ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Техническая механика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
по дисциплине

«Теоретическая механика»

Авторы
Высоковский Д.А.,
Кириллова Е.В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Методические указания для проведения практических занятий по дисциплине «Теоретическая механика» для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»

В методических указаниях представлены примеры решения заданий по каждой теме практических занятий. Каждая тема предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для решения задач.

Авторы

к.т.н. Высоковский Д.А.
ст. преп. Кириллова Е.В.

Оглавление

Принцип освобождаемости от связей. Основные типы связей: гладкая свободная опора, неподвижный и подвижный шарниры, защемление, опорные стержни

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух, выбранных любым образом координатных осей, лежащих в плоскости, в которой расположены линии действия всех сил.

Задача 1. Тяжелый шар весом Р килограммов подвешен на нити (рис. 1, а) в точке А и удерживается в отклоненном на угол а от вертикали положении горизонтальной нитью, привязанной в точнее В. Найти натяжение нитей.

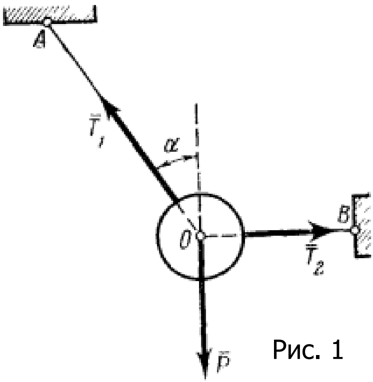


Рис. 1

Решение. Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет шар. Вес $\vec{P}$ шара известен. Будем рассматривать шар как материальную точку О. Эта точка несвободна. Связи, наложенные на нее, осуществляются нитями ОА и ОВ. Отбрасываем связи и заменяем их действие на точку О реакциями. Тогда точку О можно будет рассматривать как свободную и находящуюся в равновесии под действием плоской системы из трех сходящихся сил: активной $\vec{P}$ и реакций $\vec{T}_1$, и $\vec{T}_2$ нитей (рис. 1, б), которые направлены вдоль нитей. Реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по модулю равны искомым натяжениям нитей. Следовательно, определение натяжений нитей можно заменить определением их реакций $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$.

Для составления уравнений равновесия необходимо выбрать оси координат. Начало координат возьмем в точке О, равновесие которой мы рассматриваем. Направим ось Ох горизонтально вправо, а ось Оу — вертикально вверх.

Из сравнения рис. а и б видно, что $\left(\vec{T}_1, \vec{j}\right) = \alpha$ и $\left(\vec{T}_2, \vec{j}\right) = 90°$. Составим теперь уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0$$

Для этого алгебраически сложим проекции всех сил на каждую координатную ось и приравняем к нулю полученные алгебраические суммы:

$$\sum X = -T_1 \sin\alpha + T_2 = 0 \qquad \sum Y = T_1 \cos\alpha - P = 0$$

Решая эти уравнения равновесия, находим

$$T_1 = \frac{P}{cos\alpha} \qquad T_2 = Ptg\alpha$$

Система сходящихся сил

Задача 2. Балка АВ поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD. Крепления А, С и D — шарнирные. Определим реакции опор А и D, если на конец балки действует вертикальная сила F=5 Н. Размеры указаны на рис. 2, а. Весом балки пренебречь.

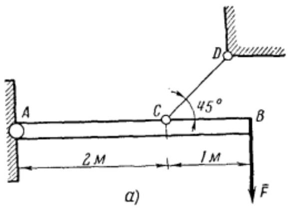


Рис. 2

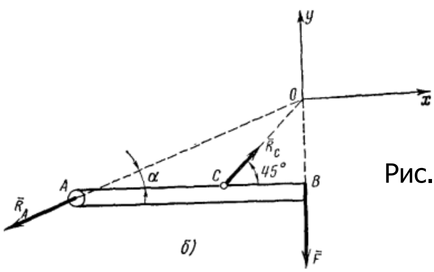


Рис. 3

Решение. Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет балка АВ. Отбрасываем наложенные на балку связи (стержень CD и шарнир А) и заменяем их реакциями. Реакция стержневой связи $\vec{R}_c$ направлена вдоль стержня от С к D (рис. 2, б). К точке В балки АВ приложена известная по модулю и направлению активная сила $\vec{F}$. Направление реак-

ции неподвижного шарнира А, вообще говоря, неопределенно. Но так как балка АВ под действием трех приложенных к ней непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих трех сил должны пересекаться в одной точке. Продолжаем линию действия вертикальной силы $\vec{F}$ до ее пересечения в точке О с линией действия реакции $\vec{R}_c$ стержневой связи. Соединяя точку О с точкой А, получаем линию действия реакции $\vec{R}_A$ шарнира А. Примем точку О за начало координат xОу и проведем координатные оси так, как показано на рис. 3, б. Определим угол, который образует реакция $\vec{R}_A$ с осью *x*; (ось x параллельна балке АВ);
$OB = CB, OA == \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{10};\ \ cos\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{\sqrt{10}};\ \ sin\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Составим теперь уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0$$

Для этого алгебраически сложим проекции всех сил на каждую координатную ось и приравняем к нулю полученные алгебраические суммы:

$$\sum X = R_c cos45° - R_A cos\alpha = 0$$

$$\sum Y = R_c sin45° - R_A sin\alpha - F = 0$$

Решая эти уравнения, находим
$R_A = 7{,}9\text{ т}\ \ R_C = 10{,}6\text{ т}\ \ R_D = R_C$

Система параллельных сил

Равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону.

Линия действия равнодействующей двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, об- ратно пропорциональных модулям этих сил.

Равнодействующая двух антипараллельных сил равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных модулям сил.

Задача 3. К телу в точках А и В (рис. 5) приложены две параллельные и направленные в одну сторону силы F_1=6 Н и F_2=3 Н. Определить модуль и линию действия равнодействующей, если расстояние между линиями действия данных сил l=6 м.

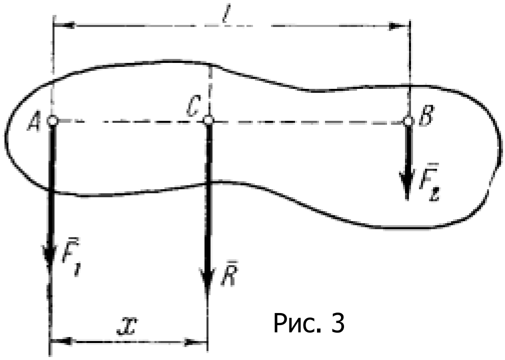


Рис. 3

Решение. Определим модуль равнодействующей: $R=F_1+F_2=6+3=9$Н

Расстояние линии действия равнодействующей $\vec{R}$ от линии действия силы $\vec{F}_1$обозначим через x. Тогда имеем

$$\frac{F_2}{x} = \frac{R}{l}$$

откуда находим

$$x = \frac{F_2 l}{R} = 2\text{м}$$

Теория пар сил

Пара сил - система двух равных по модулю параллельных друг другу и направленных в разные стороны сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, линии действия которых не совпадают

Вращательное действие пары на тело измеряется моментом пары. Численное значение момента пары определяется как произведение модуля одной из сил пары на плечо этой пары.

Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любой точки, лежащей в плос- кости ее действия, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

Задача 4. На невесомую балку AB длиной *l*, лежащую на двух опорах A и B, действует пара сил с заданным моментом M (рис. 4, а). Определить опорные реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$.

