



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Методические указания
для проведения лабораторных работ
по дисциплинам
«Сопротивление
материалов» и «Техническая механика»

**«Определение модуля
продольной упругости при чи-
стом изгибе»**

Авторы
Краснобаев И.А.,
Маяцкая И.А.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения лабораторной работы по дисциплинам «Соппротивление материалов» и «Техническая механика» для обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания ставят своей задачей ознакомление студентов, изучающих общий курс сопротивления материалов, с вопросами экспериментального определения модуля продольной упругости материалов при чистом изгибе.

Авторы

к.т.н., профессор кафедры «СМ» Краснобаев И.А.,

к.т.н., доцент кафедры «СМ» Маяцкая И.А.





Оглавление

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ПРОДОЛЬНОЙ УПРУГОСТИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ	4
1. Цель работы	4
2. Описание испытательной установки	4
3. Испытываемые образцы балки.....	8
4. Основные теоретические положения	9
5. Порядок проведения испытаний «Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе»	17
5. Контрольные вопросы.....	19
6. Основные правила техники безопасности	19
Приложение 1	20

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ПРОДОЛЬНОЙ УПРУГОСТИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

1. Цель работы

Изучить методику экспериментального определения модуля продольной упругости при чистом изгибе, приобрести практические навыки по проведению испытаний и расчету механических характеристик материалов.

2. Описание испытательной установки

Модуль продольной упругости представляет физико-механическую постоянную, характеризующую его упругие свойства, и определяется экспериментально. При определении перемещений в балках модуль продольной упругости входит в выражение жесткости поперечных сечений.

Испытание производится при помощи лабораторной установки, показанной на рис. 1.



Рис.1. Общий вид лабораторной установки

Лабораторная установка (рис.3) состоит из стальной балки 1 постоянного поперечного сечения, стрелочного индикатора 2, подвесок для гирь 3, станины 4. Прогиб балки определяется в середине пролета.

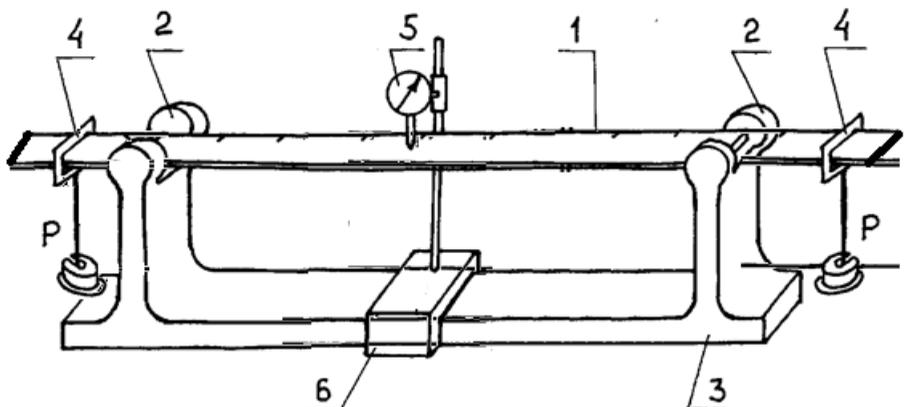


Рис.2. Общий вид лабораторной установки

На этом рисунке

1 – образец; 2 – опорные устройства; 3 – массивное основание; 4 – подвеска с грузом; 4 – индикатор часового типа для определения прогиба балки на штативе..

В качестве опоры применяется устройство, показанное на рис. 3, которое позволяет находить угол поворота поперечного сечение в опоре, что также свидетельствует о том, что гипотеза плоских сечений выполняется.

На рис. 4 показано устройство нагружения балки на концах консолей.



Рис. 3. Общий вид опоры балки



Рис. 4. Общий вид нагружения балки

Стальная балка (рис. 5) шарнирно закреплена на двух опорах (шарнирно неподвижная) и (шарнирно подвижная). Посередине пролета l установлен стрелочный индикатор (рис. 6) для определения прогиба f_i . Подвески для гирь располагаются на одинаковых по длине консолях балки.

