



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

**Практикум**  
по дисциплинам «Сопротивление  
материалов» и «Техническая механика»

**«Деформация балки при  
косом изгибе»**

Автор  
Еремин В.Д.



Ростов-на-Дону, 2022

## Аннотация

Методические указания по проведению учебно – исследовательской лабораторной работы по дисциплинам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика» предназначены для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания ставят своей задачей ознакомление студентов, изучающих общий курс сопротивления материалов, с вопросами экспериментального определения деформаций балки при косом изгибе.

В методических указаниях изложены основные теоретические положения, необходимые для проведения лабораторной работы, дано описание испытательной установки и образца, изложен порядок проведения и обработки результатов испытаний.

## Автор

к.т.н., профессор кафедры «СМ»  
Еремин В.Д.





## Оглавление

<b>ДЕФОРМАЦИЯ БАЛКИ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ.....</b>	<b>4</b>
1. Цель работы .....	4
2. Описание испытательной установки .....	4
3. Испытываемый образец .....	6
4. Основные теоретические положения .....	6
5. Порядок проведения испытаний .....	13
6. Контрольные вопросы.....	23
7. Основные правила техники безопасности .....	24
<b>Приложение 1 .....</b>	<b>25</b>
<b>Приложение 2 .....</b>	<b>32</b>

## ДЕФОРМАЦИЯ БАЛКИ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

### 1. Цель работы

Ознакомление студентов, изучающих общий курс сопротивления материалов, с вопросами экспериментального определения деформаций балки при косом изгибе.

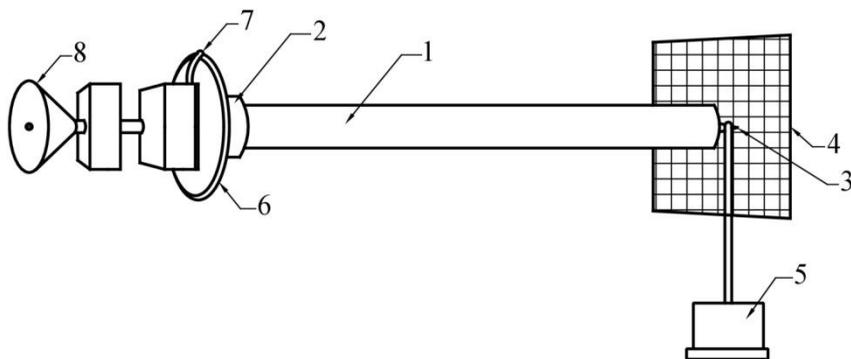
Настоящая учебно – исследовательская лабораторная работа ставит своей задачей:

1. Доказать на опыте, что плоскость деформаций при косом изгибе не совпадает с плоскостью действия внешних сил (силовой плоскостью).

2. Доказать, что теоретическое определение величины деформаций и положения плоскости деформаций при косом изгибе на основе принципа независимости действия сил дает результаты, совпадающие с действительными деформациями балок при косом изгибе.

### 2. Описание испытательной установки

Для проведения лабораторной работы используется «Прибор для определения деформаций балки при косом изгибе» (рис. 1).



**Рис. 1. Схема установки для определения деформаций балки при косом изгибе**

## Деформация балки при косом изгибе

Установка может быть использована как для проведения экспериментов студентами, так и для демонстрации преподавателями на учебных занятиях явления косоугольного изгиба.

Левый конец испытываемой алюминиевой балки (1) длиной **83см** прямоугольного поперечного сечения помещается в специальные трехмерные захваты (2) с зажимными винтами. Следовательно, левый конец балки закреплен таким образом, что не может иметь ни поступательного перемещения, ни вращения. Данный тип опоры может воспринимать силы, действующие в любом направлении, а также моменты.

Другой конец испытываемой балки – свободный. В центре свободного конца балки укреплено остриё (3). Это остриё упирается в целлулоидный экран (4) с нанесенной на нем прямоугольной сеткой делений с шагом через **2мм**. Этот экран прикреплен к стойке в вертикальном положении. Нагрузка осуществляется приложением сосредоточенного груза **m=1,0кг**, подвешиваемого к свободному концу на оси балки (5). Перемещение определяется на том же конце балки. Шкала (6) прибора градуирована в градусах, цена наименьшего деления равна **5 градусам**. Отсчет угла поворота стержня осуществляется по указателю (7). Поворот стержня производится валиком (8).

По сравнению с деформацией исследуемой балки, деформация испытательной установки при проведении эксперимента пренебрежительно мала.

Полученные экспериментальные данные могут быть проанализированы как с помощью графиков, так и математически.

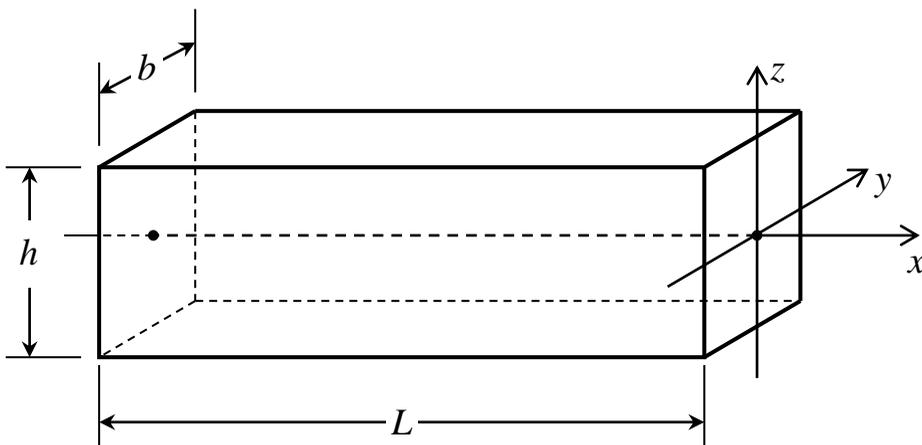
Студенты учатся планировать, выполнять и оценивать результаты измерений. По результатам экспериментальных данных у них появляется база данных для дальнейшего обсуждения причин, приводящих к разрушению образца.

Установка обладает большими возможностями, направленными на развитие психомоторики у студентов при проведении экспериментов. У них при этом развивается чувство уверенности при работе с измерительным оборудованием.

### 3. Испытываемый образец

Для наблюдения явления косоугольного изгиба взят стержень прямоугольного поперечного сечения длиной  $L = 83\text{см}$ , с одним заземленным и другим свободным концом. Материал стержня – алюминий. Поперечное сечение стержня шириной  $b = 1\text{см}$  и высотой  $h = 2\text{см}$  (рис. 2).

Испытываемый образец балки перед проведением эксперимента устанавливается в испытательную установку.



*Рис. 2. Эскиз испытываемого образца*

### 4. Основные теоретические положения

Изгибом называется такой вид деформации бруса (стержня), при котором внешние нагрузки действуют перпендикулярно к его геометрической оси.

Характерным признаком изгиба является изменение кривизны бруса, в частности, при изгибе бруса с прямолинейной осью, последняя получает криволинейное очертание.

