ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Учебно-методическое пособие

«Виды напряженно-деформированного состояния материала. Обобщенный закон Гука»

по дисциплине

«Сопротивление материала»

Авторы

Бондаренко В. П.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Учебно-методическое пособие ставит своей целью оказать помощь студентам, изучающих общий курс сопротивления материалов, в самостоятельном изучении важной темы дисциплины – «Виды напряженно-деформированного состояния в точке тела».

В пособии изложены основные теоретические сведения по изучаемой теме.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения, обучающихся по направлениям 08.03.01 – Строительство; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 27.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, и изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов».

Может быть использовано студентами других технических направлений подготовки (специальностей).

Содержание пособия соответствует «Примерной программе дисциплины «Сопротивление материалов», Москва, 2012год», рекомендованной учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства.

Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Бондаренко В.П.

Оглавление

1. ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Взаимодействие между частицами элемента конструкции можно охарактеризовать величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке элемента. Эти напряжения зависят от ориентации сечения (площадки), к которому отнесена точка. Совокупность напряжений по всевозможным площадкам, проведенным через рассматриваемую точку, характеризует напряженное состояние в этой точке.

Для исследования напряженного состояния в точке тела в окрестности этой точки выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда, к граням которого приложены внутренние сила, заменяющие действие отброшенных частей тела. Полные напряжения на гранях элемента представляют нормальными и касательными составляющими этих напряжений (рис. 1)

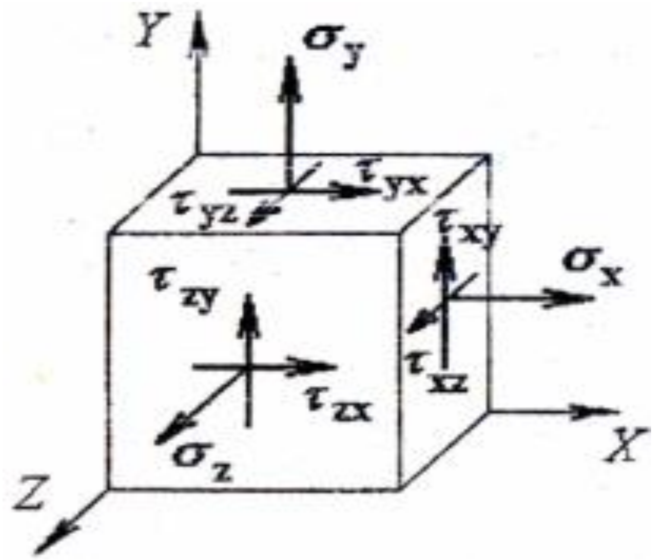

Рис. 1.

Различают следующие виды напряженного состояния:

1. Линейное или одноосное напряженное состояние.

Одноосное напряженное состояние возникает в том случае, когда нормальные и касательные напряжения отличны от нуля только на одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку тела, а напряжения по двум другим площадкам равны нулю. Одноосное напряженное состояние характерно, например, для центрального растяжения или сжатия.

2. Плоское или двухосное напряженное состояние.

Плоское напряженное состояние возникает тогда, когда только в одной площадке, проходящей через рассматриваемую точку, нормальные и касательные напряжения равны нулю.

3. Если через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, на которой нормальные и касательные напряжения равнялись бы нулю, то в этой точке имеется пространственное или трехосное напряженное состояние.

2. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Линейное или одноосное напряженное состояние испытывают элементы конструкций, работающие на центральное растяжение или сжатие. При центральном растяжении и сжатии в точках поперечного сечения стержня перпендикулярного его продольной оси возникают только нормальные напряжения σ (рис. 2), величина которых определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (1)$$

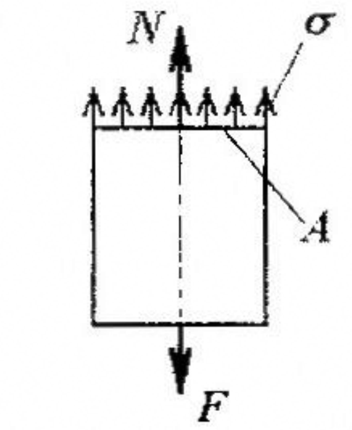

Рис. 2.

Рассмотрим напряжения, действующие в наклонном сечении стержня, при центральном растяжении. Обозначим через α угол между наклонным сечением **n–n1** и поперечным сечением **n–n2**. Угол α условимся считать положительным, если поворот от поперечного сечения к наклонному происходит против часовой стрелки (рис. 3).

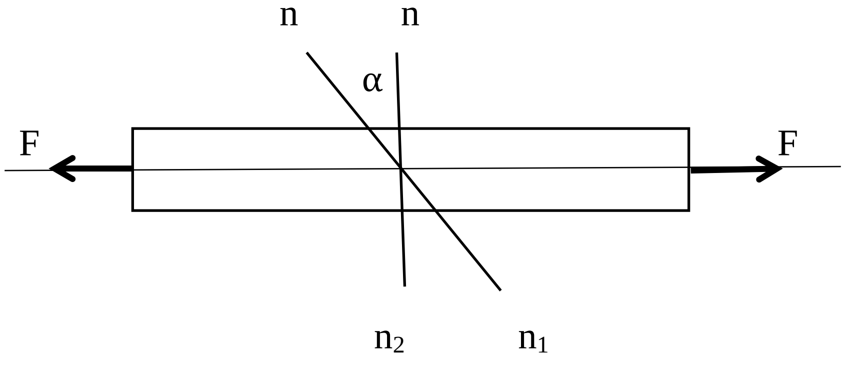

Рис. 3.

