифференциальными зависимостями:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}; \quad \frac{dv}{dx} = \varphi(x); \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EI_z}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (8.63)$$

На основании этих зависимостей строятся правила построения и контроля эпюр углов поворота и прогибов:

1. Если изгибающий момент на каком-то участке балки положительный ($M > 0$), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз.

2. Если изгибающий момент на каком-то участке балки отрицательный ($M < 0$), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

3. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю

($M = 0$) /при смене знака/ или имеет «скачок» /при смене знака/, то на эпюре прогибов в этом сечении наблюдаем точку перегиба (т.п.).

4. Если угол поворота в каком-то сечении балки равен нулю ($\varphi = 0$) /при смене знака/, то на эпюре прогибов этом сечении наблюдаем точку экстремума (т. э.).

5. Если поперечная сила на каком-то участке балки положительная

($Q > 0$), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз. Если поперечная сила на каком-то участке балки отрицательная ($Q < 0$), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

6. Если поперечная сила в каком-то сечении балки равна нулю ($Q = 0$) /при смене знака/ или имеет «скачок» /при смене знака/, то на эпюре углов поворота в этом сечении балки наблюдаем точку перегиба (т. п.).

7. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю

($M = 0$) /при смене знака/ или имеет «скачок» /при смене знака/, то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку экстремума (т. э.).

8. Если на эпюре изгибающих моментов в каком-то сечении балки

наблюдается «скачок», то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку излома (т. и.).

8.26 Расчет балок на жесткость. Проверка выполнения условия жесткости балки

Определение. Сечение, в котором перемещение (прогиб балки) принимает максимальное по абсолютной величине значение f , называется опасным сечением балки из условия жесткости.

Условие жесткости при изгибе имеет вид

$$f \leq [f]. \quad (8.64)$$

Здесь

f – стрела прогиба (максимальное по абсолютной величине значение прогиба);

$[f]$ – величина допускаемого прогиба.

Для проверки выполнения условия жесткости балки из эпюры прогибов определяется в опасном сечении балки максимальное по абсолютной величине значение прогиба $|v_{max}| = f$, которое подставляется в условие (8.64).

Величина допускаемого прогиба $[f]$ для реальных сооружений приведена в СП (Свод правил) и может изменяться в довольно широком диапазоне

$$[f] = \frac{L}{100} \div \frac{L}{1000},$$

где

L – длина пролета (для консолей пролет L равен удвоенному вылету консоли).

Обычно условие жесткости балки (8.64) выполняется.

В противном случае, из условия жесткости $f \leq [f]$ необходимо определить величину $I_z^{треб}$ и подобрать новые размеры поперечного сечения балки.

Чтобы одновременно выполнялись условие прочности и условие жесткости, необходимо окончательно выбрать большее сечение.

8.27 Раскрытие статической неопределенности упругих стержневых систем

Закрепления, необходимые для кинематической неизменяемости системы, обеспечиваются либо защемлением одного из концов балки, либо двумя шарнирными опорами, из которых одна неподвижная, а другая подвижная, то есть наименьшее число связей, не позволяющих балке (раме) перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.

В этом случае три неизвестные опорные реакции определяются из условий равновесия (статики).

Такие балки называются статически определимыми.

В инженерной практике очень часто, по условиям работы конструкции, оказывается необходимым увеличить число опорных закреплений. В этом случае число наложенных связей (число неизвестных опорных реакций) больше числа уравнений равновесия (статики).

Для расчета таких систем на прочность и жесткость, так же как и в рассмотренных ранее статически определимых задачах, необходимо построить обычным способом эпюры внутренних усилий, прогибов и углов поворота, а для этого необходимо предварительно определить все опорные реакции.

Такие системы называются статически неопределимыми.

Определение. Статически неопределимые системы – это упругие стержневые системы, у которых число неизвестных опорных реакций превышает число независимых уравнений равновесия (уравнений статики), возможных для этой системы.

В этих системах, используя только уравнения равновесия, невозможно определить ни реакции опор, ни внутренние усилия, возникающие в элементах конструкций.

Исключение составляют многопролетные балки (состоящие из нескольких отдельных балок, соединенных между собой промежуточными шарнирами), которые могут быть статически определимыми и при числе наложенных связей больше трех.

Степень статической определимости (неопределимости) простых стержневых систем обычно определяется как разность между количеством неизвестных опорных реакций и количеством уравнений равновесия (уравнений статики), которые можно составить для данной системы.

На рис. 8.42, а, в изображены две статически неопределимые балки, на каждую из которых наложены четыре внешние связи.

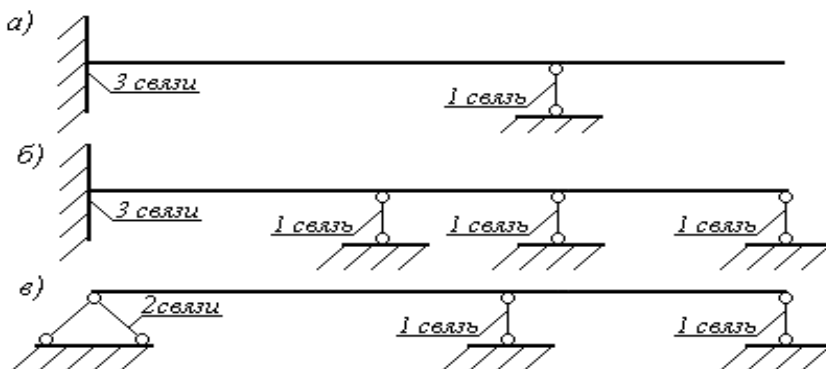


Рис. 8.42

Следовательно, эти балки один раз статически неопределимы.

На рис. 8.42, б показана балка с шестью наложенными внешними связями, следовательно, она три раза статически неопределима.

Определение. Степень статической неопределимости балки, не имеющей промежуточных шарниров, соединяющих друг с другом отдельные элементы балки, равна избыточному (лишнему) числу внешних связей (сверх трех).

Статически неопределимые балки часто называют неразрезными балками.

Степень статической определимости (неопределимости) сложных стержневых систем определяется числом «лишних» связей по формуле:

$$S = 3k - \text{ш}, \quad (8.65)$$

где

k – число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений (рис. 8.43);

ш – число одиночных шарниров.

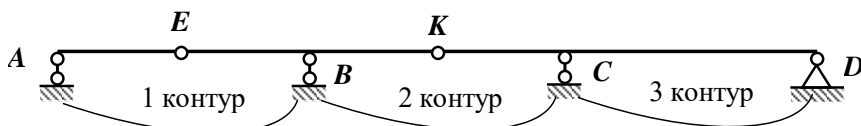


Рис. 8.43. Статически определимая многопролетная балка

Так для шарнирно – неподвижной опоры (опора D на рис. 8.43) число одиночных шарниров – **1**, для шарнирно – подвижной опоры (например, опора A на рис. 8.43) число одиночных шарниров – **2**.

Для сложного шарнира ($\text{---}\bigcirc\text{---}$) число одиночных шарниров определяется по формуле:

$$\text{ш} = c - 1,$$

где

c – число стержней, подходящих к шарниру.

На рис. 8.43 шарниры E и K – одиночные, так как к каждому из них подходит по два стержня.

Если $S = 0$, то задача статически определимая. При $S > 0$ задача статически неопределимая, а при $S < 0$ – система геометрически изменяемая.

Так на рис. 8.43 балка имеет три замкнутых контура ($k = 3$) и девять одиночных шарниров ($\text{ш} = 9$), поэтому $S = 3k - \text{ш} = 3 \cdot 3 - 9 = 0$, следовательно, эта балка статически определимая.

Для определения всех неизвестных опорных реакций статически неопределимой системы составляют дополнительные уравнения,



выражающие условия ее закрепления на опорах (рис. 8.39 и рис. 8.40).

Эти дополнительные уравнения условно называют *уравнениями перемещений* или *уравнениями совместности деформаций*.

Количество дополнительных уравнений перемещений, необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно быть равно степени статической неопределимости системы.

Совместное решение уравнений равновесия и уравнений перемещений позволяет определить все неизвестные опорные реакции. Этот этап решения задачи называется раскрытием статической неопределимости системы.

Определение. Раскрыть статическую неопределимость системы – это значит определить численные значения всех опорных реакций.

Определив все опорные реакции, можно обычным путем построить эпюры внутренних усилий, а также определить величину вертикального перемещения и угла поворота любого сечения балки так же, как это делается в статически определимых балках.

8.28 Порядок решения статически неопределимых задач

Статически неопределимые конструкции рассчитываются, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи. При этом придерживаются следующего порядка:

1. *Статическая сторона задачи.* Определяется степень статической неопределимости системы. Составляются уравнения равновесия, содержащие неизвестные опорные реакции системы.

2. *Геометрическая сторона задачи.* Рассматриваются кинематические граничные условия (условия на опорах), отражающие характер закрепления (опирания) системы, и записываются уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений).

3. *Физическая сторона задачи.* На основании закона Гука (например, уравнения метода начальных параметров, которое получено на основе закона Гука) уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений) выражаются через неизвестные опорные реакции.

4. *Синтез уравнений.* Решая совместно систему уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи, определяются численные значения всех опорных реакций.

Существует много методов раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем. Для балок постоянного поперечного сечения, нагруженных всеми возможными типами нагрузок, при произвольном количестве участков, раскрытие статической неопределимости и

определение прогибов целесообразно производить, применяя универсальное уравнение метода начальных параметров.

8.29 Потенциальная энергия деформации балок

Кроме рассмотренных способов вычисления прогибов и углов поворота сечений балок существует более общий метод, пригодный для определения деформаций любых упругих конструкций. Он основан на применении закона сохранения энергии.

Под действием внешних сил тела деформируются. Эта деформация протекает постепенно, возрастая от нуля до какого – то конечного значения, в зависимости от величины, действующей на тело нагрузки. При изучении деформаций считают, что нагрузки к телам прикладываются статически, то есть так, что от нуля до своего конечного значения они возрастают постепенно, медленно меняясь по закону прямой.

При таком способе нагрузки упругого тела можно считать, что тело не испытывает никаких ускорений, а следовательно, и никаких других сил, кроме прикладываемой к нему статической нагрузки.

Под воздействием внешних сил тело, деформируясь, накапливает в себе (аккумулирует) определенное количество энергии, называемое *потенциальной энергией деформации U* .

Потенциальная энергия деформации U возникает в упругом брус за счет работы внешних сил A . В процессе упругой деформации наблюдается переход одного вида потенциальной энергии в другой, а именно: в рассматриваемом случае потенциальная энергия действующих на брус нагрузок переходит в потенциальную энергию деформации бруса.

Полагая, что закон сохранения энергии полностью распространяется на рассматриваемое явление (образование потенциальной энергии деформации тела), можно считать, что потенциальная энергия деформации U упругого тела численно равна работе внешних сил A , то есть

$$U = A \quad (8.66)$$

В общем случае изгибающий момент $M(x)$ является величиной переменной.

В любом сечении ему может сопутствовать поперечная сила $Q(x)$. Поэтому рассматривать следует не всю балку в целом, а лишь бесконечно малый элемент балки длиной dx (рис.8.44).

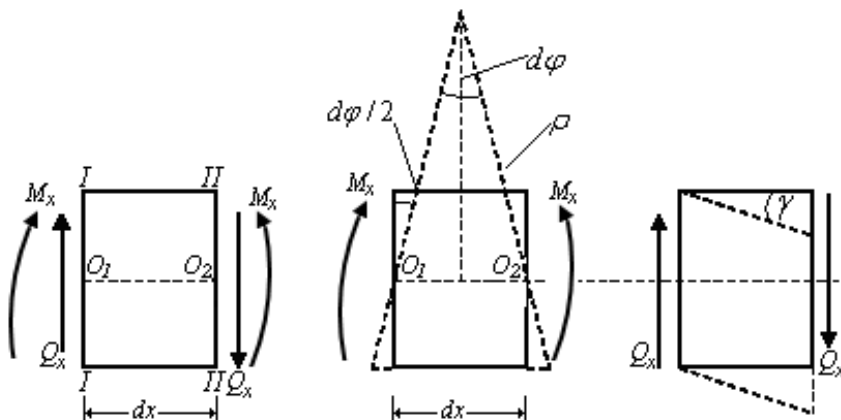


Рис. 8.44

Под действием изгибающих усилий сечения элемента поворачиваются и образуют между собой угол $d\varphi$. Касательные же усилия стремятся вызвать перекося элемента. Таким образом, перемещения от нормальных напряжений идут перпендикулярно к направлению касательных напряжений, и наоборот.

Это позволяет независимо вычислять работу изгибающих и касательных усилий.

Обычно работа касательных усилий оказывается малой по сравнению с работой нормальных и ею, как правило, пренебрегают.

Элементарная работа нормальных усилий равна:

$$dA_F = dU = \frac{1}{2} M_{(x)} d\varphi.$$

С искривлением оси балки связан взаимный поворот сечений. Длина отрезка O_1O_2 равна:

$$O_1O_2 = dx = \rho d\varphi$$

Отсюда угол поворота двух смежных сечений

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}$$

При определении напряжений в случае чистого изгиба была получена формула кривизны (8.13):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z},$$

выражающая связь между радиусом кривизны оси балки, изгибающим моментом в поперечном сечении балки и жесткостью поперечного сечения при чистом изгибе.

Пренебрегая незначительным влиянием поперечной силы Q на величину деформаций, будем полагать эту формулу действительной и в



общем случае плоского изгиба, то есть:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI}$$

В этом случае

$$d\varphi = \frac{M_{(x)}dx}{EI} \quad (8.67)$$

Следовательно, поворот сечений $d\varphi$ и кривизна оси балки $1/\rho$ прямо пропорциональны величине изгибающего момента и обратно пропорциональны жесткости балки EI .

Тогда выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$dU = \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI} \quad (8.68)$$

Полная потенциальная энергия изгиба получится суммированием по длине балки:

$$U = \int_l \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \int_l M_{(x)}^2 dx \quad (8.69)$$

Полученная формула справедлива для балки постоянной жесткости EI .

При выводе этой формулы мы пренебрегли величиной потенциальной энергии деформации сдвига, возникающей от действия поперечной силы Q , так как влияние ее, соответственно вычислениям, в подавляющем большинстве случаев мало.

Полученная формула (8.69) для определения потенциальной энергии деформации балки при изгибе может быть использована при решении задач по определению деформаций балок.

В случае балки с несколькими участками, интеграл (8.69) разбивается на сумму интегралов:

$$U = \frac{1}{2EI} \sum_1^n \int_{l_i} M_{(x_i)}^2 dx \quad (8.70)$$

8.30 Метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации

Установим метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации. В основе этого метода лежит теорема Кастильяно.

Определение. Производная потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению (теорема Кастильяно).

Определение. Обобщенной силой называют любую нагрузку,

вызывающую деформацию.

Определение. Перемещение, соответствующее этой обобщенной силе, называют обобщенным перемещением.

Соответствие заключается в том, что речь идет о перемещении сечения, где приложена сила, причем о таком перемещении, произведение которого на эту силу дает работу.

Для сосредоточенной силы, приложенной в сечении балки, за обобщенное перемещение принимают прогиб в том сечении, где приложена сила.

Для изгибающей пары сил за обобщенное перемещение принимают угол поворота сечения в том сечении, где приложена пара сил.

В случае сплошной равномерно распределенной по всему пролету балки нагрузки обобщенным перемещением является площадь, заключенная между первоначальной осью балки и осью изогнутой балки.

Исследуем метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации.

Рассмотрим балку, на которую действуют в разных сечениях сосредоточенные силы и пары сил (рис. 8.45)

Для случая изгиба имеем формулу полной потенциальной энергии (8.69)

$$U = \int_l \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI},$$

связывающую величину потенциальной энергии U с изгибающими моментами.

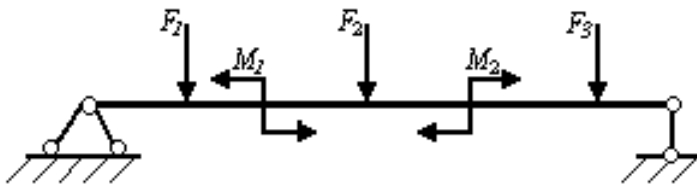


Рис. 8.45

Вычислим частную производную от U по одной из внешних сил, например F_1 . Получим

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{\partial}{\partial F_1} \left[\int_l \frac{M_{(x)}^2 dx}{2EI} \right].$$

Имеем случай дифференцирования определенного интеграла по параметру. При этом,

$M_{(x)}$ – функция, интегрирование которой проводится по x , а дифференцирование – по параметру F_1 .

Как известно, если пределы интеграла постоянные, то следует просто

дифференцировать подынтегральную функцию.

Таким образом, прогиб в точке приложения сосредоточенной силы F_1 равен:

$$v_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1} = \int_l \frac{M_{(x)} dx}{EI} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial F_1} \quad (8.71)$$

Угол поворота сечения с парой M_1 равен:

$$\varphi_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int_l \frac{M_{(x)} dx}{EI} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial M_1} \quad (8.72)$$

Если требуется определить линейное или угловое перемещение в точке, где по условию задачи обобщенная сила отсутствует, то в этой точке следует приложить соответствующую фиктивную обобщенную силу.

Затем, написав выражение для изгибающего момента от системы сил, включая указанную фиктивную силу, необходимо взять его производную по этой фиктивной силе и в полученном выражении для перемещения положить фиктивную обобщенную силу равной нулю.