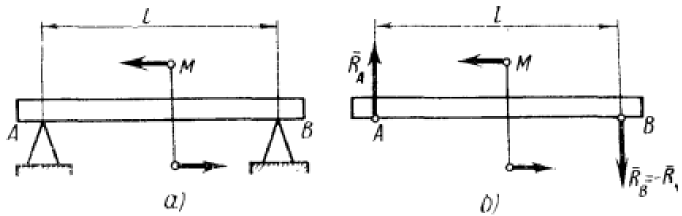


Рис. 4

Решение. Рассмотрим равновесие балки, заменив действие наложенных на нее связей реакциями связей (рис. 4, б). На балку действует пара сил с заданным моментом M, стремящаяся повернуть балку против часовой стрелки. Так как балка находится в равновесии, а пара может быть уравновешена только парой, то реакции опор $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ должны составлять пару ($\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$), вращающую балку в противоположную сторону, т. е. по часовой стрелке. Момент этой реактивной пары m ($\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$) =—$R_A l$. Согласно условию равновесия пар имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m(\vec{F}_i, \vec{F}_i') = M - R_A l = 0$$

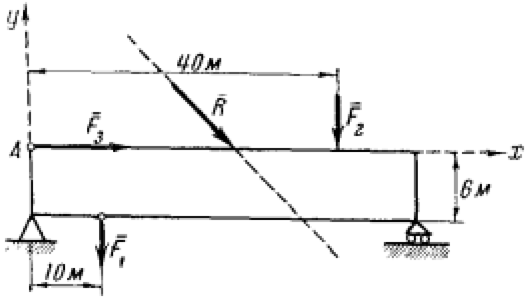
Откуда

$$R_A = R_B = \frac{M}{L}$$

Равновесие плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и .достаточно, чтобы одновременно и главный вектор, и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра приведения равнялись нулю.

Задача 5. На мостовую ферму (рис. 5) действуют вертикальные силы F_1=20 т и F_2=40 т соответственно на расстоянии 10 м и 40 м от левого конца фермы и горизонтальная сила F_3=30 т на уровне верхнего пояса фермы, высота фермы равна 6 м. Привести систему сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ к простейшему виду.



Решение. Проводим оси координат так,как показано на рис.5, взяв начало координат в точке А. Найдем проекции главного вектора заданной системы сил на оси выбранной системы координат:

$$R'_x = \sum X_i = F_3 = 30\text{т} \quad R'_y = \sum Y_i = -F_1 - F_2 = -60\text{т}$$

откуда находим модуль главного вектора $\vec{R}'$:

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2} = 67{,}08\text{т} \neq 0$$

Найдем теперь главный момент заданной системы сил относительно начала координат А:

$$M_A = \sum m_A(\vec{F}_i) = \sum (x_i Y_i - y_i X_{i)} = -1800\text{тм} \neq 0$$

Теперь найдем линию действия равнодействующей. Момент равнодействующей $\vec{R}$ относительно начала координат А определится по формуле

$$m_A(\vec{R}) = xR_y - yR_x = -60\text{ч} - 30\text{н}$$

где x и y — координаты точки, лежащей на линии действия равнодействующей.

С другой стороны, по теореме Вариньона о моменте равнодействующей имеем

$$m_A(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_i) = -1800\text{тм}$$

Следовательно, — 60x — 30y = — 1800 т-м, или 2 x + y = 60.

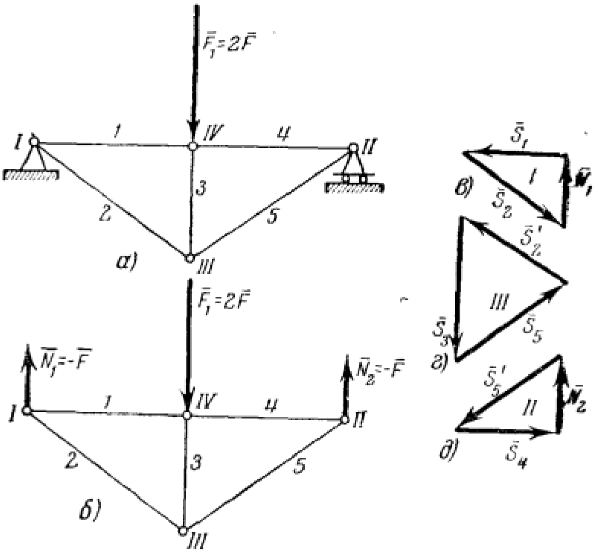
Это и есть уравнение линии действия равнодействующей.

Полагая в этом уравнении y=0, находим, что точка пересечения линии действия равнодействующей R с верхним поясом фермы находится на расстоянии x=30 м от левого конца фермы. Полагая же y=6 м, находим, что точка пересечения линии действия равнодействующей $\vec{R}$ с нижним поясом фермы находится на расстоянии x=33 м от левого конца фермы. Соединяя определенные таким образом точки пересечения линии действия равнодействующей $\vec{R}$ с верхним и нижним поясами фермы прямой линией, находим линию действия равнодействующей $\vec{R}$.

Определение усилий в стержнях плоской фермы

Задача 6. Определить реакции опор фермы и усилия в ее стержнях. К ферме приложена одна активная вертикальная сила $\vec{F}_1$=2$\vec{F}$.

Решение. Прежде чем приступить к определению усилий в стержнях фермы по способу вырезания узлов, определяют сначала опорные реакции. Это можно сделать или аналитически из трех уравнений равновесия, в которые, кроме заданных сил, войдут и опорные реакции, или графически — построением замкнутых силового и веревочного многоугольников. В данном случае горизонтальная составляющая реакции в неподвижной опоре равна нулю. Вертикальные реакции этого шарнира и подвижной опоры, вследствие полной симметрии, очевидно, равны между собой, и, следовательно, каждая из них равна по модулю 0,5F₁ или F. Обозначим эти реакции через $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ (рис. 6, б).



Определив опорные реакции, переходим к вырезанию узлов. Вырежем сначала узел I. К этому узлу приложены три силы: известная опорная реакция $\vec{N}_1$ и две реакции $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ перерезанных стержней 1 и 2. Рассматривая эти силы как находящиеся в равновесии, строим для них замкнутый силовой треугольник (рис. 6, в). Для этого выбираем определенный масштаб сил и в этом масштабе из произвольно выбранной точки проводим вектор, изображающий известную силу $\vec{N}_1$. Из концов этого вектора проводим прямые, параллельные стержням 1 и 2, до их пересечения. Точка пересечения этих прямых определяет третью вершину силового треугольника, а длины его сторон определяют модули S_1 и S_2 реакций $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ стержней 1 и 2, равные искомым усилиям в этих стержнях (рис. 16, в). Так как направление силы $\vec{N}_1$ нам известно, то, обходя треугольник по периметру в направлении силы $\vec{N}_1$, расставим в нем стрелки и определим тем самым направление искомых реакций $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$. Если мысленно перенести векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ на стержни 1 и 2, сходящиеся в узле I, то заметим, что реакция $\vec{S}_1$ направлена по стержню 1 к этому узлу, следовательно, стержень 1 сжат; реакция же $\vec{S}_2$ направлена по стержню 2 от узла, следовательно, стержень 2 растянут. Обычно принято растягивающим усилиям условно приписывать знак «плюс», а сжимающим — знак «минус».