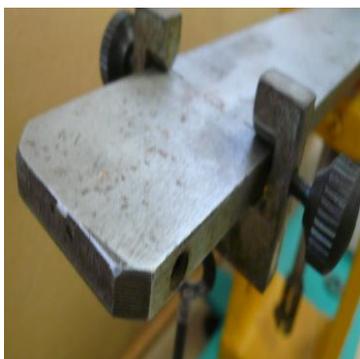


Рис. 5. Стальная балка



Рис. 6. Штатив с индикатором часового типа для определения прогиба балки

Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе

При нагружении равными силами F участок балки между опорами испытывает чистый изгиб. Расчетная схема установки показана на рис. 7, которая соответствует нагружению балки, показанной на рис. 1.

На этой же установке (рис. 1) можно проводить экспериментальные исследования чистого изгиба, расположив опоры на концах балки, а нагрузки F на равных расстояниях a от опор. Данная расчетная схема показана на рис. 8.

На данной установке можно определять модуль упругости не только стальной балки, но и балки из других материалов, например, деревянная полоса. При этом необходимо использовать такую толщину балки, которая позволит навесить груз на заданную балки.

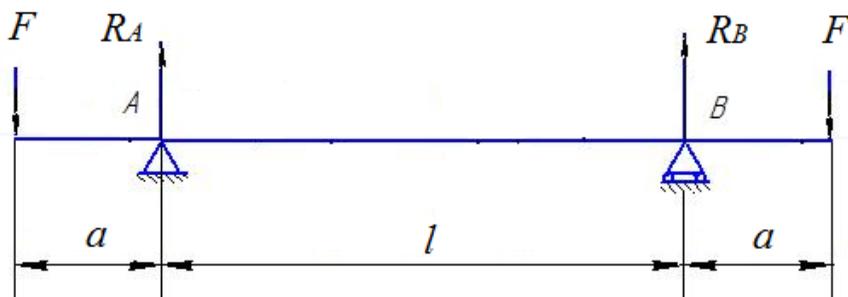


Рис.7. Расчетная схема нагружения балки с двумя консолями при чистом изгибе

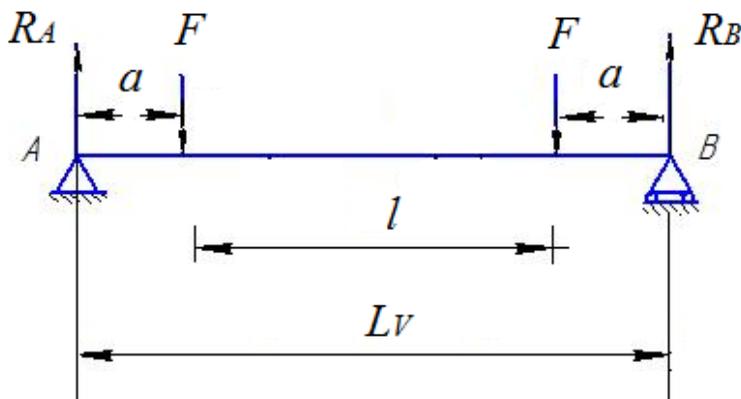


Рис.8. Расчетная схема нагружения балки с двумя силами, приложенными в пролете при чистом изгибе

Испытания проводят для схемы нагружения с двумя консолями.

3. Испытываемые образцы балки

Испытываемый образец балки, изготовленный из стали, длиной l , прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h (рис. 9), устанавливается в двух опорах на расстоянии a от края балки.

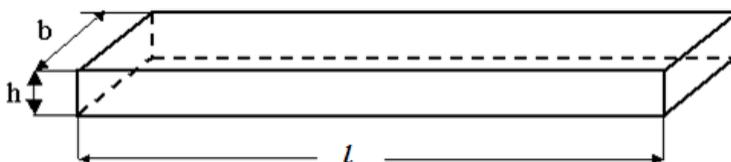


Рис. 9. Эскиз испытываемой балки

Прогиб определяется в середине балки на участке, где она испытывает чистый изгиб.