8.31 Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора

Любое сооружение под действием внешних факторов деформируется, изменяя свою первоначальную форму, и принимает форму равновесия, при котором влияние внешних воздействий уравнивается внутренними силами сопротивления.

При этом прогиб и угол поворота балки (рамы) в точке приложения сосредоточенной силы могут быть вычислены по формулам (8.71 и 8.72):

$$v_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_l \frac{M_{(x)} dx}{EI} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial F}; \quad \varphi_M = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_l \frac{M_{(x)}}{EI} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial M} dx.$$

Выясним сущность этих производных.

Если на балку действует произвольная внешняя нагрузка, то момент $M_{(x)}$ в любом сечении такой балки выражается линейной функцией от нагрузок:

$$M_{(x)} = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 + \dots + b_1 M_1 + b_2 M_2 + \dots + c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots$$

Коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ являются функциями пролета балки, расстояний точек приложения сил и моментов от опор и абсциссы x рассматриваемого сечения.

Например, определим прогиб точки приложения силы F_1 . (рис. 8.46)

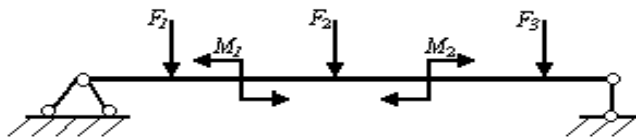


Рис. 8.46

В этом случае

$$\frac{\partial M_{(x)}}{\partial F_1} = a_1'$$

а $F_2, F_3, \dots, M_1, M_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ при этом дифференцировании постоянные величины.

Следовательно, a_1 можно рассматривать как численную величину момента M в любом сечении балки от действия, так называемой, единичной нагрузки, то есть силы $F = 1$.

Действительно, подставляя в формулу вместо F_1 его частное значение – единицу, и приравнявая все остальные нагрузки нулю, получаем

$$M = a_1.$$

Например, для балки (рис. 8.47) изгибающий момент в ее произвольном сечении равен

$$M_{(x)} = -Fx - \frac{qx^2}{2}$$

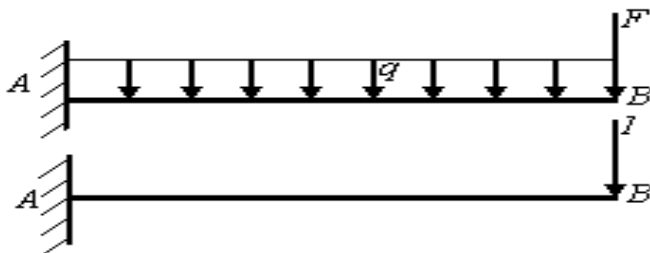


Рис. 8.47

Производная в этом случае равна

$$\frac{\partial M_{(x)}}{\partial F} = -x.$$

Это выражение равно изгибающему моменту балки в ее произвольном сечении, если нагрузить ее силой равной *единице*, приложенной в той же точке B , где расположена сила F , и направленной в ту же сторону.

Аналогично, производная изгибающего момента $M_{(x)}$ по моменту пары сил M_1 численно представляет собой изгибающий момент от пары с моментом, равным *единице*, приложенной в том же сечении, где имеется пара M_1 и направленной в ту же сторону.

Таким образом, вычисление производных изгибающего момента можно заменить вычислением изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Эти моменты обозначают \bar{M} .

Следовательно, для отыскания перемещений Δ (прогиба или угла поворота) любого сечения балки, вне зависимости от того, приложена или не приложена в этом сечении соответствующая сила, необходимо найти выражение для изгибающего момента $M(x)$ от заданной нагрузки и момента \bar{M} от соответствующей единичной нагрузки, приложенной в сечении, где требуется найти перемещение Δ .

Тогда это перемещение выразится формулой:

$$\Delta = \int_0^l \frac{M(x)\bar{M}}{EI} dx \quad (8.73)$$

Полученное выражение (8.73) называется *интегралом (формулой) Мора*.

Если в формуле (8.73) под Δ подразумевается прогиб, то момент \bar{M} необходимо вычислять от сосредоточенной единичной безразмерной силы, приложенной в той точке, где отыскивается прогиб.

При вычислении же угла поворота в качестве единичной нагрузки прикладывается безразмерная пара сил с моментом равным единице.

Если при вычислении изгибающих моментов приходится делить балку (раму) на участки, то и интеграл в формуле для перемещений (8.73) распадается на сумму интегралов.

8.32 Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора с использованием правила Верещагина

Вычисление интеграла Мора (8.73) удобно производить по правилу Верещагина (правилу «перемножения» эпюр).

Так как единичной нагрузкой бывает обычно либо сосредоточенная сила, либо пара сил, то эпюра \bar{M} ограничена прямыми линиями. Поэтому вычисление $\int M(x)\bar{M} dx$ при любом очертании эпюры $M(x)$ можно произвести следующим образом (рис. 8.48)

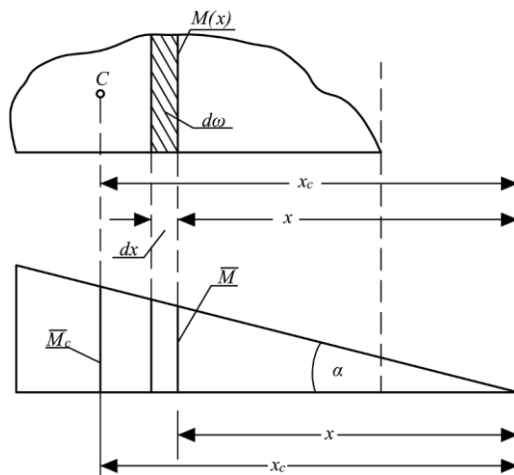


Рис. 8.48

Пусть эпюра $M(x)$ имеет криволинейное очертание, а эпюра \bar{M} - прямолинейное.

Произведение $M(x) \cdot dx$ можно рассматривать как элемент $d\Omega$ площади эпюры $M(x)$. Ордината $\bar{M} = x \cdot \operatorname{tga}$.

Тогда произведение

$$M(x) \cdot dx \cdot \bar{M} = d\Omega \cdot x \cdot \operatorname{tga},$$

а весь интеграл

$$M(x) \cdot dx \cdot \bar{M} = \operatorname{tga} \cdot \int d\Omega \cdot x$$

представляет собой статический момент площади эпюры $M(x)$ относительно точки A , умноженный на tga .

Но этот статический момент равен всей площади Ω эпюры $M(x)$, умноженной на расстояние от ее центра тяжести x_c до точки A .

Таким образом,

$$\int M(x) \cdot \bar{M} dx = \Omega \cdot x_c \cdot \operatorname{tga}$$

Величина $x_c \cdot \operatorname{tga}$ равна ординате \bar{M}_c эпюры \bar{M} .

Отсюда

$$\int M(x) \cdot \bar{M} dx = \Omega \cdot \bar{M}_c$$

и искомое перемещение равно

$$\Delta = \frac{\Omega \cdot \bar{M}_c}{EI} \quad (8.74)$$

Таким образом, для определения перемещений Δ необходимо вычислить площадь Ω эпюры $M(x)$, умножить ее на ординату \bar{M}_c эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести площади Ω и разделить на жесткость балки.



Чтобы применить способ Мора для определения перемещений в стержнях переменного сечения, преобразуем формулу для перемещений:

$$\Delta = \int_l \frac{M_{(x)} \bar{M}}{EI} dx = \sum_i^n \int_{l_i} \frac{M_{(x)} (I_0 / I_{(x)})}{EI_0} \cdot \bar{M}_i \cdot dx \quad (8.75)$$

Здесь

$I_{(x)}$ – момент инерции произвольного сечения;

I_0 – момент инерции определенного (характерного) сечения.

Обозначим

$$M_{(x)} \frac{I_0}{I_{(x)}} = M_{\text{пр.}} \quad (8.76)$$

и назовем эту величину *приведенным изгибающим моментом в текущем сечении*.

Тогда интеграл Мора можно записать в виде

$$\Delta = \sum_i^n \int_l \frac{M_{\text{пр.}} \bar{M}_i}{EI_0} dx \quad (8.77)$$

Применяя к полученной формуле правило Верещагина, получим

$$\Delta = n \sum_i \frac{\Omega_{\text{пр.}} \bar{M}_{Ci}}{EI_0} \quad (8.78)$$

Здесь

$\Omega_{\text{пр.}i}$ – площадь приведенной эпюры моментов на i -ом участке;

M_{Ci} – ордината единичной эпюры под центром тяжести приведенной эпюры на i -ом участке.

Следовательно, определение перемещений (прогибов или углов поворота произвольного сечения балки или рамы) с помощью правила Верещагина производится в следующем порядке (рис. 8.49):

1. Строится эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки
эпюра **M_P** (грузовая эпюра).

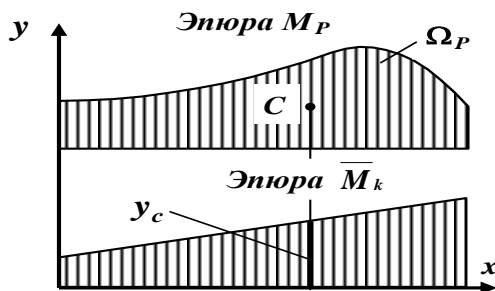


Рис. 8.49. Правило Верещагина

2. Выбирается вспомогательное единичное состояние системы. Для этого к балке или раме, освобожденной от заданной нагрузки, по направлению искомого перемещения прикладывается **безразмерная единичная сила**:

- при определении линейного перемещения – *безразмерная сосредоточенная единичная сила*;
- при определении угла поворота – *безразмерный сосредоточенный единичный момент*.

3. Строится эпюра изгибающих моментов от действия этой *безразмерной единичной силы* – эпюра \bar{M}_k .

4. Ось балки (рамы) разбивается на участки таким образом, чтобы в пределах участка эпюры M_P и \bar{M}_k не имели бы особенностей (переломов и скачков).

5. На каждом участке балки (рамы) для вычисления интеграла Мора по правилу Верещагина (правилу «перемножения» эпюр) необходимо площадь одной эпюры (обычно грузовой эпюры M_P , так как, если есть криволинейная эпюра, то обязательно ее площадь) умножить на ординату другой эпюры, расположенную под центром тяжести первой, и разделить на жесткость балки (рамы), то есть

$$\int_0^{\ell} \frac{M_P(x) \cdot \bar{M}_k(x)}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \cdot \Omega_P \cdot y_c \quad (8.79)$$

где

Ω_P – площадь грузовой эпюры M_P на рассматриваемом участке балки (рамы), знак которой определяется знаком соответствующей эпюры M_P ;

y_c – ордината в линейной эпюре \bar{M}_k под центром тяжести эпюры M_P на рассматриваемом участке балки (рамы), знак которой определяется знаком соответствующей эпюры \bar{M}_k (рис. 8.49);

EJ_z – жесткость поперечного сечения балки (рамы) на рассматриваемом участке.

На первый взгляд, описанный графоаналитический способ вычисления

интегралов Мора не даёт упрощений, так как всё равно приходится вычислять площадь Ω_p криволинейных эпюр.

Однако, встречающиеся на практике эпюры могут быть разбиты на ряд простых фигур (прямоугольник, треугольник, симметричную квадратичную параболу), у которых известны площадь и положение центра тяжести.

На рис. 8.50 приведены сведения о координатах центра тяжести и площадях простейших эпюр – прямоугольник, треугольник и симметричная квадратичная парабола.

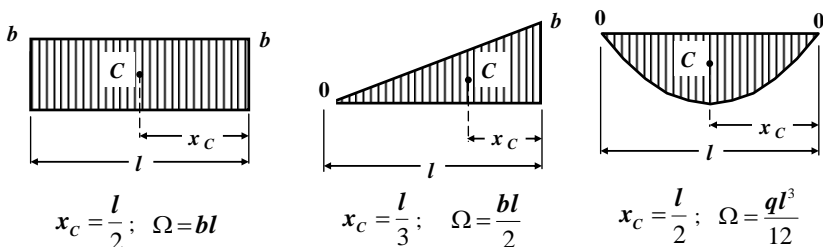


Рис. 8.50. Координаты центров тяжести эпюр и их площади

Примеры разбиения эпюр приведены на рис. 8.51.

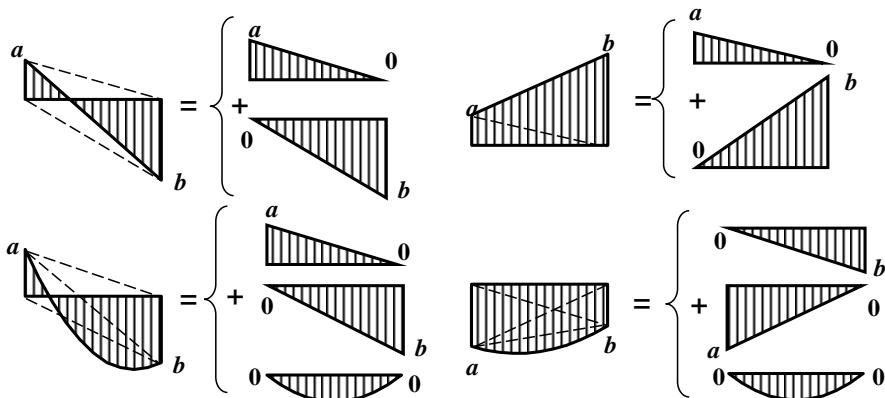


Рис. 8.51. Разбиение сложных эпюр на простые эпюры

Результат «перемножения» эпюр на рассматриваемом участке балки (рамы) является положительным, если эпюры M_p и \bar{M}_k одного знака, и отрицательным, если эпюры M_p и \bar{M}_k разных знаков.

Если Δ положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно – то противоположно этому направлению.

8.33 Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Изгиб прямолинейных брусьев»

1. Какой вид деформации называется чистым изгибом?
2. Какой вид деформации называется плоским поперечным изгибом?
3. Что происходит с продольными волокнами материала при изгибе?
4. На какие три основных типа делятся опоры балок?
5. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки, рамы?
6. Что называется поперечной силой в данном сечении балки?
7. Что называется изгибающим моментом в данном сечении балки?
8. Что называется продольной силой в данном сечении рамы?
9. Как определяется знак поперечной, продольной сил и изгибающего момента в поперечном сечении балки и рамы?
10. Для чего строятся эпюры внутренних усилий при изгибе?
11. Как определяются границы участков балки (рамы)?
12. Приведите дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью внешней распределенной нагрузки.
13. В каком случае на эпюре поперечных сил наблюдается «скачок» и чему он равен?
14. Сформулируете правило «скачков» на эпюре изгибающих моментов.
15. Как изменяется поперечная сила и изгибающий момент на участках балки, где отсутствует внешняя распределенная нагрузка?
16. По какому закону изменяются поперечная сила и изгибающий момент на участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка?
17. При каком значении поперечной силы изгибающий момент в сечении балки принимает экстремальное значение?
18. Что называется силовой плоскостью (силовой линией)?
19. Что называется нейтральной линией?
20. Назовите гипотезы, которые принимаются для вывода формулы нормальных напряжений при чистом плоском изгибе.
21. Как определяется опасное сечение балки по нормальным напряжениям?
22. По какой формуле определяются нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки?
23. Как определяются опасные точки поперечного сечения балки по нормальным напряжениям?

24. Напишите условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.
25. Эпюра нормальных напряжений при изгибе. Как с помощью этой эпюры определить напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки?
26. Какие гипотезы используются при выводе формулы касательных напряжений при плоском изгибе?
27. Напишите формулу Журавского для определения касательных напряжений при плоском изгибе.
28. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях балки прямоугольной формы, для стенки двутавра, швеллера?
29. Где находятся опасные точки в поперечном сечении балки по касательным напряжениям?
30. Напишите условие прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при плоском изгибе.
31. Как проверяется прочность балки по главным напряжениям?
32. Какие перемещения получают поперечные сечения балок при плоском изгибе?
33. Что называется упругой линией (изогнутой осью) балки?
34. Что называется прогибом балки?
35. Что называется углом поворота поперечного сечения балки?
36. Запишите дифференциальную зависимость между прогибом и углом поворота сечений балки.
37. Напишите приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
38. Что называется жесткостью балки?
39. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления прогибов по методу начальных параметров.
40. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления углов поворота сечений по методу начальных параметров.
41. Из каких условий определяются неизвестные начальные параметры балки?
42. Назовите основные правила контроля правильности построенных эпюр φ и v .
43. Дайте определение статически неопределимой системы?
44. Как устанавливается степень статической неопределимости балки?
45. План расчета статически неопределимой системы?
46. Какие основные преимущества статически неопределимых балок перед статически определимыми?
47. Как читается теорема Кастильяно?



48. Напишите интеграл Мора.
49. В чем суть правила Верещагина?
50. План определения перемещений (прогибов или углов поворота произвольного сечения балки или рамы) методом Мора с помощью правила Верещагина.