После узла I вырежем узел III. В этом узле сходятся стержни 3 и 5, реакции в которых еще неизвестны, и стержень 2, реакция которого уже найдена. Строим для этих трех сходящихся сил замкнутый силовой треугольник в том же масштабе (рис. 6, г). Построение этого силового треугольника нужно начинать с построения известных сил. При этом необходимо обратить внимание на то, что реакция $\vec{S}_2{}'$ стержня 2, приложенная к узлу III, очевидно, равна по модулю и направлена противоположно реакции $\vec{S}_2$ этого же стержня, приложенной к узлу I, т. е. $\vec{S}_2' = -\vec{S}_2$. Чтобы построить теперь силовой треугольник для узла III, проводим из произвольной точки вектор, изображающий известную силу $\vec{S}_2{}'$, далее из начала и конца вектора $\vec{S}_2{}'$проводим прямые, параллельные стержням 5 и 3, до их пересечения. Длины сторон полученного замкнутого силового треугольника, параллельных стержням 3 и 5, определяют модули искомых усилий $\vec{S}_3$ и $\vec{S}_5$ в этих стержнях. Обходя этот силовой треугольник по его периметру в направлении известной силы $\vec{S}_2{}'$, находим направление сил $\vec{S}_3$ и $\vec{S}_5$. Так как вектор $\vec{S}_3$, как видим из чертежа, направлен к узлу III, то отсюда заключаем, что стержень 3 сжат. Вектор $\vec{S}_5{}'$ направлен от узла III, следовательно, стержень 5 растянут.

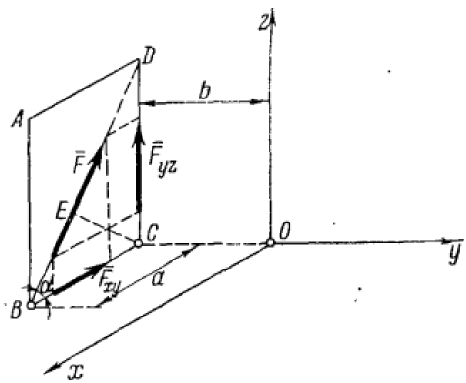
Остается рассмотреть узел II, в котором уравновешиваются известная опорная реакция $\vec{N}_2 = -\vec{F}$, известная реакция $\vec{S}_5'$ стержня 5 и неизвестная еще реакция $\vec{S}_4$ стержня 4. Строим для этих трех сходящихся сил замкнутый силовой треугольник (рис. 16, д) в том же масштабе и по тем же правилам, что и ранее. Так как вектор $\vec{S}_4$ направлен от узла II, то отсюда заключаем, что стержень 4 сжат. Вектор $\vec{S}_5'$ направлен от узла II, следовательно, стержень 5 растянут. Построением этих силовых треугольников заканчивается определение усилий во всех стержнях данной фермы.

К последнему узлу IV приложена заданная сила F_1и уже найденные реакции $\vec{S}'_1$, $\vec{S}'_3$ и $\vec{S}'_4$стержней 1,3 и 4. Рекомендуется в целях контроля строить силовой треугольник и для последнего узла. При правильности произведенных ранее построений этот силовой треугольник, построенный для известных уже сил, должен получаться замкнутым.

Пространственная система сил

Момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Задача 7. Сила $\vec{F}$ расположена в плоскости ABCD, параллельной координатной плоскости Oxz, и наклонена к горизонту под углом α; при этом CB=a, OC=b (рис. 7). Определить момент силы $\vec{F}$ относительно каждой оси координат.



Решение. Найдем момент $m_x(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси x. Для вычисления $m_x(\vec{F})$ проектируем силу $\vec{F}$ на плоскость Oyz; получаем $F_{xy} = Fsin\alpha$.

Плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О равно Ь, а поворот ее с конца оси x виден происходящим по ходу часовой стрелки, следовательно $m_x(\vec{F}) = -bFsin\alpha$

Найдем теперь момент $m_y(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси y. Так как сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси y, то $m_y(\vec{F}) = -F \cdot asin\alpha$

Найдем момент $m_z(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси z. Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость xy равна $F_{xy} = F cos\alpha$, а ее плечо относительно точки O равно Ь. Поворот силы $\vec{F}_{xy}$ с конца оси z виден происходящим по ходу часовой стрелки, следовательно: $m_z(\vec{F}) = -F \cdot bcos\alpha$.

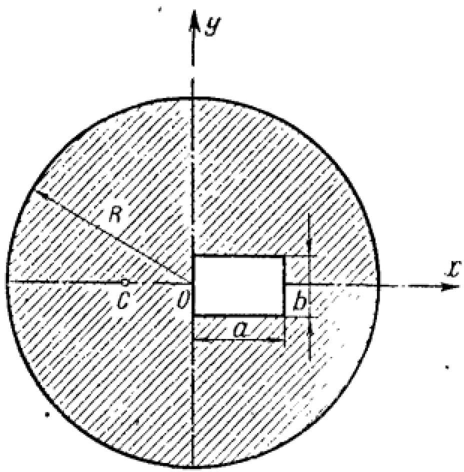
Центр тяжести системы тел

Центр тяжести твердого тела обладает тем свойством, что через него проходит линия действия равнодействующей параллельных сил тяжести отдельных его частиц, независимо от расположения тела в пространстве.

Координаты центра тяжести тела массы M

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Задача 8. Определить положение центра тяжести площади круглой пластины радиуса R, с вырезом в виде прямоугольника со сторонами a и b (рис. 8).



Решение. Так как пластина с вырезом имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси. Выбираем начало координат в точке O (рис. 21) и направляем ось Ox по оси симметрии. Для нахождения координаты x_c центра тяжести площади пластины с вырезом дополняем площадь этой пластины до полного круга.

Площадь полного круга $S_o = \pi R^2$; центр тяжести этого круга совпадает с началом координат O, следовательно, абсцисса этого центра x_o=0.

Площадь вырезанного прямоугольника $S_1 = ab$; абсцисса центра тяжести площади этого прямоугольника $x_1 = \frac{a}{2}$. Найдем абсциссу центра тяжести площади данной круглой пластины с вырезом:

$$x_c = \frac{S_o x_o - S_1 x_1}{S_o - S_1} = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - ab\frac{a}{2}}{\pi R^2 - ab} = -\frac{a^2 b}{2(\pi R^2 - ab)}$$

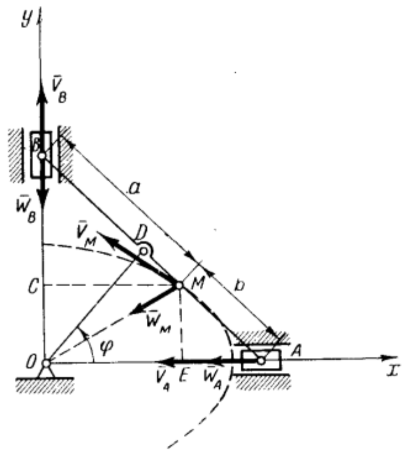
Кинематика точки

Указания к решению задач. Задачи по кинематике точки, решаемые методом прямоугольных декартовых координат, можно разделить на следующие основные типы:

а) составление уравнений движения точки в декартовых координатах исходя из условий данной задачи;

б) определение траектории, скорости и ускорения точки из данных уравнений движения точки в декартовых координатах.

Задача 9. В механизме, изображенном на рис. 9, ползуны А и В соединены стержнем АВ длиной $l = a + b$, движутся при вращении шарниром D. Найти скорость и ускорение каждого из ползунов, а также траекторию, скорость и ускорение вектора скорости точки М, находящейся на расстоянии b от конца А стержня АВ, если угол DOA=φ изменяется пропорционально времени, т. е. φ=ωt, где ω=const и ω>0.