Рассмотрим отсеченную наклонным сечением **n–n₁** часть стержня (рис. 4).

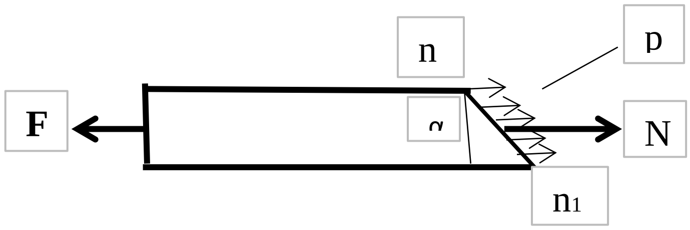

Рис. 4.

Внутреннее усилие в виде продольной (нормальной) силы **N**, возникающей от внешних нагрузок, является равнодействующей напряжения **p**, действующей по наклонной площадке и параллельной продольной оси стержня. На основании принятой гипотезы плоских сечений эти напряжения равномерно распределяются по площади наклонного сечения.

Таким образом

$$N = p \cdot A_\alpha \,, \tag{2}$$

Где

$\mathbf{A_\alpha}$ - площадь наклонного сечения.

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2) и находя из этой формулы напряжение **p**, получим

$$p = \frac{N}{A} \cdot \cos\alpha = \sigma \cdot \cos\alpha, \tag{4}$$

то есть напряжения в наклонной площадке выражается через напряжение в поперечном сечении.

Разложим напряжение **p** на две составляющие: нормальное напряжение $\boldsymbol{\sigma_\alpha}$**,** перпендикулярное наклонной площадке и касательное $\boldsymbol{\tau_\alpha}$**,** параллельное этой площадке (рис. 5).

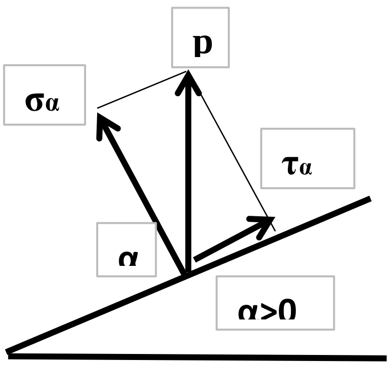

Рис. 5.

Значения напряжений $\boldsymbol{\sigma_\alpha}$ и $\boldsymbol{\tau_\alpha}$ будут равны

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha, \qquad (5)$$

$$\tau_\alpha = p \cdot \sin\alpha = \sigma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha\,. \qquad (6)$$

Нормальные напряжения считаются положительными, если они растягивающие, и отрицательными, если они сжимающие. Касательное напряжение считается положительным, если его вектор направлен относительно точек, лежащих на внутренней нормали к площадке, по ходу часовой стрелке.

Таким образом, все величины, изображенные на рис. 5 ($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\sigma_\alpha}$, $\boldsymbol{\tau_\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}$), считаются положительными.

Из формулы (5) следует, что наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения равны $\boldsymbol{\sigma_\alpha = \frac{N}{A}}$ при $\boldsymbol{\alpha = 0}$, а наименьшие – $\boldsymbol{\sigma_\alpha = 0}$ при

$\boldsymbol{\alpha = 90^0}$.

Следовательно, расчет стержней на прочность при осевом растяжении и сжатии всегда производят по его поперечным сечениям.

Из формулы (6) следует, что касательные напряжения имеют значения

$$\text{от } \frac{\sigma}{2} = \frac{N}{2A} \text{ (при } \boldsymbol{\alpha = 45^0}\text{) до } -\frac{\sigma}{2} = -\frac{N}{2A} \text{ (при } \boldsymbol{\alpha = -45^0}\text{).}$$

При $\boldsymbol{\alpha = 0}$ и $\boldsymbol{\alpha = 90^0}$ касательные напряжения принимают нулевое значение ($\boldsymbol{\tau_\alpha} = 0$).

Таким образом, в площадках с наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями касательные напряжения равны нулю.

Рассмотрим свойство касательных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам.

Пусть по площадке $\boldsymbol{n_1 – n_1}$ действует напряжение $\boldsymbol{\tau_{\alpha 1}}$, а по перпендикулярной к ней площадке $\boldsymbol{n_2 – n_2}$ – касательное напряжение $\boldsymbol{\tau_{\alpha 2}}$ (рис. 6).

