



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

## **Учебное пособие**

для закрепления читаемого курса лекций  
по дисциплинам

# **«Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов»**

Часть 1.

Авторы  
Еремин В. Д.

Ростов-на-Дону, 2021

## Аннотация

Учебное пособие содержит материал для изучения обучающимися основных тем учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Специальные вопросы сопротивления материалов», для закрепления читаемого курса лекций, самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ, подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной (итоговой) аттестации.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Техническая механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов», в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Настоящее учебное пособие состоит из трех частей.

Содержание пособия соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования по техническим направлениям подготовки

(специальностям), и «Примерной программе дисциплины "Сопротивление материалов", Москва, 2012 год», рекомендованной учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства.

## Авторы

канд. техн. наук, профессор кафедры  
«Сопротивление материалов» Еремин В.Д.





## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ .....	7
1.1. Курс сопротивления материалов и его задачи. Прочность, жесткость и устойчивость элементов инженерных конструкций.....	7
1.2. Основные допущения о свойствах материала и характере деформирования, принимаемые в сопротивлении материалов .....	9
1.3. Геометрическая схематизация элементов строительных конструкций. Понятие о расчетной схеме .....	11
1.4. Нагрузки. Классификация внешних нагрузок .....	15
1.5. Основные типы опор.....	17
Рис. 1.5. Защемление или заделка .....	18
1.6. Определение опорных реакций.....	19
1.7. Внутренние силы (усилия) в поперечных сечениях бруса и метод их определения .....	20
1.8. Простые виды деформации.....	22
1.9. Понятие о напряжении. Определение нормальных и касательных напряжений. 24	
1.10. Интегральная связь между напряжениями и внутренними силами.....	25
1.11. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Введение» .....	27
ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ .....	27
2.1. Статические моменты, их свойства. Определение положения центра тяжести сечения .....	27
2.2. Осевые и центробежные моменты инерции и их свойства .....	30
2.3. Полярный момент инерции и его свойства.....	31
2.4. Зависимости между моментами инерции фигуры относительно параллельных осей .....	32
2.5. Зависимость между моментами инерции фигуры при повороте осей .....	33
2.6. Вычисление моментов инерции простейших фигур.....	36
2.7. Главные оси и главные моменты инерции.....	40
2.8. Радиусы инерции. ....	44
2.9. Моменты сопротивления и их свойства.....	44
2.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Геометрические характеристики плоских фигур» .....	45



ТЕМА 3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ (ОСЕВОЕ) РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА.....	47
3.1. Центральное (осевое) растяжение или сжатие. ....	47
Продольные силы и их определение.....	47
3.2. Эпюры продольных сил. Правила их построения .....	48
3.3. Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса .....	52
3.4. Продольные деформации.....	55
Вычисление деформаций и перемещений стержня необходимо для его расчета на жесткость. ....	55
3.5. Закон Гука при центральном растяжении или сжатии.....	57
3.6. Поперечные деформации.....	58
3.7. Основные характеристики механических свойств материалов и их опытное изучение.....	59
3.8. Расчет на прочность при центральном (осевом) растяжении или сжатии. Метод допускаемых напряжений.....	61
3.9. Понятие о расчете по предельным состояниям.....	65
3.10. Учет собственного веса при центральном растяжении или сжатии .....	68
3.11. Брус равного сопротивления растяжению – сжатию. ....	71
3.12. Статически неопределимые задачи при растяжении или сжатии .....	73
3.13. Порядок решения статически неопределимых задач.....	75
3.14. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Центральное растяжение или сжатие прямого бруса».....	78
ТЕМА 4. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛ .....	81
4.1. Виды напряженного состояния .....	81
4.2. Одноосное напряжённое состояние.....	82
4.3. Закон парности касательных напряжений .....	86
4.4. Плоское напряжённое состояние.....	87
4.5. Пространственное напряженное состояние .....	88
4.6. Обобщенный закон Гука .....	89
4.7. Закон Гука для плоского напряженного состояния. ....	91
4.8. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Напряженное состояние в точке» .....	94
ТЕМА 5. ПОНЯТИЕ О ТЕОРИЯХ ПРОЧНОСТИ .....	96
5.1. Общие понятия. Критерии прочности .....	96



5.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Теории прочности».....	104
ТЕМА 6. СДВИГ .....	106
6.1. Понятие о чистом сдвиге, как частном случае плоского напряженного состояния .....	106
6.2. Деформация при сдвиге. Закон Гука при чистом сдвиге .....	106
6.3. Зависимость между тремя упругими постоянными $E$ , $G$ и $\mu$ .....	108
6.4. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Сдвиг» .....	110
ТЕМА 7. КРУЧЕНИЕ .....	111
7.1. Основные понятия. Крутящий момент.....	111
7.2. Определение крутящих моментов по мощности « $N$ » и числу оборотов вала « $n$ » .....	113
7.3. Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого поперечного сечения .....	114
7.4. Расчет стержня круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении .....	119
7.5. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Кручение».....	123
Рекомендуемая литература.....	125
Приложения .....	126



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Соппротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке инженеров любой специальности.

Соппротивление материалов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами технических направлений подготовки (специальностей).

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи. Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями, а также обратиться за консультацией к преподавателю.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этих дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить обучающихся пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Учебное пособие состоит из трех частей.

В первой части пособия анализируется напряженное состояние тела и излагаются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, испытывающих простые виды деформаций (центральное растяжение или сжатие, сдвиг и кручение), по допускаемым напряжениям и предельным состояниям.

Во второй части учебного пособия рассматриваются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, работающих на изгиб.

В третьей части пособия рассматриваются вопросы расчета бруса на сложное сопротивление, на устойчивость, а также задачи учета динамических нагрузок в сопротивлении материалов.

Учебное пособие содержит материал для изучения студентами основных тем следующих учебных дисциплин кафедры:

- сопротивление материалов;
- специальные вопросы сопротивления материалов;
- механика;
- строительная механика для архитекторов;
- теоретическая механика для архитекторов.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, для закрепления читаемого курса лекций, для



подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся, при самостоятельном выполнении домашних, контрольных и расчетно-графических работ.

## ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. Курс сопротивления материалов и его задачи. Прочность, жесткость и устойчивость элементов инженерных конструкций

Сопротивление материалов является одним из разделов *механики деформируемого твердого тела*, где изучаются законы движения и равновесия твердых тел в условиях их деформирования при различных воздействиях.

Задачей сопротивления материалов является создание теоретических и экспериментальных основ для установления требуемых размеров элементов, входящих в состав конструкций и сооружений. При этом должна быть обеспечена *надежность* эксплуатации и *экономичность* конструкции, в значительной мере определяемая расходом материала.

*Надежность* – свойство конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени. Надежность, безотказность изделия (машины, конструкции, детали) связывается с определенным сроком службы. В большинстве случаев под сроком службы понимается время работы изделия под нагрузкой или число циклов нагружения. Надежность конструкции обеспечена, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности.

*Прочность* – способность конструкции в целом и ее отдельных элементов воспринимать определенную нагрузку без разрушения. Первой задачей обеспечения прочности проектируемой конструкции является получение гарантии против ее разрушения при действии на нее определенных внешних сил. Однако в большинстве случаев приходится считаться не только с опасностью разрушения, но и с величиной деформаций и их характером.

*Разрушение* (полное или местное) – разделение конструкции на несколько частей, появление видимых трещин, отколов. Если изменения формы и размеров (деформации) конструкции при действии на нее внешних сил *невелики* и не мешают ее эксплуатации, то такая конструкция обладает необходимой

*жесткостью*. Обычно жесткость конструкций регламентируется нормами проектирования.

*Деформация* – изменение взаимного расположения частиц тела под действием внешних сил, вызывающая, как правило, изменение его формы и размеров.

*Деформации* различают:

а) *упругие*, то есть имеющие обратимый характер (полностью исчезающие после прекращения действия внешних сил). При таких деформациях тело после снятия нагрузки полностью восстанавливает свои прежние форму и размеры;

б) *остаточные*, то есть необратимые и не исчезающие после прекращения действия внешних сил. Остаточная деформация, не сопровождающаяся местным разрушением, называется *пластической*.

в) деформации, зависящие от времени, принято называть *вязкими*;

г) увеличение деформации тела при постоянных внешних нагрузках (осадка фундамента зданий и сооружений, постепенное удлинение каната, несущего груз и т. д.) называется *ползучестью*.

Кроме того, различают *общую деформацию*, распространяющуюся на весь объем тела, и *местную деформацию*, происходящую лишь в малой части этого объема.

Деформации конструкции при действии на нее внешней нагрузки должны быть невелики (по сравнению с ее линейными размерами) и не должны мешать ее эксплуатации. Чрезмерные деформации могут совершенно изменить условия работы конструкции и исключить возможность выполнения ею своего назначения в полной мере.

Вопрос о проверке прочности следует рассматривать в широком смысле, понимая под его решением обеспечение не только прочности против разрушения, но и определенной величины и характера деформаций.

*Устойчивость* конструкции – это ее способность сохранять вплоть до разрушения первоначальную форму равновесия. Нарушение первоначально

заданной формы равновесия, называемое потерей устойчивости, опасно также как и разрушение. Понятие устойчивости относится, в основном, к сжатым элементам конструкций.

## **1.2. Основные допущения о свойствах материала и характере деформирования, принимаемые в сопротивлении материалов**

Для решения основной задачи сопротивления материалов (определения рациональных размеров) вводят ряд допущений и гипотез, позволяющих сложную работу элементов конструкции свести к простым расчетным моделям и схемам и получить простые инженерные формулы для определения напряженно-деформированного состояния:

1. *Гипотеза идеальной или абсолютной упругости* предполагает полную обратимость процесса деформирования тела в стадии нагружения и разгрузки, то есть до приложения внешних сил в рассматриваемом элементе отсутствуют внутренние силы и деформации, возникающие в процессе нагружения элемента и исчезающие после снятия нагрузки.

2. *Гипотеза о сплошности материала* предполагает, что упругое тело полностью заполняет объем и не имеет в нем пустот и разрывов. Эта гипотеза позволяет рассматривать деформации и перемещения как неразрывные функции координат и в полном объеме использовать математический аппарат теории непрерывных функций.

3. *Гипотеза однородности материала* допускает, что в любых точках тела под действием одних и тех же напряжений возникают одинаковые деформации, то есть в окрестности произвольной точки физические свойства и соответствующие им механические характеристики материала одинаковы.

4. *Гипотеза шаровой изотропии* предполагает, что для некоторых материалов (например, металлов) физические свойства и механические характеристики одинаковы по всем направлениям, проведенным в окрестности произвольной точки.

5. *Гипотеза малости деформаций* предполагает, что перемещения точек рассматриваемого элемента малы по сравнению с его размерами, а

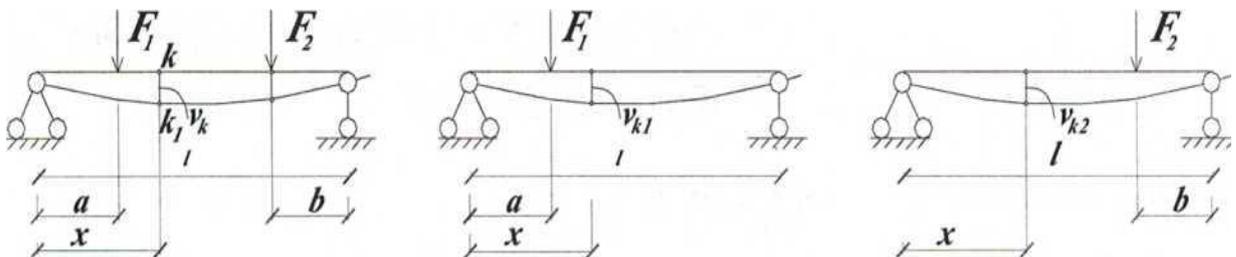
относительные деформации малы по сравнению с единицей. Эта гипотеза позволяет пренебрегать изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и составлять уравнения статики для недеформированного тела.

6. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и нагрузками (напряжениями) - закон Гука.* Согласно этой гипотезе считают, что для большинства материалов между деформациями и напряжениями на определенной с момента нагружения стадии устанавливается прямая пропорциональная зависимость.

7. *Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли)* предполагает, что поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его геометрической оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации.

Наряду с перечисленными гипотезами в курсе сопротивления материалов рассматривают два основных принципа.

1. *Принцип независимости действия сил.* Согласно этому принципу действие на элемент конструкции группы сил вызывает в одних и тех же точках такие же напряжения, перемещения и деформации, что и алгебраическая сумма нагрузок, полученная от каждой отдельной силы этой группы при любом порядке нагружения (рис. 1.1).



**Рис. 1.1. Принцип независимости действия сил**

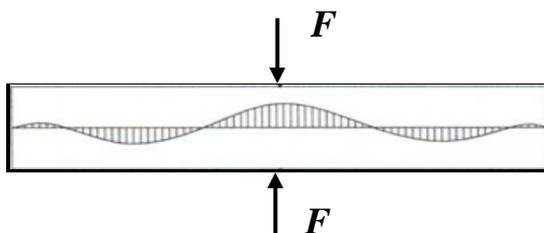
Сформулированное положение называется еще принципом сложения действия сил, или принципом суперпозиции.

2. *Принцип Сен-Венана*, который излагается в двух вариантах:

а) если на какой-либо малой площадке элемента конструкции приложена

уравновешенная система сил, то она вызывает в этом элементе напряжения, достаточно быстро убывающие по мере удаления от места приложения нагрузок.

На оси бруса построен график сжимающих нормальных напряжений от уравновешенной нагрузки  $F$  (рис. 1.2);



*Рис. 1.2. Принцип Сен-Венана*

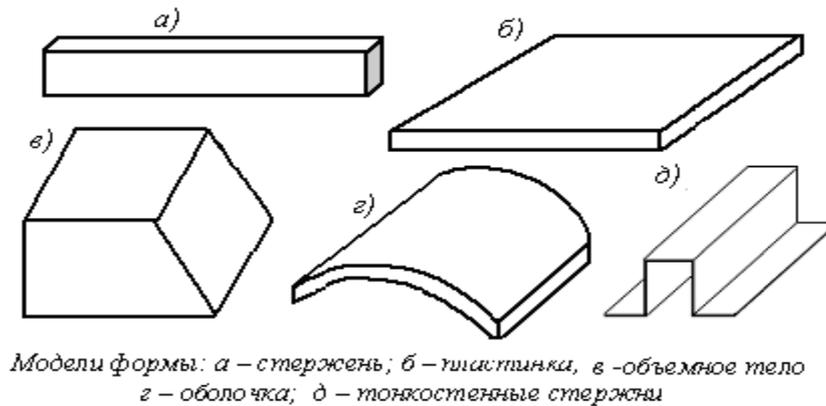
б) в точках деформируемого элемента конструкции, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения и деформации практически мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок

Гипотезы и принципы позволяют достаточно просто рассматривать расчетные модели и расчетные схемы конструктивных элементов.

### 1.3. Геометрическая схематизация элементов строительных конструкций. Понятие о расчетной схеме

Геометрическая форма элементов конструкций бывает весьма сложной.

Учет всех особенностей геометрической формы часто нецелесообразен, так как приводит к сложным моделям. Для определения напряженного и деформированного состояний применяют упрощенные схематизированные модели формы элементов конструкций. Основными элементами формы в моделях прочностной надежности являются стержень, пластинка, пространственное тело (массив), оболочка, тонкостенные стержни (рис. 1.3).



**Рис. 1.3. Основные элементы формы в моделях прочностной надежности**

Модели формы представляют схематизированное описание геометрии элемента с помощью типовых элементов.

К первому типу геометрической формы элементов конструкции относятся стержни, у которых длина значительно больше размеров поперечного сечения.

Геометрическими элементами стержня являются его ось и поперечное сечение.

Определение. Ось стержня – линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений стержня.

Определение. Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

Поперечное сечение образуется при пересечении стержня плоскостью, перпендикулярной его оси. В зависимости от формы оси стержня могут быть прямыми, кривыми, плоскими и пространственными. Поперечные сечения стержня могут быть одинаковыми или различными по размерам (стержни постоянного или переменного сечения). В несущих строительных конструкциях чаще всего встречаются прямые стержни постоянного или ступенчато постоянного сечения.

В технике и строительстве часто применяются тонкостенные стержни, у которых один размер поперечного сечения мал по отношению к другому и оба

малы по отношению к длине стержня. Расчет таких тонкостенных стержней имеет специфические особенности.

В сопротивлении материалов используются термины «волокно» и «слой».

Определение. Волокном называют материальную линию, параллельную оси стержня и имеющую бесконечно малую площадь поперечного сечения.

Определение. Совокупность волокон, лежащих на плоскости или на поверхности, образуют слой стержня.

Определение. Оболочка – тело, ограниченное двумя близкими поверхностями.

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью.

По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические, конические, сферические, волнистые и др. К оболочкам относятся стенки тонкостенных резервуаров, купола зданий и т. д.

Определение. Пластина – частный случай оболочки, когда срединная поверхность представляет собой плоскость. Толщина пластины намного меньше двух других размеров. К пластинам относятся плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений и др.

Значительное превалирование одного характерного размера над двумя другими – в стержнях и малость одного размера по сравнению с двумя другими – в оболочках и пластинах позволяют существенно упростить анализ их напряженного и деформированного состояния.

Определение. Пространственное тело (массив)– модель формы элемента конструкции, в которой размеры по всем направлениям соизмеримы. К ним относятся фундаменты зданий и сооружений, подпорные стенки и т. п.

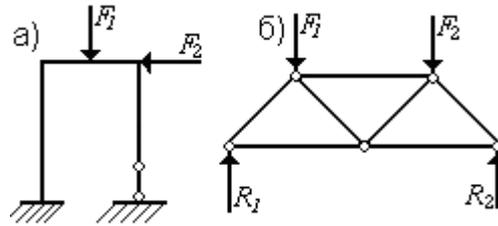
Определение. Механической системой называется совокупность твердых тел, в которой положение и движение каждого тела определяется положением и движением остальных.

Определение. Расчетной схемой системы называется ее упрощенное представление, принимаемое за основу прочностного расчета. Расчетная схема определяется: совокупностью принимаемых гипотез; методикой расчета; упрощенным представлением элементов; условным представлением нагрузок; пренебрежением некоторыми размерами и конструктивными деталями, которые практически не сказываются на их прочности.