Рекомендуемая литература

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов. /А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. – М.: Изд-во АСВ, 2012. – 251 с.
3. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100 / Н.М. Атаров. – М.: ИНФРА – М, 2010. – 323 с.
4. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть I): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации / В.Д. Еремин. – Ростов-на Дону: ИЦ ДГТУ, 2018. – 144 с.
5. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть II): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации / В.Д. Еремин. – Ростов-на Дону: ИЦ ДГТУ, 2018. – 193 с.
6. Еремин В.Д., Стрельников Г.П. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Построение эпюр внутренних силовых факторов в балках и плоских рамах / В.Д. Еремин, Г.П. Стрельников. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2019. – 125 с.
7. Еремин В.Д. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Расчет балок на прочность / В.Д. Еремин, Г.П. Стрельников. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2020. – 100 с.
8. Еремин В.Д. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Расчет балок на жесткость / В.Д. Еремин, А.А. Аваков, А.С. Чепурненко. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2021. – 179 с.
9. Михайлов А.М. Сопротивление материалов: учебник для студентов высших учебных заведений / А.М. Михайлов. – М.: Издательский центр «Академия», – 2009. – 448 с.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 591 с.



ПРИЛОЖЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

для практических занятий, выполнения расчетно-графических контрольных работ по дисциплинам:

«Сопротивление материалов»,

«Строительная механика для архитекторов»,

«Специальные вопросы сопротивления материалов»

1. Сортамент прокатной стали

1.1. Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240—97

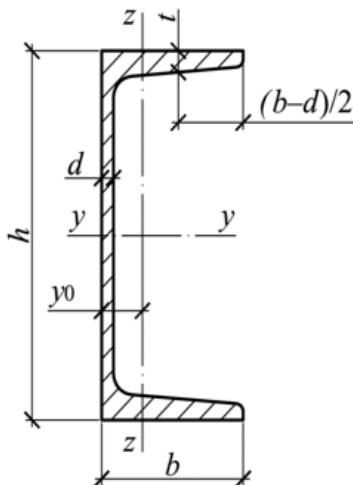


Рисунок 1.1 — Швеллер с уклоном внутренних граней полок

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

h — высота (швеллера);

b — ширина полки;

d — толщина стенки;

t — толщина полки;

y_0 — расстояние от оси $z-z$ до наружной грани стенки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

W — момент сопротивления;

i — радиус инерции;

S_y — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м швеллера вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.1 — Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	S_y см ³	I_z см ⁴	W_z см ³	i_z см	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
5У	50	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.95	1.16	4.84
6,5У	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.00	8.70	3.68	1.08	1.24	5.90
8У	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.30	12.80	4.75	1.19	1.31	7.05
10У	100	46	4.5	7.6	10.90	174.0	34.8	3.99	20.40	20.40	6.46	1.37	1.44	8.59
12У	120	52	4.8	7.8	13.30	304.0	50.6	4.78	29.60	31.20	8.52	1.53	1.54	10.40
14У	140	58	4.9	8.1	15.60	491.0	70.2	5.60	40.80	45.40	11.00	1.70	1.67	12.30
16У	160	64	5.0	8.4	18.10	747.0	93.4	6.42	54.10	63.30	13.80	1.87	1.80	14.20
16аУ	160	68	5.0	9.0	19.50	823.0	103.0	6.49	59.40	78.80	16.40	2.01	2.00	15.30
18У	180	70	5.1	8.7	20.70	1 090.0	121.0	7.24	69.80	86.00	17.00	2.04	1.94	16.30
18аУ	180	74	5.1	9.3	22.20	1 190.0	132.0	7.32	76.10	105.00	20.00	2.18	2.13	17.40
20У	200	76	5.2	9.0	23.40	1 520.0	152.0	8.07	87.80	113.00	20.50	2.20	2.07	18.40
22У	220	82	5.4	9.5	26.70	2 110.0	192.0	8.89	110.00	151.00	25.10	2.37	2.21	21.00
24У	240	90	5.6	10.0	30.60	2 900.0	242.0	9.73	139.00	208.00	31.60	2.60	2.42	24.00
27У	270	95	6.0	10.5	35.20	4 160.0	308.0	10.90	178.00	262.00	37.30	2.73	2.47	27.70
30У	300	100	6.5	11.0	40.50	5 810.0	387.0	12.00	224.00	327.00	43.60	2.84	2.52	31.80
33У	330	105	7.0	11.7	46.50	7 980.0	484.0	13.10	281.00	410.00	51.80	2.97	2.59	36.50
36У	360	110	7.5	12.6	43.40	10 820.0	601.0	14.20	350.00	513.00	61.70	3.10	2.68	41.90
40У	400	115	8.0	13.5	61.50	15 220.0	761.0	15.70	444.00	642.00	73.40	3.23	2.75	48.30

1.2. Выборка двутавры стальные горячекатаные с параллельными границами полок по ГОСТ Р 57837—2017

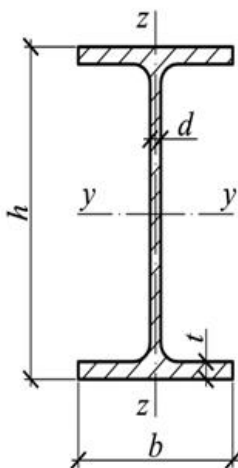


Рисунок 1.2 — Двутавр стальной горячекатаный с параллельными границами полок

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

- h — высота (двутавра);
- b — ширина полки;
- d — толщина стенки;
- t — толщина полки;
- A — площадь поперечного сечения;
- I — момент инерции;
- W — момент сопротивления;
- i — радиус инерции;
- S — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Сопrotивления материалов (часть II)

Таблица 1.2 — Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
Тип Б — Балочные нормальные двутавры														
10Б1	100.0	55.0	4.1	5.7	10.32	8.10	171.01	34.20	19.70	40.70	15.92	5.79	4.57	12.42
12Б1	117.6	64.0	3.8	5.1	11.03	8.70	257.36	43.80	24.94	48.30	22.39	7.00	5.49	14.25
12Б2	120.0	64.0	4.4	6.3	13.21	10.40	317.75	53.00	30.36	49.04	27.67	8.65	6.79	14.47
14Б1	137.4	73.0	3.8	5.6	13.39	10.50	434.86	63.30	35.80	56.98	36.42	9.98	7.76	16.49
14Б2	140.0	73.0	4.7	6.9	16.43	12.90	541.22	77.30	44.17	57.40	44.92	12.31	9.62	16.54
16Б1	157.0	82.0	4.0	5.9	16.18	12.70	689.28	87.80	49.55	65.27	54.43	13.27	10.35	18.34
16Б2	160.0	82.0	5.0	7.4	20.09	15.80	869.29	108.70	61.93	65.78	68.31	16.66	13.05	18.44
18Б1	177.0	91.0	4.3	6.5	19.58	15.40	1062.74	120.10	67.66	73.68	81.89	18.00	13.98	20.45
18Б2	180.0	91.0	5.3	8.0	23.95	18.80	1316.96	146.30	83.21	74.16	100.85	22.16	17.30	20.52
20Б0	198.0	99.0	4.5	7.0	23.18	18.20	1581.56	159.80	89.88	82.60	113.62	22.95	17.86	22.14
20Б1	200.0	100.0	5.5	8.0	27.16	21.30	1844.26	184.40	104.73	82.41	133.91	26.78	20.97	22.21
20Б2	203.0	101.0	6.5	9.5	32.19	25.30	2218.49	218.60	124.99	83.02	163.93	32.46	25.50	22.57
20Б3	208.0	102.0	8.0	12.0	40.24	31.60	2852.62	274.30	158.46	84.20	213.50	41.86	33.02	23.03
25Б1	248.0	124.0	5.0	8.0	32.68	25.70	3537.11	285.30	159.68	104.04	254.85	41.11	31.80	27.93
25Б2	250.0	125.0	6.0	9.0	37.66	29.60	4051.73	324.10	182.93	103.73	293.85	47.02	36.55	27.93
25Б3	255.0	126.0	7.5	11.5	47.62	37.40	5238.16	410.80	233.88	104.88	384.79	61.08	47.67	28.43
25Б4	260.0	127.0	9.0	14.0	57.68	45.30	6481.01	498.50	286.25	106.00	480.07	75.60	59.24	28.85
30Б1	298.0	149.0	5.5	8.0	40.80	32.00	6318.22	424.00	237.53	124.44	442.00	59.33	45.88	32.91
30Б2	300.0	150.0	6.5	9.0	46.78	36.70	7209.26	480.60	271.06	124.14	507.53	67.67	52.56	32.94
30Б3	305.0	151.0	8.0	11.5	58.74	46.10	9254.92	606.90	344.37	125.52	661.88	87.67	68.31	33.57
30Б4	310.0	152.0	9.5	14.0	70.80	55.60	11381.41	734.30	419.40	126.79	822.37	108.21	84.60	34.08
35Б1	346.0	174.0	6.0	9.0	52.68	41.40	11094.49	641.30	358.09	145.12	791.54	90.98	70.11	38.76
35Б2	350.0	175.0	7.0	11.0	63.14	49.60	13559.01	774.80	433.96	146.54	984.34	112.50	86.79	39.48
35Б3	355.0	176.0	8.5	13.5	77.08	60.50	16797.02	946.30	533.54	147.62	1229.36	139.70	108.13	39.94
35Б4	361.0	177.0	10.0	16.5	92.89	72.90	20719.71	1147.90	651.07	149.35	1528.90	172.76	134.02	40.57
40Б1	396.0	199.0	7.0	11.0	72.16	56.60	20018.83	1011.10	563.93	166.56	1447.14	145.44	111.97	44.78
40Б2	400.0	200.0	8.0	13.0	84.12	66.00	23704.43	1185.20	663.13	167.87	1736.39	173.64	133.82	45.43
40Б3	406.0	201.0	9.5	16.0	102.05	80.10	29352.45	1445.90	813.38	169.60	2169.89	215.91	166.74	46.11

Продолжение на следующей странице

Сопrotивления материалов (часть II)

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса г п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
40Б4	412.0	202.0	11.0	19.0	120.10	94.30	35196.83	1708.60	966.65	171.19	2616.25	259.03	200.47	46.67
45Б1	446.0	199.0	8.0	12.0	84.30	66.20	28697.35	1286.90	725.06	184.50	1580.03	158.80	123.29	43.29
45Б2	450.0	200.0	9.0	14.0	96.76	76.00	33450.76	1486.70	839.53	185.93	1871.57	187.16	145.46	43.98
45Б3	456.0	201.0	10.5	17.0	115.43	90.60	40710.41	1785.50	1012.55	187.80	2307.62	229.61	178.81	44.71
45Б4	462.0	202.0	12.0	20.0	134.22	105.40	48197.42	2086.50	1188.75	189.50	2756.66	272.94	213.01	45.32
50Б1	492.0	199.0	8.8	12.0	92.38	72.50	36841.89	1497.60	853.45	199.70	1581.96	158.99	124.86	41.38
50Б2	496.0	199.0	9.0	14.0	101.27	79.50	41869.08	1688.30	957.23	203.33	1844.89	185.42	144.88	42.68
50Б3	500.0	200.0	10.0	16.0	114.23	89.70	47846.05	1913.80	1087.59	204.66	2140.79	214.08	167.48	43.29
50Б4	508.0	201.0	12.0	20.0	139.99	109.90	59953.57	2360.40	1348.82	206.94	2717.85	270.43	212.23	44.06
50Б5	516.0	202.0	15.0	24.0	170.59	133.90	73345.26	2842.80	1642.68	207.35	3315.53	328.27	260.04	44.09
55Б1	543.0	220.0	9.5	13.5	113.36	89.00	55677.42	2050.70	1164.94	221.62	2405.54	218.69	171.67	46.06
55Б2	547.0	220.0	10.0	15.5	124.74	97.90	62784.45	2295.60	1301.49	224.34	2761.34	251.03	196.56	47.05
55Б3	553.0	221.0	12.0	18.5	148.63	116.70	75321.22	2724.10	1554.49	225.11	3342.92	302.53	237.99	47.42
55Б4	560.0	222.0	14.0	22.0	174.86	137.30	89907.09	3211.00	1842.20	226.75	4032.07	363.25	286.76	48.02
60Б1	596.0	199.0	10.0	15.0	120.45	94.60	68715.90	2305.90	1325.36	238.85	1979.66	198.96	157.64	40.54
60Б2	600.0	200.0	11.0	17.0	134.41	105.50	77632.25	2587.70	1489.36	240.32	2278.16	227.82	180.72	41.17
60Б3	604.0	201.0	12.5	19.0	151.28	118.80	87472.10	2896.40	1675.38	240.46	2586.62	257.38	205.28	41.35
60Б4	612.0	202.0	15.0	23.0	181.97	142.90	106509.50	3480.70	2026.68	241.93	3182.62	315.11	253.12	41.82
70Б1	691.0	260.0	12.0	15.5	164.74	129.30	125922.20	3644.60	2094.79	276.47	4557.35	350.57	276.64	52.60
70Б2	697.0	260.0	12.5	18.5	183.64	144.16	145904.02	4186.63	2392.68	281.87	5437.68	418.28	328.41	54.41
70Б3	702.0	261.0	14.5	21.0	210.26	165.10	167085.05	4760.30	2736.06	281.89	6248.49	478.81	378.10	54.51
70Б4	710.0	262.0	17.0	25.0	248.14	194.80	199679.98	5624.80	3249.28	283.67	7531.16	574.90	456.29	55.09
Тип III — Балочные широкополочные двутавры														
20Ш0	190.0	149.0	5.0	7.0	31.11	24.40	2079.60	218.90	120.97	81.76	386.62	51.90	39.79	35.25
20Ш1	194.0	150.0	6.0	9.0	39.01	30.60	2689.74	277.30	154.28	83.04	507.16	67.62	51.85	36.06
20Ш2	199.0	151.0	7.5	11.5	49.38	38.80	3502.14	352.00	198.01	84.21	661.25	87.58	67.27	36.59
20Ш3	204.0	152.0	9.0	14.0	59.85	47.00	4362.01	427.70	243.18	85.37	821.37	108.08	83.18	37.05
20Ш4	211.0	155.0	11.0	17.5	75.06	58.90	5696.83	540.00	311.20	87.12	1089.19	140.54	108.38	38.09
20Ш5	218.0	157.0	13.0	21.0	90.27	70.90	7117.64	653.00	381.26	88.80	1359.05	173.13	133.81	38.80
20Ш6	228.0	159.0	16.0	26.0	112.29	88.20	9312.80	816.90	485.66	91.07	1749.68	220.09	170.75	39.47

Продолжение на следующей странице

Сопrotивления материалов (часть II)

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса г п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
25Ш0	240.0	174.0	6.0	9.0	46.84	36.80	4981.13	415.10	229.64	103.13	791.75	91.01	69.84	41.11
25Ш1	244.0	175.0	7.0	11.0	56.24	44.20	6121.23	501.70	279.19	104.33	984.48	112.51	86.36	41.84
25Ш2	249.0	176.0	8.5	13.5	68.59	53.80	7624.69	612.40	343.94	105.44	1229.33	139.70	107.41	42.34
25Ш3	256.0	177.0	10.5	17.0	85.69	67.30	9819.49	767.20	436.06	107.05	1575.20	177.99	137.18	42.88
25Ш4	264.0	182.0	13.0	21.0	107.50	84.40	12751.44	966.00	556.26	108.91	2116.49	232.58	179.70	44.37
25Ш5	274.0	184.0	16.0	26.0	133.40	104.70	16478.26	1202.80	703.59	111.14	2710.17	294.58	228.44	45.07
25Ш6	286.0	186.0	19.0	32.0	163.42	128.30	21287.68	1488.70	884.76	114.13	3448.57	370.81	288.22	45.94
30Ш0	290.0	199.0	7.0	10.0	61.48	48.30	9429.75	650.30	360.60	123.85	1316.09	132.27	101.70	46.27
30Ш1	294.0	200.0	8.0	12.0	72.38	56.80	11338.30	771.30	429.51	125.16	1603.26	160.33	123.28	47.06
30Ш2	300.0	201.0	9.0	15.0	87.38	68.60	14209.66	947.30	529.86	127.52	2034.13	202.40	155.42	48.25
30Ш3	306.0	203.0	11.0	18.0	105.56	82.90	17455.33	1140.90	644.63	128.59	2515.46	247.83	190.85	48.82
30Ш4	314.0	206.0	13.0	22.0	128.52	100.90	21967.16	1399.20	798.35	130.74	3213.67	312.01	240.56	50.00
30Ш5	326.0	208.0	16.0	28.0	162.46	127.50	29037.68	1781.50	1031.79	133.69	4213.04	405.10	313.16	50.92
30Ш6	342.0	210.0	20.0	36.0	207.98	163.30	39315.66	2299.20	1357.14	137.49	5580.38	531.47	412.35	51.80
35Ш1	334.0	249.0	8.0	11.0	83.17	65.30	17107.05	1024.40	565.71	143.42	2834.62	227.68	174.45	58.38
35Ш2	340.0	250.0	9.0	14.0	101.51	79.70	21676.50	1275.10	706.03	146.13	3650.97	292.08	223.45	59.97
35Ш3	347.0	252.0	11.0	17.5	125.95	98.90	27535.21	1587.00	886.41	147.86	4674.90	371.02	284.26	60.92
35Ш4	354.0	254.0	13.0	21.0	150.67	118.30	33692.45	1903.50	1072.31	149.54	5745.80	452.43	347.18	61.75
35Ш5	364.0	258.0	16.0	26.0	187.51	147.20	43231.44	2375.40	1354.36	151.84	7458.32	578.16	444.79	63.07
35Ш6	376.0	260.0	19.0	32.0	229.11	179.90	54967.48	2923.80	1688.25	154.89	9398.88	722.99	557.28	64.05
35Ш7	392.0	262.0	23.0	40.0	284.79	223.60	71815.25	3664.00	2150.36	158.80	12030.69	918.37	709.81	65.00
40Ш1	383.0	299.0	9.5	12.5	112.91	88.60	30554.32	1595.50	880.73	164.50	5576.08	372.98	285.42	70.27
40Ш2	390.0	300.0	10.0	16.0	135.95	106.70	38674.10	1983.30	1093.97	168.66	7207.77	480.52	366.53	72.81
40Ш3	397.0	302.0	12.0	19.5	164.89	129.40	47846.38	2410.40	1339.96	170.34	8962.48	593.54	453.33	73.72
40Ш4	406.0	304.0	14.5	24.0	201.98	158.60	60107.10	2960.90	1662.00	172.51	11253.74	740.38	566.43	74.64
40Ш5	418.0	309.0	17.5	30.0	252.20	198.00	77867.25	3725.70	2114.90	175.71	14776.27	956.39	732.65	76.54
40Ш6	430.0	311.0	21.0	36.0	303.25	238.10	96432.24	4485.20	2578.21	178.32	18086.35	1163.11	893.43	77.23
40Ш7	446.0	313.0	25.0	44.0	369.09	289.70	122543.61	5495.20	3204.85	182.21	22547.07	1440.71	1109.25	78.16
45Ш0	434.0	299.0	10.0	15.0	135.04	106.00	46794.17	2156.40	1192.24	186.15	6692.40	447.65	342.87	70.40
45Ш1	440.0	300.0	11.0	18.0	157.38	123.60	56069.13	2548.60	1412.44	188.75	8111.31	540.75	413.80	71.79