Углы $\boldsymbol{\alpha_1}$ и $\boldsymbol{\alpha_2}$ наклона этих площадок к плоскости поперечного сечения стержня находятся между собой в зависимости

$$\alpha_2 = \alpha_1 - 90^0\ .$$

Тогда, согласно формуле (6) получаем

$$\tau_{\alpha 2} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_2 = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2(\alpha_1 - 90^0) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin(180^0 - 2\,\alpha_1) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_1 = -\,\tau_{\alpha 1} \qquad (7)$$

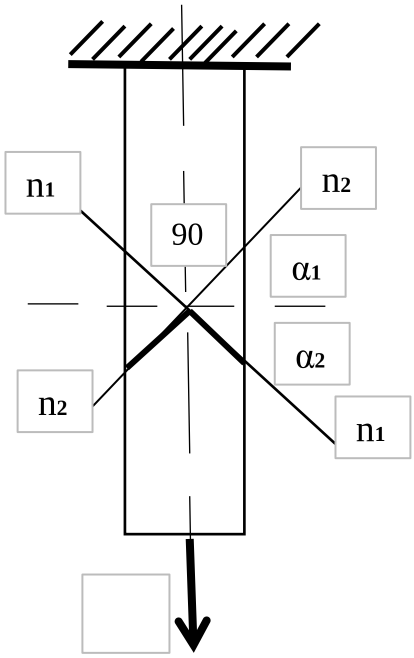

Рис. 6.

Таким образом, касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны друг другу по величине и противоположны по знаку.

Это свойство получило название «Закон парности касательных напряжений.

3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

3.1. Напряжения по произвольным площадкам

В строительных конструкциях часто встречаются элементы в виде пластин и оболочек, которые работают в условиях плоского напряженного состояния. Сюда относятся стеновые панели и перегородки крупнопанельных домов, стенки и днища резервуаров и бункеров, листовые конструкции объектов металлургической и химической промышленностей.

Рассмотрим плоский элемент, нагруженный внешними силами, действующими в его плоскости (рис. 7).

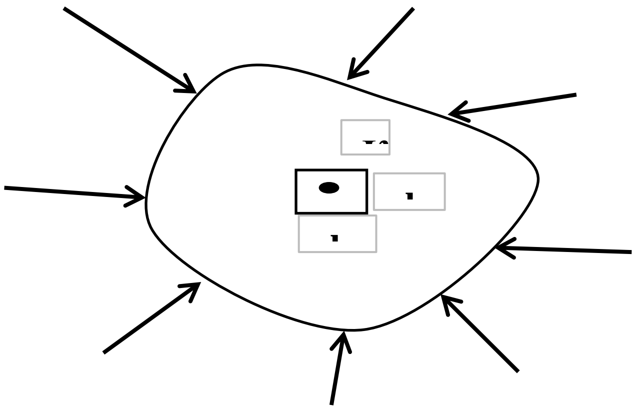

Рис. 7.

Исследуем напряженное состояние произвольной точки **К** этого элемента. Для этого выделим в окрестности рассматриваемой точки элементарный прямоугольный элемент с размерами сторон **dx** и **dy**, по сторонам которого действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 8).

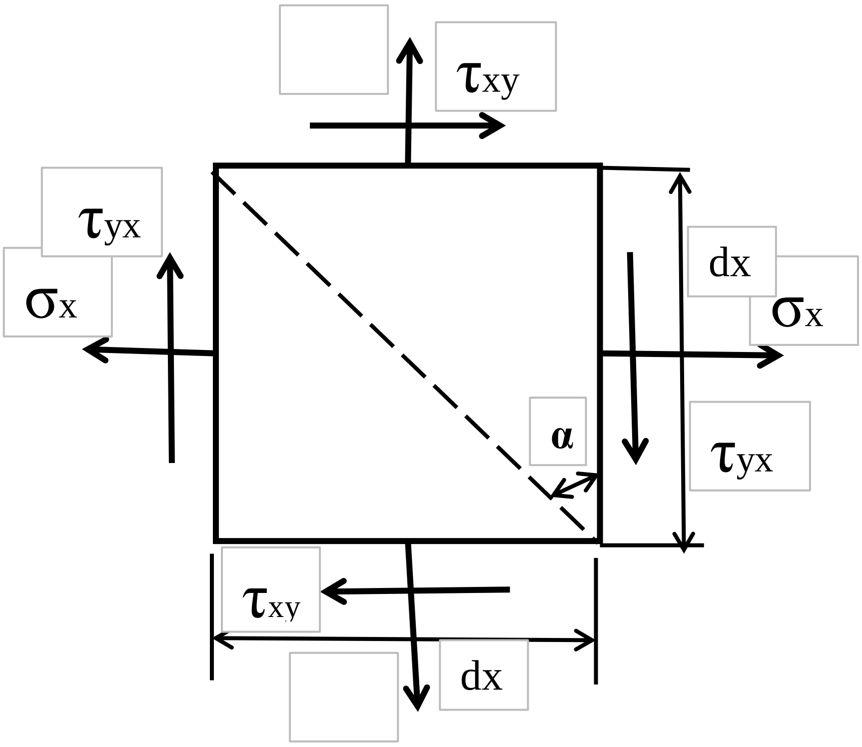

Рис. 8.

Напряжения, действующие по площадкам, зависят от ориентации этих площадок на плоскости. Изменение ориентации площадок приводит к изменению величин напряжений, но при этом между напряжениями, действующими по исходным площадкам, и напряжениями, возникающими по новым площадкам, есть определенная связь.