При расчете реальной конструкции ее заменяют идеализированной упрощенной системой – расчетной схемой. Расчетная схема включает в себя: элементы конструкции (стержни, оболочки, пластины, массивы), способы соединения элементов конструкции, опорные устройства.

Обычно стержни соединяются между собой упругоподатливо, однако в различных случаях такое соединение в расчетных схемах трактуется различно:

- в рамах (*рис. 1.4,а*) – жесткое соединение в узлах;
- в фермах (*рис. 1.4,б*) – шарнирное соединение стержней в узлах.



*Рис. 1.4. Примеры соединения стержней в узлах*

Таким образом, реальные элементы конструкций и сооружений могут быть с достаточной точностью представлены сочетанием более простых моделей формы (стержня, пластины или оболочки, пространственного тела).

### 1.4. Нагрузки. Классификация внешних нагрузок

В процессе работы или эксплуатации конструкций и сооружений их элементы испытывают действие различных нагрузок.

Определение. Нагрузки – это силы, передающиеся рассматриваемым телам от других, соприкасающихся с ними тел, или от внешней среды. Все нагрузки делятся на силы внешние и силы внутренние.

Определение. Внешними называются нагрузки, действующие на конструкцию в целом, при рассмотрении ее как твердого тела.

Определение. Внутренними называются силы, возникающие внутри конструкции в результате деформаций от действия внешних нагрузок.

Нагрузки, приложенные к телу, распределены по некоторым площадям его поверхности (поверхностные нагрузки) или по объему (объемные нагрузки).

Для их представления используют следующие модели: распределенные нагрузки, сосредоточенные и объемные силы.

Все поверхностные нагрузки являются распределенными по некоторой поверхности конструкции. Распределенные нагрузки характеризуются интенсивностью, которая может быть переменной или постоянной. При расчете стержней распределенная по площади нагрузка приводится к линейной нагрузке, распределенной по длине стержня.

Если размеры площади приложения нагрузки малы по сравнению с размерами тела, то в этом случае нагрузка может быть представлена в виде силы, приложенной к математической точке поверхности тела. Такую нагрузку называют *сосредоточенной*.

*Так как сила возникает в результате взаимодействия тел и давление между ними передается через площадку бóльших или меньших размеров, то в действительности сосредоточенных сил не существует.*

Нагрузки, распределенные по всему объему (приложены к каждой частице внутри тела), называются *объемными* (собственный вес, силы инерции).

В ряде случаев нагрузки моделируются как моментные в виде сосредоточенных моментов (пар сил) и моментов, распределенных по поверхности или по линии.

К внешним силам относятся температурные воздействия, возникающие при перемене температуры, а также инерционные силы при поступательном и вращательном движениях.

Внешние нагрузки делятся на активные и реактивные (реакции опорных закреплений).

*Реактивные нагрузки* подлежат определению из уравнений статики. Если уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций, то к ним добавляют уравнения, характеризующие деформации конструкции.

Деление внешних нагрузок на поверхностные, линейные и сосредоточенные – три степени абстракции, используемой в расчетах.

Нагрузки разделяют на стационарные (постоянные, статические) и нестационарные (временные, переменные).

*Постоянные* нагрузки действуют в течение всего периода существования конструкции (например, собственный вес конструкции).

*Статические нагрузки* – нагрузки, сообщающие телу малые ускорения, следовательно, малы и силы инерции, которые можно не учитывать.

*Временные нагрузки* – нагрузки, действующие в течение ограниченного отрезка времени (например, снеговая или ветровая нагрузки).

*Переменные нагрузки* – это нагружение, изменяющееся во времени. Наиболее важный класс переменных нагрузок – циклические нагрузки.

Совокупность напряжений от некоторого значения  $\sigma_{\max}$  до  $\sigma_{\min}$  и снова до  $\sigma_{\max}$ , называется циклом напряжений, а сами напряжения – циклическими.

Для *динамического* действия нагрузки характерно быстрое изменение во времени ее величины (высокая скорость возрастания нагрузки), что вызывает силы инерции, которые необходимо учитывать.

Модели нагружения должны учитывать воздействие полей и сред. Наиболее часто встречается воздействие температурного поля. Пониженная или повышенная температура влияют на механическую прочность материала.

Таким образом, модели нагружения содержат схематизацию внешних нагрузок по величине, распределению, времени, воздействию внешних полей и сред.

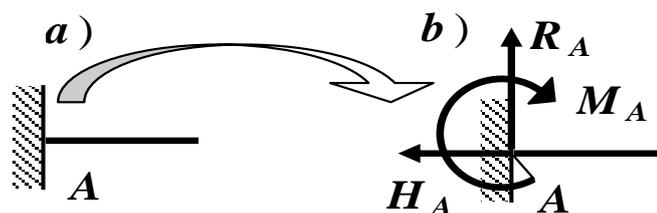
### 1.5. Основные типы опор

Для того чтобы элементы конструкции могли воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, они должны быть соединены с ним опорными связями (опорами). Тип опоры устанавливается по ее характеристикам – кинематической (перемещений, допускаемых и задерживаемых опорными связями) и статической (силовое сопротивление).

Различают три основных типа опорных устройств (в плоской системе сил):

- **Защемление или заделка** (рис. 1.5,а)

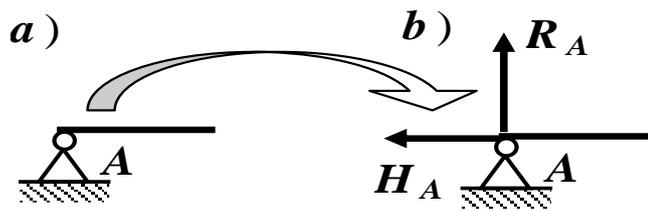
Защемленный конец стержня  $A$  не может смещаться поступательно в



*Рис. 1.5. Защемление или заделка*

горизонтальном и вертикальном направлениях, ни поворачиваться. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  $R_A$ , препятствующая вертикальному смещению, горизонтальная сила  $H_A$ , исключаяющая горизонтальное смещение, и момент  $M_A$ , препятствующий повороту (рис. 1.5,б).

- **Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.6,а)**

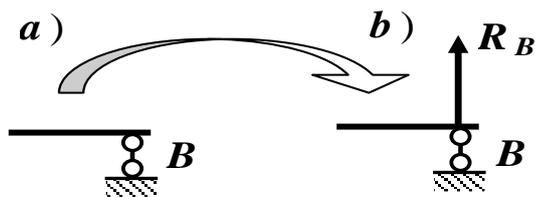


*Рис. 1.6. Шарнирно-неподвижная опора*

Эта опора не позволяет сечению стержня в точке  $A$  иметь поступательные перемещения в горизонтальном и вертикальном направлениях, но при этом возможен поворот сечения в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  $R_A$ , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная сила  $H_A$ , исключаяющая горизонтальное смещение (рис. 1.6,б).

- **Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (рис. 1.7,а)**

Эта опора позволяет сечению стержня в точке  $B$  поворачиваться вокруг



*Рис. 1.7. Шарнирно-подвижная опора*

шарнира и перемещаться в горизонтальном направлении, но не позволяет перемещаться по вертикали. В такой опоре возникает только реакция  $R_B$  (рис. 1.7,б).

Для обеспечения неподвижности элементов конструкции, то есть, чтобы они могли сопротивляться приложенным внешним силам, необходимо зафиксировать один их конец или в одном их сечении устроить шарнирно - неподвижную опору, а в другом – шарнирно - подвижную опору.

*Таким образом, наименьшее число связей, не позволяющих элементам конструкции перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.*

### 1.6. Определение опорных реакций

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

При действии на стержень плоской системы внешних сил, реакции опор действуют в той же плоскости, а поэтому реакции опор определяются по правилам теоретической механики из условий равновесия плоской системы сил. Плоская система может находиться в равновесии только при условии не пересечения направления реакций в одной точке.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных комбинациях:

*а). Первая комбинация:*

$\Sigma F_x = 0$  – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю;

$\Sigma F_z = 0$  – Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю (1.1)

$\Sigma M_A = 0$  – Сумма моментов всех сил относительно точки  $A$  равна нулю.

Уравнение  $\Sigma M_B = 0$  (Сумма моментов всех сил относительно точки  $B$  равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

б). Вторая комбинация:

$\Sigma F_x = 0$  – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю;

$\Sigma M_A = 0$  – Сумма моментов всех сил относительно точки  $A$  равна нулю; (1.2)

$\Sigma M_B = 0$  – Сумма моментов всех сил относительно точки  $B$  равна нулю.

Уравнение  $\Sigma F_z = 0$  (Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

### 1.7. Внутренние силы (усилия) в поперечных сечениях бруса и метод их определения

Под влиянием внешних сил в теле происходит деформация и возникают дополнительные внутренние силы.

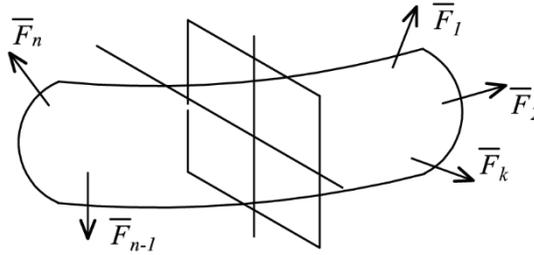
В дальнейшем при определении внутренних сил мы будем подразумевать не их абсолютные значения, а только те изменения, которые вызваны действующими на тело нагрузками.

Внутренние силы упругости увеличиваются с возрастанием внешних сил, но только до определенного предела, после превышения которого тело разрушается.

Для расчета конструкций на прочность необходимо уметь находить внутренние силы по заданным внешним нагрузкам. Чтобы установить численные значения внутренних сил, возникающих в результате деформации, вызванной внешними силами, применяют метод сечений.

Пусть к элементу конструкции приложена система нагрузок, включающая в

себя заданные силы и опорные реакции (рис. 1.8). Под действием рассматриваемых сил элемент находится в равновесии.

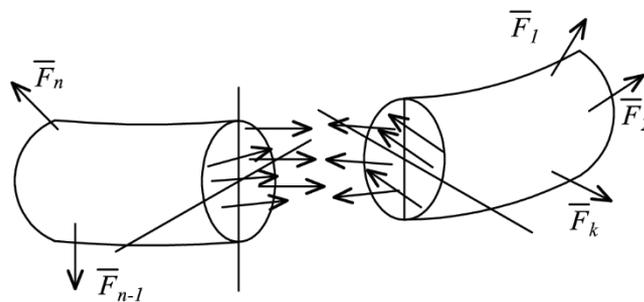


**Рис. 1.8.**

Метод сечений сводится к четырем действиям:

1. Плоскостью  $\alpha$ , проходящей через внутреннюю точку, в которой необходимо определить искомое усилие, разрезают (мысленно) тело на две части (рис. 1.8).

2. Для каждой из частей прикладывают в сечениях внутренние силы взаимодействия в каждой точке рассматриваемого сечения (рис. 1.9).



**Рис. 1.9.**

3. Отбрасывая одну из частей стержня (желательно наиболее сложную), заменяют внутренние силы статически эквивалентными им главным вектором  $\mathbf{R}$  и главным моментом  $\mathbf{M}$  (рис. 1.10).

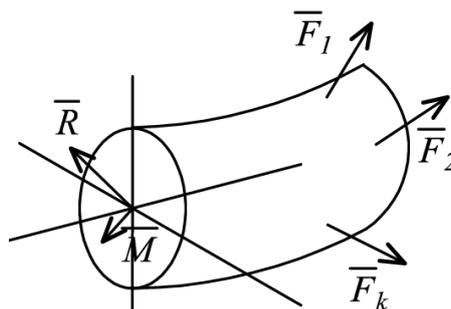


Рис. 1.10.

4. В соответствии с гипотезой о малости деформаций составляют как для недеформируемого тела уравнения равновесия для всех сил (внешних и внутренних), действующих на оставшуюся часть:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0; & \qquad \qquad \qquad \Sigma M_x = 0; \\ \Sigma F_y = 0; & \qquad \qquad \qquad \Sigma M_y = 0; \\ \Sigma F_z = 0; & \qquad \qquad \qquad \Sigma M_z = 0.\end{aligned}$$

Из шести уравнений статики можно определить (выразить) шесть составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил.

Определение. Составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающие в поперечном сечении бруса, называются внутренними силовыми факторами (или усилиями) в этом сечении.

Указанные шесть внутренних силовых факторов имеют следующие наименования:

- N – продольная сила;
- $Q_y$  и  $Q_z$  – поперечные силы;
- $M_x = M_k$  – крутящий момент;
- $M_y$  и  $M_z$  – изгибающие моменты.

Индексы в обозначениях силовых факторов ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) показывают, относительно каких осей они вычислены.

### 1.8. Простые виды деформации

Каждый из силовых факторов связан с определенным видом деформации.

В частных случаях система внешних, а значит, и система внутренних сил могут приводиться к одной, двум, трем и так далее до шести составляющих.

*Рассмотрим возможные простейшие случаи деформаций, когда внутренние силы приводятся к какой-либо одной составляющей.*

Определение. Центральным растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только

продольные силы  $N$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $Q$ ,  $M_{изг}$  и  $M_k$ ) равны нулю.

Определение. Брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем.

Определение. Чистым сдвигом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только поперечные силы  $Q$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $M_{изг}$  и  $M_k$ ) равны нулю.

Чистый сдвиг – вид сопротивления (деформирования), характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.

Определение. Кручением называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты  $M_k$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $Q$ ,  $M_{изг}$ ) равны нулю.

Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно его продольной оси.

Определение. Брус, работающий на кручение, называется валом.

Вал – вращающаяся (обычно в подшипниках) деталь машины, передающая крутящий момент.

Определение. Чистым изгибом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только изгибающие моменты  $M_{изг}$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $Q$ ,  $M_k$ ) равны нулю.

Чистый изгиб – вид сопротивления (деформирования), при котором происходит искривление оси прямого бруса, или изменение кривизны кривого бруса.

Определение. Стержень, работающий на изгиб, называется балкой.

Изгиб возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно главных центральных осей его поперечного сечения.

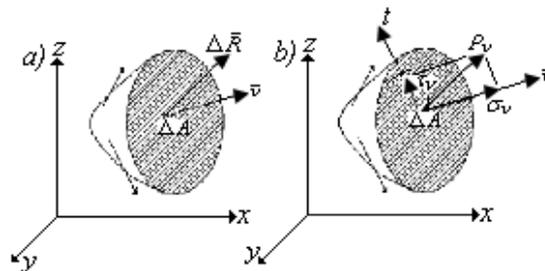
### 1.9. Понятие о напряжении. Определение нормальных и касательных напряжений

Выявив внутренние силы и даже определив их равнодействующую, еще нельзя говорить об условии прочности рассматриваемого тела, так как прочность зависит не только от материала и величины равнодействующей внутренних сил, но также от характера их распределения и размеров тела – от величины того сечения, к которому приложена равнодействующая.

Ранее указывалось, что внешние силы характеризуются интенсивностью, численно равной силе, приходящейся на единицу площади. По аналогии, внутренние силы также принято характеризовать интенсивностью, относя усилие, передаваемое через какое-либо воображаемое сечение, к площади этого сечения.

Выделим (рис. 1.11,а) в окрестности произвольной точки бесконечно малую площадку  $\Delta A$ .

На эту площадку действуют внутренние силы с равнодействующей  $\Delta R$ , направление которой, в общем случае, не совпадает с направлением нормали  $\nu$



*Рис. 1.11.*

к площадке. Будем считать, что равнодействующая  $\Delta R$  приложена в центре тяжести площадки  $\Delta A$ . Среднее напряжение будет равно

$$p_{cp} = \Delta R / \Delta A \tag{1.3}$$

Устремляя величину  $\Delta A$  к нулю и переходя к пределу, получим полное напряжение в рассматриваемой точке

$$p_{\nu} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta R / \Delta A) = dR / dA \tag{1.4}$$

Разложив полное напряжение  $p_v$  на составляющие по нормали к площадке и по касательной к ней, получим нормальное напряжение  $\sigma_v$  и касательное напряжение  $\tau_v$  в точке (рис.1.11,б). Между напряжениями справедливо соотношение

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \quad (1.5)$$

Если внутренние силы распределяются равномерно по сечению, то и напряжения распределяются равномерно и во всех точках сечения будут одинаковые. Величина напряжения в этом случае определяется как отношение равнодействующей внутренних сил к суммарной площади, то есть

$$p = \frac{R}{A} \cdot \quad (1.6)$$

Определение. Напряжение – это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади сечения.

Размерность напряжения – кГ/см<sup>2</sup> или н/м<sup>2</sup> (Па).

Совокупность напряжений по всевозможным площадкам, проходящим через точку, образует *напряженное состояние* в точке.

### 1.10. Интегральная связь между напряжениями и внутренними силами

Установим связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами в поперечном сечении бруса.

Рассмотрим стержень, находящийся в равновесии под действием произвольных нагрузок (рис. 1.12,а).

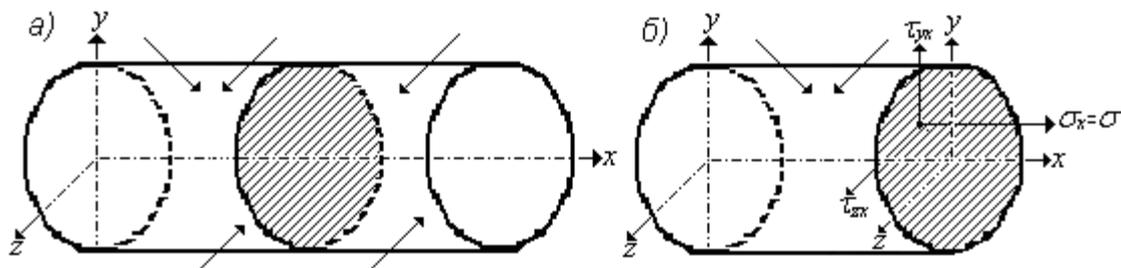


Рис. 1.12.

Рассечем мысленно стержень плоскостью, перпендикулярной оси.

Разложим полное напряжение  $p_v$  на нормальное напряжение  $\sigma_x = \sigma$  и касательные напряжения  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$  (рис. 1.12,б). Направление нормальной составляющей напряжения вполне определено и здесь достаточно одного индекса для их обозначения (положение нормали). Для обозначения касательного напряжения необходимо два индекса: первый индекс указывает направление вектора касательного напряжения; второй – плоскость, на которой это напряжение действует.