Прямой брус (стержень), работающий на изгиб, называют балкой.

Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси балки, называются поперечными сечениями. Размеры поперечного сечения балки значительно меньше ее длины.

Если в поперечном сечении балки возникает только из-

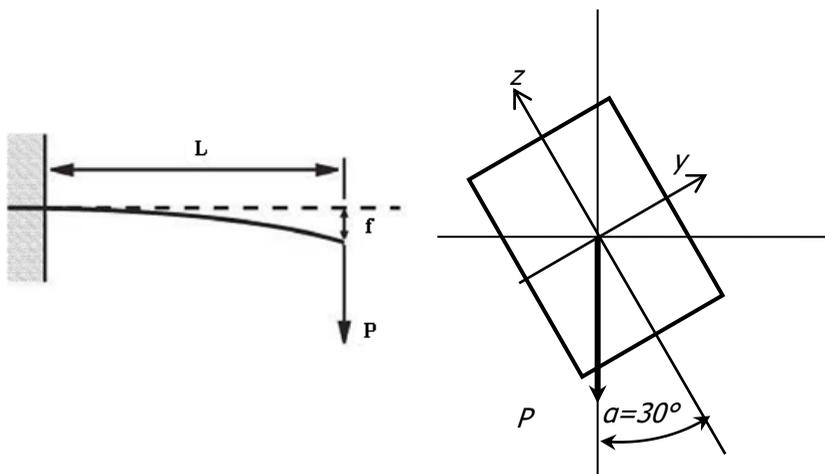
гибающий момент – это чистый изгиб.

Изгиб называют поперечным, если в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты ( $M$ ) и поперечные силы ( $Q$ ).

Если все внешние нагрузки лежат в одной плоскости, называемой силовой, и эта плоскость проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения ( $y$  или  $z$ ), такой вид деформации балки называют плоским прямым изгибом.

Косым изгибом называется такой изгиб балки внешними силами, перпендикулярными к ее геометрической оси, когда плоскость действия этих сил (силовая плоскость) не совпадает ни с одной из главных центральных осей поперечного сечения ( $y$  или  $z$ ).

В настоящей лабораторной работе исследуется жестко заземленная (консольная) балка, находящаяся в состоянии косоуго изгиба (рис. 3).



**Рис. 3. Расчетная схема испытываемой балки**

При изучении растяжения и сжатия прямых стержней было установлено, что их сопротивление пропорционально только площади поперечного сечения.

При одинаковой площади сечения и одном и том же материале стержня его сопротивление растяжению или сжатию не зависит от формы и расположения сечения относительно главных центральных осей и оказывается одинаковым.

## Деформация балки при косом изгибе

При исследовании более сложных видов деформации, в том числе и изгиба, сопротивление элемента конструкции внешним нагрузкам зависит не только от величины площади поперечного сечения, но и от формы этого сечения.

Форма поперечного сечения балки учитывается во всех расчетных формулах в виде осевых моментов инерции относительно главных центральных осей (главные моменты инерции).

Под действием внешних нагрузок балка деформируется и ее ось искривляется. Плоская кривая, форму которой принимает ось балки при изгибе, называется *изогнутой осью или упругой линией*.

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей. Допущение о малости перемещения позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной (геометрической) оси недеформируемого бруса.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному геометрической оси балки, называется *прогибом балки* в данном сечении и обозначается буквой **w**. Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба* и обозначается буквой **f**.

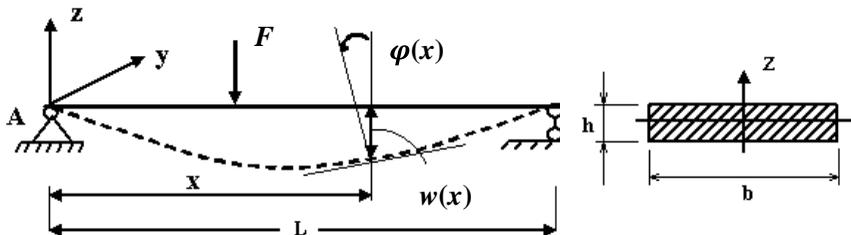
*При плоском изгибе изогнутая ось балки всегда лежит в плоскости действия внешних нагрузок (силовая плоскость).*

Угол  $\varphi$ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота сечения*.

Таким образом, при изгибе балки точки ее геометрической оси (**x**) получают линейные перемещения или прогибы (**w**), а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей (**y**) на угол  $\varphi$  (рис. 4).

Прогибы (**w**) и углы поворота ( $\varphi$ ) часто называют *линейными и угловыми перемещениями*.

**Правила знаков.** Прогиб (**w**) считается положительным, если он происходит вверх – в сторону положительной оси ординат **z**. Угол поворота ( $\varphi$ ) считается положительным, если поперечное сечение поворачивается против хода часовой стрелки, если ось абсцисс **x** направлена слева направо. На рис. 4 **w** (**x**) < 0, а  $\varphi$ (**x**) > 0.



**Рис. 4. Деформация балки при плоском изгибе**

Прогибы балок измеряются в сантиметрах или миллиметрах, а углы поворота – в градусах или радианах.

Здесь и далее начало отсчета для координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  выбирается на левом конце балки.

Теория деформации балок, изучаемая в курсе сопротивления материалов, основывается на следующих предположениях (гипотезах):

1. Материал балки подчиняется закону Гука ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ), т.е. напряжения в балке не выходят за предел пропорциональности.

2. Размеры поперечных сечений балки невелики по сравнению с ее длиной.

3. Прогибы балки ( $w$ ) малы по сравнению с ее длиной  $L$  /расстоянием между опорами балки/, т.е. отношение наибольшего прогиба  $f$  к длине пролета  $L$  балки устанавливается в следующих пределах

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000}, \quad (1)$$

где

$L$  – длина пролета балки (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

4. Углы поворота поперечных сечений ( $\varphi$ ) не превышают  $1^\circ$   
 $|\varphi_{\max}| \leq 1^\circ = 0,0175 \text{ рад.}$

Углы поворота поперечных сечений  $\varphi$  можно принимать равными первой производной от прогиба  $w$ . Известно, что

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x),$$

поэтому, в связи с малостью деформаций балок, можно считать, что  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ , т.е. можно записать

Деформация балки при косом изгибе

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x) \approx \varphi(x). \quad (2)$$

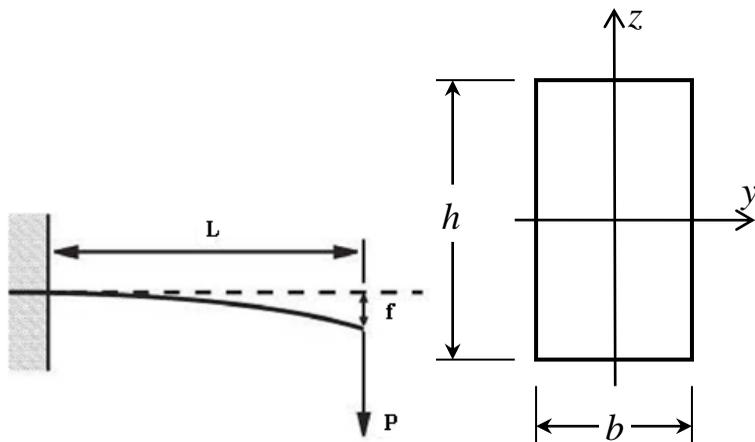
Для расчета балок на жесткость (определения перемещений в плоских стержневых системах) в курсе сопротивления материалов обычно применяют метод начальных параметров и метод Мора (интеграл Мора) с использованием правила Верещагина (правила «перемножения» эпюр).