4. Основные теоретические положения

Брус, испытывающий изгиб, называют балкой (прямолинейная до нагружения ось бруса искривляется).

Простейшими видами нагружений и деформаций называют такие виды, при которых в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор (растяжение, сжатие, кручение, чистый изгиб, сдвиг).

Плоским поперечным изгибом называют такой вид нагружения, при котором нагрузка действует только в одной из главных плоскостей бруса. При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении возникают два силовых фактора: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Если поперечная сила отсутствует ($Q = 0$), то такой частный случай поперечного изгиба называют чистым изгибом.

Принято считать плоский поперечный изгиб также простейшим видом нагружения.

Зависимость между нагрузкой и деформацией впервые установлена английским физиком Р. Гуком в 1678 году.

Закон: относительная деформация прямо пропорциональна напряжению: $\sigma = E\varepsilon$.

Эта зависимость справедлива до тех пор, пока напряжение не превышает определенной для каждого материала величины, называемой пределом пропорциональности. Некоторые материалы, например, камень, цемент не подчиняются закону Гука. Закон, сформулированный Гуком, лежит в основе расчетов на прочность и жесткость.

Коэффициент пропорциональности E , входящий в эту формулу, называется модулем упругости первого рода или модулем Юнга. Модуль упругости имеет ту же размерность, что и напряжение.

Модуль упругости характеризует способность материала сопротивляться деформации, т. е. его жесткость. Например, модуль упругости стали равен:

$$E_{ст} = 2 \cdot 10^6 \text{ кГ} / \text{см}^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН} / \text{см}^2$$

,модуль упругости меди равен: $E_{м} = 1 \cdot 10^6 \text{ кГ} / \text{см}^2 =$

$= 1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^4 \text{ кН} / \text{см}^2$. Следовательно, при равных напряжениях стальной образец получит деформацию вдвое меньшую, чем медный.

Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе

Формулу закона Гука можно преобразовать, подставив вместо σ и ε их значения: $\sigma = \frac{F}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Тогда получим:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

Произведение EA , стоящее в знаменателе, характеризует физические свойства материала (его жесткость) и геометрические размеры сечения бруса. Оно называется жесткостью поперечного сечения бруса при растяжении.

Абсолютное удлинение бруса прямо пропорционально растягивающей силе и длине бруса и обратно пропорционально жесткости поперечного сечения бруса при растяжении (сжатии).

Сущность метода определения модуля упругости при растяжении заключается в определении модуля упругости при растяжении, как отношение приращения напряжения к соответствующему приращению относительного удлинения: $E = \frac{\Delta F}{A} \frac{l}{\Delta l}$.

Модуль упругости – мера жесткости материала характеризующая сопротивление развитию упругих деформаций.

Сущность метода определения модуля упругости при сжатии заключается в определении модуля упругости при сжатии как отношения приращения напряжения к соответствующему приращению относительной деформации сжатия, установленному стандартом.

Нормальное напряжение при сжатии прямо пропорционально относительному укорочению стержня: $\sigma = \varepsilon \cdot E$ или

$$\Delta h = \frac{\Delta F \cdot h}{E \cdot A},$$

где σ – нормальное напряжение, МПа; ε – относительное укорочение, %; Δh – изменение высоты стержня, мм; h – высота стержня, мм; A – площадь поперечного сечения стержня, мм²; ΔF – изменение нагрузки, Н.

Коэффициент пропорциональности E называется модулем упругости при сжатии материала и характеризует сопротивляемость материала упругой деформации при сжатии.

Величина EA называется жесткостью стержня при сжатии или растяжении. Иногда бывает удобно пользоваться понятием относительной жесткости, которая равна отношению жесткости к

высоте стержня, т.е. $\frac{EA}{h}$.

Среди методов механических испытаний одним из распространённых является испытание на изгиб.