Решение. В тех случаях, когда закон движения точки непосредственно не задан, решение задачи надо начинать с нахождения уравнений, определяющих закон движения точки. Для определения закона движения точек А, В и М примем направляющие Ox и Oy за координатные оси. Прежде всего определим закон движения, скорость и ускорение каждого из ползунов А и В. Так как OD = =AD, то OAB=φ. Обозначая координаты точек А и В соответственно через x_A и y_B, получим

$$x_A = l cos\varphi = l cos\omega t \quad y_A = l sin\varphi = l sin\omega t$$

Эти уравнения и представляют закон движения каждого из ползунов. Дифференцируя x_A и y_B по времени t, найдем проекции вектора скорости каждого из ползунов на координатные оси:

$$v_{Ax} = x_A' = -\omega l sin\omega t \quad v_{By} = y_B' = \omega l cos\omega t$$

Дифференцируя эти выражения по времени t, найдем проекции вектора ускорения каждого из ползунов

$$a_{Ax} = x_A'' = -\omega^2 l cos\omega t \quad a_{By} = y_B'' = -\omega^2 l sin\omega t$$

Знаки v_{Ax}, a_{Ax}, v_{By}, a_{By} указывают направление векторов скорости и ускорения ползунов. Ползун А из рассматриваемого положения движется ускоренно, а ползун В — замедленно.

Определим уравнения движения, траекторию, скорость и ускорение точки М. Обозначая координаты точки М через x_M и y_M, из треугольников ВМС и АМЕ находим уравнения движения точки М стержня АВ:

$$x_M = acos\varphi = acos\omega t \quad y_M = bin\varphi = bsin\omega t$$

Чтобы получить уравнение траектории точки М, нужно из уравнений движения этой точки М исключить время t. Для этого разделим правую и левую части этих уравнений соответственно на коэффициенты при косинусе и синусе и возведем обе части в квадрат, затем, сложив их, получим

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$$

Таким образом, траектория точки М — эллипс с полуосями а и Ь.

Дифференцируя уравнения движения точки М по времени t, получим проекции вектора скорости им точки М на оси координат

$$v_{Mx} = x_M' = -\omega a sin\omega t \quad v_{My} = y_M' = \omega b cos\omega t$$

Отсюда находим модуль вектора скорости

$$v_M = |\vec{v}_M| = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \omega\sqrt{a^2 sin^2\omega t + b^2 cos^2\omega t}$$

Модуль вектора скорости $\vec{v}_M$ оказывается величиной переменной, меняющейся с течением времени.

Дифференцируя v_{Mx} и v_{My} повремени t, получим проекции вектора ускорения $\vec{a}_M$ точки М на оси координат

$a_{Mx} = x''_M = -\omega^2 a cos\omega t = -\omega^2 x_M \quad a_{My} = y''_M = -\omega^2 b sin\omega t = -\omega^2 y_M$

Модуль вектора ускорения $\vec{a}_M$ равен

$$a_M = |\vec{a}_M| = \sqrt{a_M^2 + a_M^2} = \omega^2 \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \omega^2 r$$

где $r = \mathrm{OM}$ есть расстояние движущейся точки М от начала координат.

Направление вектора ускорения $\vec{a}_M$ определяется формулами

$$\cos(\widehat{\vec{a}_M, \vec{i}}) = \frac{a_{Mx}}{a_M} = -\frac{x_M}{r} \qquad \cos(\widehat{\vec{a}_M, \vec{j}}) = \frac{a_{My}}{a_M} = -\frac{y_M}{r}$$

Так как направление отрезка ОМ образует с осями Ох и Оу углы, косинусы которых равны $\frac{x_M}{r}$ и $\frac{y_M}{r}$, то вектор, направленный от точки М к точке О, имеет направляющие косинусы, соответственно равные $-\frac{x_M}{r}$ и $-\frac{y_M}{r}$. Отсюда следует, что вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен вдоль МО к центру описываемого ею эллипса.

Вращение тела вокруг неподвижной оси

Угловая скорость тела в данный момент равна первой производной от угла поворота тела по времени.

Угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота тела по времени.

Линейная скорость какой-либо точки вращающегося твердого тела равняется произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Вектор скорости любой точки тела,вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, взятой на оси вращения тела.

Задачи, относящиеся к вращательному движению твердого тела вокруг неподвижной оси, можно разделить на три основные типа:

1) определение угла поворота, угловой скорости и углового

ускорения тела;

2) определение линейных скоростей и ускорений точек вращающегося тела;

3) задачи, относящиеся к передаче вращательного движения от одного тела к другому (зубчатые и ременные передачи).

Задача 10. В период разгона маховик вращается вокруг своей оси по закону $\varphi=8\pi t^3$. Определить угловую скорость и угловое ускорение маховика в тот момент, когда он сделает 4 об.

Решение. По заданному закону вращательного движения находим угловую скорость и угловое ускорение маховика в данный момент

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 24\pi t^2 \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 48\pi t$$

Так как маховик сделал 4 об, то угол поворота равен $\varphi=2\pi N=2\pi\ 4 = 8\pi$ рад. Далее находим, в какой момент времени t угол поворота маховика будет равен $\varphi=8\pi$ рад. Для этого подставим это значение угла поворота в формулу $\varphi=8\pi t^3$, тогда получим $8\pi=8\pi t^3$, отсюда t=1 с

Угловая скорость и угловое ускорение маховика в этот момент времени будут равны $\omega=24\pi$ с$^{-1}$ $\varepsilon=48\pi$ с$^{-2}$

Плоское движение твердого тела

Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости из одного положения в другое можно осуществить поступательным перемещением плоской фигуры, равным перемещению произвольно выбранного полюса, и вращательным перемещением плоской фигуры вокруг этого полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а величина угла поворота и направление поворота от выбора полюса не зависят.

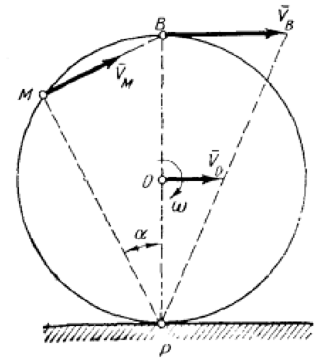
Движение плоской фигуры в ее плоскости можно разложить на поступательное движение, при котором все ее точки движутся так же, как произвольно выбранный полюс, и на вращательное движение вокруг этого полюса.

Абсолютная скорость любой точки В плоской фигуры в каждый данный момент равна геометрической сумме двух скоростей: скорости другой, произвольно выбранной и принятой за полюс, точки плоской фигуры, и скорости точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг этого полюса.

Мгновенным центром скоростей называется точка, абсолютная скорость которой равна нулю.

В каждый данный момент скорости точек плоской фигуры расположены так, как если бы плоская фигура вращалась вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей плоской фигуры и перпендикулярной ее плоскости. При этом скорости точек плоской фигуры перпендикулярны мгновенным радиусам вращения и пропорциональны расстояниям этих точек до мгновенного центра скоростей.

Задача 11. Найти скорость точки M обода колеса, катящегося по неподвижному прямолинейному рельсу без скольжения (рис. 10), если скорость центра колеса равна v_0, а угол BPM=α и радиус OP=R.



Решение. Колесо совершает плоское движение. Так как колесо катится без скольжения по неподвижному рельсу, то мгновенный центр скоростей этого колеса находится в точке касания P колеса с рельсом, и поэтому скорость $\vec{v}_M$ точки M обода колеса будет перпендикулярной к мгновенному радиусу вращения MP. А так как прямой угол PMB опирается на диаметр, то вектор скорости $\vec{v}_M$ точки M проходит через точку B. Зная положение мгновенного центра скоростей колеса и скорость его центра, находим угловую скорость колеса

$$\omega = \frac{v_o}{OP} = \frac{v_o}{R}$$

Направление ω (направление вращения колеса) определяется направлением $\vec{v}_O$ и показано стрелкой. Замечая, что MP=2Rcosα, находим модуль скорости точки M

$$v_M = \omega \cdot MP = 2v_o cosa$$

Чем точка M дальше от мгновенного центра скоростей P, тем ее скорость больше; из всех точек обода колеса наибольшую скорость $\vec{v}_B$ = 2$\vec{v}_O$ имеет точка B, являющаяся верхним концом вертикального диаметра.