Метод начальных параметров удобно применять в том случае, когда необходимо определить перемещения в нескольких сечениях балки. Основным недостатком этого метода является то, что его можно применять только для расчета балок.

Метод Мора, в отличие от метода начальных параметров, является универсальным. Его можно применять для определения перемещений любых объектов – балок, плоских и пространственных рам, арок и др.

Теоретические значения наибольших прогибов для жестко защемленной (консольной) балки, изображенной на рис. 5, в плоскостях **XZ** и **XY** от внешней силы, совпадающей с главными осями **z** и **y** соответственно, могут быть определены по следующим формулам

$$w_{\max} = f_z = \frac{P_z L^3}{3EI_y}; \quad (3)$$



**Рис. 5. Деформация балки при плоском изгибе**

## Деформация балки при косом изгибе

$$v_{\max} = f_y = \frac{P_y L^3}{3EI_z},$$

где

$v_{\max}$  и  $V_{\max}$  – максимальный прогиб консольной балки вдоль главных осей  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  в результате приложения внешней нагрузки, совпадающей с главными осями  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  соответственно;

$L$  – расчетная длина балки;

$P_z = P$  и  $P_y = P$  – внешняя нагрузка, прикладываемая к балке, совпадающая с главными осями  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  соответственно.

Величины  $EI_y$  и  $EI_z$ , характеризующие сопротивляемость балки изменению ее первоначальной формы, называются *жесткостью балки* при изгибе.

*При косом изгибе изогнутая ось балки не лежит в плоскости действия внешних сил (силовая плоскость) и отклоняется от последней в сторону плоскости с наименьшей жесткостью.*

Если обозначить угол наклона плоскости действия сил (силовой плоскости) к вертикальной главной оси  $\mathbf{z}$  поперечного сечения балки через  $\alpha$ , а угол наклона плоскости деформаций (линии прогибов) к той же оси через  $\beta$  (рис. 6), то величина угла  $\beta$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha, \quad (4)$$

где

$I_y$  – наибольший главный момент инерции поперечного сечения балки;

$I_z$  – наименьший главный момент инерции поперечного сечения балки.

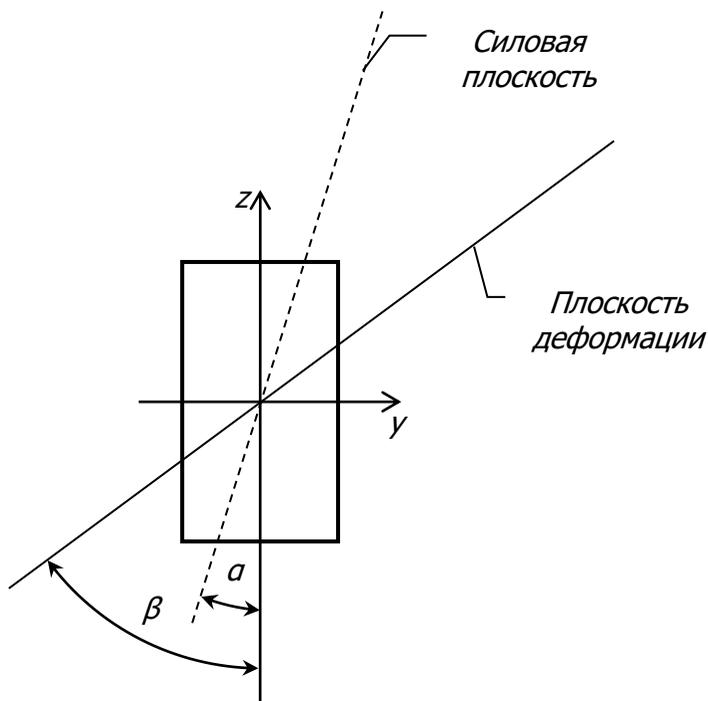
Косой изгиб не может наблюдаться в балках, имеющих поперечное сечение, для которых  $I_y = I_z$  (круглое, квадратное и т.п.), так как для таких сечений формула (4) принимает вид

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha,$$

то есть,

$$\beta = \alpha.$$

## Деформация балки при косом изгибе



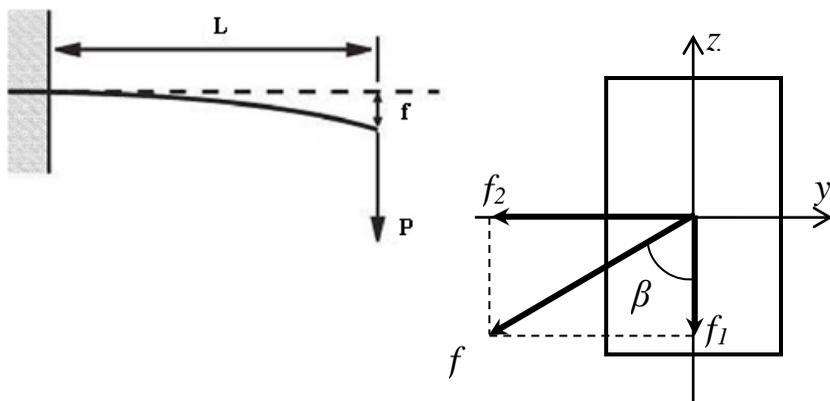
**Рис. 6. Расположение силовой плоскости и плоскости деформаций при косом изгибе балки**

Следовательно, у таких балок изогнутая ось всегда лежит в плоскости действия внешних нагрузок (в силовой плоскости).

Определение напряжений и деформаций при косом изгибе производится на основе принципа независимости действия сил путем замены косога изгиба двумя плоскими изгибами, действующими в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Деформация оси балки в этом случае, при косом изгибе (рис. 7), определяется как геометрическая сумма вертикальной  $f_1$  и горизонтальной  $f_2$  составляющих ее полной деформаций в главных плоскостях по формуле

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad (5)$$



**Рис. 7. Деформация консольной балки при косом изгибе**

где

$f$  – полный прогиб рассматриваемого сечения балки, работающей на косой изгиб;

$f_1$  – вертикальный прогиб балки от вертикальной составляющей внешней силы;

$f_2$  – горизонтальный прогиб балки от горизонтальной составляющей внешней силы.