Продолжение на следующей странице

Сопrotивления материалов (часть II)

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса л п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
45Ш2	446.0	302.0	13.0	21.0	184.30	144.70	66379.08	2976.60	1661.51	189.78	9655.62	639.44	490.29	72.38
45Ш3	452.0	304.0	15.0	24.0	211.46	166.00	77050.83	3409.30	1915.99	190.88	11258.33	740.68	569.04	72.97
45Ш4	464.0	308.0	18.0	30.0	262.46	206.00	98962.82	4265.60	2420.93	194.18	14639.89	950.64	731.39	74.69
45Ш5	476.0	310.0	21.0	36.0	312.98	245.70	121722.09	5114.40	2932.26	197.21	17919.22	1156.08	891.09	75.67
45Ш6	492.0	312.0	25.0	44.0	380.50	298.70	153856.39	6254.30	3633.74	201.08	22341.69	1432.16	1106.76	76.63
50Ш1	482.0	300.0	11.0	15.0	145.52	114.20	60366.76	2504.80	1395.56	203.67	6763.81	450.92	347.62	68.18
50Ш2	487.0	300.0	14.5	17.5	176.34	138.40	71863.01	2951.30	1666.63	201.87	7897.76	526.52	409.42	66.92
50Ш3	493.0	300.0	15.5	20.5	198.86	156.10	83437.19	3384.90	1912.66	204.83	9251.07	616.74	478.76	68.21
50Ш4	499.0	300.0	16.5	23.5	221.38	173.80	95277.59	3818.70	2161.40	207.45	10604.77	706.98	548.21	69.21
50Ш5	508.0	302.0	19.0	28.0	260.80	204.70	114959.83	4526.00	2578.55	209.95	12894.50	853.94	663.27	70.31
50Ш6	518.0	310.0	22.0	33.0	309.84	243.20	140248.12	5415.00	3106.50	212.75	16442.93	1060.83	825.05	72.85
50Ш7	532.0	312.0	26.0	40.0	372.92	292.70	174203.77	6549.00	3797.96	216.13	20335.66	1303.57	1017.09	73.84
50Ш8	548.0	314.0	30.0	48.0	442.84	347.60	214879.98	7842.30	4598.03	220.28	24895.52	1585.70	1240.04	74.98
60Ш1	582.0	300.0	12.0	17.0	174.49	137.00	102709.98	3529.60	1981.30	242.62	7669.85	511.32	396.49	66.30
60Ш2	589.0	300.0	16.0	20.5	217.41	170.70	126193.28	4285.00	2438.84	240.92	9259.23	617.28	483.58	65.26
60Ш3	597.0	300.0	18.0	24.5	252.37	198.10	150035.32	5026.30	2869.72	243.82	11069.15	737.94	578.58	66.23
60Ш4	605.0	300.0	20.0	28.5	287.33	225.60	174450.48	5767.00	3305.39	246.40	12881.17	858.74	674.12	66.96
60Ш5	616.0	302.0	23.0	34.0	338.13	265.40	210467.04	6833.40	3941.46	249.49	15686.68	1038.85	817.44	68.11
60Ш6	630.0	315.0	27.0	41.0	412.99	324.20	266239.93	8452.10	4907.09	253.90	21476.18	1363.57	1073.64	72.11
60Ш7	644.0	317.0	31.0	48.0	480.93	377.50	318172.04	9881.10	5788.14	257.21	25653.76	1618.53	1279.02	73.04
60Ш8	664.0	319.0	36.0	58.0	574.05	450.60	394963.73	11896.50	7047.57	262.30	31634.21	1983.34	1572.47	74.23
70Ш1	692.0	300.0	13.0	20.0	211.49	166.00	172424.05	4983.40	2814.39	285.53	9024.74	601.65	468.07	65.32
70Ш2	698.0	300.0	15.0	23.0	242.53	190.40	198779.77	5695.70	3233.41	286.29	10382.92	692.19	540.47	65.43
70Ш3	707.0	300.0	18.0	27.5	289.09	226.90	239021.10	6761.60	3867.01	287.54	12424.20	828.28	650.29	65.56
70Ш4	715.0	300.0	20.5	31.5	329.39	258.60	275127.01	7695.90	4426.46	289.01	14242.00	949.47	748.55	65.76
70Ш5	725.0	300.0	23.0	36.5	375.69	294.90	319781.96	8821.60	5099.30	291.75	16514.18	1100.95	870.34	66.30
70Ш6	740.0	313.0	27.0	44.0	458.21	359.70	403258.33	10898.90	6334.98	296.66	22622.21	1445.51	1143.72	70.26
70Ш7	758.0	315.0	32.0	53.0	549.27	431.20	496466.98	13099.40	7693.00	300.64	27822.58	1766.51	1405.68	71.17
70Ш8	780.0	317.0	38.0	64.0	660.25	518.30	616075.38	15796.80	9389.94	305.47	34321.60	2165.40	1734.01	72.10

Тип К — Колонны двутавры

Продолжение на следующей странице

Сопrotивления материалов (часть II)

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса г	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
15K1	147.0	149.0	6.0	8.5	34.17	26.80	1366.76	186.00	103.63	63.25	469.21	62.98	48.05	37.06
15K2	150.0	150.0	7.0	10.0	40.14	31.50	1641.33	218.80	123.04	63.95	563.28	75.10	57.36	37.46
15K3	155.0	151.0	8.5	12.5	49.84	39.10	2117.61	273.20	155.69	65.18	718.46	95.16	72.78	37.97
15K4	160.0	152.0	10.0	15.0	59.64	46.80	2629.16	328.60	189.67	66.40	879.66	115.74	88.65	38.41
15K5	166.0	153.0	12.0	18.0	71.72	56.30	3291.43	396.60	232.39	67.74	1077.13	140.80	108.12	38.75
20K1	196.0	199.0	6.5	10.0	52.69	41.40	3846.06	392.50	216.41	85.44	1314.47	132.11	100.38	49.95
20K2	200.0	200.0	8.0	12.0	63.53	49.90	4715.63	471.60	262.75	86.15	1601.53	160.15	121.91	50.21
20K3	204.0	201.0	9.0	14.0	73.57	57.80	5602.48	549.30	308.35	87.26	1896.76	188.73	143.72	50.78
20K4	210.0	201.0	10.5	17.0	88.27	69.30	6962.62	663.10	376.57	88.81	2303.59	229.21	174.72	51.09
20K5	214.0	202.0	12.0	19.0	99.33	78.00	7970.40	744.90	426.84	89.58	2613.87	258.80	197.63	51.30
20K6	220.0	202.0	14.0	22.0	114.97	90.30	9488.15	862.60	500.34	90.84	3027.75	299.78	229.45	51.32
20K7	226.0	203.0	16.0	25.0	131.11	102.90	11136.66	985.60	578.16	92.16	3493.41	344.18	263.98	51.62
20K8	234.0	203.0	18.0	29.0	150.87	118.40	13375.48	1143.20	679.29	94.16	4053.99	399.41	306.76	51.84
25K1	246.0	249.0	8.0	12.0	79.72	62.60	9170.92	745.60	410.68	107.26	3090.06	248.20	188.61	62.26
25K2	250.0	250.0	9.0	14.0	92.18	72.40	10832.61	866.60	480.25	108.41	3648.81	291.90	221.88	62.92
25K3	253.0	251.0	10.0	15.5	102.21	80.20	12153.56	960.80	535.41	109.05	4088.75	325.80	247.85	63.25
25K4	257.0	252.0	11.0	17.5	114.82	90.10	13927.17	1083.80	607.67	110.14	4672.01	370.79	282.18	63.79
25K5	262.0	253.0	12.5	20.0	131.15	103.00	16243.92	1240.00	701.07	111.29	5404.02	427.20	325.46	64.19
25K6	267.0	253.0	14.0	22.5	147.13	115.50	18593.24	1392.80	793.96	112.42	6080.59	480.68	366.65	64.29
25K7	274.0	258.0	16.0	26.0	171.88	134.90	22416.62	1636.30	942.16	114.20	7452.57	577.72	441.04	65.85
25K8	281.0	259.0	18.0	29.5	194.97	153.10	26169.72	1862.60	1083.49	115.86	8556.67	660.75	505.09	66.25
25K9	288.0	260.0	20.0	33.0	218.20	171.30	30128.76	2092.30	1228.96	117.51	9685.85	745.07	570.29	66.63
25K10	298.0	261.0	23.0	38.0	251.62	197.50	36112.37	2423.70	1442.84	119.80	11288.10	864.99	663.49	66.98
30K1	298.0	299.0	9.0	14.0	110.80	87.00	18848.66	1265.00	694.64	130.43	6241.19	417.47	316.82	75.05
30K2	300.0	300.0	10.0	15.0	119.78	94.00	20410.21	1360.70	750.59	130.54	6754.83	450.32	342.13	75.10
30K3	300.0	305.0	15.0	15.0	134.78	105.80	21535.21	1435.70	806.84	126.40	7104.76	465.89	358.04	72.60
30K4	304.0	301.0	11.0	17.0	134.82	105.80	23380.49	1538.20	852.74	131.69	7732.59	513.79	390.46	75.73
30K5	308.0	301.0	12.0	19.0	149.56	117.40	26362.99	1711.90	953.96	132.77	8642.78	574.27	436.61	76.02
30K6	312.0	302.0	13.0	21.0	164.72	129.30	29508.74	1891.60	1059.44	133.84	9648.60	638.98	485.99	76.53
30K7	316.0	302.0	14.5	23.0	180.85	142.00	32732.42	2071.70	1167.93	134.53	10569.09	699.94	533.09	76.45

Продолжение на следующей странице

Сопrotивления материалов (часть II)

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
30K8	316.0	357.0	14.5	23.0	206.15	161.80	38173.52	2416.10	1353.26	136.08	17452.10	977.71	741.50	92.01
30K9	322.0	358.0	16.0	26.0	232.14	182.20	43983.21	2731.90	1541.60	137.65	19896.06	1111.51	843.38	92.58
30K10	328.0	359.0	18.0	29.0	259.60	203.80	50113.52	3055.70	1738.68	138.94	22381.16	1246.86	947.13	92.85
30K11	334.0	360.0	20.0	32.0	287.18	225.40	56488.07	3382.50	1939.98	140.25	24906.98	1383.72	1052.25	93.13
30K12	341.0	361.0	22.0	35.5	318.49	250.00	64158.87	3763.00	2176.26	141.93	27866.03	1543.82	1175.02	93.54
30K13	350.0	362.0	24.0	40.0	357.18	280.40	74376.59	4250.10	2481.31	144.30	31663.84	1749.38	1332.11	94.15
30K14	356.0	371.0	27.0	43.0	394.74	309.90	83542.72	4693.40	2760.90	145.48	36649.59	1975.72	1506.68	96.36
30K15	364.0	372.0	30.0	47.0	433.46	340.30	93889.39	5158.80	3062.80	147.17	40396.23	2171.84	1659.03	96.54
30K16	374.0	373.0	33.0	52.0	479.80	376.60	107317.14	5738.90	3441.68	149.56	45068.65	2416.55	1848.28	96.92
30K17	384.0	374.0	36.0	57.0	526.34	413.20	121512.35	6328.80	3831.76	151.94	49816.72	2664.00	2040.04	97.29
30K18	396.0	375.0	39.0	63.0	580.58	455.80	139424.86	7041.70	4307.16	154.97	55520.26	2961.08	2269.45	97.79
30K19	408.0	385.0	43.0	69.0	650.18	510.40	162282.28	7955.00	4912.82	157.99	65823.94	3419.43	2622.83	100.62
30K20	422.0	387.0	47.0	76.0	717.92	563.60	187072.37	8866.00	5534.78	161.42	73671.75	3807.33	2923.99	101.30
30K21	440.0	389.0	52.0	85.0	804.48	631.50	221339.16	10060.90	6361.10	165.87	83732.23	4305.00	3311.01	102.02
35K1	342.0	348.0	10.0	15.0	139.03	109.10	31247.91	1827.40	1001.17	149.92	10542.21	605.87	459.67	87.08
35X1.5	346.0	349.0	11.0	17.0	156.41	122.80	35711.23	2064.20	1135.84	151.10	12051.44	690.63	524.08	87.78
35K2	350.0	350.0	12.0	19.0	173.87	136.50	40295.09	2302.60	1272.61	152.23	13585.82	776.33	589.29	88.39
35K3	355.0	351.0	13.5	21.5	196.48	154.20	46230.77	2604.60	1448.66	153.39	15506.81	883.58	671.24	88.84
35K4	360.0	352.0	15.0	24.0	219.19	172.10	52353.70	2908.50	1627.80	154.55	17459.86	992.04	754.25	89.25
35K5	365.0	353.0	16.5	26.5	242.00	190.00	58667.44	3214.70	1810.04	155.70	19445.30	1101.72	838.34	89.64
35K6	369.0	360.0	18.0	28.5	264.79	207.90	64960.86	3520.90	1991.80	156.63	22183.47	1232.42	938.35	91.53
35K7	376.0	361.0	20.0	32.0	296.87	233.10	74398.83	3957.40	2256.32	158.31	25119.61	1391.67	1060.65	91.99
35K8	382.0	362.0	22.0	35.0	325.47	255.50	82894.78	4340.00	2491.96	159.59	27708.51	1530.86	1168.17	92.27
35K9	389.0	363.0	24.0	38.5	357.82	280.90	93053.12	4784.20	2767.25	161.26	30738.03	1693.56	1293.57	92.68
35K10	396.0	364.0	26.5	42.0	391.87	307.60	103736.94	5239.20	3054.44	162.70	33819.63	1858.22	1421.64	92.90
35K11	404.0	374.0	29.0	46.0	437.99	343.80	118982.06	5890.20	3458.40	164.82	40183.36	2148.84	1644.63	95.78
35K12	414.0	375.0	32.0	51.0	485.77	381.30	135721.11	6556.60	3886.58	167.15	44924.28	2395.96	1836.42	96.17
35K13	424.0	376.0	35.0	56.0	533.75	419.00	153322.14	7232.20	4326.20	169.49	49742.08	2645.86	2030.81	96.54
35K14	434.0	377.0	38.0	61.0	581.93	456.80	171810.18	7917.50	4777.34	171.83	54637.74	2898.55	2227.81	96.90
35K15	446.0	378.0	42.0	67.0	640.99	503.20	195206.29	8753.70	5336.35	174.51	60526.72	3202.47	2466.48	97.17

Продолжение на следующей странице

Сопrotивления материалов (часть II)