Напряжения в данной точке связаны между собой соотношением

$$p_x = \sigma_x^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (1.7)$$

Установим связь между внутренними силовыми факторами и напряжениями в поперечном сечении бруса.

Выделим в окрестности рассматриваемой точки элементарную площадку  $dA$ . Умножая напряжения  $\sigma$ ,  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$  на площадь  $dA$  площадки их действия получим внутренние элементарные усилия

$$dN = \sigma \cdot dA; \quad dQ_y = \tau_{yx} \cdot dA; \quad dQ_z = \tau_{zx} \cdot dA$$

Суммируя проекции элементарных сил, а также их моменты относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим выражения шести составляющих главного вектора внутренних сил

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{yx} \cdot dA; \quad Q_z = \int_A \tau_{zx} \cdot dA \quad (1.8)$$

$$M_y = - \int_A \sigma \cdot z \cdot dA; \quad M_z = - \int_A \sigma \cdot y \cdot dA; \quad M_k = \int_A (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{yx} \cdot z) \cdot dA$$

Полученные выражения определяют равнодействующие внутренних сил через соответствующие напряжения, если установлены законы их распределения по сечению.

Одной из основных задач сопротивления материалов является определение *напряжений через внутренние усилия*. Решить ее можно только рассматривая дополнительно и условия деформирования тела.



### **1.11. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Введение»**

1. Какие цели и задачи науки о сопротивлении материалов?
2. Что изучает наука о сопротивлении материалов?
3. Что называется деформацией стержня?
4. Что такое упругость тела?
5. Какая деформация называется упругой и пластической?
6. Как классифицируются внешние нагрузки, действующие на сооружения?
7. Что называется брусом, пластинкой и оболочкой?
8. Что такое расчетная схема? Основные направления схематизации реальной конструкции.
9. Какие основные типы опор вы знаете?
10. Какие уравнения статики (равновесия) можно составить для определения опорных реакций?
11. Какие основные допущения приняты в сопротивлении материалов?
12. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса?
13. В чем заключается метод сечения?
14. Какие основные простые виды деформации вызываются внешними силами?
15. Что называется напряжением и какая его размерность?
16. Какие напряжения называются нормальными и касательными?
17. Какая интегральная связь существует между внутренними усилиями и напряжениями?

## **ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

### **2.1. Статические моменты, их свойства. Определение положения центра тяжести сечения**

Рассмотрим произвольную фигуру, расположенную в декартовой системе координат у  $Oz$  и любую точку  $K(y, z)$ , принадлежащую этой фигуре (рис. 2.1).

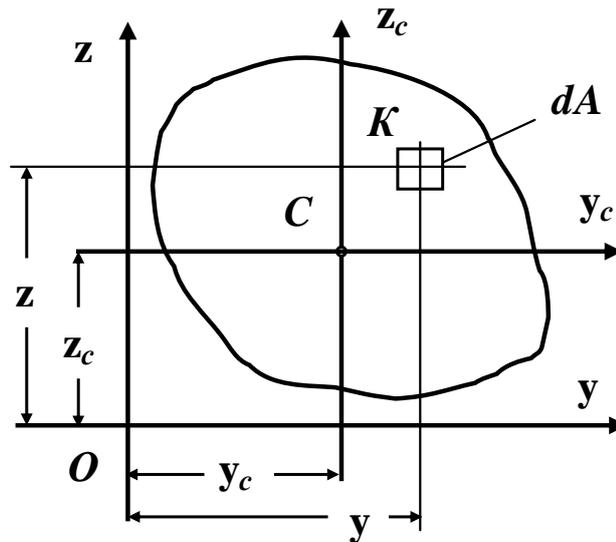


Рис. 2.1

Точку  $K (y, z)$  ограничим элементарной площадью величиной  $dA$ . По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение момента элементарной площади относительно некоторой оси.

Произведение элементарной площади  $dA$  на координату  $z$  точки  $K (y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке, называется статическим моментом этого элемента площади относительно оси  $y$

$$dS_y = z dA$$

Аналогично,

$$dS_z = y dA$$
 – статический момент элемента площади  $dA$  относительно оси  $z$ .

Определение. Статическим моментом площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координату точки  $K (y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке, то есть

$$S_y = \int_A z dA ; \quad S_z = \int_A y dA. \quad (2.1)$$

Единицей измерения статического момента является единица длины в третьей степени – см<sup>3</sup> (в системе СИ – м<sup>3</sup>).

*Статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.*

Проводя аналогию между моментами сил и моментами площадей, на основании теоремы Вариньона о моменте равнодействующей системы сил из курса теоретической механики, можно записать следующие выражения для моментов площади

$$S_y = Az_c; \quad S_z = Ay_c, \quad (2.2)$$

где

$A$  – площадь рассматриваемой фигуры;

$y_c$  и  $z_c$  – координаты ее центра тяжести.

Если провести оси  $y_c$  и  $z_c$  через центр тяжести фигуры – точку  $C$ , то статические моменты относительно этих осей будут равны нулю, то есть

$$S_{yc} = 0; \quad S_{zc} = 0 \quad (2.3)$$

Определение. Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Относительно этих осей статические моменты равны нулю.

Таким образом, получаем формулы для определения координат центра тяжести фигуры

$$y_c = \frac{S_z}{A}; \quad z_c = \frac{S_y}{A}. \quad (2.4)$$

При вычислении статических моментов сложной составной фигуры ее разбивают на элементарные или простые части, для каждой из которых площадь и положение ее центра тяжести известны.

В этом случае статические моменты определяются как алгебраические суммы статических моментов каждой элементарной площади

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} + S_y^{III} + \dots = A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3} + \dots;$$

$$S_z = S_z^I + S_z^{II} + S_z^{III} + \dots = A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3} + \dots$$

Используя последние соотношения, получаем формулы для определения координат центра тяжести сложной составной фигуры

$$y_c = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}; \quad z_c = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

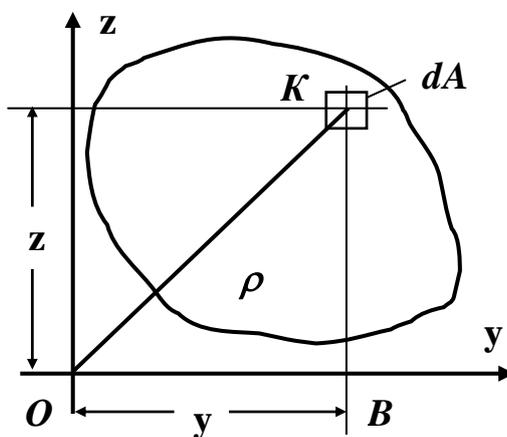
или

$$y_c = \frac{\sum S_z}{\sum A}; \quad z_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} \quad .(2.5)$$

## 2.2. Осевые и центробежный моменты инерции и их свойства

Определение. Осевым или экваториальным моментом инерции площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на квадрат координаты точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке (рис. 2.2)

$$J_y = \int_A z^2 dA; \quad J_z = \int_A y^2 dA \quad (2.6)$$



*Рис. 2.2*

Определение. Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса  $O$ ) называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарных площадок на квадраты их расстояний  $\rho$  от полюса (рис. 2.2)

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA \quad (2.7)$$

*Определение.* Центробежным моментом инерции площади фигуры называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координаты точки  $K (y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке (рис. 2.2)

$$J_{yz} = \int_A yz dA \quad (2.8)$$

Единицей измерения момента инерции является единица длины в четвертой степени – см<sup>4</sup>, (в системе СИ – м<sup>4</sup>).

*Осевой и полярный моменты инерции всегда положительны по определению.*

*Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.*

### 2.3. Полярный момент инерции и его свойства

В задачах на кручение стержней круглого поперечного сечения фигурирует понятие полярного момента инерции, который определяется по формуле (2.7)

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA,$$

где

$\rho$  – полярный радиус, или расстояние от начала координат до площадки  $dA$ .

Поскольку (рис. 2.2)

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \rightarrow \quad J_{\rho} = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y,$$

То есть

$$J_{\rho} = J_y + J_z = const. \quad (2.9)$$

*Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции.*

### 2.4. Зависимости между моментами инерции фигуры относительно параллельных осей

Для произвольной фигуры, площадь которой равна  $A$ , известны моменты инерции  $J_{y_c}$ ,  $J_{z_c}$  и  $J_{y_c z_c}$  относительно центральных осей  $y_c$ ,  $z_c$ .

Необходимо определить моменты инерции  $J_{y_1}$ ,  $J_{z_1}$  и  $J_{y_1 z_1}$  относительно новых осей  $y_1$  и  $z_1$ , которые параллельны центральным осям  $y_c$  и  $z_c$  (рис. 2.3).

Обозначим через  $b$  и  $a$  координаты точки  $C$  в системе координат  $y_1 O z_1$  (рис. 2.3).

Из рисунка легко установить зависимости между новыми и старыми координатами элементарной площадки  $dA$

$$y_1 = y + b; z_1 = z + a.$$

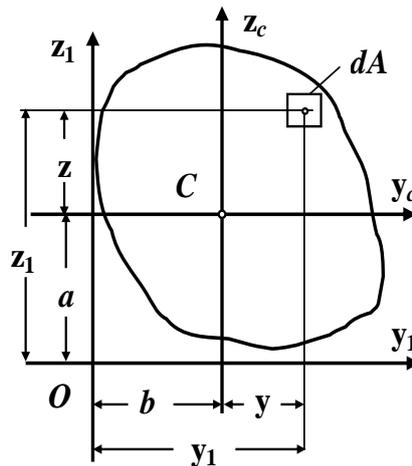


Рис. 2.3

Используя определения осевых моментов инерции относительно осей  $y_1$ ,  $z_1$  (2.6), находим

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (z + a)^2 \cdot dA = \int_A z^2 \cdot dA + 2a \cdot \int_A z \cdot dA + a^2 \cdot \int_A dA = \\ &= J_{y_c} + 2a \cdot S_{y_c} + a^2 A \end{aligned}$$

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + b)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2b \int_A y \cdot dA + b^2 \int_A dA = J_{z_c} + 2b S_{z_c} + b^2 A$$

$$\begin{aligned} J_{y_1 z_1} &= \int_A y_1 z_1 \cdot dA = \int_A (y + b)(z + a) \cdot dA = \int_A yz \cdot dA + b \int_A z \cdot dA + a \int_A y \cdot dA + ab \int_A dA = \\ &= J_{y_c z_c} + b S_{y_c} + a S_{z_c} + ab A. \end{aligned}$$

Здесь

$$J_{y_c} = \int_A z^2 dA; \quad J_{z_c} = \int_A y^2 dA; \quad J_{y_c z_c} = \int_A yz dA; \quad S_{y_c} = \int_A z dA; \quad S_{z_c} = \int_A y dA.$$

Так как оси  $y_c$  и  $z_c$  – центральные оси, то

$$S_{y_c} = S_{z_c} = 0.$$

Окончательно, формулы параллельного переноса осей в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= J_{y_c} + a^2 A; & J_{z_1} &= J_{z_c} + b^2 A; \\ J_{y_1 z_1} &= J_{y_c z_c} + abA \end{aligned} \quad (2.10)$$

Первые две зависимости формулируются следующим образом:

*Момент инерции фигуры относительно любой оси, параллельной центральной, равен моменту инерции фигуры относительно центральной оси, плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь фигуры.*

Третья зависимость читается так:

*Центробежный момент инерции фигуры относительно произвольных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции фигуры относительно центральных осей плюс произведение координат центра тяжести фигуры относительно произвольных осей на площадь фигуры.*

*Необходимо помнить, что вышеприведенные формулы параллельного переноса осей (2.10) справедливы только в том случае, когда оси  $y_c$  и  $z_c$  – центральные оси.*

Следствие. Осевые моменты инерции фигуры относительно центральных осей минимальны по сравнению с осевыми моментами инерции этой фигуры относительно любых других параллельных им осей.

## 2.5. Зависимость между моментами инерции фигуры при повороте осей

Рассмотрим некоторую фигуру, отнесенную к первоначальной декартовой системе координат  $y_0, z_0$  (рис. 2.4).

Относительно осей  $y_0$  и  $z_0$  известны моменты инерции  $J_{y_0}, J_{z_0}, J_{y_0 z_0}$ .

Необходимо определить осевые и центробежный моменты инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$ , полученных поворотом первоначальных центральных осей  $y_0$  и  $z_0$  против хода часовой стрелки на угол  $\alpha > 0$ , то есть необходимо найти  $J_y$ ,  $J_z$  и  $J_{yz}$  фигуры, выразив их через  $J_{y_0}$ ,  $J_{z_0}$  и  $J_{y_0z_0}$ , а также положительный угол  $\alpha$ .

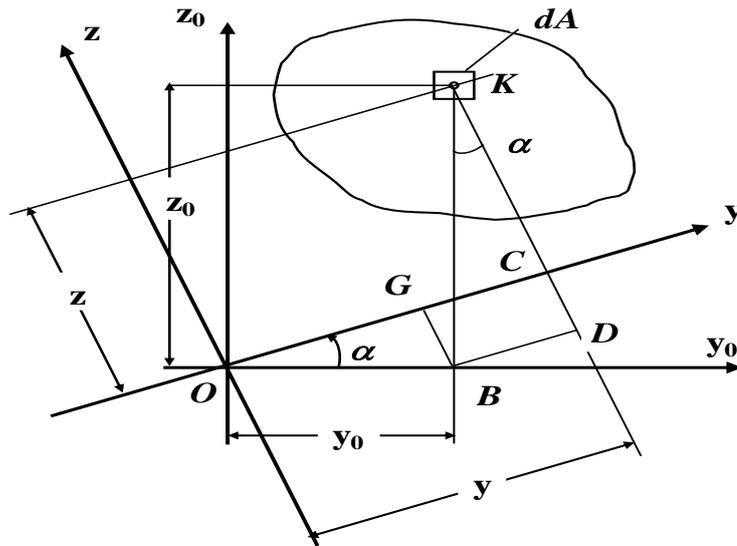


Рис. 2.4

Выразим координаты ( $y$  и  $z$ ) точки  $K$  (центр тяжести элементарной площадки  $dA$ ) в новой системе координат через координаты  $y_0, z_0$  в исходной системе координат

$$y_0 = OB, \quad z_0 = BK.$$

Из точки  $B$  опустим перпендикуляры на ось  $y$  и на продолжение линии  $KC$ , в результате получим прямоугольник  $BGCD$ .

Из прямоугольного треугольника  $BOG$  находим

$$BG = OB \cdot \sin \alpha = y_0 \sin \alpha = CD; \quad OG = OB \cdot \cos \alpha = y_0 \cos \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника  $BKD$  находим

$$BD = BK \cdot \sin \alpha = z_0 \sin \alpha = GC; \quad KD = KB \cdot \cos \alpha = z_0 \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$y = OC = OG + GC = y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha; \quad z = KC = KD - CD = z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha$$

Из определения осевых моментов инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  (2.6) следует

$$\begin{aligned} J_y &= \int_A z^2 dA = \int_A (z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A z_0^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0 z_0 dA + \sin^2 \alpha \int_A y_0^2 dA. \end{aligned}$$

Аналогично получаем,

$$J_z = \cos^2 \alpha \int_A y_0^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0 z_0 dA + \sin^2 \alpha \int_A z_0^2 dA.$$

Но по определению (2.6)

$$J_{y_0} = \int_A z_0^2 dA \quad ; \quad J_{z_0} = \int_A y_0^2 dA; \quad J_{y_0 z_0} = \int_A y_0 z_0 dA.$$

Следовательно, окончательно выражения для осевых моментов инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  принимают вид

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{z_0} \sin^2 \alpha - J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha; \\ J_z &= J_{y_0} \sin^2 \alpha + J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.11)$$

По определению центробежного момента инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  (2.8) находим

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \int_A yz dA = \int_A (y_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha) \cdot (z_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha) dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y_0 z_0 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_A y_0^2 dA + \sin \alpha \cos \alpha \int_A z_0^2 dA - \sin^2 \alpha \int_A y_0 z_0 dA. \end{aligned}$$

Следовательно, выражение центробежного момента инерции фигуры относительно новых осей  $y$  и  $z$  принимает вид

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha \quad (2.12)$$

Таким образом, мы получили формулы, выражающие зависимость между моментами инерции фигуры относительно любых повернутых осей

$$J_y = J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{z_0} \sin^2 \alpha - J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha$$

$$J_z = J_{y_0} \sin^2 \alpha + J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0 z_0} \sin 2\alpha \quad (2.13)$$

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha$$

Правило знаков. Положительный угол  $\alpha$  откладывается от первоначальных осей  $y_0$  и  $z_0$  против хода часовой стрелки.

Эти формулы являются основными для расчетов, связанных с определением моментов инерции относительно любых повернутых осей.

Складывая первое и второе выражения (2.13), получим

$$J_y + J_z = J_{y_0} + J_{z_0} = \text{const.} \quad (2.14)$$

Следовательно, при повороте центральных осей сумма соответствующих осевых моментов инерции не изменяется.

## 2.6. Вычисление моментов инерции простейших фигур

**Прямоугольник.** Вычислим осевые моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей  $y$  и  $z$  (рис. 2.5).

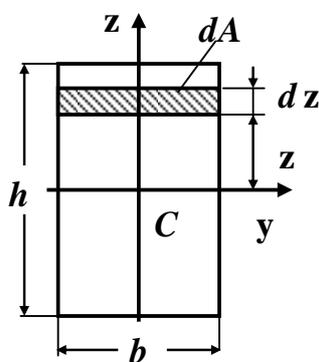


Рис. 2.5

По определению осевого момента инерции (2.6)

$$J_y = \int_A z^2 dA,$$

где

$dA = b \cdot dz$  – площадь элементарного прямоугольника (рис. 2.5).

Подставляя под знак интеграла вместо  $dA$  ее значение, получим

$$J_y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{b}{3} h^3 \left| \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Следовательно,

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (2.15)$$

Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции прямоугольника относительно оси  $z$

$$J_z = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (2.16)$$

**Треугольник.** Вычислим осевые моменты инерции треугольника относительно центральных осей  $y_c$  и  $z_c$  (рис. 2.6).