3.2. Напряжения по наклонным площадкам

Рассмотрим площадку, повернутую на угол $\alpha > 0$ по отношению к площадке с нормальным напряжением σ_x. Установим зависимость между напряжениями, действующими по исходным площадкам, и напряжениями по площадкам, повернутым по отношению к исходным.

Для этого рассмотрим равновесие отсеченной элементарной треугольной призмы (рис. 9).

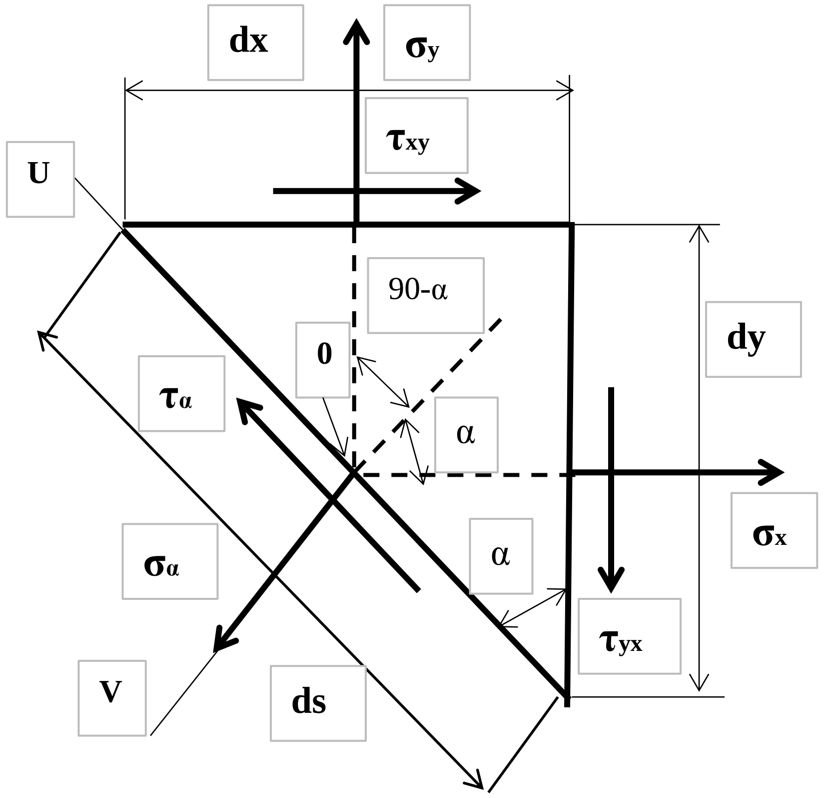

Рис. 9.

Составим уравнение статического равновесия

$$\Sigma M_0 = 0; \quad \rightarrow \quad -\tau_{xy} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} - \tau_{yx} \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} = 0.$$

Из этого уравнения следует

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} \qquad (8)$$

Мы получили, уже упомянутый выше, закон парности касательных напряжений, который выполняется и при плоском напряженном состоянии.

Спроектируем все силы на ось **V,** нормальную к наклонной площадке

$$\Sigma V = \sigma_\alpha \cdot ds \cdot dz - (\sigma_x \cdot dy + \tau_{xy} \cdot dx) \cdot dz \cdot \cos\alpha - (\sigma_y \cdot dx - \tau_{yx} \cdot dy) \cdot dz \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (9)$$

Разделив это уравнение на **ds·dz**, учитывая при этом, что $\frac{dy}{ds}$ **= cosα** и $\frac{dx}{ds}$ **= sinα**, получим следующее выражение для σ_α

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos 2\alpha + \sigma_y \cdot \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha \, . \qquad (10)$$

По площадке, перпендикулярной рассматриваемой, выражение для нормального напряжения σ_β получится подстановкой в формулу (10) угла $\alpha_1 = = (90^0 + \alpha)$:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \cdot \sin 2\alpha + \sigma_y \cdot \cos 2\alpha + \tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha \, . \qquad (11)$$

Спроектируем все силы на ось **U**

$$\Sigma U = \tau_\alpha \cdot ds \cdot dz - (\sigma_x \cdot dy + \tau_{xy} \cdot dx) \cdot \sin\alpha \cdot dz + (\sigma_y \cdot dx - \tau_{yx} \cdot dy) \cdot \cos\alpha \cdot dz = 0 \qquad (12)$$

Проделав с этим уравнением аналогичные преобразования, получим

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cdot \cos 2\alpha. \qquad (13)$$

Согласно закону парности касательных напряжений, касательное напряжение по перпендикулярной площадке будет

$$\tau_\beta = - \tau_\alpha. \qquad (14)$$

Таким образом, полученные формулы (10), (11) и (13) позволяют определять значения нормальных и касательных напряжений в любых площадках, проходящих через данную точку, если известны напряжения **σ_x, σ_y и τ_{xy} = - τ_{yx}** в любых двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку.

Складывая два уравнения (10) и (11) получим

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \sigma_y \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha,$$

или

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}, \qquad (15)$$

То есть сумма нормальных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная, следовательно, если в одной из площадок нормальные напряжения имеют максимальные значения **(σ_{max})**, то в другой они имеют минимальные значения **(σ_{min}).**

3.3. Главные напряжения и главные площадки

При расчетах инженерных конструкций нет необходимости определять напряжения во всех площадках, проходящих через данную точку, достаточно знать экстремальные их значения.