Рассмотрим 3-х точечную схему нагружения при изгибе (рис. 10), где $f(uliz)$ - расстояние, на которое отклоняется от своего первоначального положения верхняя или нижняя поверхность испытуемого образца в середине пролета между опорами в результате приложения нагрузки.

Изгибающие напряжения при максимальной нагрузке – это напряжения в середине пролета образца, возникающие в момент времени деформирования, когда нагрузка достигает максимального значения.

Изгибающие напряжения при изгибе балки – это напряжения в середине пролета прямоугольной балки, и определяется как отклонение $M_{изг}$ под нагрузкой в середине пролета к моменту со-

противления его поперечного сечения и равны : $\sigma = \frac{3FL_v}{2bh^2}$.

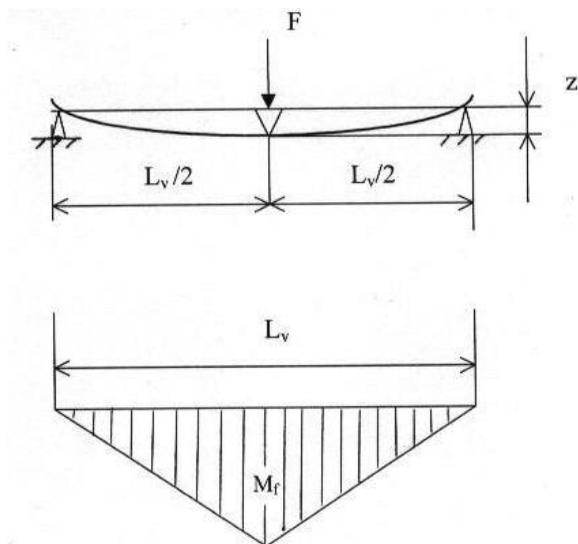


Рис. 10. 3-х точечная схема нагружения при изгибе

Для случая балки лежащей свободно на 2-х опорах и

Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе

нагруженной силой F в середине балки прогиб вычисляется по формуле: $f = \frac{Fl^3}{48EJ_y}$, где $l = L_v \Rightarrow E = \frac{\Delta Fl^3}{48J_y \Delta f}$, ΔF –

приращение нагрузки; E – модуль упругости; J_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси, мм³; l – расстояние между опорами, мм; Δf – приращение прогиба.

Сущность метода определения модуля упругости при изгибе заключается в определении модуля упругости при изгибе, как отношение приращения напряжения к соответствующему приращению относительной деформации. Прогиб измеряют в середине расстояния между опорами. Величину прогиба оценивают по величине перемещения подвижной части нагружающего устройства испытательной машины. Расстояние между опорами устанавливают в зависимости от толщины образца.

Для балки прямоугольного сечения с шириной b и высотой h модуль упругости определяется по формуле: $E = \frac{\Delta Fl^3}{4bh^3 \Delta f}$, b – ширина образца, мм; h – высота образца, мм.

В этой лабораторной рассмотрен другой метод определения модуля упругости на установке для проведения экспериментальных исследований чистого и поперечного изгиба (рис. 1). На этой установке можно проводить экспериментальные исследования чистого изгиба, расположив нагрузку на равных расстояниях a от опор.

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки при малых перемещениях имеет вид:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_y}, \quad (1)$$

где $M(x)$ – изгибающий момент на участке;

E – модуль продольной упругости;

I_y – осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси y ;

EI_y – жесткость поперечного сечения балки.

Система координатных осей, относительно которой состав-

лено уравнение (1), и расчетная схема балки, испытываемой на изгиб, показаны на рис. 11.