Рассматривая в качестве элементарной площадки  $dA$  прямоугольник с основанием  $b(z) = KL$  и высотой  $dz$ , получаем

$$dA = b(z) \cdot dz.$$

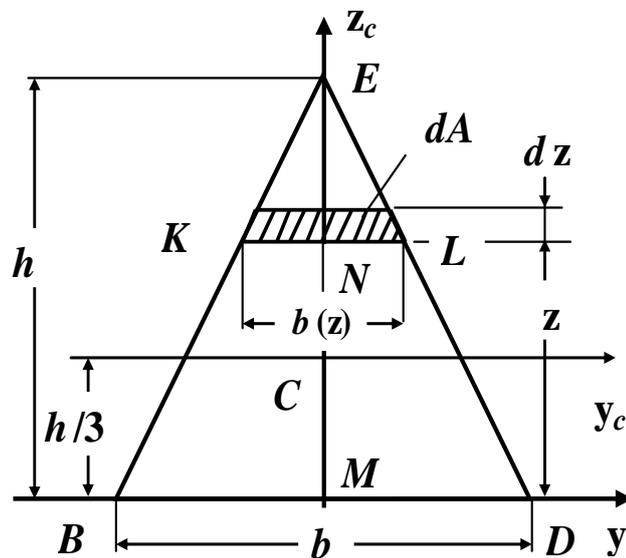


Рис. 2.6

Размер основания  $b(z)$  находим из подобия треугольников  $BED$  и  $KEL$

$$\frac{KL}{BD} = \frac{EN}{EM}, \quad \frac{b(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \quad b(z) = (h-z) \cdot \frac{b}{h},$$

где

$z$  – расстояние от оси  $y$  до элементарной площадки.

$$dA = b(z)dz = \frac{b}{h}(h-z) \cdot dz.$$

По определению момента инерции относительно оси  $y$  (2.6), получаем

$$J_y = \int_A z^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 \cdot (h-z) dz = \frac{b}{h} \cdot \left( h \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{b}{h} \left( \frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

То есть,

$$J_y = \frac{bh^3}{12}$$

Используя формулу моментов инерции при параллельном переносе осей (2.10), получим

$$J_y = J_{y_c} + \left( \frac{h}{3} \right)^2 \cdot A$$

Из этого равенства определяем момент инерции треугольника относительно центральной оси  $y_c$

$$J_{y_c} = J_y - \left( \frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$

Следовательно,

$$J_{y_c} = \frac{b \cdot h^3}{36}. \tag{2.17}$$

Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции треугольника относительно оси центральной  $z_c$ .

$$J_{z_c} = \frac{h \cdot b^3}{36}. \tag{2.18}$$

**Круг.** Вычислим полярный момент инерции круга относительно центра тяжести. В качестве элементарной площади рассмотрим площадь заштрихованного кольца с радиусами  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  (рис. 2.7).

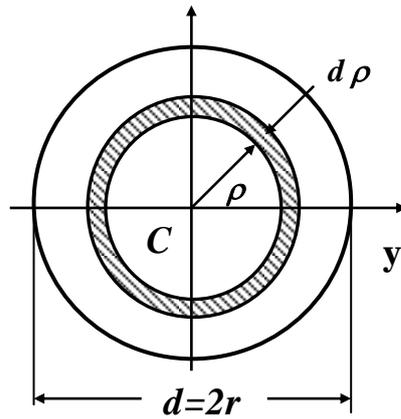


Рис. 2.7

Площадь этого кольца

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Тогда

$$J_{\rho} = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \rho^2 = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \cdot d\rho \quad (2.19)$$

После интегрирования и подстановки пределов полярный момент инерции круга относительно его центра тяжести  $C$  найдем по формуле

$$J_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4. \quad (2.20)$$

Для определения осевых моментов инерции круга относительно центральных осей  $y$  и  $z$  прежде всего отметим, что очевидно,

$$J_y = J_z,$$

а затем воспользуемся формулой (2.13), на основании которой

$$J_y = J_z = \frac{J_{\rho}}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,05 \cdot d^4. \quad (2.21)$$

**Кольцо.** Для определения полярного момента инерции кругового кольца с наружным диаметром  $D$  и внутренним диаметром  $d$  (рис. 2.8) воспользуемся

формулой (2.19), но интегрирование выполним в пределах от  $\frac{d}{2}$  до  $\frac{D}{2}$ , то есть

$$J_{\rho} = 2\pi \cdot \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 \cdot d\rho.$$

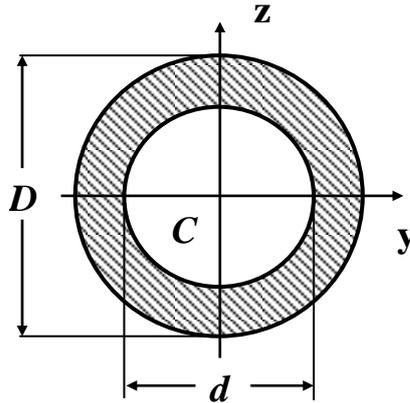


Рис. 2.8

В результате получим

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (2.22)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Следовательно, полярный момент инерции кругового кольца равен разности полярных моментов инерции внешнего и внутреннего круга.

Осевые моменты инерции кругового кольца по аналогии будут равны

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4). \quad (2.23)$$

## 2.7. Главные оси и главные моменты инерции

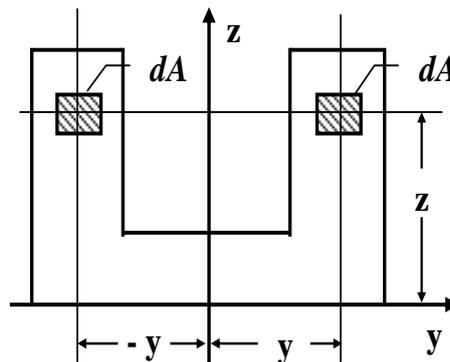
### Определение положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений

Определение. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (относительно одной – максимум, относительно другой – минимум), называются главными осями.

Определение. Главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются главными центральными осями.

*Если, хотя бы одна, из взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат является осью симметрии фигуры, то центробежный момент инерции такой фигуры равен нулю.*

В самом деле, для симметричной фигуры всегда можно выделить две элементарные площадки с одинаковой площадью  $dA$ , которые имеют одинаковые ординаты  $z$  и равные, но противоположные по знаку абсциссы  $y$  (рис. 2.9).



**Рис. 2.9**

Составляя сумму произведений  $yzdA$  для элементов, показанных на рис. 2.9, то есть, вычисляя интеграл (2.8), получаем в результате

$$J_{yz} = 0.$$

Вывод. Ось симметрии фигуры всегда является главной центральной осью.

Следовательно, для симметричных фигур положение главных центральных осей определяется достаточно просто.

*Для фигуры, имеющей одну ось симметрии, одна из главных центральных осей совпадает с этой осью симметрии, а вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести перпендикулярно к ней.*

*Для фигуры, имеющей две оси симметрии, главные центральные оси совпадают с этими осями симметрии.*

Можно сказать, что, если для какой – либо фигуры два главных осевых момента равны между собой, тогда любая центральная ось является главной (круг, квадрат, правильный треугольник, правильный шестиугольник и т.д.).

Анализируя формулы повернутых осей (2.13), приходим к заключению о том, что при изменении угла поворота  $\alpha$  осевые моменты инерции изменяются так, что их сумма остается неизменной (2.14). Это приводит к выводу о том, что можно найти такое значение угла  $\alpha_0$ , при котором один из осевых моментов инерции достигнет минимального значения, а второй – максимального, то есть возникает постановка задачи на нахождение экстремума функции по переменной  $\alpha$ .

Вычисляя производную от  $J_y$  или  $J_z$  по переменной  $\alpha$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dJ_y}{d\alpha} &= 2J_{y_0} \cos \alpha (-\sin \alpha) + 2J_{z_0} \sin \alpha \cos \alpha - 2J_{y_0z_0} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left( \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что (2.12)

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha$$

выражение для производной принимает вид

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = -2 \left( \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha \right) = -2J_{yz}.$$

Приравнявая производную нулю, получаем уравнение, позволяющее найти угол  $\alpha_0$

$$\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{y_0z_0}}{J_{y_0} - J_{z_0}} \text{ и } J_{yz} / \alpha = \alpha_0 = 0 \quad (2.24)$$

Таким образом, эта формула (2.24) определяет положение экстремальных

осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, то есть положение главных осей.

Определение. Осевые моменты относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Для определения численных значений главных моментов инерции можно использовать формулы повернутых осей (2.11), подставляя в них значение угла  $\alpha_0$ .

Выполняя эту операцию в общем виде, после некоторых алгебраических преобразований тригонометрических выражений, можно получить формулы для определения главных моментов инерции, не содержащие угла  $\alpha_0$

$$J_{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4J_{yz}^2}. \quad (2.25)$$

*Следовательно, для определения положения главных центральных осей и численных значений главных центральных моментов инерции несимметричных поперечных сечений рекомендуется следующий общий порядок действий:*

1. Проводят произвольные оси. Вычисляют статические моменты инерции относительно этих осей (разбив предварительно сложное поперечное сечение на ряд простых фигур) и находят положение центра тяжести сложного сечения.

2. Проводят через центр тяжести всего сечения оси, параллельные первоначально выбранным произвольным осям, и находят с помощью формул параллельного переноса осей центробежный и осевые моменты инерции сечения относительно этих новых центральных осей.

3. Находят положение главных центральных осей  $u$  и  $v$  по формуле (2.24).

4. Находят численные значения главных центральных моментов инерции по формулам (2.11) или (2.25).

5. Для проверки правильности вычисления  $J_u$  и  $J_v$  используют равенства

$$J_{uv} = 0 \quad \text{и} \quad J_u + J_v = J_y + J_z \quad (2.26)$$

Примечание. Следует иметь в виду, что с помощью этих равенств можно проверить только правильность вычисления положения главных центральных

осей и численных значений главных моментов инерции. Соблюдение этих равенств не гарантирует правильности вычисления положения центра тяжести сечения, а также осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно центральных осей.

## 2.8. Радиусы инерции.

### Вычисление радиусов инерции круга

Иногда при расчетах бывает математически удобно представить момент инерции как произведение площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции

$$J_y = A \cdot i_y^2, \quad (2.27)$$

где

$i_y^2$  – радиус инерции относительно оси  $y$ .

Откуда следует, что

$$i_y = \pm \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad i_z = \pm \sqrt{\frac{J_z}{A}}. \quad (2.28)$$

Радиус инерции круга будет равен

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi d^4}{64 \cdot \pi d^2}} = \pm \frac{d}{4}. \quad (2.29)$$

Радиусы инерции измеряются единицами длины в первой степени – см, (в системе СИ – м).

## 2.9. Моменты сопротивления и их свойства

Определение. Моментом сопротивления плоской фигуры относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости фигуры, называется отношение осевого момента инерции относительно той же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_y = \frac{J_y}{|z_{max}|}; \quad W_z = \frac{J_z}{|y_{max}|}. \quad (2.30)$$

Здесь

$W_y$  и  $W_z$  – соответственно моменты сопротивления фигуры относительно осей  $y$  и  $z$ ;

$|z_{max}|$  и  $|y_{max}|$  – расстояния от осей до наиболее удаленных точек фигуры.

Определение. Полярным моментом сопротивления плоской фигуры относительно какого-либо центра (полюса), лежащего в плоскости фигуры, называется отношение полярного момента инерции плоской фигуры относительно того же центра к расстоянию от центра до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{|\rho_{max}|}, \quad (2.31)$$

где

$W_\rho$  – полярный момент сопротивления фигуры относительно центра  $O$ ;

$J_\rho$  – полярный момент инерции фигуры;

$|\rho_{max}|$  – расстояние от центра до наиболее удаленной точки фигуры.

Моменты сопротивления измеряются единицами длины в третьей степени –  $\text{см}^3$ , (в системе СИ –  $\text{м}^3$ ).

Сложные сечения, встречающиеся в различных конструкциях, часто включают элементы стандартных прокатных профилей стали (двутавры, швеллера, уголки и др.).

Расчет геометрических характеристик таких сечений сложен и трудоемок, поэтому в справочных таблицах для этих профилей (в сортаментах) приводятся не только их геометрические размеры, но и такие важные сведения, как положение центра тяжести, моменты инерции, моменты сопротивления и др.

Эти табличные данные намного облегчают вычисление геометрических характеристик сложных составных сечений.

## **2.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Геометрические характеристики плоских фигур»**

1. Какие оси называются центральными?
2. Что называется статическим моментом площади фигуры относительно некоторой оси?



3. Как определяется статический момент фигуры относительно некоторой оси, координаты центра тяжести которой известны?
4. Как вычисляется положение центра тяжести сложных фигур (для симметричных и несимметричных сечений)?
5. Дайте определение осевого и центробежного моментов инерции фигуры.
6. Приведите формулы моментов инерции простейших фигур относительно собственных главных центральных осей (прямоугольник, треугольник, круг).
7. Дайте определение полярного момента инерции.
8. Приведите формулы полярного момента инерции круга и кольца.
9. Как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей, если исходные оси – центральные?
10. Формулы для моментов инерции при повороте осей.
11. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
12. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
13. Как определяется положение главных центральных осей инерции для симметричных сечений?
14. Формула для определения положения главных осей инерции для несимметричных сечений?
15. Определение численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений.
16. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга и кольца.
17. Моменты сопротивления и их свойства.

## ТЕМА 3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ (ОСЕВОЕ) РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

### 3.1. Центральное (осевое) растяжение или сжатие.

#### Продольные силы и их определение

Рассмотрим растяжение бруса внешними силами  $F$ , приложенными к его концам. Очевидно, если воспользоваться методом сечений, во всех сечениях возникает продольная сила  $N$ , равная внешней нагрузке  $F$ . При растяжении продольная сила  $N$  направлена от сечения, а при сжатии – к сечению (рис. 3.1)

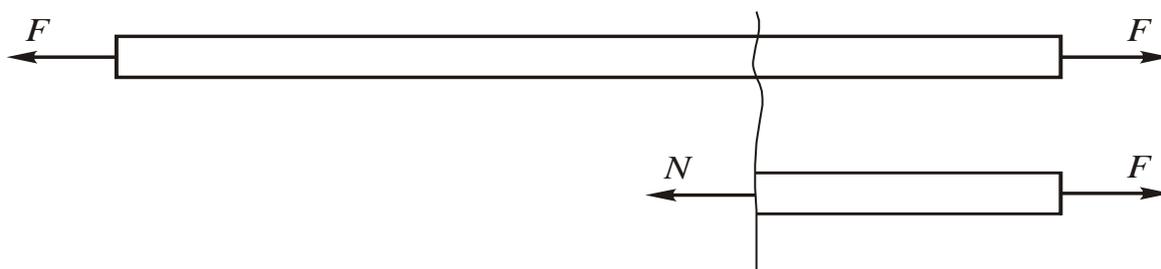


Рис. 3.1

Определение. Центральным растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только продольные силы  $N$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $Q$ ,  $M_{изг}$  и  $M_k$ ) равны нулю.

Как показывают эксперименты, при центральном растяжении или сжатии прямого бруса все его волокна, расположенные вдоль геометрической оси, получают одинаковое удлинение или укорочение.

Определение. Брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем.

Определение. Сечения бруса, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

В общем случае, когда стержень подвергается действию системы внешних сил, приложенных не только к его торцам, но и в промежуточных сечениях,

значение продольной силы  $N$  может быть разным по величине и знаку для различных поперечных сечений.

Определение. Продольная сила  $N$  в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на геометрическую ось стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения

$$N = \left( \sum F_{kx} \right)_{отсеч} . \quad (3.1)$$

Правило знаков. Если продольная сила  $N$  вызывает растяжение (удлинение) стержня относительно проведенного сечения, то она считается положительной, а если она вызывает сжатие (укорочение) – отрицательной.

### 3.2. Эпюры продольных сил. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния бруса (стержня) необходимо знать, как изменяются продольные силы  $N$  по его длине. Результат исследования закона распределения продольных сил по длине бруса можно представить в виде графика, называемого эпюрой продольных сил.

Определение. График, изображающий закон изменения  $N$  вдоль геометрической оси стержня, называется эпюрой продольных сил.

*Ординаты этой эпюры представляют собой численные значения продольных сил  $N$  в соответствующих сечениях стержня.*

На рис. 3.2 изображен стержень постоянного поперечного сечения, жестко заземленный в сечении  $A$  и нагруженный внешними силами  $F_1 = 3F$  и  $F_2 = 2F$ , направленными вдоль его геометрической оси.

Определим продольные силы, возникающие в его поперечных сечениях, и построим эпюру продольных сил.

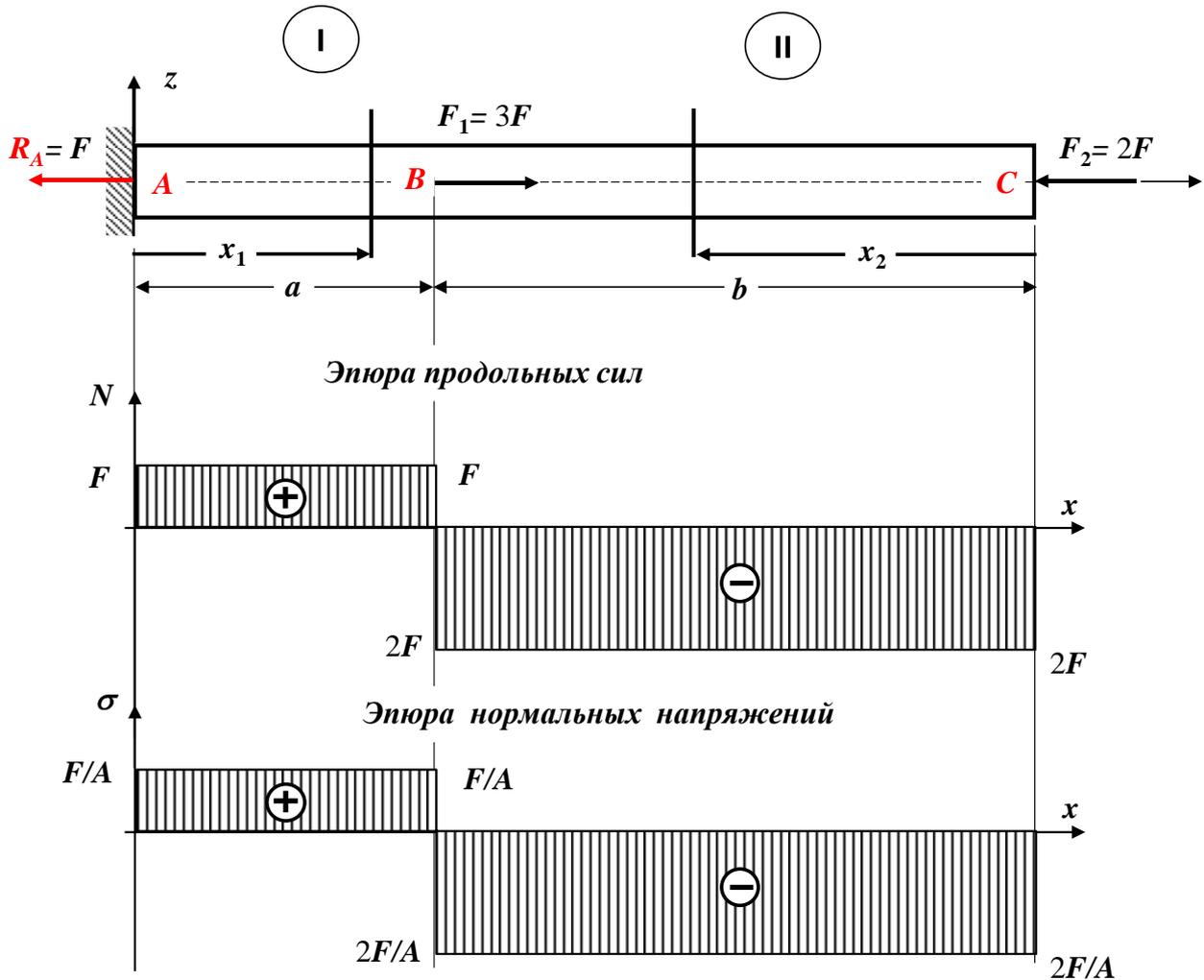


Рис. 3.2

Конец стержня зашпелен. Очевидно, что опорная реакция  $R_A$  будет направлена вдоль оси бруса.