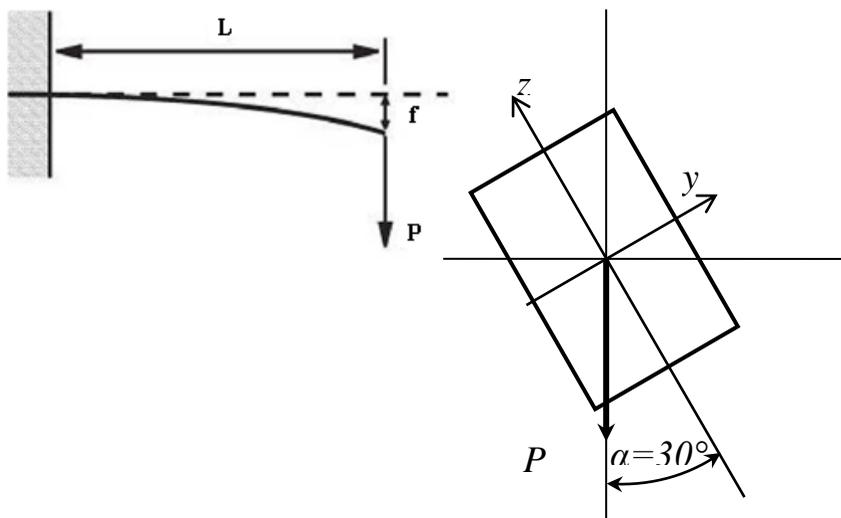
## 5. Порядок проведения испытаний

Для жестко защемленной (консольной) балки, расчетная схема которой показана на рис. 8, опытным и теоретическим путем определяем величину прогиба ( $f$ ) свободного конца.

Исходные данные:

Испытывается жестко защемленная (консольная) балка прямоугольного поперечного сечения (рис. 8), изготовленная из алюминия (Al). Нормативная ширина поперечного сечения этой балки  $b = 10\text{мм}$ , а нормативная высота поперечного сечения равна  $h = 20\text{мм}$ . Нормативная длина испытываемого образца  $L_0 = 830\text{мм}$ . Внешняя нагрузка величиной  $m = 1,0\text{кг}$ , следовательно  $P = 1,0 \times 9,81 = 9,81\text{Н}$ , прикладывается на геометрической оси к свободному концу испытываемой балки.

## Деформация балки при косом изгибе



**Рис. 8. Расчетная схема консольной балки при косом изгибе**

Методика проведения эксперимента.

Исследование деформаций консольной балки производится в следующей последовательности:

1. Устанавливаем балку в держатель. Расчетная длина балки при этом составляет  **$L = 830$  мм**.
2. Измеряем фактические размеры поперечного сечения балки ( **$b$**  и  **$h$** ) и заносим их в журнал испытаний № 1.
3. Определяем величины жесткостей испытываемой балки в главных плоскостях инерции из опыта на плоский изгиб.

На основании формул (3), получаем выражения для вычисления значений жесткостей испытываемой балки в главных плоскостях инерции

- жесткость балки относительно главной оси  **$y$** :

$$EI_y = \frac{P_z L^3}{3f_1}; \quad (6)$$

## Деформация балки при косом изгибе

- жесткость балки относительно главной оси  $z$ :

$$EI_z = \frac{P_y L^3}{3f_2}, \quad (7)$$

где

$EI_y$  и  $EI_z$  – жесткости балки при изгибе относительно главных осей  $y$  и  $z$  соответственно;

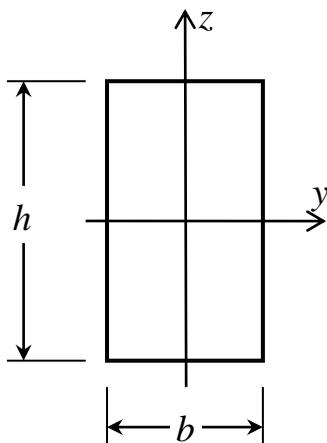
$P_z = P$  и  $P_y = P$  – внешняя нагрузка, прикладываемая к балке, совпадающая с главными осями  $z$  и  $y$  соответственно;

$L$  – расчетная длина балки;

$f_1$  и  $f_2$  – максимальный прогиб консольной балки вдоль осей координат  $z$  и  $y$  в результате приложения внешней нагрузки.

3.1. Жесткость балки относительно главной оси  $y$ :

– для этого испытываемая балка устанавливается таким образом, чтобы главная ось  $z$  ее поперечного сечения, была вертикальной (рис. 9);



**Рис. 9. Положение поперечного сечения балки при определении ее жесткости относительно главной оси  $y$**

– отмечаем на экране точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;

– осторожно нагружаем балку нагрузкой  $m = 1,0$  кг ( $P_z = 9,81$  Н);

## Деформация балки при косом изгибе

- отмечаем на экране новую точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;
- замеряем расстояние от первой точки до второй – это будет величина прогиба  $f_1$  свободного конца балки от силы  $P_z$  (подвешенного груза) в плоскости  $XZ$ , и заносим полученное значение в журнал испытаний (табл. 1);
- груз снимается и испытываемая балка поворачивается на  $180^\circ$ ;
- отмечаем на экране точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;
- осторожно нагружаем балку нагрузкой  $m = 1,0 \text{ кг}$  ( $P_z = 9,81 \text{ Н}$ );
- отмечаем на экране новую точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;
- замеряем расстояние от первой точки до второй – это будет величина прогиба  $f_1$  свободного конца балки от силы  $P_z$  (подвешенного груза) в плоскости  $XZ$ , и заносим полученное значение в журнал испытаний (табл. 1);
- вычисляем среднюю арифметическую величину из этих двух показаний прогибов свободного конца балки от силы  $P_z$  (подвешенного груза) в плоскости  $XZ$ . Полученное значение заносим в журнал испытаний (табл. 1);
- по формуле (6) вычисляем значение жесткости испытываемой балки  $EI_y$  относительно главной оси  $y$

$$EI_y = \frac{P_z L^3}{3f_1}.$$

Полученное значение  $EI_y$  заносим в журнал испытаний (табл. 1).