Продолжение таблицы 1.2

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса I п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	S_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	S_z см ³	i_z см
35K16	458.0	392.0	46.0	73.0	719.27	564.60	227053.17	9915.00	6094.32	177.67	73566.95	3753.42	2891.61	101.13
35K17	472.0	393.0	50.0	80.0	788.23	618.80	258357.05	10947.30	6796.66	181.04	81286.57	4136.72	3191.54	101.55
35K18	488.0	394.0	55.0	88.0	868.47	681.80	296560.11	12154.10	7629.66	184.79	90173.86	4577.35	3538.66	101.90
35K19	506.0	395.0	60.0	97.0	956.93	751.20	342451.59	13535.60	8591.51	189.17	100237.84	5075.33	3929.92	102.35
35K20	520.0	409.0	65.0	104.0	1056.95	829.70	392963.38	15114.00	9664.42	192.82	119352.51	5836.31	4520.43	106.26
35K21	540.0	411.0	71.0	114.0	1162.03	912.20	454051.02	16816.70	10869.85	197.67	132896.31	6466.97	5017.71	106.94
35K22	562.0	413.0	77.0	125.0	1276.17	1001.80	526659.93	18742.40	12243.01	203.15	148011.27	7167.62	5568.89	107.69
35K23	580.0	426.0	84.0	134.0	1407.19	1104.70	606878.23	20926.80	13777.86	207.67	174271.92	8181.78	6362.61	111.29
35K24	604.0	430.0	92.0	146.0	1546.07	1213.70	704826.44	23338.60	15522.09	213.51	195579.56	9096.72	7087.61	112.47
40K1	394.0	398.0	11.0	18.0	186.81	146.70	56145.31	2850.00	1559.22	173.36	18922.62	950.89	720.40	100.64
40K2	400.0	400.0	13.0	21.0	218.69	171.70	66621.41	3331.10	1836.23	174.54	22412.67	1120.63	849.93	101.23
40K3	406.0	403.0	16.0	24.0	254.87	200.10	78039.22	3844.30	2139.84	174.98	26200.19	1300.26	988.59	101.39
40K4	414.0	405.0	18.0	28.0	295.39	231.90	92771.14	4481.70	2513.15	177.22	31026.87	1532.19	1165.56	102.49
40K4,5	420.0	403.0	20.0	31.0	325.61	255.60	103629.70	4934.80	2786.46	178.40	33850.08	1679.90	1279.67	101.96
40K5	429.0	400.0	23.0	35.0	370.49	290.80	120290.27	5607.90	3198.49	180.19	37914.87	1895.74	1447.08	101.16
40K6	438.0	370.0	25.0	40.0	389.65	305.90	128432.35	5864.50	3381.88	181.55	33828.59	1828.57	1400.59	93.18
40K7	448.0	371.0	28.0	45.0	438.29	344.10	148100.16	6611.60	3848.78	183.82	38379.67	2068.98	1587.47	93.58
40K8	458.0	372.0	31.0	50.0	487.13	382.40	168699.38	7366.80	4327.20	186.09	43005.94	2312.15	1777.05	93.96
40K9	470.0	373.0	35.0	56.0	547.21	429.60	194740.01	8286.80	4920.70	188.65	48584.93	2605.09	2007.28	94.23
40K10	484.0	374.0	39.0	63.0	615.01	482.80	226537.95	9361.10	5620.76	191.92	55131.74	2948.22	2276.18	94.68
40K11	494.0	392.0	43.0	68.0	691.21	542.60	261626.63	10592.20	6402.77	194.55	68534.68	3496.67	2700.52	99.57
40K12	510.0	393.0	48.0	76.0	773.35	607.10	303779.05	11912.90	7286.50	198.19	77250.09	3931.30	3043.64	99.94
40K13	528.0	394.0	53.0	85.0	863.69	678.00	354176.39	13415.80	8303.29	202.50	87133.42	4423.02	3430.99	100.44
40K14	548.0	395.0	59.0	95.0	965.87	758.20	414486.60	15127.30	9480.79	207.15	98243.26	4974.34	3868.52	100.85
40K15	564.0	410.0	65.0	103.0	1081.45	848.90	482318.02	17103.50	10811.51	211.18	119192.55	5814.27	4525.42	104.98
40K16	588.0	412.0	72.0	115.0	1209.51	949.50	569246.79	19362.10	12395.01	216.94	135224.96	6564.32	5120.62	105.74
40K17	616.0	414.0	80.0	129.0	1358.67	1066.60	679972.83	22077.00	14322.16	223.71	154171.56	7447.90	5823.25	106.52
40K18	638.0	430.0	87.0	140.0	1519.61	1192.90	800682.16	25099.80	16419.75	229.54	187578.96	8724.60	6820.27	111.10
40K19	668.0	435.0	96.0	155.0	1696.33	1331.60	952172.58	28508.20	18868.64	236.92	215398.09	9903.36	7755.88	112.68

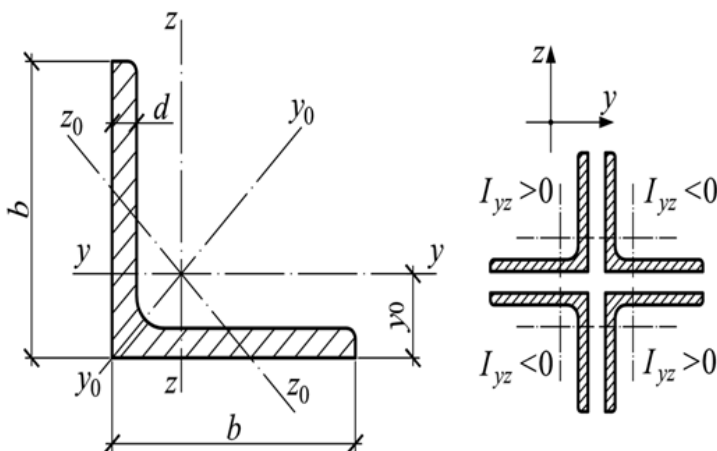
1.3. Уголки стальные горячекатаные равнополочные по ГОСТ 8509—93


Рисунок 1.3 — Уголок стальной горячекатаный равнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

b — ширина полки;

d — толщина полки;

t — толщина полки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

y_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;

I_{yx} — центробежный момент инерции;

i — радиус инерции.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м равнополочного уголка вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.3 — Уголки стальные горячекатаные равнополочные

№	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_{y0} см ⁴	i_{y0} см	I_{z0} см ⁴	W_{z0} см ³	i_{z0} см	I_{yz} см ⁴	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
2	20	3	1.13	0.40	0.28	0.59	0.63	0.75	0.17	0.20	0.39	0.23	0.60	0.89
2	20	4	1.46	0.50	0.37	0.58	0.78	0.73	0.22	0.24	0.38	0.28	0.64	1.15
2,5	25	3	1.43	0.81	0.46	0.75	1.29	0.95	0.34	0.33	0.49	0.47	0.73	1.12
2,5	25	4	1.86	1.03	0.59	0.74	1.62	0.93	0.44	0.41	0.48	0.59	0.76	1.46
2,8	28	3	1.62	1.16	0.58	0.85	1.84	1.07	0.48	0.42	0.55	0.68	0.80	1.27
3	30	3	1.74	1.45	0.67	0.91	2.30	1.15	0.60	0.53	0.59	0.85	0.85	1.36
3	30	4	2.27	1.84	0.87	0.90	2.92	1.13	0.77	0.61	0.58	1.08	0.89	1.78
3,2	32	3	1.86	1.77	0.77	0.97	2.80	1.23	0.74	0.59	0.63	1.03	0.89	1.46
3,2	32	4	2.43	2.26	1.00	0.96	3.58	1.21	0.94	0.71	0.62	1.32	0.94	1.91
3,5	35	3	2.04	2.35	0.93	1.07	3.72	1.35	0.97	0.71	0.69	1.37	0.97	1.60
3,5	35	4	2.67	3.01	1.21	1.06	4.76	1.33	1.25	0.88	0.68	1.75	1.01	2.10
3,5	35	5	3.28	3.61	1.47	1.05	5.71	1.32	1.52	1.02	0.68	2.10	1.05	2.58
4	40	3	2.35	3.55	1.22	1.23	5.63	1.55	1.47	0.95	0.79	2.08	1.09	1.85
4	40	4	3.08	4.58	1.60	1.22	7.26	1.53	1.90	1.19	0.78	2.68	1.13	2.42
4	40	5	3.79	5.53	1.95	1.21	8.75	1.52	2.30	1.39	0.78	3.22	1.17	2.98
4,5	45	3	2.65	5.13	1.56	1.39	8.13	1.75	2.12	1.24	0.89	3.00	1.21	2.08
4,5	45	4	3.48	6.63	2.04	1.38	10.52	1.74	2.74	1.54	0.89	3.89	1.26	2.73
4,5	45	5	4.29	8.03	2.51	1.37	12.74	1.72	3.33	1.81	0.88	4.71	1.30	3.37
5	50	3	2.96	7.И	1.94	1.55	11.27	1.95	2.95	1.57	1.00	4.16	1.33	2.32
5	50	4	3.89	9.21	2.54	1.54	14.63	1.94	3.80	1.95	0.99	5.42	1.38	3.05
5	50	5	4.80	11.20	3.13	1.53	17.77	1.92	4.63	2.30	0.98	6.57	1.42	3.77
5	50	6	5.69	13.07	3.69	1.52	20.72	1.91	5.43	2.63	0.98	7.65	1.46	4.47
5,6	56	4	4.38	13.10	3.21	1.73	20.79	2.18	5.41	2.52	1.11	7.69	1.52	3.44

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.3

№	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_{y0} см ⁴	i_{y0} см	I_{z0} см ⁴	W_{z0} см ³	i_{z0} см	I_{yx} см ⁴	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
5,6	56	5	5.41	15.97	3.96	1.72	25.36	2.16	6.59	2.97	1.10	9.41	1.57	4.25
6,3	63	4	4.96	18.86	4.09	1.95	29.90	2.45	7.81	3.26	1.25	11.00	1.69	3.90
6,3	63	5	6.13	23.10	5.05	1.94	36.80	2.44	9.52	3.87	1.25	13.70	1.74	4.81
6,3	63	6	7.28	27.06	5.98	1.93	42.91	2.43	11.18	4.44	1.24	15.90	1.78	5.72
7	70	4,5	6.20	29.04	5.67	2.16	46.03	2.72	12.04	4.53	1.39	17.00	1.88	4.87
7	70	5	6.86	31.94	6.27	2.16	50.67	2.72	13.22	4.92	1.39	18.70	1.90	5.38
7	70	6	8.15	37.58	7.43	2.15	59.64	2.71	15.52	5.66	1.38	22.10	1.94	6.39
7	70	7	9.42	42.98	8.57	2.14	68.19	2.69	17.77	6.31	1.37	25.20	1.99	7.39
7	70	8	10.67	48.16	9.68	2.12	76.35	2.68	19.97	6.99	1.37	28.20	2.02	8.37
7,5	75	5	7.39	39.53	7.21	2.31	62.65	2.91	16.41	5.74	1.49	23.10	2.02	5.80
7,5	75	6	8.78	46.57	8.57	2.30	73.87	2.90	19.28	6.62	1.48	27.30	2.06	6.89
7,5	75	7	10.15	53.34	9.89	2.29	84.61	2.89	22.07	7.43	1.47	31.20	2.10	7.96
7,5	75	8	11.50	59.84	11.18	2.28	94.89	2.87	24.80	8.16	1.47	35.00	2.15	9.02
7,5	75	9	12.83	66.10	12.43	2.27	104.72	2.86	27.48	8.91	1.46	38.60	2.18	10.07
8	80	5,5	8.63	52.68	9.03	2.47	83.56	з.и	21.80	7.10	1.59	30.90	2.17	6.78
8	80	6	9.38	56.97	9.80	2.47	90.40	з.и	23.54	7.60	1.58	33.40	2.19	7.36
8	80	7	10.85	65.31	11.32	2.45	103.60	3.09	26.97	8.55	1.58	38.30	2.23	8.51
8	80	8	12.30	73.36	12.80	2.44	116.39	3.08	30.32	9.44	1.57	43.00	2.27	9.65
9	90	6	10.61	82.10	12.49	2.78	130.00	3.50	33.97	9.88	1.79	48.10	2.43	8.33
9	90	7	12.28	94.30	14.45	2.77	149.67	3.49	38.94	11.15	1.78	55.40	2.47	9.64
9	90	8	13.93	106.11	16.36	2.76	168.42	3.48	43.80	12.34	1.77	62.30	2.51	10.93
9	90	9	15.60	118.00	18.29	2.75	186.00	3.46	48.60	13.48	1.77	68.00	2.55	12.20
10	100	6,5	12.82	122.10	16.69	3.09	193.46	3.89	50.73	13.38	1.99	71.40	2.68	10.06
10	100	7	13.75	130.59	17.90	3.08	207.01	3.88	54.16	14.13	1.98	76.40	2.71	10.79

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.3

№	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_{y0} см ⁴	i_{y0} см	I_{z0} см ⁴	W_{z0} см ³	i_{z0} см	I_{yx} см ⁴	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
10	100	8	15.60	147.19	20.30	3.07	233.46	3.87	60.92	15.66	1.98	86.30	2.75	12.25
10	100	10	19.24	178.95	24.97	3.05	283.83	3.84	74.08	18.51	1.96	110.00	2.83	15.10
10	100	12	22.80	208.90	29.47	3.03	330.95	3.81	86.84	21.10	1.95	122.00	2.91	17.90
10	100	14	26.28	237.15	33.83	3.00	374.98	3.78	99.32	23.49	1.94	138.00	2.99	20.63
10	100	16	29.68	263.82	38.04	2.98	416.04	3.74	111.61	25.79	1.94	152.00	3.06	23.30
11	110	7	15.15	175.61	21.83	3.40	278.54	4.29	72.68	17.36	2.19	106.00	2.96	11.89
11	110	8	17.20	198.17	24.77	3.39	314.51	4.28	81.83	19.29	2.18	116.00	3.00	13.50
12,5	125	8	19.69	294.36	32.20	3.87	466.76	4.87	121.98	25.67	2.49	172.00	3.36	15.46
12,5	125	9	22.00	327.48	36.00	3.86	520.00	4.86	135.88	28.26	2.48	192.00	3.40	17.30
12,5	125	10	24.33	359.82	39.74	3.85	571.04	4.84	148.59	30.45	2.47	211.00	3.45	19.10
12,5	125	12	28.89	422.23	47.06	3.82	670.02	4.82	174.43	34.94	2.46	248.00	3.53	22.68
12,5	125	14	33.37	481.76	54.17	3.80	763.90	4.78	199.62	39.10	2.45	282.00	3.61	26.20
12,5	125	16	37.77	538.56	61.09	3.78	852.84	4.75	224.29	43.10	2.44	315.00	3.68	29.65
14	140	9	24.72	465.72	45.55	4.34	739.42	5.47	192.03	35.92	2.79	274.00	3.76	19.41
14	140	10	27.33	512.29	50.32	4.33	813.62	5.46	210.96	39.05	2.78	301.00	3.82	21.45
14	140	12	32.49	602.49	59.66	4.31	956.98	5.43	248.01	44.97	2.76	354.00	3.90	25.50
16	160	10	31.43	774.24	66.19	4.96	1229.10	6.25	319.33	52.52	3.19	455.00	4.30	24.67
16	160	11	34.42	844.21	72.44	4.95	1340.06	6.24	347.77	56.53	3.18	496.00	4.35	27.02
16	160	12	37.39	912.89	78.62	4.94	1450.00	6.23	375.78	60.53	3.17	537.00	4.39	29.35
16	160	14	43.57	1046.47	90.77	4.92	1662.13	6.20	430.81	68.15	3.16	615.00	4.47	34.20
16	160	16	49.07	1175.19	102.64	4.89	1865.73	6.17	484.64	75.92	3.14	690.00	4.55	38.52
16	160	18	54.79	1290.24	114.24	4.87	2061.03	6.13	537.46	82.08	3.13	771.00	4.63	43.01
16	160	20	60.40	1418.85	125.60	4.85	2248.26	6.10	589.43	90.02	3.12	830.00	4.70	47.41
18	180	11	38.80	1216.44	92.47	5.60	1933.10	7.06	499.78	72.86	3.59	716.00	4.85	30.47

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.3

№	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_{y0} см ⁴	i_{y0} см	I_{z0} см ⁴	W_{z0} см ³	i_{z0} см	I_{yx} см ⁴	y_0 см	Масса 1 п. м. кг
18	180	12	42.19	1316.62	100.41	5.59	2092.78	7.04	540.45	78.15	3.58	776.00	4.89	33.12
20	200	12	47.10	1822.78	124.61	6.22	2896.16	7.84	749.40	98.68	3.99	1073.00	5.37	36.97
20	200	13	50.85	1960.77	134.44	6.21	3116.18	7.83	805.35	105.07	3.98	1156.00	5.42	39.92
20	200	14	54.60	2097.00	144.17	6.20	3333.00	7.81	861.00	111.50	3.97	1236.00	5.46	42.80
20	200	16	61.98	2362.57	163.37	6.17	3755.39	7.78	969.74	123.77	3.96	1393.00	5.54	48.65
20	200	20	76.54	2871.47	200.37	6.12	4860.42	7.72	1181.92	146.62	3.93	1689.00	5.70	60.08
20	200	25	94.29	3466.21	245.59	6.06	5494.04	7.63	1438.38	172.68	3.91	2028.00	5.89	74.02
20	200	30	111.54	4019.60	288.57	6.00	6351.05	7.55	1698.16	193.06	3.89	2332.00	6.07	87.56
22	220	14	60.38	2814.36	175.18	6.83	4470.15	8.60	1158.56	138.62	4.38	1655.00	5.91	47.40
22	220	16	68.58	3175.44	198.71	6.80	5045.37	8.58	1305.52	153.34	4.36	1869.00	6.02	53.83
25	250	16	78.40	4717.10	258.43	7.76	7492.10	9.78	1942.09	203.45	4.98	2775.00	6.75	61.55
25	250	18	87.72	5247.24	288.82	7.73	8336.69	9.75	2157.78	223.39	4.96	3089.00	6.83	68.86
25	250	20	96.96	5764.87	318.76	7.71	9159.73	9.72	2370.01	242.52	4.94	3395.00	6.91	76.11
25	250	22	106.12	6270.32	348.26	7.69	9961.30	9.69	2579.04	260.52	4.93	3691.00	7.00	83.31
25	250	25	119.71	7006.39	391.72	7.65	11125.52	9.64	2887.26	287.14	4.91	4119.00	7.11	93.97
25	250	28	133.12	7716.86	434.25	7.61	12243.84	9.59	3189.89	311.98	4.90	4527.00	7.23	104.50
25	250	30	141.96	8176.82	462.11	7.59	12964.66	9.56	3388.98	327.82	4.89	4788.00	7.31	111.44
25	250	35	163.71	9281.05	530.11	7.53	14682.73	9.47	3879.37	366.13	4.87	5401.68	7.53	128.51