1. Составляем уравнение равновесия бруса в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$ .

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю:

$$\sum F_x = 0; -F_2 + F_1 - R_A = 0 \rightarrow R_A = F_1 - F_2 = 3F - 2F = +F.$$

Следовательно,

$$R_A = +F.$$

Ниже будет показано, что для консольных стержней (брусев), в виде исключения, опорную реакцию можно не определять, а вести дальнейший расчет со стороны свободного конца стержня.

Численные значения опорной реакции, в случае необходимости, можно определить по эпюре  $N$ , используя правило «скачков».

1. Разбиваем стержень на участки.

Определение. Участком называется часть стержня, в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия (продольной силы) постоянен.

Границами участка являются:

- а) сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы;
- б) сечения, где начинают или заканчивают свое действие внешние распределенные нагрузки;
- в) сечения, где изменяются размеры или форма поперечного сечения;
- г) сечения, где изменяется материал стержня.

Таким образом, наш стержень имеет два участка ( $AB$  и  $BC$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 3.2).

Границами участков, в данном примере, являются сечения, в которых приложены внешние силы.

2. Строим эпюру  $N$  по участкам стержня.

Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает стержень на две части.

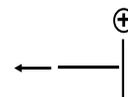
Выбираем ту часть стержня, на которую действует наименьшее число известных нагрузок.

Для определения внутреннего усилия в сечении совершенно безразлично, какую часть стержня рассматривать.

**I участок  $AB$ :**  $0 \leq x_1 \leq a$  (начало отсчета на левом конце стержня).

Определяем величину продольной силы  $N$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на геометрическую ось  $x$  бруса. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для продольной силы



$$N(x_1) = +R_A = +F.$$

Продольная сила  $N$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = +F \text{ (значение на левой границе участка);}$$

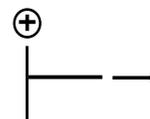
$$N(a) = +F \text{ (значение на правой границе участка).}$$

**II участок  $CB$ :**  $0 \leq x_2 \leq b$  (начало отсчета на правом конце стержня).

Определяем величину продольной силы  $N$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на геометрическую ось  $x$  бруса. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для продольной силы

$$N(x_2) = -F_2 = -2F.$$



Продольная сила  $N$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = -2F \text{ (значение на правой границе участка);}$$

$$N(b) = -2F \text{ (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям продольных сил  $N$  в характерных сечениях стержня строим эпюру (график) этого внутреннего усилия, как показано на рис. 3.2.

Эпюра внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси стержня.

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

3. Делаем проверки правильности построенной эпюры внутреннего силового фактора  $N$ .

*«Скачки» на эпюре  $N$  возможны только в тех сечениях стержня, где приложены сосредоточенные внешние силы. По величине этот «скачок» равен*

этой силе.

Таким образом, при построении эпюры  $N$  рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему стержня на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает стержень на две части.
4. Составляем выражение (уравнение), показывающее закон изменения продольной силы  $N$  в пределах рассматриваемого участка. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.
5. По этим выражениям вычисляем численные значения продольных сил в характерных сечениях участка (на его границах).
6. По полученным численным значениям продольных сил  $N$  строим эпюру (график) этого внутреннего усилия.
7. Делаем проверки правильности построенной эпюры внутреннего силового фактора  $N$ .
8. Отмечаем опасное сечение стержня, где действует максимальное (наибольшее) по абсолютной величине значение продольной силы  $N$ .

### **3.3. Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса**

При центральном растяжении или сжатии прямого стержня продольные волокна, расположенные на его поверхности вдоль геометрической оси, получают одинаковое удлинение или укорочение.

Естественно можно предположить, что и внутри стержня все продольные волокна испытывают такое же удлинение, а, следовательно, можно считать, что выполняется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), то есть поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его геометрической оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации.

Поскольку в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении

(сжатии) возникает только продольная сила, естественно предположить, что касательные составляющие напряжения будут отсутствовать, а полное напряжение в сечении будет равно нормальному напряжению.

Продольная сила  $N$ , возникающая в поперечных сечениях стержня, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения  $A$ , и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями интегральной зависимостью (1.7)

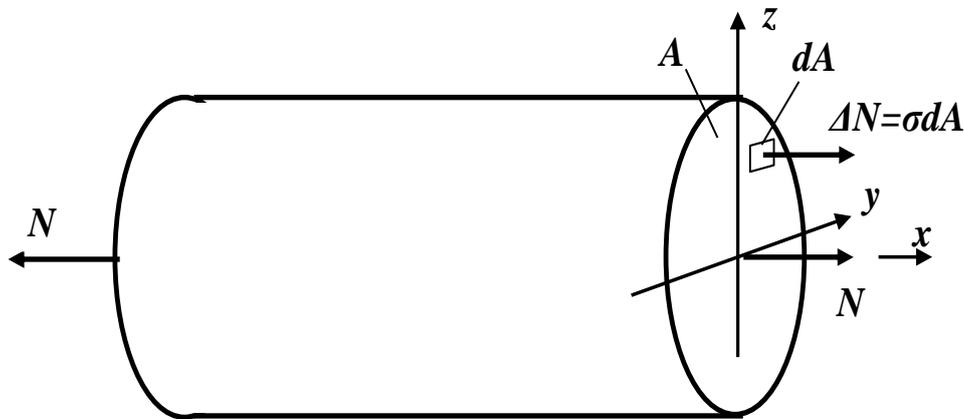
$$N = \int_A \sigma \cdot dA \quad (3.2)$$

Здесь

$\sigma$  – нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке  $dA$ ;

$A$  – площадь поперечного сечения бруса.

Произведение  $\sigma \cdot dA$  представляет собой элементарную внутреннюю силу  $\Delta N$ , приходящуюся на площадку  $dA$  (рис. 3.3)



*Рис. 3.3*

Представим мысленно стержень, состоящий из бесчисленного множества волокон, параллельных его оси.

В результате деформации стержня, в соответствии с гипотезой плоских сечений, два его любые поперечные сечения удаляются друг от друга на некоторую величину, на такую же величину удлиняется каждое волокно. А так как одинаковым удлинениям соответствуют одинаковые напряжения, то и

напряжения в поперечных сечениях всех волокон, следовательно, и во всех точках поперечного сечения стержня, будут равны между собой, то есть  $\sigma = \text{const}$ .

Это позволяет в выражении (3.2) вынести величину  $\sigma$  за знак интеграла

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A \quad (3.3)$$

Таким образом, нормальное напряжение в поперечном сечении стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3.4)$$

Знак напряжения зависит от знака продольной силы в рассматриваемом сечении стержня.

Правило знаков. В случае растяжения нормальные напряжения считаются положительными.

Как показывает опыт, нормальные напряжения распределены по всему сечению равномерно, если вблизи этого сечения нет точек приложения внешних сил или каких-то геометрических особенностей.

*Это предположение соответствует принципу Сен-Венана.*

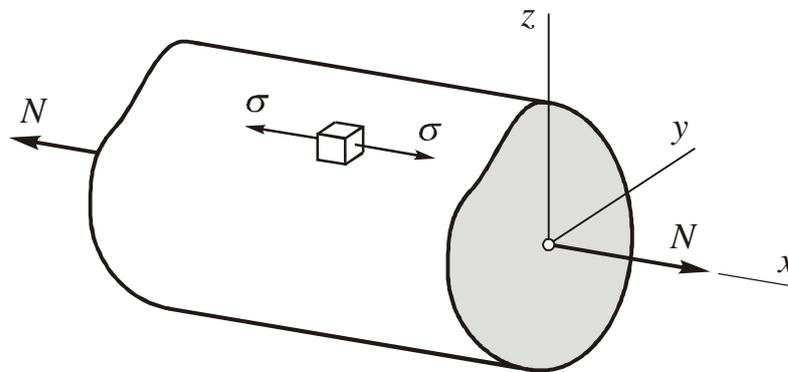
Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня по его длине строится *эюра нормальных напряжений*. Осью (базисной прямой) этой эюры является отрезок прямой, равный длине стержня и параллельный его оси.

Для стержня постоянного поперечного сечения эюра  $\sigma$  имеет такой же вид, как и эюра  $N$ , она отличается от неё лишь принятым масштабом (рис. 3.2).

Для стержня переменного поперечного сечения вид этих двух эюр различен. В частности, для ступенчатого стержня эюра  $\sigma$  имеет «скачки» не только в сечениях, где приложены сосредоточенные осевые силы (здесь имеет «скачки» эюра  $N$ ), но и в местах изменения размеров поперечных сечений.

Для стержня, растягиваемого только двумя силами, приложенными по его концам, напряжения постоянны не только по данному сечению, но и вдоль всего стержня. Такое напряженное состояние называют *одноосным* (однородным).

Если в окрестности любой точки стержня вырезать малый элементарный параллелепипед, одна из граней которого совпадает с поперечным сечением, то площадки этого параллелепипеда будут являться *главными площадками*, а напряжения на них – *главными напряжениями*, причем два из них будут иметь нулевую величину (рис. 3.4)



**Рис. 3.4**

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{3.5}$$

В ряде задач продольная сила не является постоянной по длине стержня, например, в случае растяжения стержня под действием собственного веса.

Напряженное состояние в таких стержнях не является однородным.

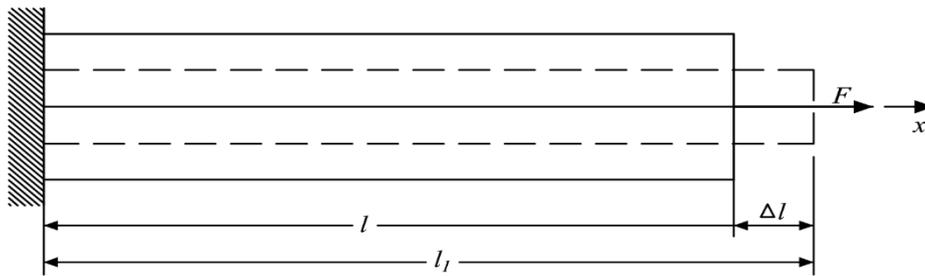
В ступенчатых стержнях напряженное состояние однородно только в пределах отдельных участков, границами которых являются сечения, в которых приложены внешние силы или изменяются поперечные размеры.

### 3.4. Продольные деформации

Вычисление деформаций и перемещений стержня необходимо для его расчета на жесткость.

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения длиной  $l$ , заделанный одним концом и растягиваемый внешней продольной силой  $F$  на

другом конце (рис. 3.5).



**Рис. 3.5**

Под действием силы  $F$  стержень удлиняется на некоторую величину  $\Delta l$  и его длина станет равной  $l_1 = l + \Delta l$ .

Величина  $\Delta l$  называется *полным или абсолютным удлинением (абсолютной продольной деформацией) стержня*.

Абсолютное удлинение, очевидно, зависит от первоначальной длины стержня. Поэтому более удобной мерой деформации стержня является абсолютное удлинение, отнесенное к его первоначальной длине

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.6)$$

Определение. Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине называется *относительной продольной деформацией* или *относительным удлинением*  $\varepsilon$ .

Считается напряженное состояние в стержне одноосным (однородным), поэтому деформация  $\varepsilon$  вдоль оси стержня остается одной и той же, равной своему среднему значению по длине  $l$ .

Относительное удлинение  $\varepsilon$  не имеет размерности, это отвлеченное число и часто выражается в процентах от первоначальной длины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\% \quad (3.7)$$

Деформацию удлинения считают положительной, а деформацию сжатия – отрицательной.

### 3.5. Закон Гука при центральном растяжении или сжатии

Нагрузки и деформации, возникающие в стержне, тесно связаны между собой. Чем больше величина внешней силы, растягивающей стержень, тем больше, при прочих равных условиях, его удлинение. Чем больше площадь поперечного сечения бруса, тем удлинение меньше. Опытным путём установлена прямая пропорциональная зависимость между величиной растягивающей силы и соответствующей ей упругой деформацией.

Эту зависимость впервые сформулировал английский ученый Роберт Гук.

Определение. При центральном растяжении (сжатии) нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению (закон Гука)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.8)$$

где

$E$  – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости первого рода или модулем Юнга.

Модуль упругости первого рода или модуль Юнга определяется экспериментально, на основе опытов на растяжение специальных образцов из различных материалов: для стали  $E = 200$  ГПа; для дюралюминия  $E = 72$  ГПа; для меди  $E = 120$  ГПа и т. д.

Закон Гука соблюдается в случае так называемых малых деформаций. Для конечных деформаций связь с напряжениями перестает быть линейной.

При решении многих задач закону Гука удобнее придать несколько иной вид, получаемый подстановкой в (3.8) формул (3.4) и (3.6)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (3.9)$$

*По этой формуле можно вычислять величину абсолютного удлинения стержня в пределах рассматриваемого участка.*

Если напряженное состояние по длине стержня не является однородным, то общее удлинение может быть найдено как интегральная сумма удлинений по бесконечно малым участкам длиной  $dx$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dx. \quad (3.10)$$

Последней формулой пользуются в тех случаях, когда какие-либо из величин  $N$ ,  $E$ ,  $A$  непостоянны по длине стержня.

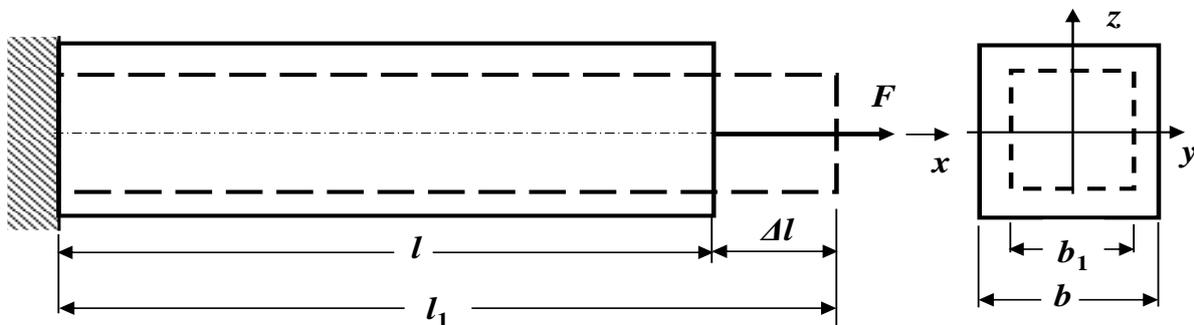
Определение. Произведение  $E \cdot A$  (модуля Юнга на площадь поперечного сечения) называют жесткостью стержня при растяжении.

Чем больше жесткость, тем менее податливым является стержень.

### 3.6. Поперечные деформации

Опытом установлено, что даже при весьма малых деформациях стержня в продольном направлении его поперечные размеры изменяются. При растяжении тело удлиняется и становится тоньше, а при сжатии укорачивается и становится толще. Это изменение называется поперечной деформацией стержня.

Если обозначить поперечный размер стержня до деформации  $b$  и тот же размер после деформации  $b_1$  (рис. 3.6) то абсолютная поперечная деформация при растяжении стержня будет равна



*Рис. 3.6*

$$\Delta b = b - b_1 \quad (3.11)$$

а его относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{b - b_1}{b} = \frac{\Delta b}{b}$$

или

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} \cdot 100\% \quad (3.12)$$

Опыты показывают, что в пределах применимости закона Гука отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной

деформации для данного материала есть величина постоянная и равная

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| \quad (3.13)$$

Постоянная величина  $\mu$ , зависящая от свойств материала, называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона*.

Для различных материалов

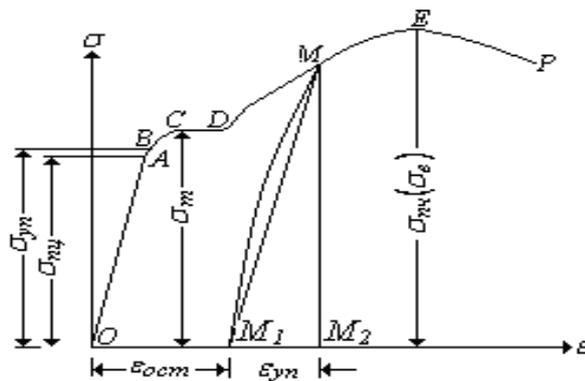
$$0 \leq \mu \leq 0,5$$

### 3.7. Основные характеристики механических свойств материалов и их опытное изучение

Механические характеристики определяются путем испытания стандартных образцов. Образцы испытываются на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, срез. Основным видом испытаний стали является растяжение стандартных круглых или плоских образцов, для которых строятся диаграммы растяжения в координатах сила – абсолютное удлинение  $/F = f(\Delta)/$ .