### 3.2. Жесткость балки относительно главной оси $z$ :

- для этого испытываемая балка устанавливается таким образом, чтобы главная ось ее поперечного сечения  $Y$ , была вертикальной (рис. 10);
- отмечаем на экране точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;
- осторожно нагружаем балку нагрузкой  $m = 1,0 \text{ кг}$  ( $P_y = 9,81 \text{ Н}$ );
- отмечаем на экране новую точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;

## Деформация балки при косом изгибе

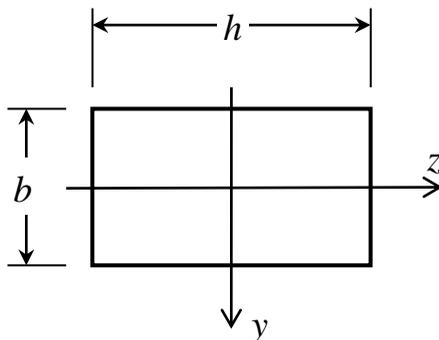


Рис. 10. Положение поперечного сечения балки при определении ее жесткости относительно главной оси  $z$

– измеряем расстояние от первой точки до второй – это будет величина прогиба  $f_2$  свободного конца балки от силы  $P_y$  (подвешенного груза) в плоскости  $XY$ , и заносим полученное значение в журнал испытаний (табл. 1);

– груз снимается и испытываемая балка поворачивается на  $180^\circ$ ;

– отмечаем на экране точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;

– осторожно нагружаем балку нагрузкой  $m = 1,0 \text{ кг}$  ( $P_y = 9,81 \text{ Н}$ );

– отмечаем на экране новую точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;

– измеряем расстояние от первой точки до второй – это будет величина прогиба  $f_2$  свободного конца балки от силы  $P_y$  (подвешенного груза) в плоскости  $XY$ , и заносим полученное значение в журнал испытаний (табл. 1);

– вычисляем среднюю арифметическую величину  $f_2$  из этих двух показаний прогибов свободного конца балки от силы  $P_y$  (подвешенного груза) в плоскости  $XY$ . Полученное значение заносим в журнал испытаний (табл. 1);

– по формуле (7) вычисляем значение жесткости испытываемой балки  $EI_z$  относительно главной оси  $Z$

$$EI_z = \frac{P_y L^3}{3f_2}$$

Полученное значение  $EI_z$  заносим в журнал испытаний (табл. 1).

4. Определяем опытным путем величину полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе.

Для этого испытываемая балка устанавливается таким образом, чтобы главная ось  $z$  ее поперечного сечения, составляла с вертикалью некоторый угол  $\alpha$ , например,  $\alpha = 30^\circ$ :

- испытываемую балку сначала устанавливаем таким образом, чтобы угол  $\alpha = 30^\circ$  откладывался в левую сторону от нуля шкалы прибора;

- отмечаем на экране точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;

- осторожно нагружаем балку нагрузкой  $m = 1,0 \text{ кг}$  ( $P = 9,81 \text{ Н}$ );

- отмечаем на экране новую точку пересечения продолжения линии острия балки с экраном;

- по этим отсчетам определяем вертикальную  $f_1$  и горизонтальную  $f_2$  составляющие полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе. Полученные значения заносим в журнал испытаний (табл. 2);

- опыт по определению величин составляющих  $f_1$  и  $f_2$  полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе повторяем еще 3 раза, а именно, затем угол  $\alpha = 30^\circ$  откладываем в правую сторону от нуля шкалы прибора, потом балка поворачивается на  $180^\circ$  и опять угол  $\alpha = 30^\circ$  устанавливается дважды (в левую и правую сторону от нуля шкалы прибора).

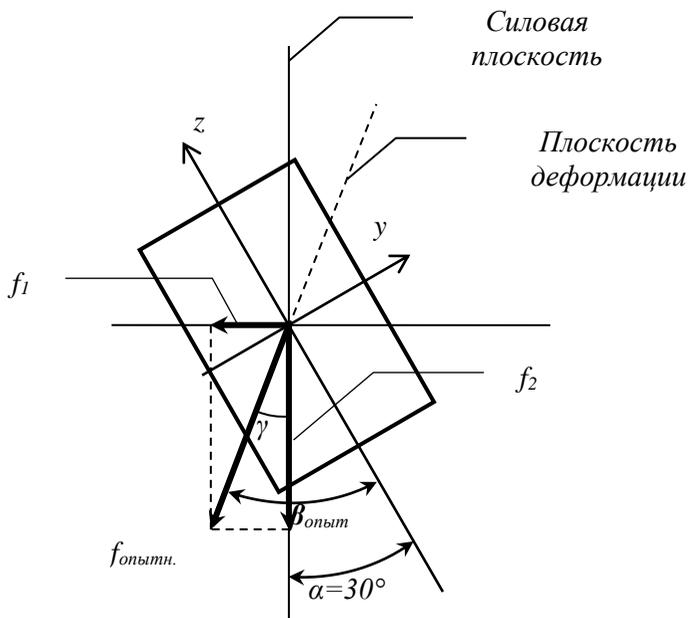
Полученные значения заносим в журнал испытаний (табл. 2);

- вычисляем среднюю арифметическую величину из этих четырех значений составляющих  $f_1$  и  $f_2$  полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе от силы  $P$  (подвешенного груза). Полученное значение заносим в журнал испытаний (табл. 2);

- вычисляем величину полного прогиба (перемещения)  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе от силы  $P$  как диагональ прямоугольника, сторонами которого являются эти составляющие  $f_1$  и  $f_2$  прогиба (рис. 11), по формуле (5)

$$f_{\text{опытн.}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

## Деформация балки при косом изгибе



**Рис. 11. Вычисление величины полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки и положения плоскости деформаций  $\beta_{\text{опытн.}}$**

Полученное значение  $f_{\text{опытн.}}$  заносим в журнал испытаний (табл. 2);

– определяем положение плоскости деформаций. Для этого вычисляем величину угла  $\beta_{\text{опытн.}}$  (рис. 11) по формуле

$$\beta_{\text{опытн.}} = \alpha + \gamma,$$

где

$\alpha$  – угол наклона плоскости действия сил (силовой плоскости) к главной оси  $z$  поперечного сечения балки;

$\gamma = \arctg \frac{f_2}{f_1}$  – угол между диагональю прямоугольника, сторонами которого являются составляющие  $f_1$  и  $f_2$  прогиба, и вертикальной составляющей прогиба (рис. 11), так как

$$\text{tg } \gamma = \frac{f_2}{f_1}.$$

## Деформация балки при косом изгибе

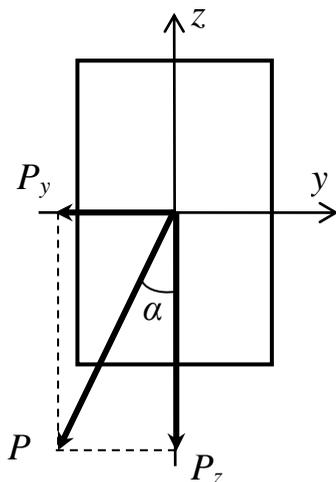
Полученное значение  $\beta_{\text{опытн.}}$  заносим в журнал испытаний (табл. 2).

Определяем теоретическую величину  $f_{\text{теор.}}$  полного прогиба свободного конца балки при косом изгибе (рис. 12).