1.4. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные по ГОСТ 8510—86

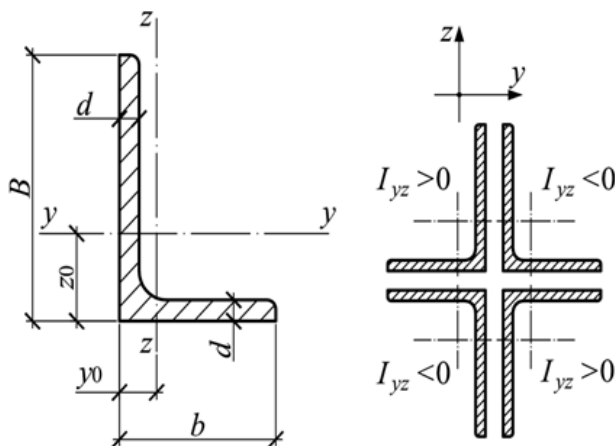


Рисунок 1.4 — Уголок стальной горячекатаный неравнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

h — высота (швеллера);

b — ширина полки;

d — толщина стенки;

t — толщина полки;

y_0 — расстояние от оси $z - z$ до наружной грани стенки;

A — площадь поперечного сечения;

I — момент инерции;

W — момент сопротивления;

i — радиус инерции;

S_y — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и справочные величины вычислены по номинальным размерам. При вычислении массы 1 м уголка плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.4 — Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

№	B мм	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	i_z см	y_0 см	z_0 см	I_{yz} см ⁴	$\text{tg } \alpha$	Масса 1 п. м. кг
2,5/1,6	25	16	3	1.16	0.70	0.43	0.78	0.22	0.19	0.44	0.42	0.86	0.22	0.392	0.91
3/2*	30	20	3	1.43	1.27	0.62	0.94	0.45	0.30	0.56	0.51	1.0	0.43	0.427	1.12
3/2*	30	20	4	1.86	1.61	0.82	0.93	0.56	0.39	0.55	0.54	1.04	0.54	0.421	1.46
3,2/2	32	20	3	1.49	1.52	0.72	1.01	0.46	0.30	0.55	0.49	1.08	0.47	0.382	1.17
3,2/2	32	20	4	1.94	1.93	0.93	1.00	0.57	0.39	0.54	0.53	1.12	0.59	0.374	1.52
4/2,5	40	25	3	1.89	3.06	1.14	1.27	0.93	0.49	0.70	0.59	1.32	0.96	0.385	1.48
4/2,5	40	25	4	2.47	3.93	1.49	1.26	1.18	0.63	0.69	0.63	1.37	1.22	0.281	1.94
4/2,5	40	25	5	3.03	4.73	1.82	1.25	1.41	0.77	0.68	0.66	1.41	1.44	0.374	2.37
4/3*	40	30	4	2.67	4.18	1.54	1.25	2.01	0.91	0.87	0.78	1.28	1.68	0.544	2.26
4/3*	40	30	5	3.28	5.04	1.88	1.24	2.41	1.11	0.86	0.82	1.32	2.00	0.539	2.46
4,5/2,8	45	28	3	2.14	4.41	1.45	1.48	1.32	0.61	0.79	0.64	1.47	1.38	0.382	1.68
4,5/2,8	45	28	4	2.80	5.68	1.90	1.42	1.69	0.80	0.78	0.68	1.51	1.77	0.379	2.20
5/3,2	50	32	3	2.42	6.18	1.82	1.60	1.99	0.81	0.91	0.72	1.60	2.01	0.403	1.9
5/3,2	50	32	4	3.17	7.98	2.38	1.59	2.56	1.05	0.90	0.76	1.65	2.59	0.401	2.4
5,6/3,6	56	36	4	3.58	11.37	3.01	1.78	3.70	1.34	1.02	0.84	1.82	3.74	0.406	2.81
5,6/3,6	56	36	5	4.41	13.82	3.70	1.77	4.48	1.65	1.01	0.88	1.87	4.50	0.404	3.46
6,3/4,0	63	40	4	4.04	16.33	3.83	2.01	5.16	1.67	1.13	0.91	2.03	5.25	0.397	3.17
6,3/4,0	63	40	5	4.98	19.91	4.72	2.00	6.26	2.05	1.12	0.95	2.08	6.41	0.396	3.91
6,3/4,0	63	40	6	5.90	23.31	5.58	1.99	7.29	2.42	1.11	0.99	2.12	7.44	0.393	4.63
6,3/4,0	63	40	8	7.68	29.60	7.22	1.96	9.15	3.12	1.09	1.07	2.20	9.27	0.386	6.03
6,5/5*	65	50	5	5.56	23.41	5.20	2.05	12.08	3.23	1.47	1.26	2.00	9.77	0.576	4.36
6,5/5*	65	50	6	6.60	27.46	6.16	2.04	14.12	3.82	1.46	1.30	2.04	11.46	0.575	5.18
6,5/5*	65	50	7	7.62	31.32	7.08	2.03	16.05	4.38	1.45	1.34	2.08	12.94	0.571	5.98

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.4

№	B мм	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	i_z см	y_0 см	z_0 см	I_{yx} см ⁴	$\operatorname{tg} \alpha$	Масса 1 п. м. кг
6,5/5*	65	50	8	8.62	35.00	7.99	2.02	18.88	4.93	1.44	1.37	2.12	13.61	0.570	6.77
7/4,5	70	45	5	5.59	27.76	5.88	2.23	9.05	2.62	1.27	1.05	2.28	9.12	0.406	4.39
7,5/5	75	50	5	6.11	34.81	6.81	2.39	12.47	3.25	1.43	1.17	2.39	12.00	0.436	4.79
7,5/5	75	50	6	7.25	40.92	8.08	2.38	14.60	3.85	1.42	1.21	2.44	14.10	0.435	5.69
7,5/5	75	50	7*	8.37	46.77	9.31	2.36	16.61	4.43	1.41	1.25	2.48	16.18	0.435	6.57
7,5/5	75	50	8	9.47	52.38	10.52	2.35	18.52	4.88	1.40	1.29	2.52	17.80	0.430	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.64	7.71	2.56	12.68	3.28	1.41	1.13	2.60	13.20	0.387	4.49
8/5	80	50	6	7.55	48.98	9.15	2.55	14.85	3.88	1.40	1.17	2.65	15.50	0.386	5.92
8/5	80	50	6	8.15	52.06	9.42	2.53	25.18	5.58	1.76	1.49	2.47	20.98	0.547	6.39
8/6*	80	60	7	9.42	59.61	10.87	2.52	28.74	6.43	1.75	1.53	2.52	24.01	0.546	7.39
8/6*	80	60	8	10.67	66.88	12.38	2.50	32.15	7.26	1.74	1.57	2.56	26.83	0.544	8.37
9/5,6	90	56	5.5	7.86	65.28	10.74	2.88	19.67	4.53	1.58	1.26	2.92	20.54	0.384	6.17
9/5,6	90	56	6	8.54	70.58	11.66	2.88	21.22	4.91	1.58	1.28	2.95	22.23	0.384	6.70
9/5,6	90	56	8	11.18	90.87	15.24	2.85	27.08	6.39	1.56	1.36	3.04	28.33	0.380	8.77
10/6,3	100	63	6	9.58	98.29	14.52	3.20	30.58	6.27	1.79	1.42	3.23	31.50	0.393	7.53
10/6,3	100	63	7	11.09	112.86	16.78	3.19	34.99	7.23	1.78	1.46	3.28	36.10	0.392	8.70
10/6,3	100	63	8	12.57	126.96	19.01	3.18	39.21	8.17	1.77	1.50	3.32	40.50	0.391	9.87
10/6,3	100	63	10	15.47	153.95	23.32	3.15	47.18	9.99	1.75	1.58	3.40	48.60	0.387	12.14
10/6,5*	100	65	7	11.23	114.05	16.87	3.19	38.32	7.70	1.85	1.52	3.24	38.00	0.415	8.81
10/6,5*	100	65	8	12.73	128.31	19.11	3.18	42.96	8.70	1.84	1.56	3.28	42.64	0.414	9.99
10/6,5*	100	65	10	15.67	155.52	23.45	3.15	51.68	10.64	1.82	1.64	3.37	51.18	0.410	12.30
11/7	110	70	6.5	11.45	142.42	19.11	3.53	45.61	8.42	2.00	1.58	3.55	46.80	0.402	8.98
11/7	110	70	8	13.93	171.54	23.22	3.51	54.64	10.20	1.98	1.64	3.61	55.90	0.400	10.93
12,5/8	125	80	7	14.06	226.53	26.67	4.01	73.73	11.89	2.29	1.80	4.01	74.70	0.407	11.04

Продолжение на следующей странице

Продолжение таблицы 1.4

№	B мм	b мм	d мм	A см ²	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	I_z см ⁴	W_z см ³	i_z см	y_0 см	z_0 см	I_{yx} см ⁴	$\text{tg } \alpha$	Масса 1 п. м. кг
12,5/8	125	80	8	15.98	225.62	30.26	4.00	80.95	13.47	2.28	1.84	4.05	84.10	0.406	12.58
12,5/8	125	80	10	19.70	311.61	37.27	3.98	100.47	16.52	2.26	1.92	4.14	102.00	0.404	15.47
12,5/8	125	80	12	23.36	364.79	44.07	3.95	116.84	19.46	2.24	2.00	4.22	118.00	0.400	18.34
14/9	140	90	8	18.00	363.68	38.25	4.49	119.79	17.19	2.58	2.03	4.49	121.00	0.411	14.13
14/9	140	90	10	22.24	444.45	47.19	4.47	145.54	21.14	2.58	2.12	4.58	147.00	0.409	17.46
16/10	160	100	9	22.87	605.97	56.04	5.15	186.03	23.96	2.85	2.24	5.19	194.00	0.391	17.96
16/10	160	100	10	25.28	666.59	61.91	5.13	204.09	26.42	2.84	2.28	5.23	213.00	0.390	19.85
16/10	160	100	12	30.04	784.22	73.42	5.11	238.75	31.23	2.82	2.36	5.32	249.00	0.388	23.58
16/10	160	100	14	34.72	897.19	84.65	5.08	271.60	35.89	2.80	2.43	5.40	282.00	0.385	27.26
18/11	180	110	10	28.33	952.28	78.59	5.80	276.37	32.27	3.12	2.44	5.88	295.00	0.376	22.20
18/11	180	110	12	33.69	1122.56	93.33	5.77	324.09	38.20	3.10	2.52	5.97	348.00	0.374	26.40
20/12,5	200	125	11	34.87	1449.02	107.31	6.45	446.36	45.98	3.58	2.79	6.50	465.00	0.392	27.37
20/12,5	200	125	12	37.89	1568.19	116.51	6.43	481.93	49.85	3.57	2.83	6.54	503.00	0.392	29.74
20/12,5	200	125	14	43.87	1800.83	134.64	6.41	550.77	57.43	3.54	2.91	6.62	575.00	0.390	34.43
20/12,5	200	125	16	49.77	2026.08	152.41	6.38	616.66	64.83	3.52	2.99	6.71	643.00	0.388	39.07

* Уголки изготавливают по требованию потребителя

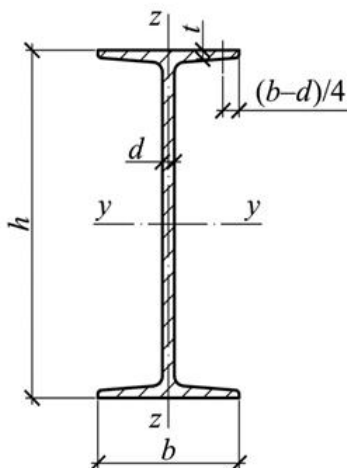
1.5. Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239—89


Рисунок 1.5 — Двутавр стальной горячекатаный

ВНИМАНИЕ! ГОСТ утратил силу на территории Российской Федерации с 30 ноября 2018 года в связи с изданием Приказа Росстандарта от 30.11.2018 № 1047-ст. Взамен введён ГОСТ Р 57837—2017.

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

- h — высота (двутавра);
- b — ширина полки;
- d — толщина стенки;
- t — толщина полки;
- A — площадь поперечного сечения;
- I — момент инерции;
- W — момент сопротивления;
- i — радиус инерции;
- S — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной 7.85 г/см^3 .

Таблица 1.5 — Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ утратил силу на территории РФ)

№	h мм	b мм	d мм	t мм	A см ²	Масса 1 п. м. кг	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	S_y см ³	I_z см ⁴	W_z см ³	i_z см
10	100	55	4.5	7.2	12.0	9.46	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	14.7	11.50	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38
14	140	73	4.9	7.5	17.4	13.70	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.50	1.55
16	160	81	5.0	7.8	20.2	15.90	873	109.0	6.57	62.3	58.6	14.50	1.70
18	180	90	5.1	8.1	23.4	18.40	1290	143.0	7.42	81.4	82.6	18.40	1.88
20	200	100	5.2	8.4	26.8	21.00	1840	184.0	8.28	104.0	115.0	23.10	2.07
22	220	110	5.4	8.7	30.6	24.00	2550	232.0	9.13	131.0	157.0	28.60	2.27
24	240	115	5.6	9.5	34.8	27.30	3460	289.0	9.97	163.0	198.0	34.50	2.37
27	270	125	6.0	9.8	40.2	31.50	5010	371.0	11.20	210.0	260.0	41.50	2.54
30	300	135	6.5	10.2	46.5	36.50	7080	472.0	12.30	268.0	337.0	49.90	2.69
33	330	140	7.0	11.2	53.8	42.20	9840	597.0	13.50	339.0	419.0	59.90	2.79
36	360	145	7.5	12.3	61.9	48.60	13380	743.0	14.70	423.0	516.0	71.10	2.89
40	400	155	8.3	13.0	72.6	57.00	19062	953.0	16.20	545.0	667.0	86.10	3.03
45	450	160	9.0	14.2	84.7	66.50	27696	1231.0	18.10	708.0	808.0	101.00	3.09
50	500	170	10.0	15.2	100.0	78.50	39727	1589.0	19.90	919.0	1043.0	123.00	3.23
55	550	180	11.0	16.5	118.0	92.60	55962	2035.0	21.80	1181.0	1356.0	151.00	3.39
60	600	190	12.0	17.8	138.0	108.00	76806	2560.0	23.60	1491.0	1725.0	182.00	3.54

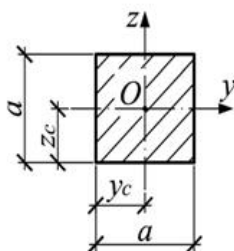
2. Геометрические характеристики простейших фигур

Принятые обозначения:

- A — площадь фигуры;
- y, z — главные оси;
- I_y, I_z — моменты инерции;
- I_y — центробежный момент инерции;
- W_y, W_z — моменты сопротивления;
- i_y, i_z — радиусы инерции.

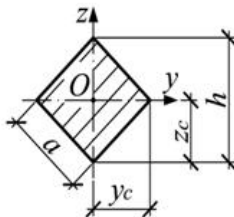
Значок «*» у момент сопротивления W приводится для наиболее удалённых волокон от центра тяжести сечения.