Максимальные и минимальные напряжения, возникающие в двух взаимно перпендикулярных площадках, называются **главными напряжениями**, а площадки, по которым они действуют, – **главными площадками.**

Для определения величины главных напряжений и положения главных площадок приравняем нулю первую производную напряжения **σ_α** по углу **α** (см. формулу 10).

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = - \sigma_x \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{yx} \cdot 2\cos 2\alpha$$

или при **$\alpha = \alpha_0$**

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = - (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha_0 - 2\tau_{yx} \cdot \cos 2\alpha 0 = 0. \qquad (16)$$

Здесь

α_0 – углы наклона главных площадок к площадкам, по которым действует нормальное напряжение **σ_x.**

Сравнивая полученное выражение с формулой (13), устанавливаем, что при **$\alpha = \alpha_0$**

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\,2\tau_{\alpha 0} = 0.$$

То есть

$$\tau_{\alpha 0} = 0. \qquad (17)$$

Следовательно, по главным площадкам касательные напряжения равны нулю.

Поэтому главными площадками можно называть площадки, по которым касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения достигают экстремальных значений.

Установим положение главных площадок.

Для этого решим уравнение (16) относительно угла $\boldsymbol{\alpha_0}$.

$$(\sigma_x - \sigma_y)\cdot\sin 2\alpha_0 + 2\tau_{yx}\cdot\cos 2\alpha_0 = 0,$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0 = -\,\frac{2\tau_{yx}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \qquad (18)$$

Формула (18) дает значения углов $\boldsymbol{\alpha_0}$, определяющие две взаимно перпендикулярные площадки.

Следовательно, обе главные площадки взаимно перпендикулярны.

Для определения их положения, площадки, в которых действуют напряжения $\boldsymbol{\sigma_x}$ и $\boldsymbol{\sigma_y}$, следует повернуть на угол $\boldsymbol{\alpha_0}$ против часовой стрелки при $\boldsymbol{\alpha_0 > 0}$ или по часовой стрелке при $\boldsymbol{\alpha_0 < 0}$.

Установленная по формуле (18) величина угла $\boldsymbol{2\alpha_0}$ находится в интервале от $\boldsymbol{-90^0}$ до $\boldsymbol{+90^0}$, следовательно, значение угла $\boldsymbol{\alpha_0}$ заключено в пределах от $\boldsymbol{-45^0}$ до $\boldsymbol{+45^0}$.

Поэтому поворот площадок всегда можно произвести на угол не больший 45^0.

По одной из главных площадок действует максимальное напряжение $\boldsymbol{\sigma_{max}}$, а по другой – минимальное напряжение $\boldsymbol{\sigma_{min}}$.

При решении конкретной задачи, значение угла $\boldsymbol{\alpha_0}$ можно подставить в формулы (10) и (11). При решении задачи в общем виде, для определения экстремальных значений нормальных напряжений, можно воспользоваться следующей формулой

$$\sigma_{max/min} = \frac{1}{2}\cdot\left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\right] \qquad (19)$$

Для определения площадки с напряжением $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ можно сделать следующее.

Площадку с большим в алгебраическом смысле нормальным напряжением повернуть на угол $\boldsymbol{\alpha_0}$ в направлении, в котором вектор касательного напряжения, действующий по этой же площадке, стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра.

3.4. Экстремальные касательные напряжения

Определим площадки, по которым действуют экстремальные касательные напряжения.

Эти площадки называются **площадками сдвига.**

Найдем производную $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha}$ выражения (13)

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y)\cdot\cos2\alpha - \tau_{yx}\cdot2\sin2\alpha.$$

Или

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha1} = (\sigma_x - \sigma_y)\cdot\cos2\alpha_1 - 2\tau_{yx}\cdot\sin2\alpha_1 = 0. \qquad (20)$$

Решая полученное уравнение относительно α_1, получим

$$\mathrm{tg}2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{yx}}. \qquad (21)$$

Здесь

α_1 – угол наклона площадки сдвига к площадке, по которой действует напряжение σ_x.

Правило знаков для угла α_1 остается таким, как и для угла α_0.

Формула (21) дает значения углов α_1, определяющее две взаимно перпендикулярные площадки, по одной из которых действует максимальное напряжение τ_{max}, а по другой – минимальное τ_{min}.

Согласно закону парности касательных напряжений, они связаны между собой соотношением

$$\tau_{min} = -\tau_{max}.$$

При сравнении формул (18) и (21) приходим к выводу, что

$$\mathrm{tg}2\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}2\alpha_0} \qquad (22)$$

Это соотношение можно преобразовать следующим образом

$$\mathrm{ctg}(90^0 - 2\alpha_1) = -\mathrm{ctg}2\alpha_0 = \mathrm{ctg}(-2\alpha_0).$$

Следовательно,

$$90^0 - 2\alpha_1 = -2\alpha_0\ .$$

$$\alpha_1 = 45^0 + \alpha_0. \qquad (23)$$

Таким образом, площадки сдвига наклонены к главным площадкам под углом 45^0.