Для этого сначала по формулам (3) определяем теоретические значения вертикальной составляющей  $f_1$  и горизонтальной составляющей  $f_2$  полного прогиба  $f_{\text{теор.}}$  свободного конца балки при косом изгибе от внешней силы  $P$ :

– вычисляем теоретическую величину вертикальной составляющей прогиба  $f_1$

$$f_1 = \frac{P_z L^3}{3EI_y};$$



**Рис. 12. Косой изгиб балки**

– вычисляем теоретическую величину горизонтальной составляющей прогиба  $f_2$

$$f_2 = \frac{P_y L^3}{3EI_z}.$$

В этих формулах

## Деформация балки при косом изгибе

$f_1$  и  $f_2$  – вертикальная и горизонтальная составляющие максимального прогиба консольной балки в результате приложения внешней нагрузки;

$P_z = P \cdot \cos \alpha$  и  $P_y = P \cdot \sin \alpha$  – составляющие внешней нагрузки  $P$ , прикладываемые к балке, совпадающие с главными осями  $z$  и  $y$  соответственно;

$\alpha$  – угол наклона плоскости действия сил (силовой плоскости) к вертикальной главной оси  $z$  поперечного сечения балки;

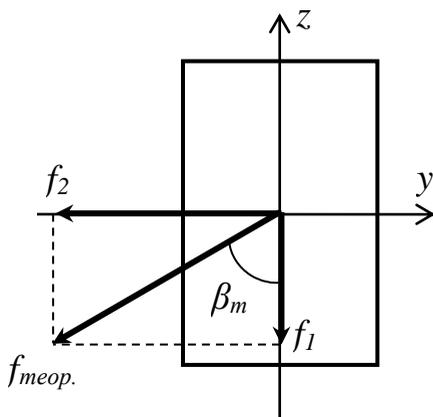
$L$  – расчетная длина балки;

$EI_y$  и  $EI_z$  – жесткости испытываемой балки, определенные ранее.

Полученные значения  $f_1$  и  $f_2$  заносим в журнал испытаний (табл. 3);

– вычисляем величину полного прогиба (перемещения)  $f_{\text{теор}}$ . свободного конца балки при косом изгибе от силы  $P$  как диагональ прямоугольника, сторонами которого являются эти составляющие  $f_1$  и  $f_2$  прогиба (рис. 13) по формуле (5)

$$f_{\text{теор}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$



**Рис. 13. Вычисление величины полного прогиба  $f_{\text{теор}}$ . свободного конца балки и положения плоскости деформаций  $\beta_{\text{теор}}$ .**

Полученное значение  $f_{\text{теор}}$ . заносим в журнал испытаний (табл. 3);

## Деформация балки при косом изгибе

– определяем теоретическое положение плоскости деформаций. Для этого вычисляем величину угла  $\beta_{\text{теор.}}$  (рис. 13) по формуле

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{теор.}} = \frac{I_y}{I_z} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где

$\alpha$  – угол наклона плоскости действия сил (силовой плоскости) к вертикальной главной оси  $z$  поперечного сечения балки;

$I_y$  – наибольший главный момент инерции поперечного сечения балки;

$I_z$  – наименьший главный момент инерции поперечного сечения балки.

Численные значения  $I_y$  и  $I_z$  поперечного сечения балки определяем по формулам

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad \text{и} \quad I_z = \frac{hb^3}{12}.$$

Полученные значения  $I_y$ ,  $I_z$  и  $\beta_{\text{теор.}}$  заносим в журнал испытаний (табл. 3).

5. Сравниваем величины полных перемещений конца стержня, определенных опытным путем  $f_{\text{опытн.}}$  и теоретическим путем  $f_{\text{теор.}}$ , а также полученные значения  $\beta_{\text{опытн.}}$  и  $\beta_{\text{теор.}}$  положения плоскости деформаций испытываемой балки. Полные перемещения конца стержня, должны быть равны, параллельны и направлены в одну сторону.

6. Определяем погрешность между опытным  $f_{\text{опытн.}}$  и теоретическим  $f_{\text{теор.}}$  значениями прогиба испытываемой балки. Для этого полученное опытным путем значение прогиба сравниваем с соответствующим теоретическим значением, расхождение между ними не должно превышать 5 %, т.е.

$$\varepsilon = \left| \frac{f_{\text{опытн.}} - f_{\text{теор.}}}{f_{\text{опытн.}}} \right| \cdot 100\% \leq 5\%.$$

Полученное значение  $\varepsilon$  заносим в журнал испытаний (табл. 3).

7. Определяем погрешность между опытным значением  $\beta_{\text{опытн.}}$  и теоретическим значением  $\beta_{\text{теор.}}$  положения плоскости деформаций испытываемой балки

## Деформация балки при косом изгибе

$$\varepsilon = \left| \frac{\beta_{\text{опытн.}} - \beta_{\text{теор.}}}{\beta_{\text{опытн.}}} \right| \cdot 100\% \leq 5\%.$$

и полученное значение  $\varepsilon$  заносим в журнал испытаний (табл. 3).

## 6. Контрольные вопросы

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Какой вид деформации называется чистым изгибом?
3. Какой вид деформации называется плоским поперечным изгибом?
4. Какие внутренние силовые факторы возникают при плоском прямом изгибе?
5. Какая плоскость называется силовой?
6. Какие перемещения получают поперечные сечения балок при плоском прямом изгибе балок?
7. Правило знаков при определении этих перемещений.
8. Допущения, на основании которых получено приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
9. Какая плоскость называется плоскостью деформаций?
10. Как расположены силовая плоскость и плоскость деформаций при плоском изгибе?
11. Какую величину называют жесткостью поперечного сечения балки при изгибе?
12. Что называется пролетом балки?
13. Что называется стрелой прогиба?
14. Как называется свисающая часть балки, расположенная слева (справа) от крайней опоры?
15. Какие методы расчета балок на жесткость изучают в курсе сопротивления материалов?
16. Какой вид деформации называется косым изгибом?
17. Какой принцип положен в основу расчета балок на косою изгиб?
18. Сочетанием каких видов изгиба является косою изгиб?
19. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косою изгиб?
20. По какой формуле определяется величина полного прогиба балки при косою изгибе?
21. По какой формуле определяется положение плоскости деформаций (линии прогибов) при косою изгибе балки?
22. Как расположены силовая плоскость и плоскость деформаций при косою изгибе балки?

## 7. Основные правила техники безопасности

1. Нельзя допускать к испытательной установке лиц, не ознакомившихся с ее устройством.
2. Запрещается устанавливать образец и приводить в действие испытательную установку без разрешения преподавателя.
3. Лабораторную работу нужно выполнять в соответствии с выше приведенной инструкцией.
4. Нагружение испытываемого образца проводить аккуратно, при этом нельзя превышать максимальную допускаемую нагрузку на балку. Грузы не бросать.
5. При перерывах в работе испытательная установка не должна находиться в нагруженном состоянии.
6. Во время испытания запрещается трогать образец руками.
7. Необходимо находиться от испытательной установки на расстоянии не менее 0,5м.
8. Запрещается подходить к лабораторным установкам, не связанным с выполнением данной работы.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