Квадрат

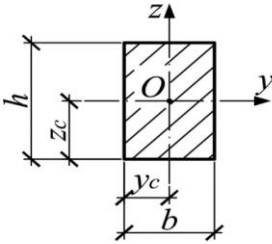


$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{a}{2}; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_y &= W_z = \frac{a^3}{6}; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.
 \end{aligned}$$

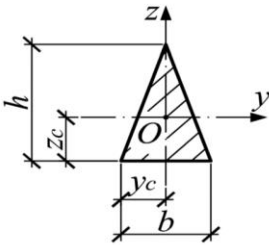
Квадрат, поставленный на ребро



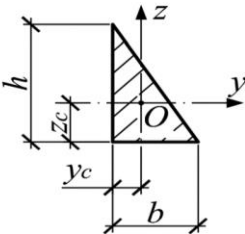
$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0.71a; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}; \quad I_{yz} = 0; \\
 W_y &= W_z = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.
 \end{aligned}$$

Прямоугольник


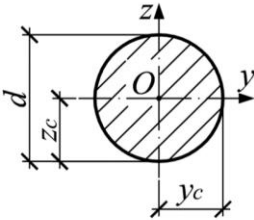
$$\begin{aligned}
 A &= bh; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; & z_c &= \frac{h}{2}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{12}; & I_z &= \frac{hb^3}{12}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_y &= \frac{bh^2}{6}; & W_z &= \frac{hb^2}{6}; \\
 i_y &= 0.289h; & i_z &= 0.289b.
 \end{aligned}$$

Равнобедренный треугольник


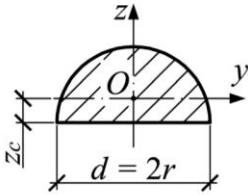
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; & z_c &= \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; & I_z &= \frac{hb^3}{48}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_{y*} &= \frac{bh^2}{24} \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; & i_z &= \frac{b}{2\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

Прямоугольный треугольник


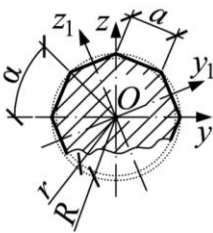
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{3}; & z_c &= \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; & I_z &= \frac{hb^3}{36}; \\
 I_{yz} &= \pm \frac{b^2h^2}{72}; \\
 W_{y*} &= \frac{bh^2}{24}; & W_{z*} &= \frac{hb^2}{24}; \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; & i_z &= \frac{b}{3\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Круг


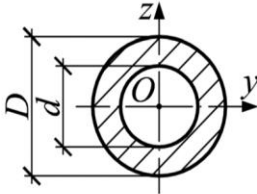
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\pi d^2}{4}; \\
 y_c &= z_c = \frac{d}{2}; \\
 I_y = I_z &= \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}; & I_p &= \frac{\pi d^4}{32}; \\
 W_y = W_z &= \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}; & W_p &= \frac{\pi d^3}{16}; \\
 i_y = i_z &= \frac{d}{4} = \frac{r}{2}.
 \end{aligned}$$

Полукруг


$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}; \\
 y_c &= \frac{d}{2} = r; & z_c &= \frac{2d}{3\pi} = \frac{4r}{3\pi}; \\
 I_y &= \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right); & I_z &= \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_{y*} &\approx 0.0239d^3; & W_z &= \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8}; \\
 i_y &\approx 0.132d; & i_z &= \frac{d}{4}.
 \end{aligned}$$

Правильный многоугольник с n сторонами


$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \alpha = n r^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{n a r}{2}; \\
 R &= \frac{a}{2 \sin \alpha}; & r &= \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}; \\
 I_y = I_z &= \frac{n a r}{48} (6R^2 - a^2) = \frac{n a r}{96} (12r^2 + a^2); \\
 I_{yz} &= 0; \\
 i_y = i_z &= \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}}.
 \end{aligned}$$

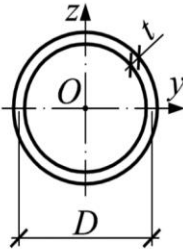
Кольцо


$$A = \frac{\pi d^2}{4} (1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0.05 D^4 (1 - \alpha^4);$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^3 (1 - \alpha^4);$$

$$i_y = i_z = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

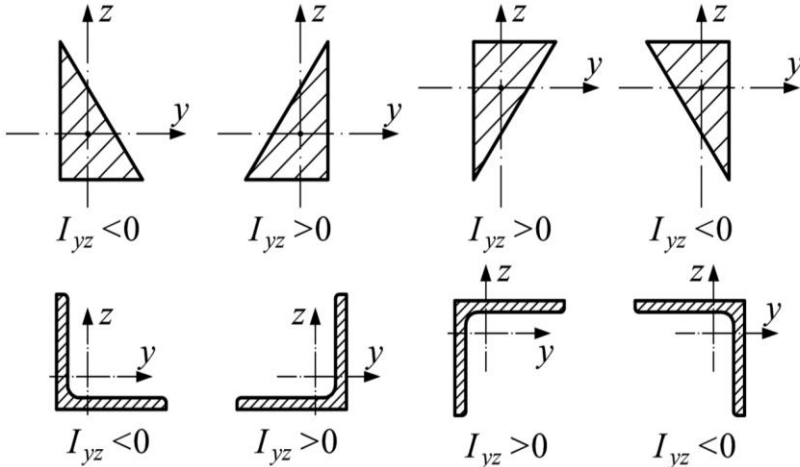
Тонкое кольцо $t \ll D$


$$A = \pi D t;$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^3 t}{4} \approx 0.3926 D^3 t;$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^2 t}{4} \approx 0.7853 D^2 t;$$

$$i_y = i_z = 0.353 D.$$

Правило знаков для центрбежного момента инерции


3. Перевод единиц. Механические характеристики материалов

3.1. Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами

Величина	Единица ее обозначения		Соотношение единиц
	по СНИП	в системе СИ	
Сила, нагрузка, вес	килограмм-сила (кгс) тонна-сила (тс)	ньютон (Н) килоньютон (кН)	$1 \text{ кгс} = 9.8 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$ $1 \text{ тс} \approx 10000 \text{ Н} = 10 \text{ кН}$
Линейная нагрузка, поверхностная нагрузка	килограмм-сила на метр (кгс/м), тонна-сила на метр (тс/м)	ньютон на метр (Н/м) килоньютон на метр (кН/м), ньютон на квадратный метр (Н/м ²)	$1 \text{ кгс/м} \approx 10 \text{ Н/м}$ $1 \text{ тс/м} \approx 10 \text{ кН/м}$
	килограмм-сила на квадратный метр (кгс/м ²) тонна-сила на квадратный метр (тс/м ²)	ньютон на квадратный метр (Н/м ²) килоньютон на квадратный метр (кН/м ²)	$1 \text{ кгс/м}^2 \approx 10 \text{ Н/м}^2$ $1 \text{ тс/м}^2 \approx 10 \text{ кН/м}^2$
	килограмм-сила на квадратный миллиметр (кгс/мм ²), килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см ²) тонна-сила на квадратный метр (тс/м ²)	паскаль (Па) (1 Па \approx 0.1 миллиметра водного столба), мегапаскаль (МПа)	$1 \text{ кгс/мм}^2 \approx 10^7 \text{ Па} = 10 \text{ МПа}$ $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 10^5 \text{ Па} = 0.1 \text{ МПа}$ $1 \text{ тс/м}^2 \approx 10^4 \text{ Па} = 10 \text{ кПа}$
	килограмм-сила-метр (кгс · м) тонна-сила-метр (тс · м)	ньютон-метр (Н · м) килоньютон-метр (кН · м)	$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} \approx 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ $1 \text{ тс} \cdot \text{м} \approx 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$$\begin{aligned}
 1 \text{ м} &= 10^2 \text{ см}; & 1 \text{ м}^2 &= 10^4 \text{ см}^2; & 1 \text{ м}^3 &= 10^6 \text{ см}^3; & 1 \text{ м}^4 &= 10^8 \text{ см}^4; \\
 1 \text{ см} &= 10^{-2} \text{ м}; & 1 \text{ см}^2 &= 10^{-4} \text{ м}^2; & 1 \text{ см}^3 &= 10^{-6} \text{ м}^3; & 1 \text{ см}^4 &= 10^{-8} \text{ м}^4; \\
 1 \text{ Н} &= 10^{-3} \text{ кН}; & 1 \text{ Н} &= 10^{-6} \text{ МН}; & 1 \text{ кН} &= 10^{-3} \text{ МН}; & 1 \text{ тс} &= 10 \text{ кН}; \\
 1 \text{ кН} &= 10^3 \text{ Н}; & 1 \text{ МН} &= 10^3 \text{ Н}^2; & 1 \text{ МН} &= 10^6 \text{ Н}; & 1 \text{ кгс} &= 10 \text{ Н}; \\
 1 \text{ Па} &= 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ кПа} &= 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МПа} &= 1 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МН} &= 100 \text{ тс}; \\
 1 \text{ кПа} &= 10^3 \text{ Па}; & 1 \text{ кПа} &= 10^{-3} \text{ МПа}; & 1 \text{ МПа} &= 10^3 \text{ кПа}; & 1 \text{ МПа} &= 10 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}; \\
 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} &= 10 \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$

3.2. Механические характеристики материалов

Материал	E , МПа	G , МПа	α , $\frac{1}{\text{град}}$	γ , $\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$
Сталь	$2.06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78.5
Медь прокатная	$1.1 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$165 \cdot 10^{-7}$	88.9
Серый чугун	$1.18 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^4$	$100 \cdot 10^{-7}$	68.0÷74.0
Дерево вдоль волокон	$1 \cdot 10^4$	$0.055 \cdot 10^4$	$20 \div 40 \cdot 10^{-7}$	5.5÷7.4

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Обозначения: E — модуль упругости при растяжении материала;

G — модуль упругости при сдвиге;

ν — коэффициент Пуассона;

α — температурный коэффициент линейного расширения;

γ — объёмный вес.

4. Устойчивость сжатых стержней

Значения φ для дерева определяются в соответствии с п.7.3 СП 64.13330.2017 «Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—25—80»:

$$\varphi = 1 - 0.8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad \text{если } \lambda \leq 70;$$

$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \quad \text{если } \lambda > 70,$$

где λ — гибкость стержня;

μ — коэффициент приведения длины;

l — длина стержня;

i_{\min} — минимальный радиус инерции.

В случае стали С245, значение φ приведены в таблицы ниже и определены согласно выражению (8) СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81*»:

$$\varphi = \frac{0.5 \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - 39.48\bar{\lambda}^2} \right)}{\bar{\lambda}^2}.$$

Значение коэффициента δ определяется по формуле

$$\delta = 9.87 (1 - \alpha + \beta\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}^2.$$

где $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}}$ — условная гибкость стержня;

α и β — коэффициенты, определяемые по таблице 7

СП 16.13330.2011.

Для типов сечений «б» по таблице 7 СП 16.330.2017 $\alpha = 0.04$ и $\beta = 0.09$, а также согласно таблицы В.5 для стали С245 $R_y = 235$ МПа; $E = 2.06 \cdot 10^5$ МПа значения коэффициента φ приведены в таблице

φ	Материал	Гибкость λ									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	Сталь С245	0.99	0.98	0.95	0.91	0.87	0.82	0.77	0.70	0.63	0.57
	Дерево	0.99	0.97	0.93	0.87	0.80	0.71	0.61	0.47	0.37	0.30
φ	Материал	Гибкость λ									
		110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
	Сталь С245	0.50	0.44	0.39	0.35	0.31	0.28	0.25	0.23	0.21	0.19
	Дерево	0.25	0.21	0.18	0.15	0.13	0.12	0.10	0.09	0.08	0.08

Расчётное сопротивление стали R_y определяется согласно СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81*».

В случае, если гибкость стержня λ превышает предельную гибкость $\lambda_{\text{пред}}$, критическое напряжение определяется по формуле Эйлера

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{Э}}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{A(\mu l)^2}.$$

В случае, если гибкость стержня λ не превышает предельную гибкость $\lambda_{\text{пред}}$, критическое напряжение определяется по формуле В. Ф. Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda,$$

где a и b — эмпирические коэффициенты, определяемые для различных материалов на основе экспериментальных данных.

Таблица 4.1 — Значения коэффициентов a и b для некоторых материалов, используемых в формуле Ф. С. Ясинского

Материал	a , МПа	b , МПа	$\lambda_{\text{пред}}$
Сталь	310	1.14	100
Дерево	40	0.203	70

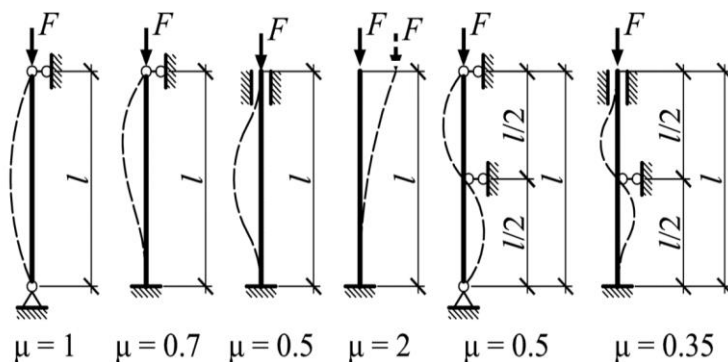


Рисунок 4.1 — Зависимость коэффициента приведения длины μ от схемы закрепления стержня

5. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок

5.1. Правила построения и контроля эпюр (метод начальных параметров)

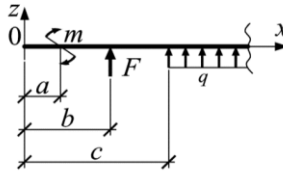


Рисунок 5.1 — К методу начальных параметров: положительное направление внешних нагрузок

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[\sum m(x-a) + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} \right];$$

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[\sum m \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} \right],$$

- где E — Модуль упругости балки;
 I — момент инерции балки относительно оси y ;
 a — расстояние от начала координат до точки приложения изгибающего момента m ;
 b — расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы F ;
 c — расстояние от начала координат до начала распределённой нагрузки q .

Использование приведённого выражения может быть возможно при соблюдении двух из четырёх правил Клебша: 1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят. 2. При действии на балку распределённой нагрузки, не доходящей до правого конца балки, её необходимо продолжить до правого концевое сечения, одновременно уравновешивая её противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности.

Дифференциальная зависимость между внутренними силовыми факторами может быть записана:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^3\varphi}{dx^3} = EI \frac{d^4w}{dx^4}.$$

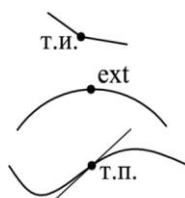
Тогда правила построения эпюр углов поворота и прогибов могут быть сформулированы:

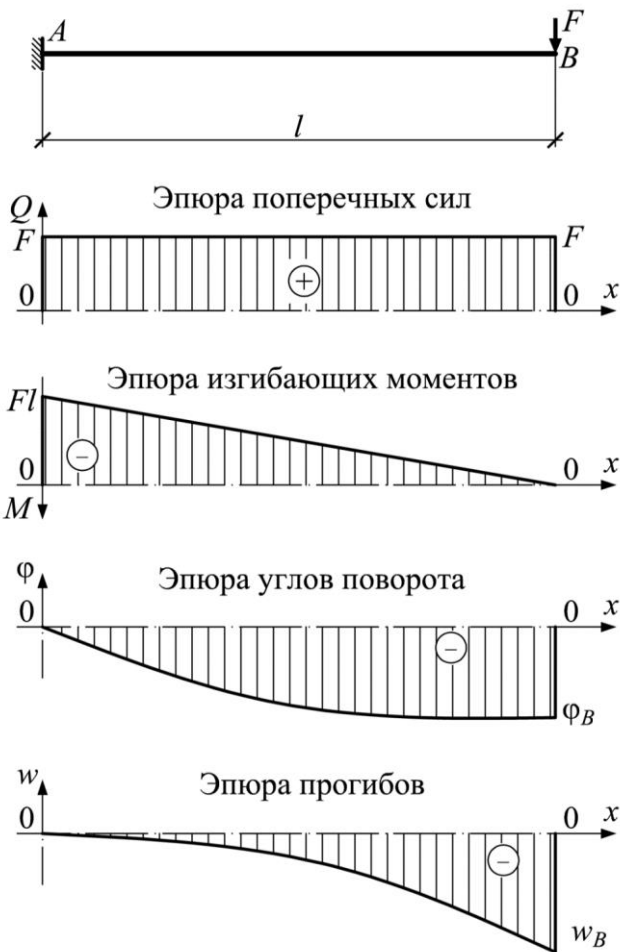
1. На участке, где эпюра поперечных сил Q положительна, эпюра углов поворота φ имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра поперечных сил q отрицательная, эпюра углов поворота φ имеет выпуклость вверх.
2. В точке, где эпюра поперечных сил Q проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре углов поворота φ в этом месте точка перегиба (т. п.).
3. В точке, где эпюра изгибающего момента φ проходит через ноль, на эпюре углов поворота φ в этом месте экстремум (ext).
4. В точке, где на эпюре изгибающего момента M наблюдается скачок, на эпюре углов поворота φ точка излома (т. и.).
5. На участке, где эпюра изгибающего момента M положительна, эпюра прогибов w имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра изгибающего момента M отрицательная, эпюра прогибов w имеет выпуклость вверх.
6. В точке, где эпюра изгибающего момента M проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре прогибов w в этом месте точка перегиба (т. п.).
7. В точке, где эпюра углов поворота φ проходит через ноль, на эпюре прогибов w в этом месте экстремум (ext).

Сокращённо данные правила могут быть представлены графически:

Нагрузка					0	—		
Q					ext	0		
M					т.п.	ext	0	
φ						т.п.	ext	0
w							т.п.	ext

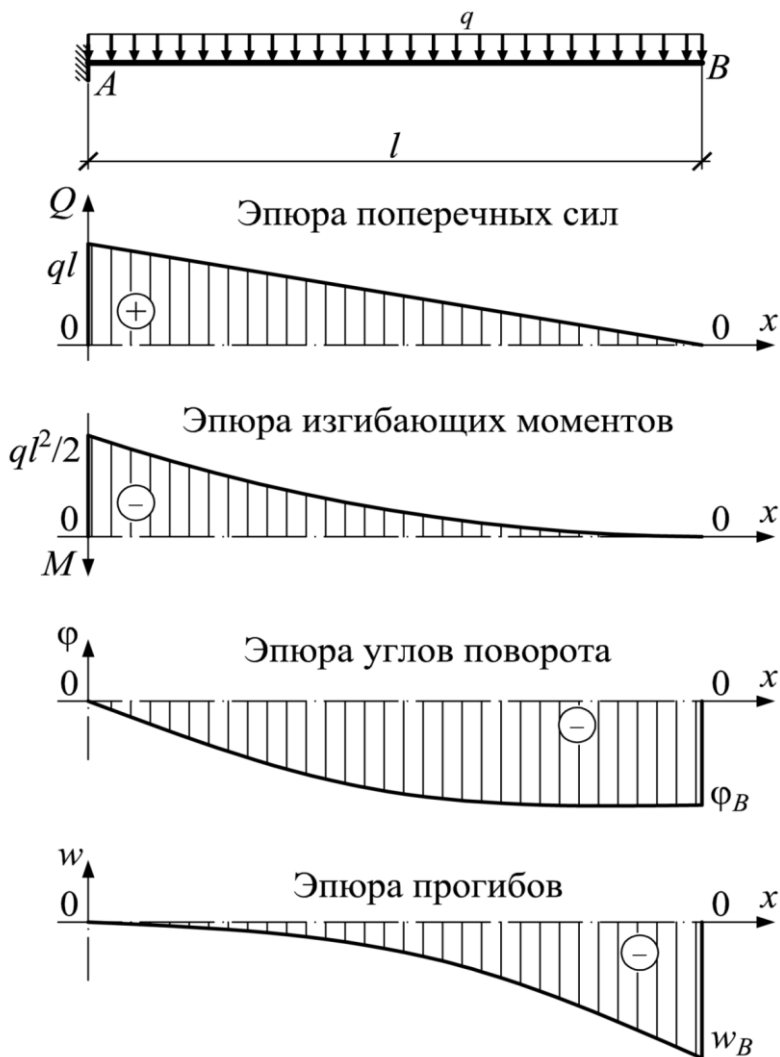
где — парабола;
 — излом;
 — скачок;
 ext — экстремум;
 т.п. — точка перегиба.