Для определения обобщенных механических характеристик материала строят диаграммы напряжения в координатах напряжение – деформация  $/\sigma = f(\varepsilon)/$ .

Рассмотрим диаграмму напряжения малоуглеродистой стали Ст.3, обладающей высокими пластическими свойствами и широко применяемой в строительстве (рис. 3.7).



**Рис. 3.7**

На отрезке **OA** зависимость между напряжениями и деформациями является линейной.

Определение. Напряжение  $\sigma_{ли}$ , соответствующее точке **A** на диаграмме напряжения, называется пределом пропорциональности.

На отрезке **AB** линейная зависимость нарушается, но при разгрузке образца возникшие деформации исчезают.

Определение. Напряжение  $\sigma_{уп}$ , соответствующее точке **B** на диаграмме напряжения, называется пределом упругости.

Практически горизонтальный отрезок **CD** называется площадкой текучести.

Определение. Напряжение  $\sigma_{т}$ , соответствующее точке **D** на диаграмме напряжения, называется пределом текучести.

При напряжениях, равных пределу текучести, в малоуглеродистых сталях развиваются пластические деформации, связанные с необратимыми деформациями сдвига между кристаллами феррита.

После развития определенных пластических деформаций и перестройки кристаллической решетки стали несущая способность стержня увеличивается – рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, происходит упрочнение стали. Участок **DE** на диаграмме напряжения называется зоной упрочнения. При напряжениях, соответствующих наивысшей точке **E** на диаграмме напряжения, в определенном участке образца появляется значительное уменьшение размеров поперечного сечения – образуется, так называемая, *шейка*.

Определение. Напряжение  $\sigma_{пч} = \sigma_{в}$ , соответствующее точке **E** диаграммы напряжения, называется пределом прочности или временным сопротивлением.

Разрушение образца наступает вскоре после образования шейки.

Рассмотренная диаграмма напряжения называется *условной*, так как при ее построении не учитывается уменьшение площади поперечного сечения при растяжении образца.

*Рассмотренные выше напряжения – предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и предел прочности (временное сопротивление)*

являются основными механическими характеристиками прочности и упругости материала.

Если довести нагружение образца до точки, лежащей выше предела упругости (точка  $M$ ), а затем снять нагрузку, то диаграмма разгрузки пойдет по прямой  $MM_1$ , параллельной  $OA$ , а отрезок  $OM_1$  будет соответствовать остаточной деформации  $\varepsilon_{ост}$ . Отрезок  $M_1M_2$  характеризует упругую деформацию  $\varepsilon_{уп}$  при нагружении образца до точки  $M$ . При повторном нагружении образца от точки  $M_1$  диаграмма нагружения следует по кривой, практически совпадающей с прямой  $MM_1$ . Таким образом, при повторном нагружении как бы повышается предел пропорциональности стали, что связано с изменением микроструктуры в ее кристаллической решетке. При этом площадка текучести исчезает, материал становится более хрупким.

*Изменения свойств стали, возникающие при разгрузке и повторном нагружении, называются наклепом.*

Участок диаграммы  $MM_1M$  называется *петлей гистерезиса*.

Использование реальных диаграмм приводит к большим математическим трудностям. Существуют различные способы аппроксимации этих диаграмм с помощью более простых графиков. Так, например, для стали ВСт. 3, у которой  $\sigma_{пл}$ ,  $\sigma_{уп}$ ,  $\sigma_{т}$  имеют близкие значения, принимается диаграмма в виде двух прямых, считая, что все три указанных напряжения соответствуют одной точке.

*Такая диаграмма называется диаграммой Прандтля.*

### **3.8. Расчет на прочность при центральном (осевом) растяжении или сжатии. Метод допускаемых напряжений**

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение её прочности в условиях эксплуатации.

Зная механические характеристики материалов, можно перейти к оценке прочности и соответствующим расчетам при центральном растяжении и сжатии стержней.

Проектирование начинается с выбора материала. При этом учитываются

условия работы сооружения, технология изготовления и монтажа конструкций, а также экономические соображения.

Применяемые в строительстве материалы можно условно разделить на *пластичные и хрупкие*.

Хрупкие материалы разрушаются при очень малых деформациях, а пластичные получают значительные пластические деформации.

Пластичные материалы почти одинаково работают на растяжение и сжатие, а хрупкие, как правило, плохо работают на растяжение и хорошо сопротивляются сжатию.

Механические испытания материалов дают предельные значения напряжений, достижение которых в элементах конструкций вызывает или разрушение или появление недопустимо больших деформаций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в её элементах, были ниже предельных напряжений (предел прочности, предел текучести).

*В настоящее время применяются два метода расчета на прочность: по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям.*

Оба метода преследуют одну цель – обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Наиболее распространенным расчетом на прочность при центральном растяжении (сжатии) является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому наибольшее нормальное напряжение, возникающее в материале, не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы. Эта величина называется *допускаемым напряжением*, то есть

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (3.14)$$

Определение. Допускаемым напряжением называется наибольшее напряжение, при котором обеспечивается прочность и долговечность проектируемого элемента конструкции.

Допускаемое напряжение обозначается теми же буквами, что и

действующие напряжения, но заключаются в квадратные скобки  $[\sigma]$  или  $[\tau]$ .

Допускаемое напряжение составляет некоторую долю предельных, то есть в качестве допускаемого напряжения выбирают величину

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n} \quad (3.15)$$

Определение. Число  $n$ , показывающее во сколько раз допускаемое напряжение меньше предельного, называется коэффициентом запаса прочности.

Величина  $n$  всегда больше единицы. В машиностроении запасы прочности сравнительно невелики:  $n = 1,5 \div 2$ . В строительстве они существенно выше:  $n = 2 \div 5$ , что связано с большей опасностью возможных последствий при аварии.

В случае хрупкого материала за исходное предельное напряжение берется предел прочности. В этом случае допускаемое напряжение равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пч}}{n} \quad (3.16)$$

В случае пластичного материала за исходное предельное напряжение берется предел текучести, то есть

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} \quad (3.17)$$

Необходимость введения коэффициента запаса прочности вызывается следующими обстоятельствами:

- разбросом в определяемых из опытов величинах предела текучести  $\sigma_m$  и предела прочности  $\sigma_{пч}$  для данного материала;
- неточностью методов расчета;
- неточностью изготовления деталей;
- отклонением расчетных схем от допущений, принятых при выводе расчетных формул и т.д.

На величину коэффициента запаса прочности влияет ряд факторов:

- качество и степень однородности материала. Чем однороднее материал, тем меньше можно брать запас прочности ( $n_{ст} = 1,5 \div 3$ ;  $n_{бетона} = 3$ ;  $n_{дерево} = 3 \div 5$  и т.д.);
- долговечность и значимость сооружения;

– уровень развития техники и т.д.

Величины допускаемых напряжений устанавливаются СП (Сводом правил).

Максимальное нормальное напряжение в стержне при центральном растяжении (сжатии) возникает в сечении, где продольная сила достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором продольная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение  $N_{max}$ , называется опасным сечением стержня по нормальным напряжениям.

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения в стержне при центральном растяжении (сжатии) будут равны

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \quad (3.18)$$

Следовательно, условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma] \quad (3.19)$$

В этой формуле

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N_{max}$  – максимальная продольная сила в стержне;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

При расчете элементов конструкции, работающих на центральное растяжение или сжатие, встречаются задачи трех типов:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют продольную силу  $N$  и из условия прочности находят величину требуемой площади поперечного сечения

$$A_{треб} \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]} \quad (3.20)$$

б). Определение допускаемой нагрузки. Решение второй задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение

нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям). По известной площади  $A$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A. \quad (3.21)$$

По найденному значению  $[N]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в). Проверочный расчет. По известным значениям  $N$ ,  $A$ ,  $[\sigma]$  проверяют выполнение условия прочности (3.19).

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma].$$

### 3.9. Понятие о расчете по предельным состояниям.

#### Расчет по I-й группе предельных состояний

При помощи одного коэффициента запаса прочности трудно учесть все факторы, которые для различных сооружений могут проявляться в разных комбинациях. С целью более точного учета влияния различных факторов на величину запаса прочности советские ученые предложили в 1955 году новый метод расчета по предельным состояниям.

Определение. Предельным называют такое состояние конструкции, при котором она перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям.

Нормами установлены три вида предельных состояний:

– Первое предельное состояние, определяемое несущей способностью (прочностью или устойчивостью). На это предельное состояние рассчитываются все конструкции.

– Второе предельное состояние, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

– Третье предельное состояние, определяемое образованием или раскрытием трещин (относится, в основном, к железобетонным конструкциям).

В сопротивлении материалов рассматривается, главным образом, первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе.

При расчете по предельным состояниям запас прочности определяется методом частных коэффициентов.

В этом случае коэффициент запаса находится как произведение трех коэффициентов, учитывающих влияние различных факторов: перегрузок (случайные отклонения от нормативных нагрузок), неоднородности материала и условий работы.

1. Коэффициент перегрузки  $n$  учитывает неточности в определении нагрузки. Фактическая нагрузка может отклоняться от нормативной (устанавливается СП /Сводом правил/) в неблагоприятную сторону. Для учета такого отклонения и вводят коэффициент перегрузки, который может быть  $n > 1$ , а в отдельных случаях  $n < 1$ . Нормативную нагрузку умножают на этот коэффициент и расчет производят на действие расчетной нагрузки

$$N_{расч} = N_1 \cdot n_1 + N_2 \cdot n_2 + \dots + N_n \cdot n_n, \quad (3.22)$$

где

$N_1, N_2, N_n$  – нормативные усилия от различных видов нагрузки.

$n_1, n_2, \dots, n_n$  – соответствующие этим нагрузкам коэффициенты перегрузки.

Полные данные о величинах коэффициентов перегрузки приведены в СП (Свод правил).

2. Коэффициент однородности  $k$  вводят для учета возможности снижения прочности вследствие неоднородности материала, из которого изготовлена конструкция. Чем однороднее материал, тем ближе к единице коэффициент  $k$ .

3. Коэффициент условий работы  $m$  учитывает специфические особенности работы материала элементов конструкции и их соединений, например, наличие агрессивной среды, влажности, резких смен температуры и т.д. При неблагоприятных условиях работы принимают  $m < 1$ , при нормальных –  $m = 1$ , при особо благоприятных условиях работы в отдельных случаях  $m > 1$ .

При поставках партий материала, например, стали, бетона, цемента, испытывают образцы, изготовленные из этого материала. Для каждого

материала установлено нормативное сопротивление  $R^H$ , то есть напряжение, которое как минимум должно быть обеспечено при испытании образцов данной марки.

Для пластичных материалов за нормативное сопротивление принимают наименьшее значение предела текучести  $\sigma_m$ , а для хрупких – предела прочности  $\sigma_{пч}$ .

При расчете на прочность вводят расчетное сопротивление  $R$  данного материала, определяемое как произведение нормативного сопротивления  $R^H$  на коэффициент однородности  $k$  и условий работы  $m$

$$R = R^H \cdot k \cdot m \quad (3.23)$$

Следовательно, условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по методу предельных состояний имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N_{расч}}{A} \leq R \quad (3.24)$$

В этой формуле

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N_{расч}$  – расчетная продольная сила в стержне;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$R$  – расчетное сопротивление.

Три вида расчета на прочность при центральном растяжении (сжатии) по методу предельных состояний:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют продольную силу  $N$  и из условия прочности находят величину требуемой площади поперечного сечения

$$A^{треб} \geq \frac{N_{расч}}{R} \quad (3.25)$$

б). Определение допустимой нагрузки. Решение этой задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны

расчетному сопротивлению  $R$ ). По известной площади  $A$  и расчетному сопротивлению  $R$  определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[N]_{\text{расч}} \leq R \cdot A. \quad (3.26)$$

По найденному значению  $[N]_{\text{расч}}$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в). Проверочный расчет. По известным значениям  $N$ ,  $A$ ,  $R$  проверяют выполнение условия прочности (3.24).

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{расч}}}{A} \leq R$$

### 3.10. Учет собственного веса при центральном растяжении или сжатии

Во многих инженерных конструкциях собственный вес – это одна из основных нагрузок.

Например, при расчете канатов шахтных подъемников, штанг бурильных установок, устоев мостов, стен зданий, плотин собственный вес необходимо учитывать.

Собственный вес стержня является нагрузкой, распределенной вдоль его оси, вызывающей либо растяжение, либо сжатие. Распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью

$$q(x) = \gamma \cdot A(x).$$

В этой формуле

$q(x)$  – интенсивность распределенной нагрузки;

$\gamma$  – объемный вес материала стержня;

$A(x)$  – площадь поперечного сечения стержня.

Если

$$A(x) = A = \text{const},$$

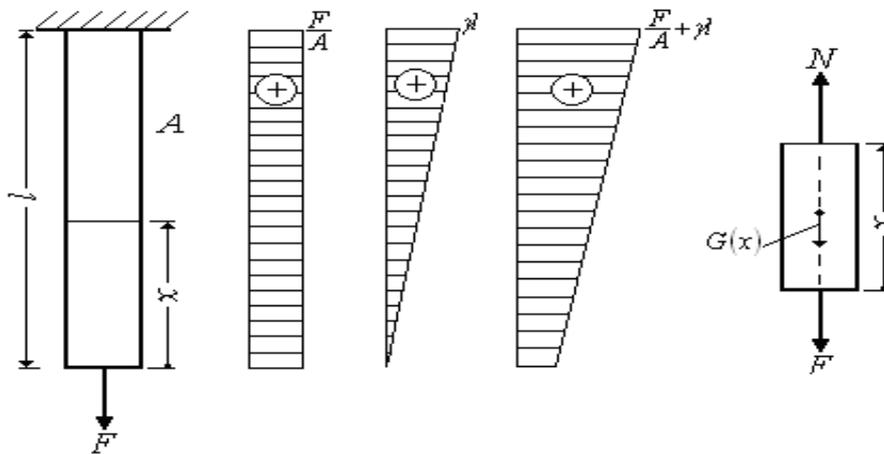
то

$$q(x) = \gamma \cdot A(x) = \text{const},$$

то есть интенсивность распределенной нагрузки изменяется по закону прямой, параллельной оси стержня.

Рассмотрим прямой стержень постоянного поперечного сечения большой длины, закрепленный верхним концом и нагруженный на свободном конце силой  $F$ .

Определим закон изменения напряжений в поперечных сечениях этого стержня, а также перемещения сечений по длине стержня, учитывая влияние его собственного веса (рис. 3.8).



**Рис. 3.8**

Напряжения в стержне при его центральном растяжении (сжатии) определяются по формуле (3.4)

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Следовательно, напряжения в поперечных сечениях стержня при его центральном растяжении (сжатии) от совместного действия внешней нагрузки  $F$  и собственного веса  $G_x$  можно определить по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F + G_x}{A} = \frac{F}{A} + \frac{G_x}{A}, \quad (3.27)$$

где

$G_x = V_x \cdot \gamma = A \cdot x \cdot \gamma$  – составляющая продольной силы  $N$  от собственного веса стержня;

$V_x$  – объем рассматриваемой (отсеченной) части стержня.

Тогда

$$\sigma = \frac{F}{A} + \gamma \cdot x \quad (3.28)$$

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \quad (3.29)$$

Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \leq [\sigma] \quad (3.30)$$

Откуда

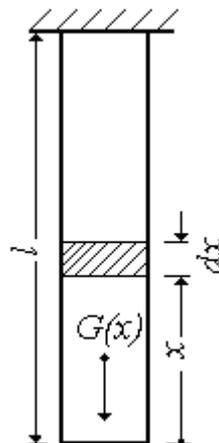
$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma \cdot l} \quad (3.31)$$

Определим закон изменения перемещений поперечных сечений стержня по его длине, *учитывая влияние только собственного веса*.

Перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяются по формуле (3.9)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

Выделим в стержне на расстоянии  $x$  бесконечно малый элемент  $dx$  (рис. 3.9)



**Рис. 3.9**

В этом случае продольная сила  $N$  от собственного веса стержня будет равна

$$N = G_{(x)} = \gamma \cdot A \cdot x \quad (3.32)$$

Следовательно, перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) с учетом собственного веса определяются по формуле

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \rightarrow d(\Delta l_{(G)}) = \frac{G_x \cdot dx}{E \cdot A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot x \cdot dx}{E \cdot A} \quad (3.33)$$

Проинтегрировав это выражение по длине стержня, получим

$$\Delta l_{(G)} = \frac{\gamma}{E} \int_0^l x \cdot dx = \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E} = \frac{G \cdot l}{2E \cdot A} \quad (3.34)$$

Таким образом, перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) с учетом только собственного веса определяются по формуле

$$\Delta l_{(G)} = \frac{G \cdot l}{2E \cdot A}, \quad (3.35)$$

где

$G = \gamma \cdot A \cdot l$  – собственный вес всего стержня.

Перемещения этого стержня при его центральном растяжении (сжатии) от внешней силы  $F$ , приложенной на его конце, и равной по величине весу стержня  $G$ , то есть  $F = G$ , будет равно (3.9)

$$\Delta l_{(F)} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{G \cdot l}{E \cdot A} \quad (3.36)$$

Сравнивая формулы (3.35) и (3.36), замечаем, что абсолютное удлинение стержня от своего собственного веса будет в два раза меньше удлинения стержня от силы, приложенной на его конце и равной по величине весу стержня.

### 3.11. Брус равного сопротивления растяжению – сжатию.

#### Ступенчато-призматические стержни (брусья)

При расчете на прочность стержней постоянного сечения с учетом собственного веса во всех сечениях, кроме опасного, напряжения будут ниже допустимого, что приводит к перерасходу материала. Однако, можно проектировать стержень такого переменного сечения, у которого во всех поперечных сечениях напряжения будут одинаковыми и равными допустимому напряжению. Такой стержень называется стержнем (брусом) *равного сопротивления растяжению или сжатию*.

Установим закон изменения площади поперечного сечения по длине такого стержня (рис. 3.10).