Сложное движение точки

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

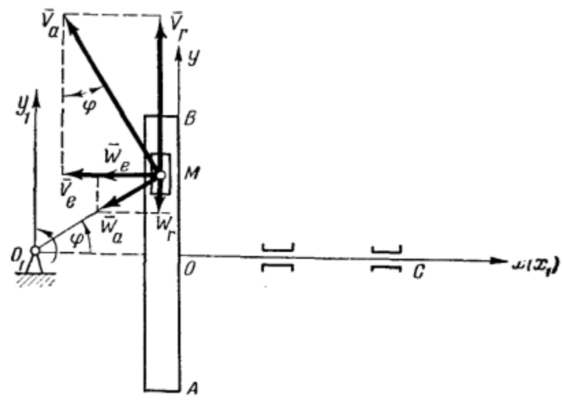
Если переносное движение является поступательным, то абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки, а абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений этой точки.

Задача 12. Кривошип ОМ кривошипно-кулисного механизма (рис. 12) равномерно вращается вокруг неподвижной оси O_1 Конец М этого кривошипа соединен шарнирно с ползуном, который при вращении кривошипа скользит вдоль прикрепленной к стержню ОС вертикальной кулисы АВ и сообщает этой кулисе возвратно-поступательное движение в горизонтальном направлении. Зная, что кривошип вращается с угловой скоростью ω=10 с$^{-1}$ и что его длина ОМ = 0,4 м, определить скорость и ускорение кулисы в тот момент, когда кривошип образует с осью кулисы угол φ=30°.

Решение. В данном случае подвижной системой отсчета является кулиса, а неподвижной — станина механизма. Начало подвижной системы отсчета Оху возьмем в точке О кулисы, а начало неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1$ — в точке O_1 станины механизма.

Абсолютным движением точки М (центра шарнира, соединяющего ползун с кривошипом) будет ее круговое перемещение вместе с кривошипом вокруг неподвижной точки Ох. Это движение точки М можно считать составным, т.е. получающимся в результате сложения:

1) движения точки М вместе с кулисой в ее возвратно-поступательном (переносном) перемещении вдоль оси O_1x_1;



2) относительного движения точки М вместе с ползуном, движущимся возвратно-

поступательно в прорези кулисы.

Так как кулиса движется поступательно, то все ее точки имеют в каждый данный момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения. Эту общую для всех точек кулисы переносную скорость, а также это общее для всех точек кулисы переносное ускорение и требуется определить.

Найдем переносную скорость $\vec{v}_e$ и переносное ускорение $\vec{a}_e$ той точки кулисы, с которой в момент, когда φ=30°, совпадает конец М кривошипа.

Абсолютная скорость $\vec{v}_a$ точки М, модуль которой легко определяется по формуле

$$\vec{v}_a = O_1M \cdot \omega = 0.4 \cdot 10 = 4\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

направлена перпендикулярно к кривошипу O_1M. Относительная скорость $\vec{v}_r$ точки М, равная скорости ползуна в прорези кулисы, направлена вдоль кулисы. Переносная скорость $\vec{v}_e$ точки М, равная поступательной скорости кулисы, направлена горизонтально. На рис. 9 изображен известный по модулю и направлению вектор абсолютной скорости $\vec{v}_a$ точки М и показано его разложение на составляющие $\vec{v}_r$и $\vec{v}_e$.

Из параллелограмма скоростей находим искомую скорость кулисы

$$v_e = v_a sin\varphi = 4 sin30^\circ = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Так как кривошип вращается вокруг точки O_1 равномерно, то абсолютное ускорение точки М состоит из одной лишь центростремительной составляющей, т. е. по модулю равно

$$\omega_a = O_1M \cdot \omega^2 = 0.4 \cdot 100 = 40\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

и направлено от точки М к точке O_1.

Имея в виду, что движение кулисы есть движение поступательное, воспользуеься теоремой сложения ускорений. Переносное ускорение $\vec{a}_e$ точки М, равное поступательному ускорению кулисы, направлено горизонтально, а относительное ускорение

$\vec{a}_r$ точки М, равное ускорению ползуна в прорези кулисы, направлено вдоль кулисы. Строим параллелограмм ускорений (рис. 11), из которого находим искомое ускорение кулисы

$$a_e = a_a cos\varphi = 40cos30° = 20\sqrt{3}\,\frac{м}{с^2}$$

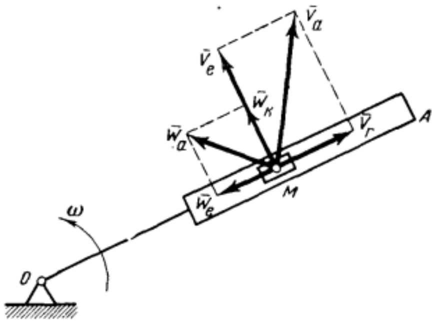
Сложное вращение

Поворотное ускорение точки равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и поворотного ускорений.

Чтобы получить направление поворотного ускорения, достаточно составляющую относительной скоростиr точки, перпендикулярную к вектору ускорения, повернуть (в плоскости, перпендикулярной к вектору юе) на прямой угол вокруг точки в направлении переносного вращения

Задача 13. Ползун М движется вдоль прямолинейной кулисы ОА от О к А с постоянной скоростью $\vec{v}_r = \vec{u}$, а сама кулиса равномерно вращается вокруг оси О против движения часовой стрелки с угловой скоростью ω (рис. 12). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна М в тот момент, когда ОМ=*l*.



Решение. Движение ползуна М будем рассматривать как составное, в котором движение ползуна вдоль кулисы является относительным движением, а вращательное движение кулисы — переносным. Поэтому относительная скорость $\vec{v}_r$ ползуна равна заданной величине $\vec{u}$, т. е. $\vec{v}_r = \vec{u}$, $v_r = u$

Переносная скорость $\vec{v}_e$ ползуна М равна той точке кулисы, с которой в данный момент совпадает ползун М, т. е.

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} \quad \text{или} \quad v_e = \omega \cdot OM = \omega l$$

при этом вектор $\vec{v}_e$ направлен перпендикулярно к кулисе ОА.

Складывая геометрически скорости $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$, найдем абсолютную скорость $\vec{v}_a$ ползуна М

$$\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$$

Так как вектор $\vec{v}_a$ есть диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$, то модуль искомой абсолютной скорости $\vec{v}_a$ ползуна будет равен

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{u^2 + l^2\omega^2}$$

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ ползуна М в данном случае равно нулю ($\vec{a}_r = 0$), так как ползун М движется вдоль кулисы равномерно и прямолинейно.

Так как переносное движение есть равномерное вращение, то переносное ускорение $\vec{a}_e$ползуна М, равное ускорению той точки кулисы, с которой в данный момент совпадает ползун М, равно центростремительному ускорению и направлено к точке О, т. е.