Для определения величин τ_{max} и τ_{min} за исходные примем напряжения, действующие по главным площадкам, σ_{max} и σ_{min}.

Подставив в формулу (13) значения

$$\sigma_x = \sigma_{max}, \quad \sigma_y = \sigma_{min}, \quad \tau_{yx} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_1 = \pm 45^0,$$

получим

$$\tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \qquad (24)$$

Если подставить в выражение (24) значения σ_{max} и σ_{min} из формулы (19), получим

$$\tau_{max/min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\,. \qquad (25)$$

3.5. Частные случаи нагружения пластин

Практический интерес представляют частные случаи плоского напряженного состояния при некоторых видах нагружения пластин.

1. Растяжение одинаковой интенсивностью в обоих направлениях (рис. 10).

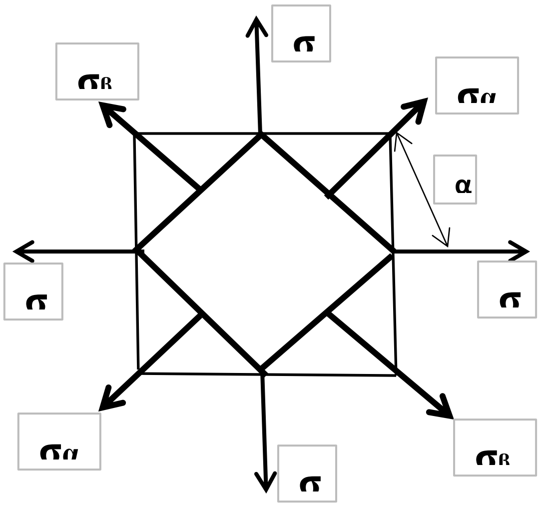

Рис. 10.

В этом случае по исходным площадкам действуют одинаковые по величине нормальные напряжения **$\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma$.**

Тогда, согласно формулам (10), (11) и (13), имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma\cdot\cos^2\alpha + \sigma\cdot\sin^2\alpha = \sigma;$$

$$\sigma_\beta = \sigma\cdot\sin^2\alpha + \sigma\cdot\cos^2\alpha = \sigma; \qquad (26)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma-\sigma}{2}\cdot\sin 2\alpha = 0$$

То есть, нормальные напряжения по произвольным площадкам постоянны, а касательные напряжения равны нулю.

Следовательно, в этом случае все площадки являются главными.

2. Растяжение в одном направлении, а сжатие такой же интенсивностью в другом (рис. 11).

В данном случае

$$\sigma_{max} = \sigma \quad и \quad \sigma_{min} = -\sigma.$$

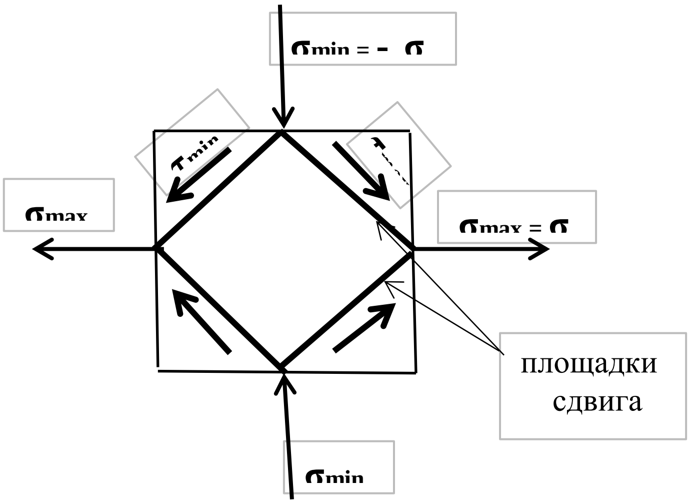

Рис. 11.

Тогда

$$\sigma_\alpha = \sigma\cdot\cos^2\alpha - \sigma\cdot\sin^2\alpha = \sigma\cdot\cos2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma+\sigma}{2}\cdot\sin2\alpha = \sigma\cdot\sin2\alpha. \qquad (27)$$

При **α = 45⁰** или **α = 135⁰** получим, что

$$\tau_{max/min} = \pm\,\sigma, \text{ а } \sigma_{45} = \sigma_{135} = 0.$$

Таким образом, в этом случае по площадкам с экстремальными значениями касательных напряжений нормальные напряжения равны нулю.

Такой случай плоского напряженного состояния называется **чистым сдвигом.**

Итак, **чистым сдвигом** называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором в окрестности данной точки тела можно выделить элементарный параллелепипед с боковыми гранями, находящимися под действием одних лишь касательных напряжений.

4. ПОНЯТИЕ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Пространственным или объемным напряженным состоянием называется такой случай напряженного состояния, когда через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, по которой одновременно и нормальные и касательные напряжения равнялись бы нулю.

В курсе теории упругости доказывается, что при пространственном напряженном состоянии, через каждую точку всегда можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, по которым касательные напряжения будут равны нулю. Такие площадки называются **главными площадками**, а нормальные напряжения, действующие по этим площадкам – **главными напряжениями** (рис.12).