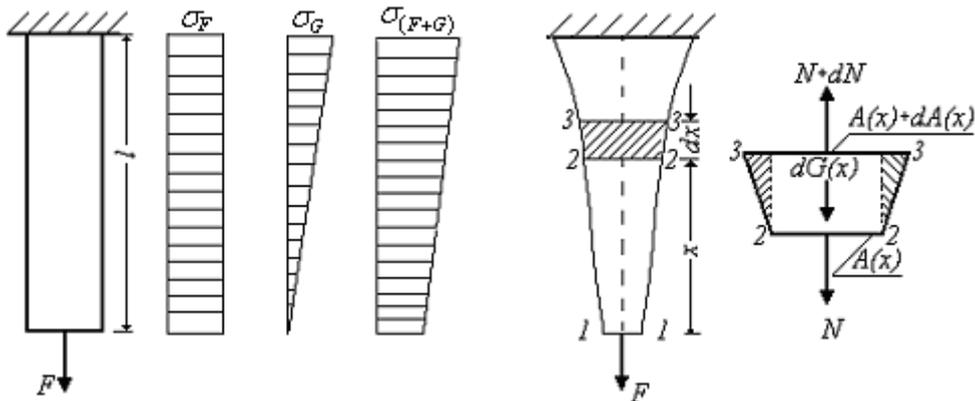


Рис. 3.10

В произвольном сечении стержня на расстоянии  $x$  выделим бесконечно малый элемент  $dx$ . Определим напряжения в различных сечениях:

Сечение 1 - 1:

$$\sigma_{1-1} = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0} = \sigma$$

Сечение 2 - 2:

$$\sigma_{2-2} = \frac{N}{A_x} = \frac{F + G_x}{A_x} = \sigma \quad (3.37)$$

Сечение 3 - 3:

$$\sigma_{3-3} = \frac{N + dN}{A_x + dA_x} = \sigma,$$

где

$$dN = dG_x = \gamma \cdot A_x \cdot dx.$$

Разделив числитель и знаменатель на  $A_x$  получим

$$\left( \frac{N}{A} + \frac{\gamma A_x dx}{A_x} \right) / \left( \frac{A_x}{A_x} + \frac{dA_x}{A_x} \right) = \sigma \rightarrow \sigma + \gamma \cdot dx = \sigma + \sigma \cdot \frac{dA_x}{A_x} \rightarrow \frac{\gamma}{\sigma} \cdot dx = \frac{dA_x}{A_x}$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение с разделенными переменными, получим

$$\frac{\gamma}{\sigma} \cdot x = \ln A_x + C \quad (3.38)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из условия, что при  $x = 0 \rightarrow$

$$A_x = A_0.$$

Следовательно,

$$0 = \ln A_0 + C \rightarrow C = -\ln A_0. \rightarrow \frac{\gamma}{\sigma} \cdot x = \ln A_x - \ln A_0 = \ln \frac{A_x}{A_0}. \rightarrow$$

$$e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma}} = \frac{A_x}{A_0}. \rightarrow A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma}} \quad (3.39)$$

Если

$$\sigma = [\sigma],$$

то

$$A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{[\sigma]}} \quad (3.40)$$

Изготовить брус, имеющий такую сложную форму, затруднительно, поэтому на практике изготавливают брус ступенчато-призматическим таким образом, чтобы в пределах каждого участка верхнее (или нижнее) сечение работало при напряжениях равных  $[\sigma]$ .

Имеем (3.29)

$$A_1 \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma \cdot l_1}, \text{ а } G_1 = \gamma \cdot A_1 \cdot l_1.$$

Следовательно,

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} + \frac{G_1}{A_2} + \gamma \cdot l_2 \leq [\sigma] \rightarrow \frac{F}{A_2} + \frac{\gamma \cdot A_1 \cdot l_1}{A_2} + \gamma \cdot l_2 \leq [\sigma]$$

Отсюда

$$A_2 \geq \frac{F \cdot [\sigma]}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2)}$$

Таким образом

$$A_n \geq \frac{F \cdot [\sigma^{n-1}]}{([\sigma] - \gamma \cdot l_1) \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_2) \cdot \dots \cdot ([\sigma] - \gamma \cdot l_n)} \quad (3.41)$$

### 3.12. Статически неопределимые задачи при растяжении или сжатии

В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число

наложенных связей (число опорных реакций) больше числа уравнений равновесия (статики). В этих системах, используя только уравнения равновесия, невозможно определить ни реакции опор, ни внутренние усилия, возникающие в элементах конструкций. Такие системы называются статически неопределимыми.

Определение. Статически неопределимые системы – это упругие стержневые системы, у которых число неизвестных опорных реакций (внутренних усилий) превышает число независимых уравнений равновесия (уравнений статики), возможных для этой системы.

Определение. Степень статической определимости (неопределимости) простых стержневых систем обычно определяется как разность между количеством неизвестных опорных реакций (внутренних усилий) и количеством уравнений равновесия (уравнений статики), которые можно составить для данной системы.

Для определения всех неизвестных опорных реакций (внутренних усилий) статически неопределимой системы составляют дополнительные уравнения.

Эти необходимые для решения рассматриваемой задачи дополнительные уравнения можно составить, изучая деформации, испытываемые системой.

Всякая конструкция деформируется так, что не происходит разрывов стержней и разъединения их друг от друга. В этом и заключается совместность деформаций элементов системы.

Оказывается, что всегда можно найти столько дополнительных уравнений, сколько необходимо, чтобы полное число уравнений вместе с уравнениями статики равнялось числу неизвестных опорных реакций (внутренних усилий).

Эти дополнительные уравнения составляются на основании общего принципа – они должны выражать условия совместности деформаций системы, поэтому называются *уравнениями совместности деформаций (уравнениями перемещений)*.

Количество дополнительных уравнений совместности деформаций, необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно быть равно степени статической неопределимости системы.

Решение системы уравнений равновесия и совместности деформаций позволяет определить все неизвестные опорные реакции (внутренние усилия).

Этот этап решения задачи называется раскрытием статической неопределимости системы.

*Раскрыть статическую неопределимость системы - это значит определить численные значения всех опорных реакций (внутренних усилий).*

### **3.13. Порядок решения статически неопределимых задач**

Статически неопределимые конструкции рассчитываются, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи.

При этом придерживаются следующего порядка:

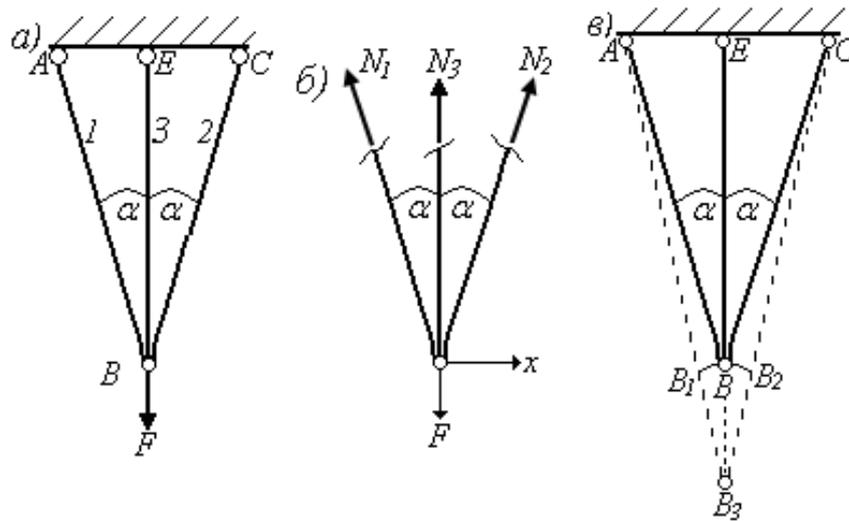
1. *Статическая сторона задачи.* Определяется степень статической неопределимости системы. Составляются уравнения равновесия, содержащие неизвестные опорные реакции (внутренние усилия) системы.

2. *Геометрическая сторона задачи.* Рассматриваются деформации, испытываемые системой, и записываются уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений).

3. *Физическая сторона задачи.* На основании закона Гука /Формула (3.9) для определения перемещений стержня при его центральном растяжении (сжатии), которая получена на основе закона Гука/, уравнения совместности деформаций выражаются через неизвестные опорные реакции (внутренние усилия).

4. *Синтез уравнений.* Решая совместно систему уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи, определяются численные значения всех опорных реакций (внутренних усилий).

Рассмотрим шарнирно–стержневую систему, в которой груз  $F$  подвешен на трех стержнях (рис. 3.11,а)



**Рис. 3.11**

В этом случае число неизвестных усилий, действующих в поперечных сечениях стержней, равно трем ( $N_1, N_2, N_3$ ), а уравнений равновесия (статики) для их определения – два ( $\Sigma F_x = 0$  и  $\Sigma F_z = 0$ ).

Таким образом, узел находится в равновесии под действием 4-х сил, три из которых неизвестны (рис. 3.11,б).

I. *Статическая сторона задачи.*

Рассматриваемая система один раз статически неопределимая

$$n = 3 - 2 = 1,$$

где

$n$  – степень статической неопределимости системы;

3 – число неизвестных усилий ( $N_1, N_2, N_3$ );

2 – число уравнений равновесия (статики) для их определения.

Составим уравнения равновесия для рассматриваемой системы:

- Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: -N_1 \cdot \sin \alpha + N_2 \cdot \sin \alpha = 0; \rightarrow N_1 = N_2 \tag{3.42}$$

- Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю

$$\Sigma F_z = 0: N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \alpha + N_3 - F = 0$$

Учитывая (3.42), получим

$$2N_1 \cdot \cos \alpha + N_3 = F \quad (3.43)$$

### II. Геометрическая сторона задачи.

Рассмотрим деформацию системы. Под воздействием силы  $F$  во всех трех стержнях возникает растяжение. Растягивающие продольные усилия в стержнях должны быть такими, чтобы удлинения крайних стержней были согласованы с удлинением среднего.

Согласованность деформаций состоит в том, что до и после деформации нижние концы всех стержней должны быть в одном узле. Учитывая, что деформации стержней малы по сравнению с их линейными размерами, можно считать, что углы, составляемые крайними стержнями со средним, после деформации практически такие же, как и до деформации.

Из рисунка (рис. 3.11,в) находим, что отрезок  $BB_3$  равен

$$BB_3 = \Delta l_3.$$

Для определения удлинения первого стержня, отложим на его новой длине  $AB_3$ , первоначальную длину, равную  $AB_1$ . В силу малости перемещений дугу  $BB_1$  заменяем перпендикуляром, опущенным из точки  $B$  на линию  $AB_3$ . Тогда

$$\Delta l_1 = AB_3 - AB_1 = B_1B_3.$$

Из прямоугольного треугольника  $BB_1B_3$  установим связь между удлинениями стержней

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha$$

Следовательно, уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha \quad (3.44)$$

### III. Физическая сторона задачи.

Перемещения стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяются по формуле (3.9)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

Принимая жесткости всех стержней одинаковыми, находим удлинения стержней

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = (N_1 l_1)/(EA); \quad \Delta l_3 = (N_3 l_3)/(EA) \quad (3.45)$$

Если учесть выражения (3.45) для удлинений стержней при их растяжении, то уравнение совместности деформаций (3.44) можно записать в виде

$$(N_1 l_1)/(EA) = (N_3 l_3 \cos \alpha)/(EA)$$

Учитывая, что

$$l_3 = l_1 \cdot \cos \alpha ,$$

получим

$$(N_1)/(EA) = (N_3 \cos^2 \alpha)/(EA). \rightarrow N_1 = N_3 \cos^2 \alpha. \quad (3.46)$$

#### IV. Синтез уравнений.

Решая совместно систему уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи, определяются численные значения всех опорных реакций (внутренних усилий).

Мы получили систему трех уравнений (3.42, 3.43 и 3.46), в которые вошли 3 неизвестные  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . Решая эту систему уравнений, определим численные значения внутренних усилий  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ .

Из уравнения (3.43) имеем

$$N_1 = (F - N_3)/2 \cos \alpha \quad (3.47)$$

Подставляя в полученное выражение (3.47) уравнение (3.46), определим численное значение внутреннего усилия  $N_3$

$$N_3 = F / (1 + 2 \cos^3 \alpha) \quad (3.48)$$

Подставив в выражение (3.46) полученное значение  $N_3$ (3.48), определим численные значения внутренних усилий  $N_1$  и  $N_2$

$$N_1 = N_2 = (F \cos^2 \alpha) / (1 + 2 \cos^3 \alpha) \quad (3.49)$$

### 3.14. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Центральное растяжение или сжатие прямого бруса»

1. Какой вид деформации называется центральным растяжением (сжатием)?



2. В чем заключается метод сечений?
3. Как определяется численное значение продольной силы?
4. Что называется эпюрой продольных сил?
5. План построения эпюры продольных сил.
6. По какой формуле определяются нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) в произвольной точке поперечного сечения стержня?
7. Что называется коэффициентом поперечной деформации?
8. Сформулируйте закон Гука. Как он выражается математически?
9. По какой формуле определяется величина продольной деформации участка стержня?
10. Что характеризует модуль упругости первого рода (модуль Юнга) и какая его размерность?
11. От чего зависит численное значение модуля упругости первого рода (модуля Юнга)?
12. Что называется жесткостью стержня при центральном растяжении и сжатии?
13. Как строятся диаграммы растяжения и напряжения?
14. Перечислите характерные точки диаграмм растяжения и напряжения.
15. В чем разница между пластичными и хрупкими материалами?
16. Перечислите основные механические характеристики материалов.
17. Дайте определение допускаемому напряжению и коэффициенту запаса прочности.
18. Как определяется величина допускаемого напряжения для пластичных и хрупких материалов?
19. Какие факторы влияют на величину допускаемого напряжения и коэффициента запаса прочности?

20. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений?
21. Какие три типа задач, вытекают из условия прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений?
22. Какое состояние конструкции называется предельным?
23. Сколько предельных состояний Вы знаете?
24. Что учитывает коэффициент перегрузки?
25. Как определяется расчетная нагрузка?
26. Что учитывает коэффициент однородности?
27. Что учитывает коэффициент условий работы?
28. Как определяется величина нормативного сопротивления?
29. Как определяется величина расчетного сопротивления?
30. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу предельных состояний.
31. Три вида расчета на прочность по методу предельных состояний?
32. Как учитывается собственный вес при центральном растяжении (сжатии)?
33. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений с учетом собственного веса?
34. По какой формуле определяется величина продольной деформации участка стержня с учетом собственного веса?
35. Какой брус называется бруском равного сопротивления?
36. Какие системы называются статически неопределимыми?
37. Как определяется степень статической неопределимости системы?
38. План решения статически неопределимых задач?

## ТЕМА 4. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛ

### 4.1. Виды напряженного состояния

Взаимодействие между частями элемента конструкции можно охарактеризовать величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке элемента. Их значения зависят от ориентации сечения, проведенного через данную точку.

Определение. Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующим по всевозможным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется напряженным состоянием в этой точке.

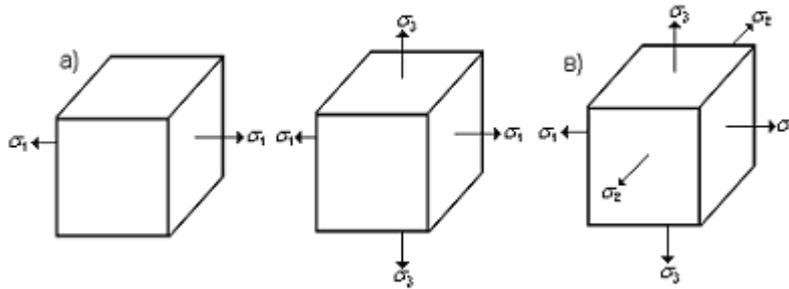
Исследуя напряженное состояние в рассматриваемой точке тела, в окрестности ее выделяют элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Полные напряжения на гранях параллелепипеда раскладывают на составляющие по координатным осям. Изменяя ориентацию элементарного объема всегда можно найти такое его положение, при котором по всем его граням касательные напряжения будут равны нулю.

Определение. Грани элементарного объема (площадки), на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными площадками, а нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, – главными напряжениями.

При исследовании вопросов прочности в сложном напряженном состоянии существенное значение имеет вид напряженного состояния. Значения главных напряжений определяют вид напряженного состояния. Существует три основных вида напряженного состояния.

Определение. Напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю, называется одноосным (однородным) или линейным напряженным состоянием (рис. 4.1,а).



*Рис. 4.1*

Определение. Напряженное состояние, в котором два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, называется двухосным или плоским напряженным состоянием (рис. 4.1,б).

Определение. Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля, называется пространственным или трехосным напряженным состоянием (рис. 4.1,в).

#### 4.2. Одноосное напряжённое состояние.

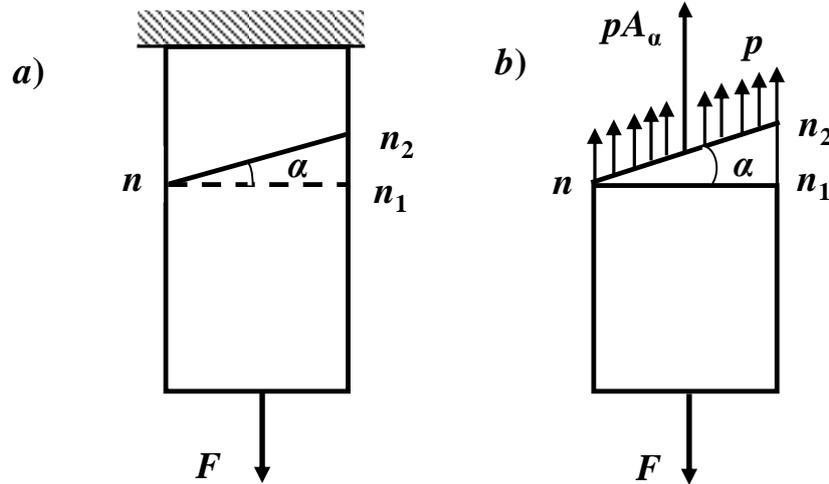
##### Напряжения в наклонных сечениях бруса при центральном растяжении (сжатии)

Имея эпюру продольных сил  $N$ , нормальные напряжения в любом поперечном сечении стержня при центральном растяжении (сжатии) достаточно просто определяются по формуле (3.4)

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Во многих задачах возникает необходимость определения напряжений в наклонных сечениях.

Рассмотрим напряжения в наклонных сечениях бруса. Обозначим  $\alpha$  угол между наклонным сечением  $n-n_2$  и поперечным сечением  $n-n_1$  (рис. 4.2,а).



*Рис. 4.2*

Правило знаков. Будем считать угол  $\alpha$  положительным, когда поперечное сечение для совмещения с наклонным сечением надо повернуть на этот угол против хода часовой стрелки (рис 4.3,а).