/Образец/

**ОТЧЕТ**

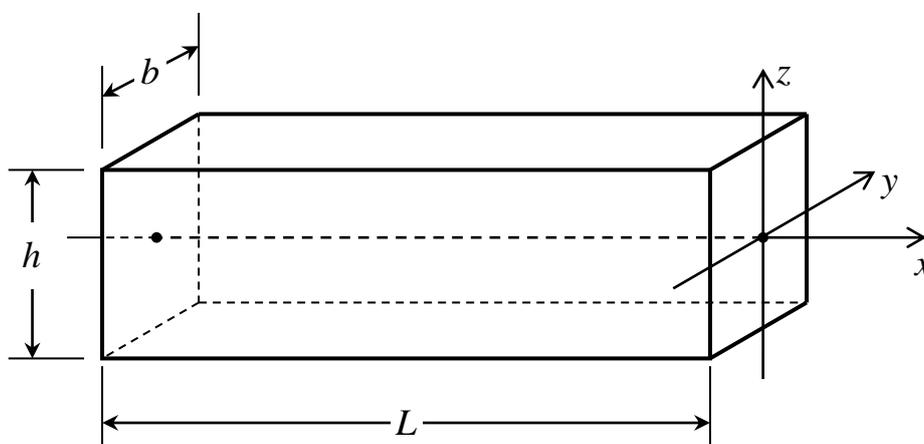
по лабораторной работе № \_\_\_\_\_

**«Деформация балки при косом изгибе»**

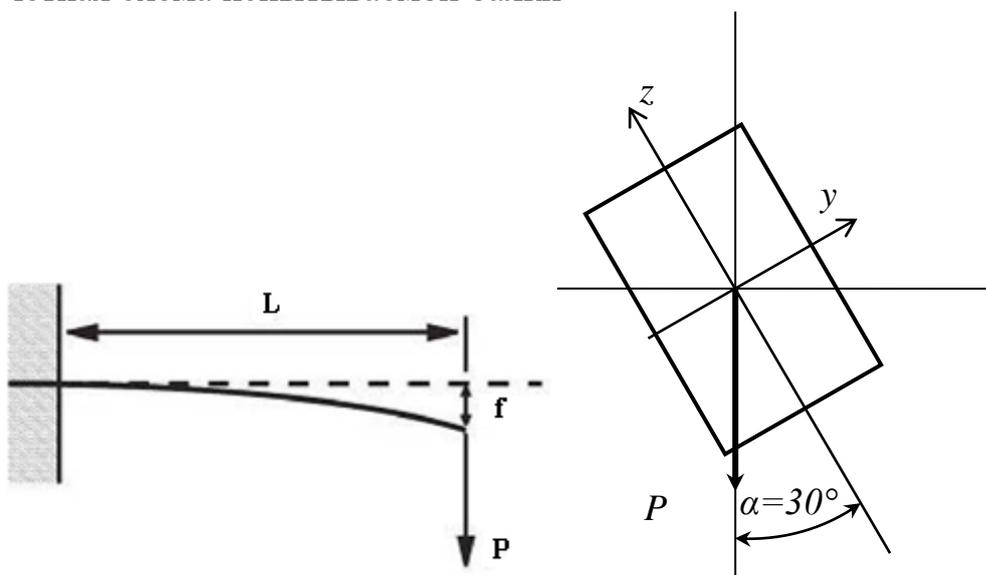
Дата проведения работы \_\_\_\_\_

1. Наименование испытательной машины – «Прибор для определения деформаций балки при косом изгибе».

2. Эскиз испытываемого образца



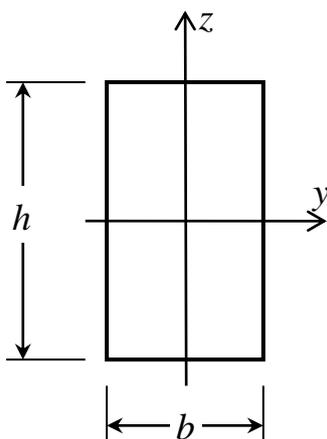
3. Расчетная схема испытываемой балки



## Журнал испытаний

### 1. Характеристика испытываемой балки:

- материал испытываемой балки - алюминий (Al);
- модуль упругости первого рода испытываемой балки  $E = 0,700 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$ ;
- расчетная длина /пролет/ испытываемой балки  $L = 830 \text{ мм}$ ;
- расчетная высота поперечного сечения испытываемой балки  $h = 20,0 \text{ мм}$ ;
- расчетная ширина поперечного сечения испытываемой балки  $b = 10,0 \text{ мм}$ .



2. Внешняя нагрузка  $P = 9,81 \text{ Н}$ .

3. Обработка данных испытаний:

*Эксперимент № 1 - опытное определение величины жесткости балки относительно главной оси  $y$ :*

– вычисляем среднюю арифметическую величину из двух показаний прогибов свободного конца балки от силы  $P_z = P = 9,81 \text{ Н}$  (подвешенного груза) в плоскости  $XZ$

$$f_1 = \frac{f_1^1 + f_1^2}{2} =$$

и полученное значение заносим в журнал испытаний (табл. 1);

– вычисляем значение жесткости испытываемой балки  $EI_y$  относительно главной оси  $y$

$$EI_y = \frac{P_z L^3}{3f_1} =$$

и полученное значение  $EI_y$  заносим в журнал испытаний (табл. 1).

*Эксперимент № 2 – опытное определение величины жесткости балки от-*

носителем главной оси  $z$ :

– вычисляем среднюю арифметическую величину из двух показаний прогибов свободного конца балки от силы  $P_y = P = 9,81\text{Н}$  (подвешенного груза) в плоскости  $XU$

$$f_2 = \frac{f_2^1 + f_2^2}{2} =$$

и полученное значение заносим в журнал испытаний (табл. 1);

– вычисляем значение жесткости испытываемой балки  $EI_z$  относительно главной оси  $z$

$$EI_z = \frac{P_y L^3}{3f_2} =$$

и полученное значение  $EI_z$  заносим в журнал испытаний (табл. 1).

*Эксперимент № 3 – опытное определение величины полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе и положения плоскости деформаций  $\beta_{\text{опытн.}}$ :*

– вычисляем среднюю арифметическую величину из четырех показаний вертикальной составляющей  $f_1$  полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе

$$f_1 = \frac{f_1^1 + f_1^2 + f_1^3 + f_1^4}{2} =$$

и полученное среднее значение  $f_1$  заносим в журнал испытаний (табл. 2);

– вычисляем среднюю арифметическую величину из четырех показаний горизонтальной составляющей  $f_2$  полного прогиба  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе

$$f_2 = \frac{f_2^1 + f_2^2 + f_2^3 + f_2^4}{2} =$$

и полученное среднее значение  $f_2$  заносим в журнал испытаний (табл. 2);

– вычисляем величину полного прогиба (перемещения)  $f_{\text{опытн.}}$  свободного конца балки при косом изгибе от силы  $P = 9,81\text{Н}$  как диагональ прямоугольника, сторонами которого являются составляющие  $f_1$  и  $f_2$  прогиба

$$f_{\text{опытн.}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} =$$

и полученное значение  $f_{\text{опытн.}}$  заносим в журнал испытаний (табл. 2);

– вычисляем величину угла  $\gamma$

$$\gamma = \arctg \frac{f_2}{f_1} =$$

– вычисляем величину угла  $\beta_{\text{опытн.}}$

$$\beta_{\text{опытн.}} = \alpha + \gamma,$$

и полученное значение  $\beta_{\text{опытн.}}$  заносим в журнал испытаний (табл. 2).