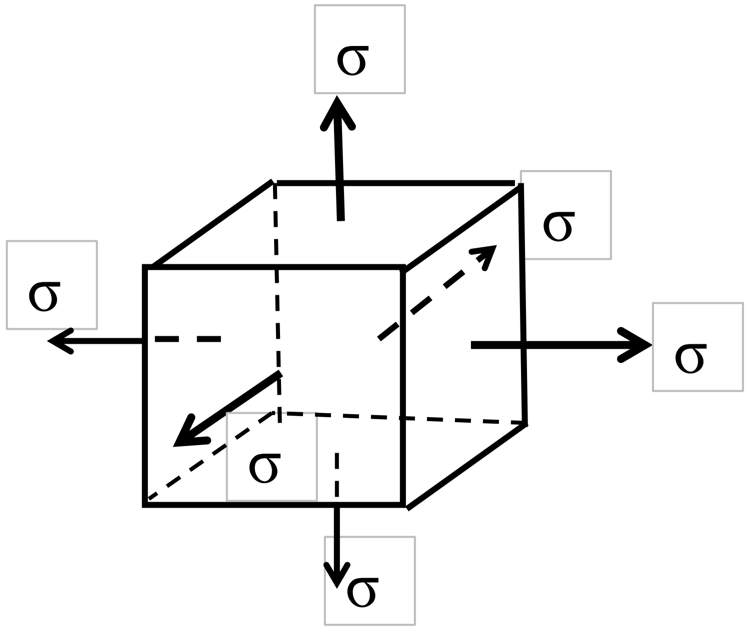

Рис. 12.

Главные напряжения обозначаются числовыми индексами, причем наибольшему по величине в алгебраическом смысле нормальному напряжению присваивается индекс **«1»**, то есть $\boldsymbol{\sigma_{max} = \sigma_1}$.

Индексы остальных главных напряжений расставляются по правилу

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \tag{28}$$

Напряжения по наклонным площадкам, то есть по площадкам не параллельным ни одному из главных напряжений, определяются по формулам

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos 2\alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos 2\alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos 2\alpha_3; \tag{29}$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{(\sigma_1^2 \cdot \cos^2\alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2\alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2\alpha_3 - \sigma_\alpha^2)}. \tag{30}$$

Здесь

$\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$ и $\boldsymbol{\alpha_3}$ – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормалями к главным площадкам.

Если по формуле (29) найти значения напряжений $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$ и $\boldsymbol{\sigma_z}$ по трем взаимно перпендикулярным площадкам и сложить их значения, то сумма этих напряжений будет равна сумме главных напряжений, то есть

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \tag{31}$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная.

5. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Совокупность деформаций, возникающих по различным направлениям и во всевозможных плоскостях, проходящих через рассматриваемую точку тела, характеризует деформирование состояния в этой точке.

Выделим из тела элементарный параллелепипед, грани которого совпадают с главными площадками, по которым действуют главные напряжения $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ (рис. 12).

Относительные деформации ребер параллелепипеда, вызываемые этими напряжениями, будут $\boldsymbol{\varepsilon_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_3}$.

Значения этих деформаций определим на основании принципа независимости действия сил.

От действия напряжения $\boldsymbol{\sigma_1}$ относительные деформации будут равны

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = -\nu \cdot \varepsilon_{11} = -\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}. \tag{32}$$

Здесь первый индекс указывает направление деформации, а второй – причину. Так, например, $\boldsymbol{\varepsilon_{21}}$ – это деформация в направлении $\boldsymbol{\sigma_2}$, от действия напряжения $\boldsymbol{\sigma_1}$.

$\boldsymbol{\nu}$ **–** коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Аналогично от действия напряжения $\boldsymbol{\sigma_2}$ будет

$$\varepsilon_{12} = -\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{32} = -\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}. \tag{33}$$

От напряжения $\boldsymbol{\sigma_3}$ относительные деформации ребер элементарного параллелепипеда будут равны

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = -\nu \cdot \frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}. \tag{34}$$

Относительные деформации, вызванные одновременным действием напряжений $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ будут равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23}; \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33}. \end{aligned} \tag{35}$$

Подставим в выражение для $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ величины $\boldsymbol{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12},}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_{13}}$ из полученных выше значений

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\cdot \sigma_2}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E \cdot} \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]. \tag{36}$$

Выполнив аналогичные преобразования с выражениями для $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_3}$, окончательно получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E \cdot} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)]; \end{aligned} \tag{37}$$

Эти формулы являются математическим выражением **обобщенного закона Гука** для изотропного тела.

В случае плоского напряженного состояния эти формулы упрощаются. Так, например, в случае **$\sigma_3 = 0$** выражения (37) примут вид

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_1 - \nu\cdot\sigma_2);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_2 - \nu\cdot\sigma_1); \qquad (38)$$

$$\varepsilon_3 = -\ \frac{\nu}{E}\cdot(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Таким образом, из полученных выражений (38) становится очевидным, что при действии напряжений только в одной плоскости, деформации происходят во всех трех плоскостях.