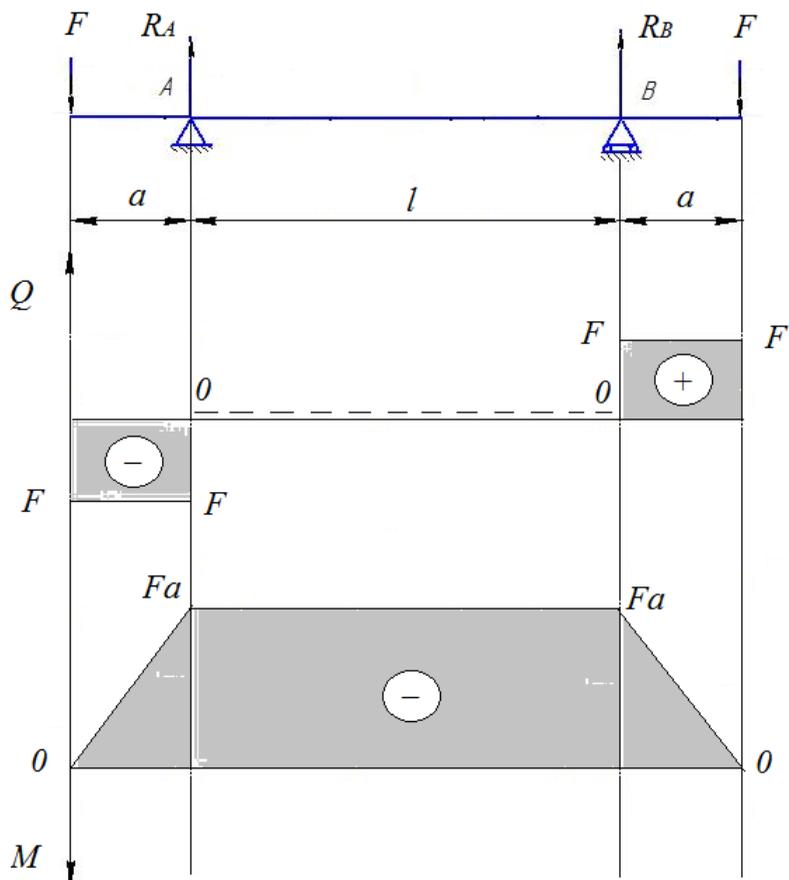


Рис. 11. Расчетная схема испытываемой балки с эпюрами поперечных сил Q и изгибающих моментов M

На этом рисунке представлены правила знаков при построении эпюр Q и M . Следует сделать замечание о том, что правила знаков для изгибающих моментов (рис. 12) принято для строительных организаций (изгибающий момент изображается на растянутых волокнах, т. е. знак «+» ставится внизу).

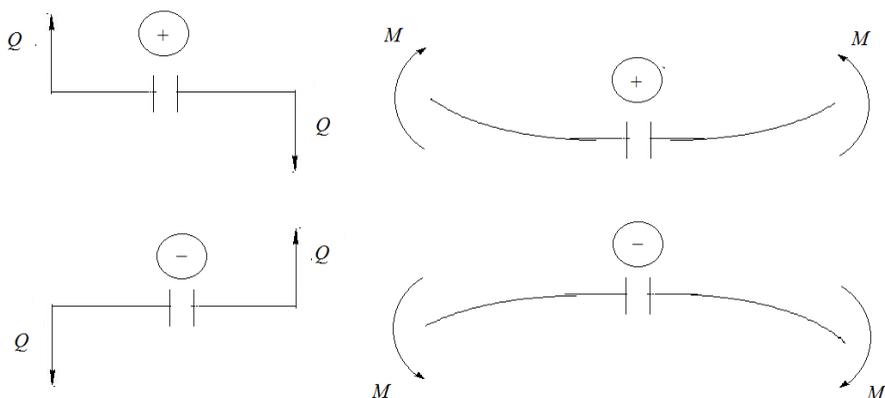


Рис. 12. Правило знаков для поперечных сил Q и изгибающих моментов M

В силу симметрии нагрузки и условий закрепления реакции опорных шарниров равны $R_B = R_C = F$. После определения опорных реакций для получения решения дифференциального уравнения (1) с оставим универсальное уравнение изогнутой оси для рассматриваемой расчетной схемы (рис. 1) для каждого участка:

$$v(x)_I = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_y} (-F) \frac{x^3}{6}, \quad (2)$$

$$v(x)_{II} = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_y} \left\{ (-F) \frac{x^3}{6} + R_B \frac{(x-a)^3}{6} \right\}, \quad (3)$$

$$v(x)_{III} = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_y} \left\{ (-F) \frac{x^3}{6} + R_B \frac{(x-a)^3}{6} + R_C \frac{(x-(a+l))^3}{6} \right\}. \quad (4)$$