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$a_e = \omega^2 \cdot OM = \omega^2 l$$

Поворотное ускорение $\vec{a}_k$ ползуна легко найти по формуле

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{u}$$

при этом вектор $\vec{a}_k$ перпендикулярен одновременно и к угловой скорости $\vec{\omega}$ и к относительной скорости $\vec{u}$ и ориентирован так, как показано на рис. 12. Замечая, что вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен к вектору $\vec{u}$, получим для модуля вектора $\vec{a}_k$ следующее значение:

$$a_k = 2\omega u$$

Окончательно для абсолютного ускорения $\vec{a}_a$ ползуна М будем иметь

$$\vec{a}_k = -\omega^2 \overrightarrow{OM} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$a_a = \sqrt{a_e^2 + a_k^2} = \sqrt{\omega^4 l^2 + 4\omega^2 u^2}$$

Полагая, что $l = ut$, найдем

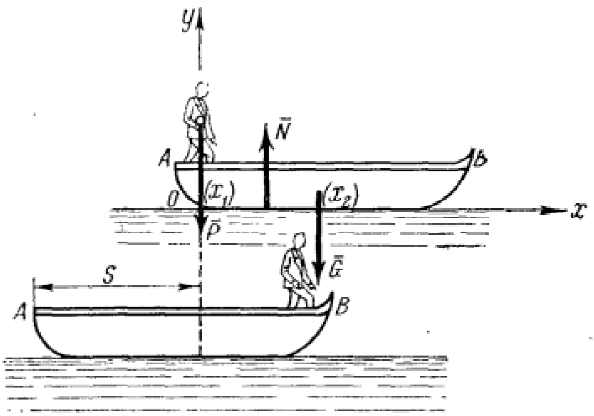
$$v_a = u\sqrt{1 + \omega^2 t^2} \qquad a_a = \omega u\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

Теорема о движении центра масс системы. Решение задач

Центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равнялась бы массе всей системы и к которой был бы приложен глав- главный вектор всех внешних сил.

Задача 14. На одном конце лодки, находящейся в покое, стоит человек; он переходит затем на другой ее конец, в точку B. Определить, пренебрегая сопротивлением воды, на какое расстояние s передвинется при этом лодка и скорость лодки в тот момент, когда человек остановится, если вес лодки G, вес человека P, а длина лодки AB=1 (рис. 13).

Решение. Чтобы исключить из рассмотрения неизвестные силы трения подошв ног человека о дно лодки и мускульные усилия человека, будем рассматривать лодку и человека как одну систему. При этом названные силы станут внутренними. На рассматриваемую систему (лодка и человек) действуют следующие



вертикальные внешние силы: $\vec{G}$ — сила веса лодки, $\vec{P}$ — сила веса человека и $\vec{N}$ —выталкивающая сила воды (сила реакции воды), направленная вверх. Сумма проекций этих сил на горизонтальную ось Ох равна нулю. Следовательно, на основании закона о сохранении движения центра масс системы горизонтальная скорость центра масс данной системы должна быть постоянной . Так как вначале система была неподвижна , то центр масс ее должен остаться неподвижным и при перемещении человека. Вычислим абсциссу центра масс системы. Имеем

$$X_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{P x_1 + G x_2}{P + G}$$

Из этой формулы мы видим, что если человек переходит из одного конца лодки А в другой конец В, то абсцисса x_1 точки приложения силы веса человека $\vec{P}$ возрастает, а поэтому абсцисса x_2 точки приложения силы веса лодки $\vec{G}$ должна убывать, что возможно, если лодка будет перемещаться влево.

Абсцисса центра масс системы в первоначальном положении системы равна

$$X_c' = \frac{0.5G}{P + G}$$

так как в этом положении x_1=0, а x_2=0.5

Допустим, что при перемещении человека из А в В лодка перемещается влево на расстояние s, тогда x_1=1 - s, а x_2= - (s-l/2). Тогда абсцисса центра масс системы в новом ее положении (при том же начале координат) будет равна

$$X_c' = \frac{P(l - s) + G(0.5l - s)}{P + G}$$

Так как центр масс системы остается неподвижным, то x_c'=x_c". Отсюда находим, что

$$0.5G = P(l - s) + G(0.5l - s)$$

Отсюда

$$s = \frac{Pl}{P+G} = \frac{l}{1 + {}^{G}/_{P}} < l$$

т. е. величина перемещения лодки не превосходит ее длины, и тем больше, чем больше вес человека.

Найдем теперь скорость лодки при остановке человека. Так как проекция всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему, на ось Ох равна нулю и в начальный момент количество движения этой системы равно нулю, то по закону сохранения количества движения системы относительно оси Ох получим

$$Q_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$$

При остановке человека $v_{1x} = v_{2x}$, т. е. скорость v_{1x} человека будет совпадать со скоростью v_{2x} лодки, а поэтому будем иметь

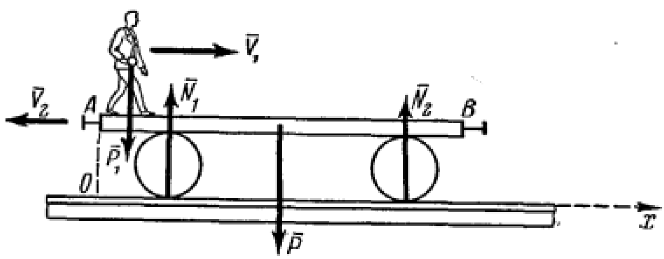
$$(m_1 + m_2) v_{2x} = 0$$

но $(m_1 + m_2 \neq 0$, следовательно, скорость лодки $v_{2x} = 0$.

Теорема об изменении количества движения и кинетического момента системы. Решение задач об определении давления жидкости на опору

Производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на эту точку силе.

Задача 15. На конце A вагонетки, стоящей на горизонтальных рельсах, стоит человек, который в некоторый момент начинает идти вдоль вагонетки (от A к B) с постоянной относительной скоростью u_0. Найти абсолютную скорость v_1 и перемещение x_1 человека, а также абсолютную скорость v_2 и перемещение x_2 вагонетки за время t, если масса ее равна m_2, а масса человека равна m_1 (рис. 14).



Решение. В качестве механической системы рассмотрим совокупность тел: вагонетка, человек. Внутренними силами являются силы взаимодействия между человеком и вагонеткой; эти силы не могут изменить суммарное количество движения рассматриваемой системы. Внешними же силами, действующим на механическую систему, являются: $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$ - вес человека, $\vec{P}_2 = m_2\vec{g}$ - вес вагонетки, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$— реакции опоры. Мы предполагаем, что рельсы являются достаточно гладкими, поэтому силы трения незначительны и можно считать опорные реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ направленными перпендикулярно к опоре. Проекции всех внешних сил на ось Ox равны нулю, а следовательно, проекция количества движения рассматриваемой системы, равная в начальный момент нулю, останется равной нулю и при движении человека и вагонетки, т. е. :

$$Q_x = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

На основании теоремы о сложении скоростей можем записать $v_1 = v_2 + u_0$, тогда

$$Q_x = m_1 v_1 + m_2 (v_1 - u_0) = 0$$

откуда

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0 \quad x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0 t$$

Записывая выражение для Q_x в виде

$$Q_x = m_1 (v_2 + u_0) + m_2 v_2 = 0$$

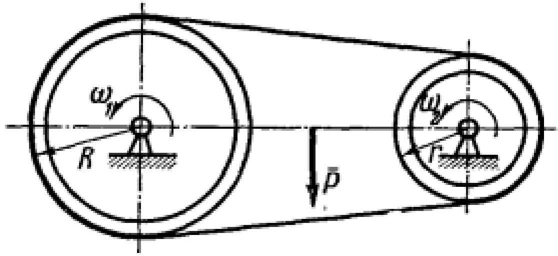
получим

$$v_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0 \quad x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0 t$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы . Решение задач

Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Задача 16. Большой шкив цепной передачи вращается с угловой скоростью ω_1 радиус шкива R и момент инерции относительно оси вращения J_1. Малый шкив имеет радиус r и момент инерции относительно своей оси вращения J_2. Вес натянутой на шкивы цепи равен P. Вычислить кинетическую энергию системы (рис. 15).