Рассмотренные деформации являются линейными. Их возникновение приводит к изменению объема тела и его формы, то есть куб превращается в параллелепипед.

В этом случае формулы (37) остаются справедливыми для любых трех взаимно перпендикулярных площадок при наличии всех компонентов напряженного состояния, то есть нормальных и касательных напряжений

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_x - \nu\cdot(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_y - \nu\cdot(\sigma_z + \sigma_x)]; \qquad (39)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_z - \nu\cdot(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Это обстоятельство является следствием того, что касательные напряжения вызывают только искажение формы параллелепипеда.

Объем его остается практически неизменным, поскольку удлинение ребер от перекосов, вызываемых касательными напряжениями, пренебрежительно малы по сравнению с деформациями сдвига.

6. ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Рассмотрим вопрос об определении деформаций, происходящих в точке тела при объемном напряженном состоянии. Для этого в окрестности рассматриваемой точки выделим элементарный параллелепипед с гранями, совпадающими с главными площадками, и по которым действуют главные напряжения **σ_1, σ_2, σ_3**.

Длины ребер этого параллелепипеда до деформации будут **l_1**, **l_2** и **l_3** (рис. 13).

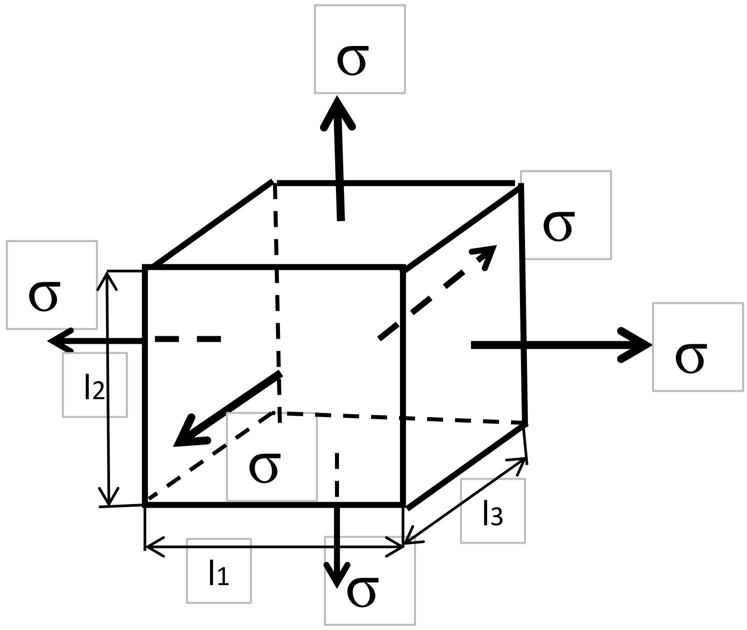

Рис. 13.

Объем элементарного параллелепипеда до деформации будет равен

$$dV = dl_1 \times dl_2 \times dl_3. \qquad (40)$$

После деформации первоначальная длина ребер параллелепипеда изменится и станет равной

$$dL_1 = dl_1 + dl_1 \cdot \varepsilon 1 = dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1);$$

$$dL_2 = dl_2 + dl_2 \cdot \varepsilon 2 = dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2); \qquad (41)$$

$$dL_3 = dl_3 + dl_3 \cdot \varepsilon 3 = dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3),$$

где

ε_1, ε_2, ε_3 – относительные удлинения ребер параллелепипеда.

Тогда объем параллелепипеда после деформирования будет

$$dv_1 = dL_1 \times dL_2 \times dL_3 = [dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1)][dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2)][dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3)]. \qquad (42)$$

После раскрытия скобок и несложного преобразования получим

$$dv_1 = dv \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3). \qquad (43)$$

Учитывая тот факт, что величины относительных деформаций весьма малы, можно пренебречь их произведениями, тогда окончательно объем параллелепипеда после деформирования будет равен

$$dv_1 = dv \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \qquad (44)$$

Относительное изменение объема составит

$$\theta = \frac{dv_1 - dv}{dv} = \frac{dv \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - dv}{dv} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (45)$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Назовите виды напряженно – деформируемого состояния.
2. Дайте определение линейного напряженного состояния.
3. Как определяется напряжение по нормальному и наклонному сечениям при линейном напряженном состоянии?
4. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
5. Дайте определение плоского напряженного состояния.
6. Как определяются напряжения по наклонным площадкам при плоском напряженном состоянии?
7. Какие площадки называются главными?
8. Как определяется положение главных площадок?
9. Какие напряжения называются главными и как они определяются в случае плоского напряженного состояния?
10. Что такое площадки сдвига и как определяется положение площадок сдвига?
11. Что называется чистым сдвигом? В каком случае нагружения пластины он наступает?
12. Что называется объемным напряженным состоянием?
13. Каким свойством обладает сумма нормальных напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам?
14. Приведите выражения обобщенного закона Гука в случае объемного напряженного состояния.
15. Чему равна относительная объемная деформация?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608с.
2. Михайлов А.М. Сопротивление материалов. – М.: Стройиздат, 1989. – 352с.
3. А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – 3-е изд., справл. – М: Высшая школа, М. 2003. - 560 с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука. 1986. – 512с.
5. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук.думка, 1988. – 736с.