Начальные параметры при $x = 0$:

Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе

v_0 – перемещение точки изогнутой оси балки, расположенной в начале координат;

φ_0 – угол наклона касательной к изогнутой оси балки;

$$F_0 = -F, M_0 = 0.$$

Граничные условия (условия закрепления):

$$\begin{cases} \text{при } x = a & v(a) = 0; \\ \text{при } x = a + l & v(a + l) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Удовлетворяя условиям (5), получим:

$$\begin{cases} v(a) = v_0 + \varphi_0 a + \frac{-F}{6EI_y} a^3 = 0; \\ v(a + l) = v_0 + \varphi_0(a + l) + \frac{F}{6EI_y} \{-(a + l)^3 + (a + l - a)^3\} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Преобразуем систему уравнений (6), умножая первое уравнение на (-1), а во втором раскроем скобки $(a + l)^3$ и $(a + l - a)^3$.

После преобразований система принимает вид:

$$\begin{cases} -v_0 - \varphi_0 a + \frac{F}{6EI_y} a^3 = 0; \\ v_0 + \varphi_0 a + \varphi_0 l + \frac{F}{6EI_y} \{-a^3 - 3a^2 l - 3al^2 - l^3 + l^3\} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Складывая уравнения системы (7), приходим к одному уравнению:

$$\varphi_0 l + \frac{F}{6EI_y} \{-3a^2 l - 3al^2\} = 0. \quad (8)$$

Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе

Из последнего уравнения получаем

$$\varphi_0 = \frac{Fa(a+l)}{2EI_y}. \quad (9)$$

Из первого уравнения системы (6) после подстановки в него φ_0 по формуле (9), выполняя преобразования находим:

$$v_0 = -\frac{Fa^2}{6EI_y}(2a+3l). \quad (10)$$

После определения кинематических параметров φ_0 и v_0 по формулам (2), (3), (4) можно найти перемещение в любой точке изогнутой оси балки.

Рассмотрим перемещение точки C, расположенной на оси симметрии, в середине пролета балки. В уравнение (3) подставим φ_0 и v_0 , определяемые по формулам (9) и (10) и координату

точки $x_C = a + \frac{l}{2}$:

$$v_C = v\left(a + \frac{l}{2}\right) = \frac{F}{6EI_y} \left\{ -a^2(2a+3l) + 3a(a+l) \left(a + \frac{l}{2} \right) - \left(a + \frac{l}{2} \right)^3 + \left(a + \frac{l}{2} - a \right)^3 \right\}$$

Опуская достаточно громоздкие алгебраические преобразования, окончательно находим:

$$v_C = \frac{Fal^2}{8EI_y}. \quad (11)$$

В результате получим выражение для экспериментального определения модуля упругости для данного нагружения:

$$E = \frac{Fal^2}{8v_C I_y}. \quad (12)$$

Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе

Сравним опытное и теоретическое значения модуля упругости. Теоретическое значение модуля E определяется по формуле (12). Опытное значение модуля определяется по той же формуле с заменой v_C на прогиб $v_{Опыт}$, определяемый экспериментальным путем.

5. Порядок проведения испытаний «Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе»

Исходные данные:

Для стальной полосы, вид которой показан на рис.5, опытным путем определяем ее размеры с помощью штангенциркуля. Определяется длина, толщина, высота, момент сопротивления и момент инерции поперечного сечения относительно оси направленной параллельно большой стороне сечения. Записывается материал образца.