Решение. Так как данная система состоит из трех тел, то ее кинетическая энергия равна $T = T_1+T_2 + T_3$, где T_1 — кинетическая энергия большого шкива, T_2 — кинетическая энергия малого шкива, а T_3— кинетическая энергия натянутой на эти шкивы цепи, перемещающейся поступательно.

Кинетическую энергию большого шкива и малого шкива находим по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$$

Так как $\omega_1 R = \omega_2 r$ и, следовательно, $\omega_2 = {R}/{r}\,\omega_1$ то

$$T_2 = \frac{1}{2}J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2\omega_1^2$$

Обозначая через ΔP_k вес элементарного участка цепи, замечаем, что скорости всех элементарных участков цепи равны по модулю между собой и равны $R\omega_1$ поэтому

$$T_3 = \frac{1}{2}\sum\frac{\Delta P_k}{g}(R\omega_1)^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\omega_1^2$$

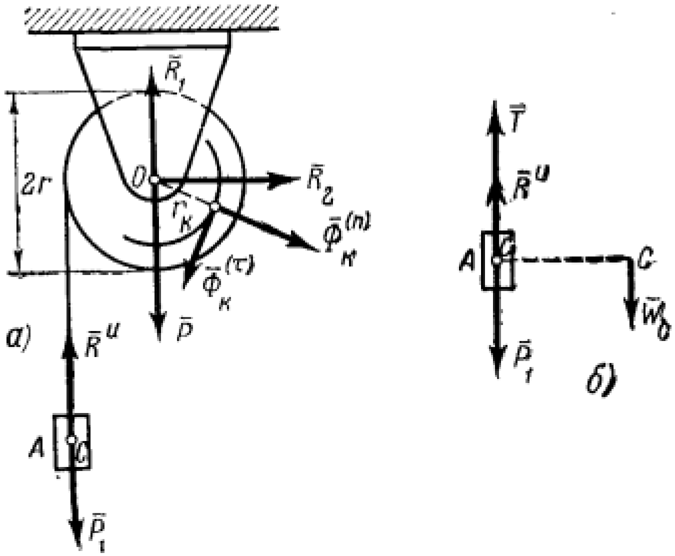
Таким образом, кинетическая энергия системы будет

$$\mathrm{T} = \frac{\omega_1^2}{2}\left(J_1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 J_2 + \frac{P}{g}R^2\right)$$

Принцип Даламбера для системы. Определение динамических опорных реакций

Тсли в любой момент времени к каждой из точек данной несвободной механической системы, кроме фактически действующих на нее внешних и внутренних сил, условно приложить соответствующие силы инерции, то полученная систем сил будет находиться как бы в равновесии.

Задача 17. На барабан с неподвижной осью вращения O, представляющий собой однородный сплошной цилиндр радиусом r и весом P, намотана нить, к концу которой подвешен груз A весом P_1 (рис. 16). Найти угловое ускорение барабана и натяжение нити, если груз будет предоставлен самому себе. Силой трения в оси барабана и массой нити пренебречь.



Решение. Заданная механическая система состоит из груза A, движущегося поступательно, и барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси O. На тела этой системы действуют две активные силы $\vec{P}$ и $\vec{P}_1$.

Освободим барабан от связи (подшипник O), заменив ее действие на барабан вертикальной и горизонтальной составляющими $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ полной реакции $\vec{R}_0 = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$.

Решая эту задачу по принципу Даламбера приложим к телам рассматриваемой системы силы инерции (рис. 16, а). Так как груз движется поступательно, то равнодействующая $\vec{R}^{и}$ сил инерции точек этого груза должна быть приложена в его центре тяжести С. При этом сила $\vec{R}^{и}$ направлена противоположно ускорению $\vec{a}_c$ центра тяжести С груза А и по модулю равна $R^{и} = \frac{P_1}{g} a_c$. Но так как нить нерастяжима и не скользит по барабану, то модуль касательного ускорения $a^{\tau} = r\varepsilon$ точки на ободе будет равен модулю a_c ускорения груза А (нити) и, следовательно, $R^{и} = \frac{P_1}{g} r\varepsilon$. Кроме того, нужно приложить силу инерции к каждой материальной частице барабана. Так как ускорение такой частицы складывается из касательного ускорения $\vec{a}_k^{\tau}$ и нормального ускорения $\vec{a}_k^{n}$, то сила инерции этой материальной частицы является равнодействующей двух сил: касательной силы инерции $\vec{\Phi}_k^{\tau}$, направленной противоположно ускорению $\vec{a}_k^{\tau}$, и нормальной силы инерции (центробежной силы) $\vec{\Phi}_k^{n}$, направленной противоположно ускорению $\vec{a}_k^{n}$. Если массу материальной частицы обозначим через m_k, а ее расстояние от оси вращения через r_k, то $\vec{\Phi}_k^{\tau}$ и $\vec{\Phi}_k^{n}$ определим по модулю так:

$$\Phi_k^{\tau} = m_k a_k^{\tau} = m_k r_k \varepsilon \quad \Phi_k^{n} = m_k a_k^{n} = m_k r_k \omega^2$$

где ε и ω — угловое ускорение и угловая скорость барабана.

На основании принципа Даламбера система сил, изображенных на рис. 16, эквивалентна нулю. Поэтому Для указанной системы внешних сил (активных и сил реакций связей) и сил инерции барабана можно написать любое уравнение равновесия, в том числе и уравнение моментов, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(m_0(\vec{F}_k^{e}) + m_0(\vec{\Phi}_k) \right) = 0$$

Следовательно, принимая во внимание, что моменты относительно точки О силы $\vec{P}$, сил реакции $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ и нормальных сил инерции барабана равны нулю, получим следующее уравнение:

$$P_1 r - R^{и} r + \sum_{k=1}^{n} r_k \Phi_k^{\tau} = 0$$

или

$$P_1 r - \frac{P_1}{g} r\varepsilon - \varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = 0$$

Сила натяжения нити в это уравнение не входит, так как для данной системы эта сила является внутренней.

Так как $\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = J_0$ есть момент инерции барабана относительно оси О, причем для однородного сплошного цилиндра $J_0 = \frac{Pr^2}{2g}$, то уравнение примет вид:

$$P_1 r - \frac{P_1}{g} r\varepsilon - \frac{P}{2g} r^2 \varepsilon = 0$$

Отсюда находим

$$\varepsilon = \frac{P_1 g}{(P_1 + 0.5P)r}$$

Для определения натяжения нити расчленим систему и рассмотрим в отдельности груз А, к которому приложены его сила тяжести $\vec{P}_1$ и сила инерции $\vec{R}^{и}$, а также реакция нити $\vec{T}$ (рис. 16, б)

На основании принципа Даламбера система сил $\vec{P}_1$, $\vec{T}$ и $\vec{R}^{и}$ эквивалентна нулю. Поэтому для этой системы сил можно составить любое уравнение равновесия, в том числе и следующее:

$$P_1 - T - R^{и} = 0$$

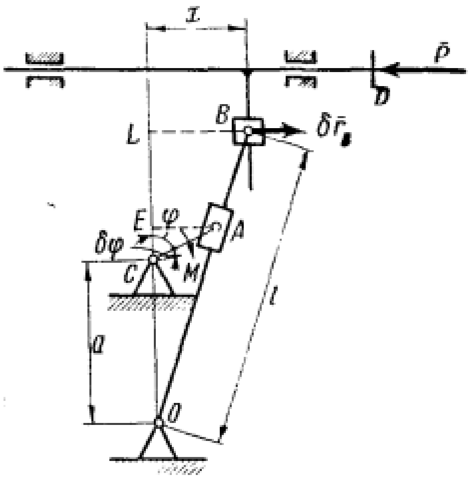
откуда находим искомое натяжение нити:

$$T = P_1 - R^{и} = P_1 - \frac{P_1}{g} r\varepsilon = 0.5 \frac{PP_1}{P_1 + 0.5P}$$

Принцип возможных перемещений. Решение задач о равновесии сложных конструкций

Для равновесия механической системы с удерживающими идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к системе, на всяком возможном перемещении системы равнялась нулю.