*Эксперимент № 4 – теоретическое определение величины полного прогиба  $f_{\text{теор.}}$  свободного конца балки при косом изгибе и положения плоскости деформаций  $\beta_{\text{теор.}}$ :*

– вычисляем численные значения проекций  $P_z$  и  $P_y$  внешней нагрузки

$P = 9,81 \text{ Н}$  на главные оси  $z$  и  $y$

$$P_z = P \cdot \cos \alpha =$$

$$P_y = P \cdot \sin \alpha =$$

– вычисляем теоретическую величину вертикальной составляющей  $f_1$  полного прогиба  $f_{\text{теор.}}$  свободного конца балки при косом изгибе по направлению главной оси  $z$

$$f_1 = \frac{P_z L^3}{3EI_y} =$$

и полученное значение  $f_1$  заносим в журнал испытаний (табл. 3);

– вычисляем теоретическую величину горизонтальной составляющей  $f_2$  полного прогиба  $f_{\text{теор.}}$  свободного конца балки при косом изгибе по направлению главной оси  $y$

$$f_2 = \frac{P_y L^3}{3EI_z} =$$

и полученное значение  $f_2$  заносим в журнал испытаний (табл. 3);

– вычисляем теоретическую величину полного прогиба (перемещения)  $f_{\text{теор.}}$  свободного конца балки при косом изгибе от силы  $P = 9,81 \text{ Н}$  как диагональ прямоугольника, сторонами которого являются составляющие  $f_1$  и  $f_2$  прогиба

$$f_{\text{теор.}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} =$$

и полученное значение  $f_{\text{теор.}}$  заносим в журнал испытаний (табл. 3);

– вычисляем численные значения главных моментов инерции поперечно-

го сечения балки  $I_y$  и  $I_z$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} =$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} =$$

и полученные значения  $I_y$  и  $I_z$  заносим в журнал испытаний (табл. 3);

– вычисляем теоретическую величину угла  $\beta_{\text{теор.}}$  положения плоскости деформаций испытываемой балки

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_{\text{теор.}} &= \frac{I_y}{I_z} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ \beta_{\text{теор.}} &= \end{aligned}$$

и полученное значения  $\beta_{\text{теор.}}$  заносим в журнал испытаний (табл. 3).

– сравниваем величины полных перемещений конца стержня, определенных опытным путем  $f_{\text{опытн.}}$  и теоретическим путем  $f_{\text{теор.}}$ , а также полученные значения  $\beta_{\text{опытн.}}$  и  $\beta_{\text{теор.}}$  положения плоскости деформаций испытываемой балки;

– определяем погрешность между опытным  $f_{\text{опытн.}}$  и теоретическим  $f_{\text{теор.}}$  значениями прогиба испытываемой балки

$$\varepsilon = \left| \frac{f_{\text{опытн.}} - f_{\text{теор.}}}{f_{\text{опытн.}}} \right| \cdot 100\% =$$

и полученное значение  $\varepsilon$  заносим в журнал испытаний (табл. 3).

– определяем погрешность между опытным значением  $\beta_{\text{опытн.}}$  и теоретическим значением  $\beta_{\text{теор.}}$  положения плоскости деформаций испытываемой балки

$$\varepsilon = \left| \frac{\beta_{\text{опытн.}} - \beta_{\text{теор.}}}{\beta_{\text{опытн.}}} \right| \cdot 100\% =$$

и полученное значение  $\varepsilon$  заносим в журнал испытаний (табл. 3).

Таблица 1

**Опытное определение величины жесткостей балки  
в главных плоскостях инерции**

Величина прогибов по направлению главных осей <b>z</b> и <b>y</b>	Величина прогиба <b>f<sub>1</sub></b> по направлению оси <b>z</b> , в мм	Величина прогиба <b>f<sub>2</sub></b> по направлению оси <b>y</b> , в мм
Опыт №1		
Опыт №2		
Среднее арифметическое значение прогибов		
Жесткость балки <b>EI<sub>y</sub></b> относительно главной оси <b>y</b> , в Нмм <sup>2</sup>		
Жесткость балки <b>EI<sub>z</sub></b> относительно главной оси <b>z</b> , в Нмм <sup>2</sup>		

Таблица 2

**Опытное определение величины полного прогиба **f<sub>опытн.</sub>**  
свободного конца балки при косом изгибе и положения плоскости деформаций  
испытываемой балки **β<sub>опытн.</sub>****

Величина составляющих полного прогиба <b>f<sub>опытн.</sub></b> свободного конца балки при косом изгибе	Величина вертикальной составляющей <b>f<sub>1</sub></b> по направлению оси <b>z</b> , в мм	Величина горизонтальной составляющей <b>f<sub>2</sub></b> по направлению оси <b>y</b> , в мм
Опыт №1		
Опыт №2		
Опыт №3		
Опыт №4		
Среднее арифметическое значение составляющих полного прогиба		
Величина полного прогиба <b>f<sub>опытн.</sub></b> свободного конца балки при косом изгибе, полученная опытным путем, в мм		
Численное значение угла <b>γ</b> , в град.		
Численное значение угла <b>β<sub>опытн.</sub></b> в град.		

**Теоретическое определение величины полного прогиба  $f_{\text{теор}}$  свободного конца балки при косом изгибе и положения плоскости деформаций испытываемой балки  $\beta_{\text{теор}}$ .**

Теоретическая величина вертикальной составляющей $f_1$ по направлению оси $z$ полного прогиба $f_{\text{теор}}$ свободного конца балки при косом изгибе, в мм	
Теоретическая величина горизонтальной составляющей $f_2$ по направлению оси $y$ полного прогиба $f_{\text{теор}}$ свободного конца балки при косом изгибе, в мм	
Теоретическая величина полного прогиба $f_{\text{теор}}$ свободного конца балки при косом изгибе, в мм	
Численное значение $I_y$ , в см <sup>4</sup>	
Численное значение $I_z$ , в см <sup>4</sup>	
Численное значение угла $\beta_{\text{теор}}$ , в град.	
Погрешность между опытным и теоретическим значениями прогиба ( $f_{\text{опытн.}}$ и $f_{\text{теор.}}$ ) испытываемой балки, в %	
Погрешность между опытным и теоретическим значениями положения плоскости деформаций ( $\beta_{\text{опытн.}}$ и $\beta_{\text{теор.}}$ ) испытываемой балки, в %	



## **ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

*/Образец оформления  
титального листа лабораторной работы/*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра «Сопротивление материалов»**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА**  
**по сопротивлению материалов**

**на тему:**

**«Деформация балки при косом изгибе»**

**Выполнил студент группы \_\_\_\_\_**

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

**Принял \_\_\_\_\_**

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

**Ростов – на - Дону**

**2017 год**