5.2. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок


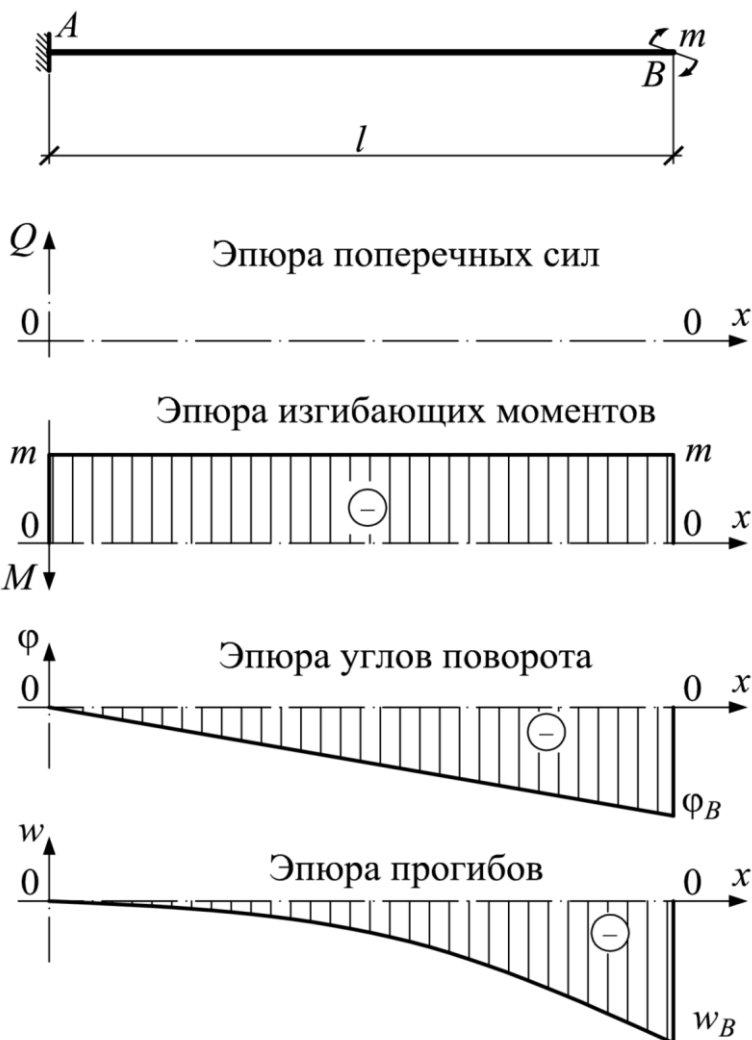
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{Fl^2}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}.$$



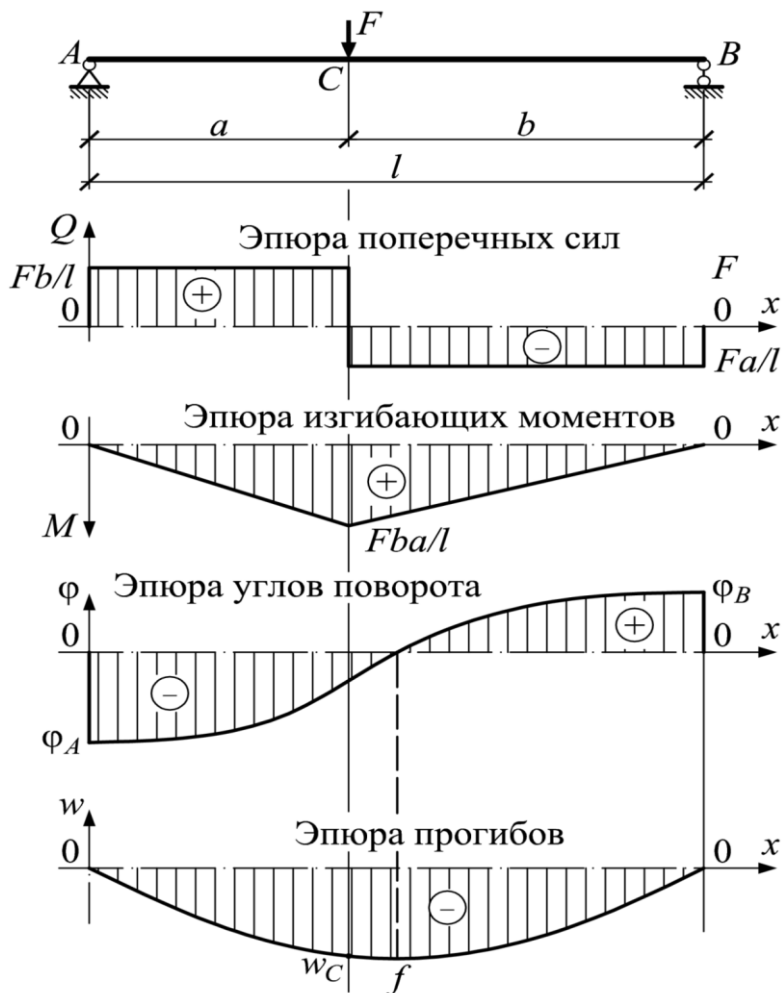
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$



$$\varphi_B = -\frac{ml}{EI};$$

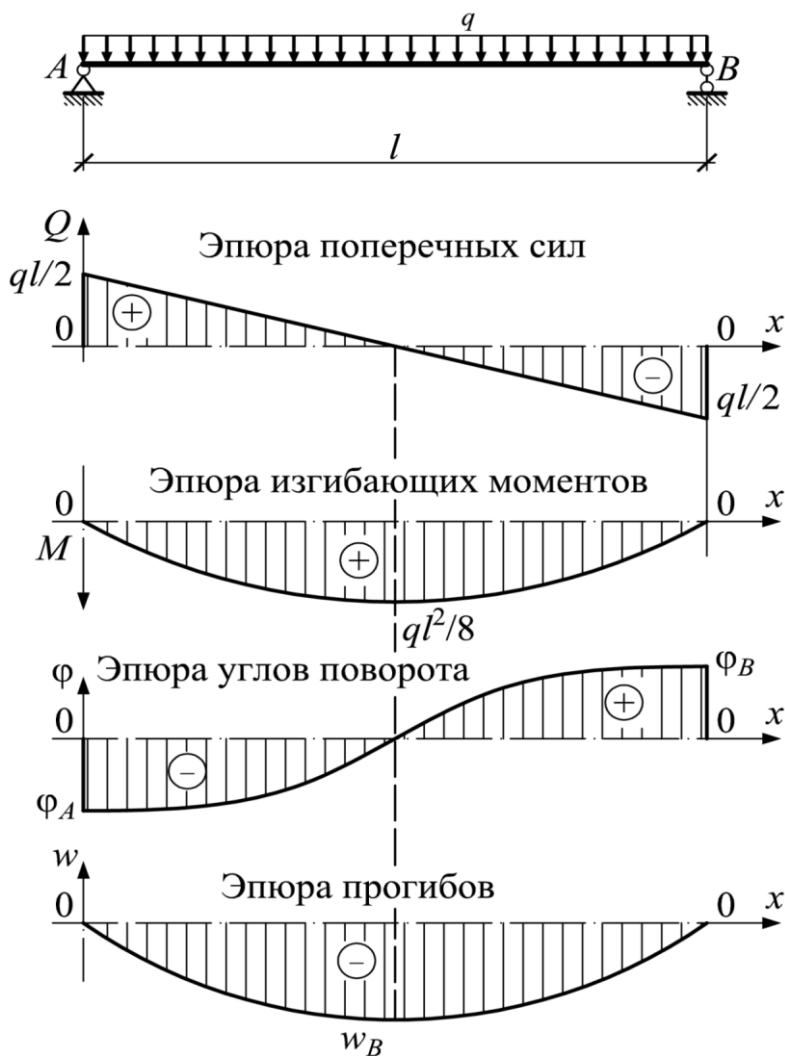
$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{ml^2}{EI}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{Fba}{EI} (a+2b); \quad \varphi_B = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} (l^2 - a^2);$$

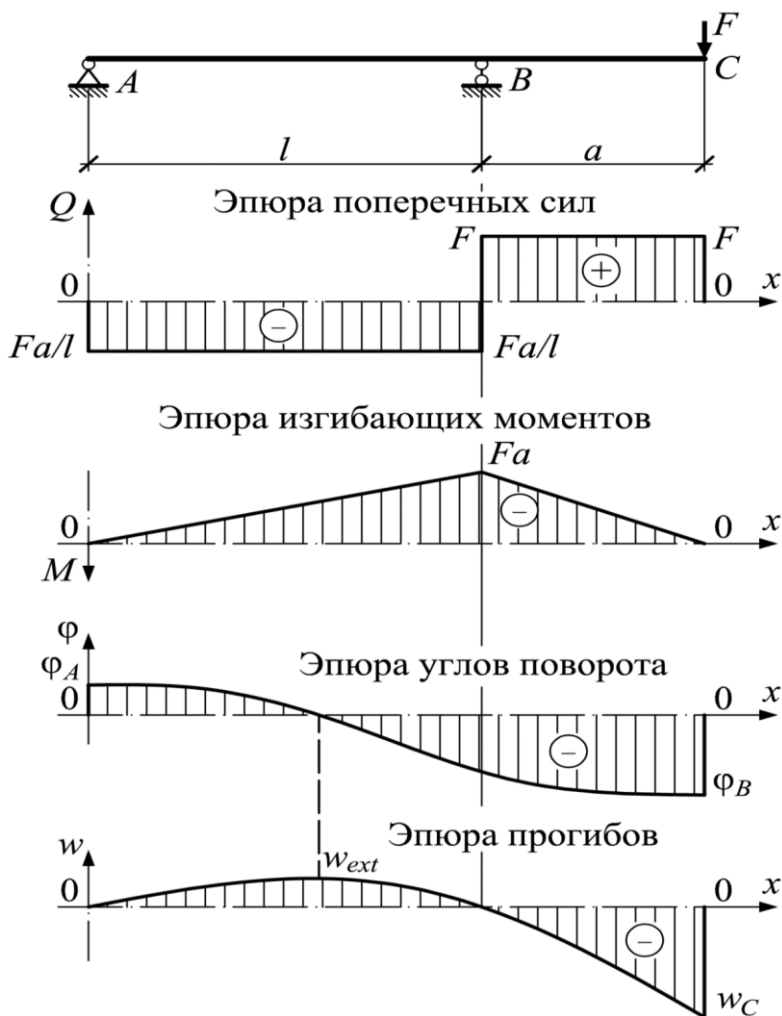
$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F}{EI} \frac{(ab)^2}{l}, \quad \text{при } x = a;$$

$$f = w_{\max} = w_C = -\frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}, \quad \text{при } x = a = b = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI};$$

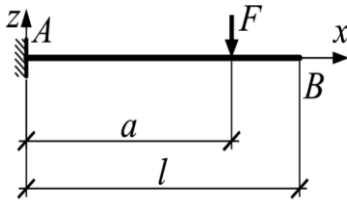
$$w_{\max} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad \text{при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{F a l}{E I}; \quad \varphi_C = -\frac{1}{6} \frac{F a}{E I} (2l + 3a);$$

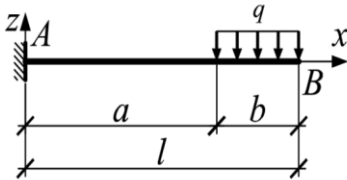
$$w_{ext} = 0.0642 \frac{F a l^2}{E I}; \quad \text{при } x = 0.578l;$$

$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F a^2}{E I} (l + a).$$



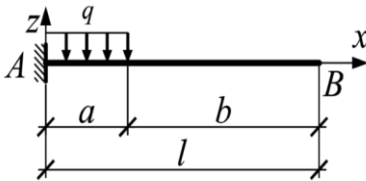
$$\varphi_B = -\frac{1Fa^2}{2EI};$$

$$w_B = -\frac{1Fa^2}{6EI}(3l-a).$$



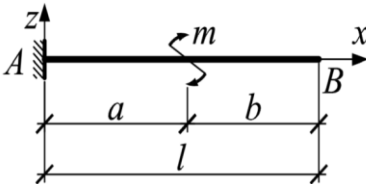
$$\varphi_B = -\frac{1ql^3}{6EI}\left(1-\frac{a^3}{l^3}\right);$$

$$w_B = -\frac{1ql^4}{24EI}\left(3-3\frac{a^3}{l^3}+\frac{a^4}{l^4}\right).$$



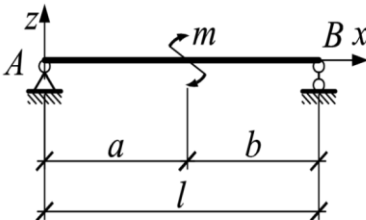
$$\varphi_B = -\frac{1qa^3}{6EI};$$

$$w_B = -\frac{1ql^3}{24EI}(4l-a).$$



$$\varphi_B = -\frac{ma}{EI};$$

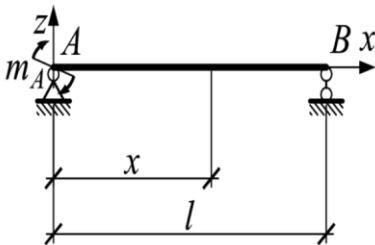
$$w_B = -\frac{1ma(l+b)}{2EI}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1ml}{6EI}\left(1-3\frac{b^2}{l^2}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1ml}{6EI}\left(1-3\frac{a^2}{l^2}\right);$$

$$w(a) = -\frac{1mab}{3EI}\left(\frac{a-b}{l}\right) \text{ при } x = a.$$

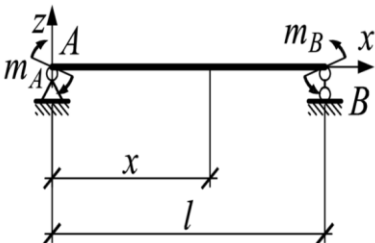


$$\varphi_A = -\frac{1}{3} \frac{ml}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ml}{EI};$$

$$w_{\max} = -0.0642 \frac{ml^2}{EI};$$

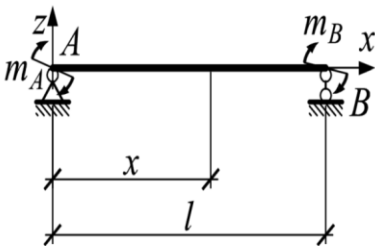
$$w = -\frac{1}{16} \frac{ml^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

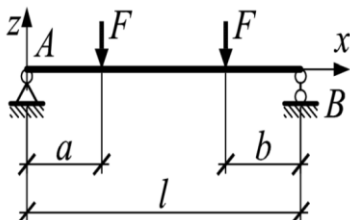
$$w_{\max} = -\frac{1}{16} \frac{(m_A + m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

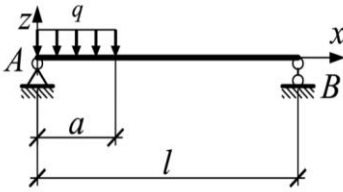
$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

$$w = -\frac{1}{16} \frac{(m_A - m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} (l - a);$$

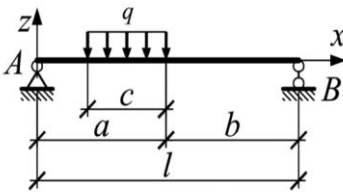
$$w_{\max} = -\frac{1}{24} \frac{Fl^3}{EI} \left(3 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a}{2l}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{12} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right);$$

$$w = -\frac{1}{24} \frac{a^3 b}{EI} \left(4 - 3\frac{a}{l}\right).$$

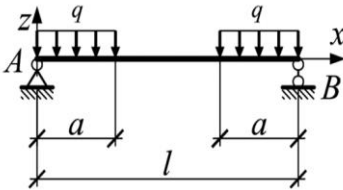


$$\varphi_A = \frac{1}{24} \frac{qbc}{EI} \left[4a(l+b) - c^2\right];$$

$$\varphi_B = \frac{1}{24} \frac{qac}{EI} \left[4b(l+a) - c^2\right];$$

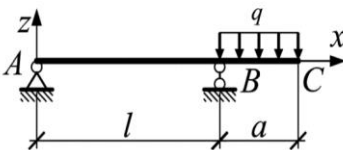
$$w = -\frac{1}{6} \frac{qc}{EI} \left[\frac{ab}{l} \left(2al - 2a^2 - \frac{c}{4}\right) + \frac{c^3}{64}\right]$$

при $x = a$.



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{12} \frac{qa^2}{EI} (3l - 2a);$$

$$w_{\max} = -\frac{1}{48} \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2\frac{a^2}{l^2}\right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{12} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_C = \frac{1}{6} \frac{qa^2}{EI} (a+l);$$

$$w_C = -\frac{1}{24} \frac{qa^2}{EI} (4l+3a);$$

$$w_{\max} = 0.0321 \frac{qa^2 l^2}{EI} \text{ при } x = 0.577l.$$