Задача 18. Какой вращающий момент М надо приложить к кривошипу СА кулисного механизма (рис.17), чтобы уравновесить заданную силу Р, приложенную в точке D ползуна, могущего двигаться прямолинейно в горизонтальном направлении. Размеры ОС = a, CA=r, OB=*l* и ϕ заданы. Все связи идеальные (трением пренебрегаем).



Решение. Данная система имеет одну степень свободы. Положение ее определяется углом ϕ. Изображаем активную силу Р и момент М. Дадим системе возможное перемещение, при котором угол ϕ изменяется на δϕ. Учитывая, что при этом перемещение точки D.в которой приложена сила Р, равно перемещению δr_B точки В, можно уравнение, выражающее условие равновесия системы, записать для данного случая в виде

$$M\delta\varphi - P\delta x_B = 0$$

где $\delta x_B = |\delta\vec{r}_B|$

Найдем теперь зависимость между $\delta\varphi$ и δx_B . Из подобия треугольников OEA и OLB имеем

$$\frac{LB}{EA} = \frac{OB}{OA}$$

Откуда находим

$$x_B = LB = \frac{OB}{OA}EA = \frac{l}{OA}EA = \frac{lrsin\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2arcos\varphi}}$$

Возьмем вариации от обеих частей этого выражения, пользуясь теми же правилами, которые существуют для дифференцирования. В результате получаем

$$\delta x_B = rl\frac{(a + rcos\varphi)(r + acos\varphi)}{(a^2 + r^2 + 2arcos\varphi)^{3/2}}$$

Общее уравнение динамики. Уравнение Лагранжа второго рода

Решение задач динамики с помощью уравнений Лагранжа второго

рода полезно разбить на следующие этапы:

1. Определить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты, число которых равно числу степеней свободы.

2. Изобразить действующие на систему активные силы (и силы трения), составить выражение для работы этих сил на возможном перемещении и из него определить обобщенные силы, соответствующие избранным обобщенным координатам.

3. Вычислить кинетическую энергию рассматриваемой системы в ее абсолютном движении, выразив эту энергию через обобщенные координаты q_j и обобщенные скорости q_j'.

4. Вычислить частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям q_j'{j=l, 2, ... , p): $\frac{\partial T}{\partial q_j'}$(j=1, 2, ... , p), затем найти производные от полученных результатов по времени, т. е. $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}$(j=1, 2, ... , p)

5. Вычислить частное производное от кинетической энергии по обобщенным координатам q_j (j=1, 2, ... , p): $\frac{\partial T}{\partial q_j'}$ (j=1, 2, ... , p).

6. Составить уравнения Лагранжа второго рода. Для этого полученные в пунктах 4 и 5 результаты следует подставить в биномы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i{}'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}$$

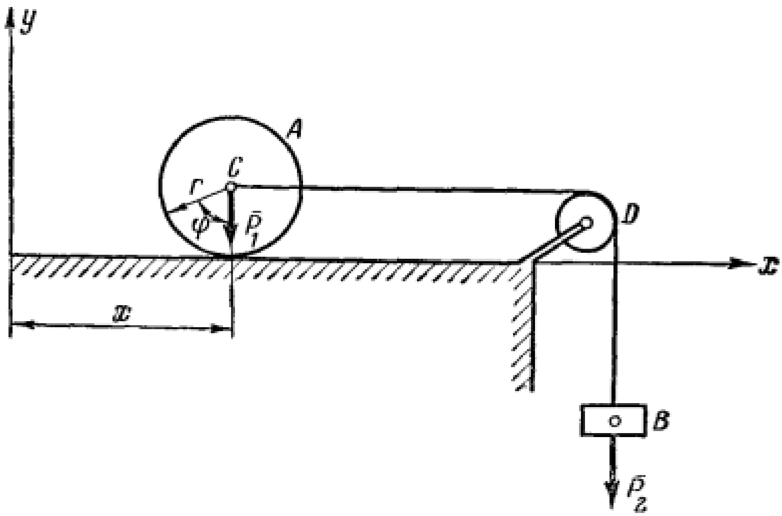
и приравнять каждый из них соответствующей обобщенной силе Q_j (j=1, 2, ... , p).

7. Указать начальные условия (начальные значения обобщенных координат и начальные значения обобщенных скоростей), при которых начинается движение точек системы.

8. Проинтегрировать составленные уравнения Лагранжа второго рода, удовлетворив начальным условиям.

Задача19. Найти закон движения системы, состоящей из однородного цилиндра А радиуса r и веса P_1, катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, и груза В веса P_2, подвешенного на нерастяжимой и невесомой нити, проходящей через невесомый блок D и привязанной к оси цилиндра А (рис. 18).

Решение. В этой задаче имеем систему с одной степенью свободы, так как ее положение определяется одним параметром



— координатой x центра тяжести C цилиндра (или углом ϕ поворота цилиндра). Эту координату и примем за обобщенную координату данной системы, т. е. положим $q1 = x$. Возможное перемещение системы определяется вариацией δx. Так как по условию цилиндр катится без скольжения, то, как известно, x=rϕ и, следовательно, x'=rϕ'.

Так как рассматриваемая система имеет одну степень свободы, то мы будем иметь для нее одно уравнение Лагранжа второго рода. Последнее принимает здесь следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1$$

Прежде чем составить это уравнение, нужно вычислить обобщенную силу Q_1 и кинетическую энергию системы $T = T1 + T2$, где T_1 есть кинетическая энергия цилиндра, а T_2— кинетическая энергия груза B (из условия следует, что кинетическая энергия нити и блока равна нулю).

Цилиндр движется плоскопараллельно, поэтому

$$T_1 = \frac{P_1(x')^2}{2g} + \frac{J(\varphi')^2}{2}$$

где x' — скорость центра тяжести C цилиндра, ϕ'— угловая скорость цилиндра, J — момент инерции цилиндра.

Груз B находится в поступательном движении, скорость которого x. Следовательно,

$$T_2 = \frac{P_2(x')^2}{2g}$$

Так как $J = \frac{P_1(x\prime)^2}{2g}$ и $\varphi' = \frac{x\prime}{r}$, то

$$T = T1 + T2 = \frac{1}{4g}(3P_1 + 2P_2)(x')^2$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{1}{2g}(3P_1 + 2P_2)x'$$

Перейдем теперь к вычислению обобщенной силы Q_1, отнесенной к обобщенной координате $q1 = x$. Для этого рассмотрим возможное перемещение системы, соответствующее изменению координаты x на весьма малую величину δx. Сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к системе, при этом перемещении будет равна

$$\delta A = P_2 \delta x$$

так как сила P_1 на возможном перемещении δx работы не совершает. С другой стороны, та же сумма элементарных работ равна

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 = Q_1 \delta x$$

Следовательно, $Q_1 \delta x = P_2 \delta x$, откуда $Q_1 = P_2$

Подставляя эти значения в уравнение, получим

$$\frac{1}{2g}(3P_1 + 2P_2)x'' = P_2 \quad \text{или} \quad x'' = \frac{2P_2 g}{3P_1 + 2P_2} = Const$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x = \frac{P_2 g}{3P_1 + 2P_2} t^2 + C_1 t + C_2$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий: при $t=0$ $x=0$, $x'=0$. Очевидно, что $C_1=C_2=0$. Следовательно,

$$x = \frac{P_2 g}{3P_1 + 2P_2} t^2$$