Методика проведения эксперимента:

1. Изучить по лекциям и учебнику определение перемещений точек оси балки методом начальных параметров.
2. Проработать раздел кратких теоретических понятий, определений и формул.
3. Ознакомиться с лабораторной установкой, измерить размеры поперечного сечения, длину пролета l , длину консоли a .
4. Вычислить момент инерции I_y и момент сопротивления для балки прямоугольного сечения.
5. Из условия прочности при изгибе по допускаемым напряжениям определить наибольшую нагрузку:

$$F_{\max} \leq [\sigma] \frac{W_y}{a}. \quad (13)$$

6. Установить индикаторы на середине пролета и стрелку индикатора на 0.
7. Провести контрольное испытание с нагрузкой на концах консолей от 1 кг до 5 кг.
8. Вычислить опытное значение модуля упругости по формуле

$$E = \frac{Fal^2}{8\nu_{\text{Опыт}} I_y} . \quad (14)$$

9. Вычислить теоретическое значение модуля упругости по формуле (12).

10. Сравнить опытное и теоретическое значения модуля упругости по формуле:

$$\delta = \left| \frac{E_{\text{Опыт}} - E_{\text{Теор}}}{E_{\text{Теор}}} \right| \cdot 100\% = \dots\dots\%. \quad (15)$$

Результаты испытаний заносят в следующую таблицу и проводят статистическую обработку результатов эксперимента.

№ опыта	F_i , кг	$\nu_{\text{Опыт}}$	$E_{\text{Опыт}}$	E	$\Delta E = E_{\text{Опыт}} - E$	δ
1	1					
1	2					
...						

Модуль упругости стальной балки определяем для некоторого числа нагружений (n – число нагружений). Затем следует найти его среднее значение:

$$E_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i, i = 1, \dots, n.. \quad (16)$$

6. Контрольные вопросы

1. Что называется модулем продольной упругости? Его физико-механический смысл.
2. Как влияет модуль продольной упругости на изгиб бруса?
3. Какое выражение называют жесткостью поперечного сечения бруса при изгибе?
4. Как прогиб балки зависит от жесткости поперечного сечения?
5. Напишите уравнение изогнутой оси для первого участка.
6. Охарактеризуйте смысл кинематических (геометрических) начальных параметров.
7. Охарактеризуйте статические начальные параметры.
8. Постройте эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для второй расчетной схемы.

7. Основные правила техники безопасности

1. Запрещается устанавливать образец и приводить испытания на лабораторной установке без разрешения руководителя.
2. Во время испытания запрещается трогать образец руками.
3. При выполнении работы запрещается ходить за щиты, ограждающие лабораторную установку.
4. Необходимо находиться от испытуемого образца на расстоянии не менее 0,5 м.
5. Запрещается подходить к лабораторным установкам, не связанным с выполнением работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

/Образец/

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № _____

«Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе»

Дата проведения работы _____

1. Наименование оборудования – лабораторная установка для проведения испытаний на поперечный изгиб.

Общий вид:



Журнал испытаний

«Определение модуля продольной упругости при чистом изгибе»

1. Характеристика испытываемых образцов:
 - материал испытываемых образцов – сталь;
 - фактические размеры поперечного сечения и эскиз испытываемой балки.

Наименование измеряемых величин	Обозначение	Размер	Величина
Длина балки L			
Ширина поперечного сечения			
Высота поперечного сечения			
Длина пролета l			
Длина консоли a			
Площадь поперечного сечения			
Осевой момент инерции			
Момент сопротивления			

2. Обработка данных испытаний:

Результаты заносят в следующие таблицы и проводят статистическую обработку результатов эксперимента.

№ опыта	F_i , кг	$v_{Опыт}$	$E_{Опыт}$	E	$\Delta E = E_{Опыт} - E$	δ
1	1					
1	2					
...						

Находим теоретическое и опытные значения модуля упругости по формулам (12) и (14).

Определяем погрешность между опытными и теоретическими значениями δ . Затем среднее значение модуля упругости по формуле (16).

ВЫПОЛНИЛ

Студент группы _____

(Фамилия И.О.)

ПРОВЕРИЛ

Преподаватель _____

(Фамилия И.О.)