Установим, чему равно напряжение, возникающее в любом наклонном сечении, нормаль к плоскости которого составляет с осью стержня угол  $\alpha$ .

Как известно удлинения всех волокон, параллельных оси бруса, при его растяжении или сжатии одинаковы. Это позволяет предполагать, что напряжения  $p$  во всех точках наклонного (так же, как и поперечного) сечения одинаковы.

Рассмотрим нижнюю часть бруса, отсеченную сечением  $n-n_2$  (рис. 4.2,б). Из условия ее равновесия следует, что напряжения  $p$  параллельны оси бруса и направлены в сторону, противоположную внешней силе  $F$ .

Следовательно,

$$N = F = p \cdot A_\alpha \tag{4.1}$$

откуда

$$p = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha, \tag{4.2}$$

где

$A_\alpha = A / \cos \alpha$  – площадь наклонного сечения  $n-n_2$ ;

$A$  – площадь поперечного сечения  $n-n_1$ ;

$\sigma = \frac{N}{A}$  — нормальное напряжение в поперечном сечении бруса.

Разложим напряжение  $p$  на два составляющих напряжения: нормальное  $\sigma_\alpha$ , перпендикулярное к плоскости наклонного сечения  $n-n_2$ , и касательное  $\tau_\alpha$ , параллельное этой плоскости (рис. 4.3).

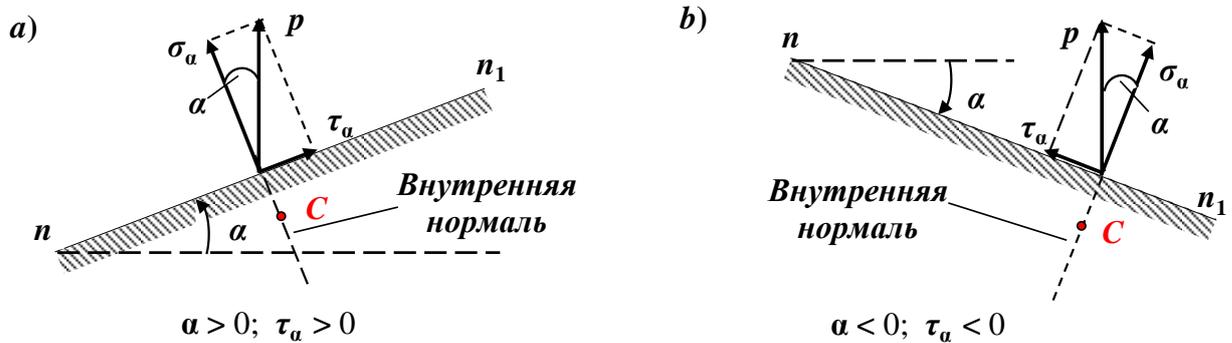


Рис. 4.3

Значения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  будут равны

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \quad (4.3)$$

$$\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (4.4)$$

Правило знаков. Нормальное напряжение  $\sigma$  считается положительным при растяжении.

Правило знаков. Касательное напряжение  $\tau$  положительно, если изображающий его вектор стремится вращать тело относительно любой точки  $C$ , лежащей на внутренней нормали к сечению, по ходу часовой стрелки (рис. 4.3.).

*Полученные соотношения называются формулами для определения напряжений на наклонных площадках при центральном растяжении или сжатии.*

Из формулы (4.3) следует, что нормальные напряжения  $\sigma_\alpha$  имеют значения от  $\sigma = \frac{F}{A}$  (при  $\alpha = 0$ ) до  $\sigma = 0$  (при  $\alpha = 90^\circ$ ).

Таким образом, наибольшие (по абсолютной величине) нормальные напряжения имеют место в поперечных сечениях бруса.

Определение. Плоскости сечений, в которых нормальные напряжения достигают наибольшего и, соответственно, наименьшего значений, называются главными плоскостями (главными площадками).

Определение. Наибольшее и наименьшее нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются главными напряжениями.

Определение. Направления, по которым действуют главные напряжения, называются главными направлениями.

Из формулы (4.4) следует, что касательные напряжения  $\tau_\alpha$  имеют значения от  $+\frac{\sigma}{2} = +\frac{F}{2A}$  (при  $\alpha = 45^\circ$ ) до  $-\frac{\sigma}{2} = -\frac{F}{2A}$  (при  $\alpha = -45^\circ$ ).

В этом случае

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma}{2} \quad (4.5)$$

Касательные напряжения  $\tau_\alpha = 0$  при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha = 90^\circ$ .

Таким образом, в площадках с наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями (главные площадки) касательные напряжения равны нулю.

Так как на главных площадках касательные напряжения отсутствуют, то главные площадки – это площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Рассмотрим напряжения, возникающие в двух произвольно расположенных, взаимно перпендикулярных сечениях при одноосном (центральном) растяжении–сжатии стержня.

Определим напряжения  $\sigma_{\alpha_1}$  и  $\sigma_{\alpha_2}$  в двух наклонных сечениях  $n_1 - n_1$  и  $n_2 - n_2$ , перпендикулярных друг к другу (рис. 4.4).

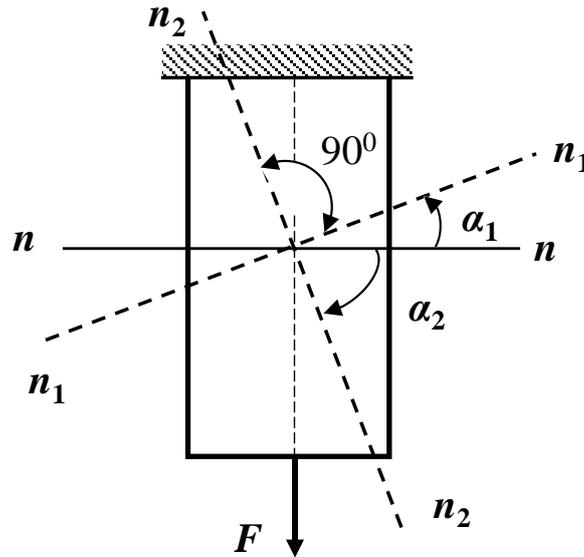


Рис. 4.4

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  наклона этих сечений к плоскости поперечного сечения бруса находятся между собой с учетом правила знаков в зависимости

$$\alpha_2 = -(90^\circ - \alpha_1) = \alpha_1 - 90^\circ.$$

По формуле (4.3) имеем

$$\sigma_{\alpha_1} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_1, \quad \sigma_{\alpha_2} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_2 = \sigma \cdot \cos^2 (\alpha_1 - 90^\circ) = \sigma \cdot \sin^2 \alpha_1$$

Сложив нормальные напряжения  $\sigma_{\alpha_1}$  и  $\sigma_{\alpha_2}$ , получим

$$\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma \cdot \sin^2 \alpha_1 = \sigma \tag{4.6}$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная.*

### 4.3. Закон парности касательных напряжений

Определим напряжения  $\tau_{\alpha_1}$  и  $\tau_{\alpha_2}$  в двух наклонных сечениях  $n_1 - n_1$  и  $n_2 - n_2$ , перпендикулярных друг к другу (рис. 4.4).

По формуле (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha_2} &= \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_2 = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2(\alpha_1 - 90^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha_1) = \\ &= -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_1 = -\tau_{\alpha_1} \end{aligned}$$

То есть

$$\tau_{\alpha_2} = -\tau_{\alpha_1} \quad (4.7)$$

Таким образом, касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку (закон парности касательных напряжений).

#### 4.4. Плоское напряжённое состояние

При плоском напряженном состоянии на одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку, касательные и нормальные напряжения равны нулю.

В теории плоского напряженного состояния можно рассматривать две основные задачи:

Прямая задача. В точке известны положения главных площадок и значения главных напряжений. Требуется определить нормальные и касательные напряжения по наклонным площадкам.

Обратная задача. В точке известны нормальные и касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку. Требуется найти главные напряжения и положение главных площадок.

Наиболее часто встречается обратная задача, когда необходимо определить главные напряжения и положение главных площадок.

Математически эта задача идентична задаче определения главных моментов инерции и определения положения главных осей инерции.

В связи с этим, соответствующие формулы будут иметь вид

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2} \quad (4.8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} \quad (4.9)$$

Знак (+) перед корнем берется, если  $\sigma_x > \sigma_z$ , знак (-) перед корнем берется, если  $\sigma_x < \sigma_z$ .

Угол, соответствующий экстремальному значению касательных напряжений, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha'_0 = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{xz}} \quad (4.10)$$

При этом экстремальные касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных к главным площадкам под углом  $\pm 45^\circ$  и равны

$$\tau_{\alpha'_0} = \tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.11)$$

Определение. Площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения, называются площадками сдвига.

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными значениями касательных напряжений равны полу сумме главных напряжений

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (4.12)$$

#### 4.5. Пространственное напряженное состояние

Определение. Если через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, в которой нормальные и касательные напряжения были бы равны нулю, то в этой точке имеется пространственное (трехосное) напряженное состояние.

В курсе теории упругости доказывается, что при пространственном (трехосном) напряженном состоянии через каждую точку всегда можно провести три площадки, по которым касательные напряжения равны нулю.

Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие по ним, – *главными напряжениями*.

Все три главные площадки взаимно перпендикулярны.

Наибольшее (в алгебраическом смысле) главное напряжение принято обозначать  $\sigma_1$ , следующее по величине  $\sigma_2$ , а наименьшее  $\sigma_3$ , то есть

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (4.13)$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} \quad (4.14)$$

Нормальные напряжения по любым другим площадкам, проходящим через данную точку, имеют промежуточные значения между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Аналитически напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  в любой площадке определяются по формулам, вывод которых приведен в курсе теории упругости

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3 \quad (4.15)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2} \quad (4.16)$$

В этих формулах

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормальями к главным площадкам.

Если по формуле (4.15) определить нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам и сложить их значения, то сумма этих напряжений будет равна сумме главных напряжений

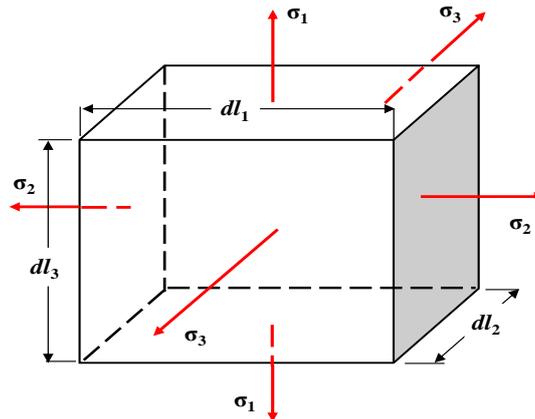
$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4.17)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная.*

#### 4.6. Обобщенный закон Гука

Формулы относительных деформаций бруса, полученные для случая его центрального растяжения (сжатия), можно обобщить на случай пространственного (трехосного) напряженного состояния ( $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  и  $\varepsilon' = \mu \cdot \varepsilon$ ).

Для этого выделим из тела элементарный параллелепипед (с бесконечно малыми размерами ребер), грани которого совпадают с главными площадками (рис.4.5).



**Рис. 4.5**

Обозначим  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  главные направления, а  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  относительные деформации ребер параллелепипеда, параллельных этим направлениям.

Значения  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  определим на основании принципа независимости действия сил, последовательно рассматривая влияние напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

В результате воздействия напряжений  $\sigma_1$  относительные деформации равны

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \epsilon_{21} = \epsilon_{31} = -\mu \cdot \epsilon_{11} = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E} \quad (4.18)$$

Первый индекс при  $\epsilon$  указывает направление относительной деформации, а второй – причину деформации. Так, например,  $\epsilon_{21}$  является относительной деформацией в направлении  $\sigma_2$ , вызванной напряжением  $\sigma_1$ .

Аналогично, от воздействия  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  получим

$$\epsilon_{12} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_{32} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} \quad (4.19)$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = -\mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}; \quad \epsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E} \quad (4.20)$$

Относительные деформации, вызванные одновременным воздействием напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , равны

$$\epsilon_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{12} + \epsilon_{13}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_{21} + \epsilon_{22} + \epsilon_{23}$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_{31} + \epsilon_{32} + \epsilon_{33}$$

После замены относительных деформаций их выражениями (4.18 – 4.20) формулы примут вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (4.21)$$

Аналогичные формулы можно получить и для случая, когда грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (4.22)$$

Где

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальные напряжения, действующие по боковым граням элементарного параллелепипеда;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – относительные деформации его ребер.

Выражения (4.21) и (4.22) устанавливают связь между деформациями и напряжениями при пространственном (трехосном) напряженном состоянии, поэтому носят название *обобщенного закона Гука*.

Примечание. Эти формулы применимы при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

#### **4.7. Закон Гука для плоского напряженного состояния.**

##### **Объемная деформация**

Связь между напряжениями и деформациями определяется природой сопротивления тела деформациям и, таким образом, имеет *физический* характер. Физическая сторона сопротивления материалов базируется на гипотезе о линейной зависимости между компонентами деформаций и компонентами напряжений в изотропном упруго–деформируемом твердом теле и опирается на

следующие факты, наблюдаемые в опытах с образцами из изотропных материалов:

– при осевой деформации призматического, в частности круглого цилиндрического, образца не происходит изменения первоначально прямых углов между линейными элементами, из которых один совпадает с осью призмы, а второй лежит в поперечном сечении, то есть в процессе осевой деформации образец, изготовленный из изотропного материала, не перекашивается;

– при осевой деформации круглого цилиндрического образца происходит и его поперечная деформация (одинаковая во всех поперечных направлениях), составляющая от продольной деформации долю, определяемую коэффициентом Пуассона  $\mu$ ;

– при чистом сдвиге изменение углов между гранями элементарного параллелепипеда в плоскостях, параллельных одной координатной плоскости, не сопровождается изменением углов между остальными гранями, а сдвиги не сопровождаются изменением линейных размеров ребер, то есть сдвиги не связаны с линейной деформацией.

Аналитически эти зависимости описываются уравнениями, называемыми обобщенным законом Гука (4.22)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

В случае плоского напряженного состояния в формулах обобщенного закона Гука необходимо положить

$$\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0; \quad \varepsilon_y = 0 \quad (4.23)$$

В результате получим

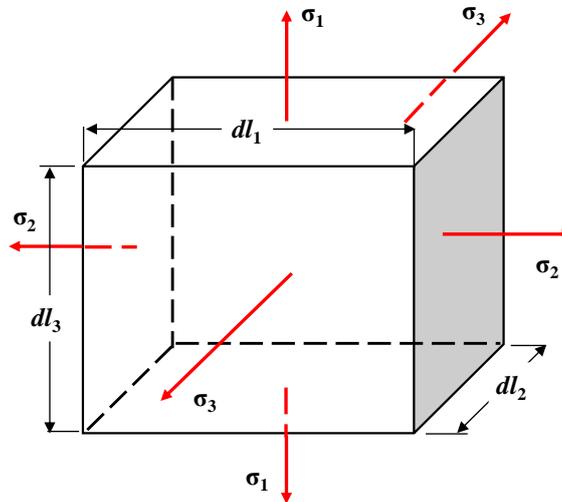
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot \sigma_z]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot \sigma_x] \quad (4.24)$$

Если полученные равенства решить относительно напряжений, то получим

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_z); \quad \sigma_z = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_z + \mu \cdot \varepsilon_x) \quad (4.25)$$

Выделим в окрестности некоторой точки тела до его деформации элементарный параллелепипед с ребрами  $dl_1$ ,  $dl_2$ ,  $dl_3$  так, чтобы его грани совпали с главными площадками (рис. 4.6).



**Рис. 4.6**

Первоначальный объем элементарного параллелепипеда будет равен

$$dV = dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3$$

После деформации длина всех ребер параллелепипеда изменится и станет равной

$$dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1); \quad dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2); \quad dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3)$$

Объем параллелепипеда после деформации будет равен

$$\begin{aligned} dV_1 &= [dl_1 \cdot (1 + \varepsilon_1)] \cdot [dl_2 \cdot (1 + \varepsilon_2)] \cdot [dl_3 \cdot (1 + \varepsilon_3)] = \\ &= dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3) \end{aligned}$$

Так как величины деформаций малы, то их произведениями можно пренебречь по сравнению с самими величинами. Тогда

$$dV_1 = dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема составит с учетом (4.21)

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{dV \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \rightarrow \theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.26)$$

Мы получили формулу (4.26) для вычисления объемной деформации.

#### **4.8. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Напряженное состояние в точке»**

1. Что называется напряженным состоянием в точке?
2. Какие площадки называются главными?
3. Какие напряжения называются главными?
4. Какие три основных вида напряженного состояния в точке Вы знаете?
5. Какое напряженное состояние называется одноосным или линейным?
6. Какое напряженное состояние называется двухосным или плоским?
7. Какое напряженное состояние называется пространственным или трехосным или объемным?
8. По какой формуле определяются нормальные напряжения на наклонной площадке при центральном растяжении (сжатии)?
9. По какой формуле определяются касательные напряжения на наклонной площадке при центральном растяжении (сжатии)?
10. В каких сечениях бруса нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) принимают наибольшее значение?
11. В каких сечениях бруса касательные напряжения при центральном растяжении (сжатии) принимают наибольшее значение?
12. Какие площадки называются главными?
13. Какие напряжения называются главными?
14. Чему равно касательное напряжение на главной площадке?
15. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?
16. В чем суть закона парности касательных напряжений?
17. Какие две основные задачи рассматриваются в теории плоского напряженного состояния?
18. По какой формуле определяется положение главных площадок при плоском напряженном состоянии?



19. По какой формуле определяются численные значения главных напряжений при плоском напряженном состоянии?
20. Как расположены площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения при плоском напряженном состоянии?
21. Как называются площадки, по которым действуют максимальные (экстремальные) касательные напряжения?
22. Чему равны нормальные напряжения на площадках с максимальными (экстремальными) касательными напряжениями при плоском напряженном состоянии?
23. По каким формулам определяются численные значения нормальных и касательных напряжений по наклонным площадкам при пространственном (трехосном) напряженном состоянии?
24. Напишите формулы обобщенного закона Гука.
25. Напишите формулу закона Гука для плоского напряженного состояния.
26. По какой формуле определяется объемная деформация?

## ТЕМА 5. ПОНЯТИЕ О ТЕОРИЯХ ПРОЧНОСТИ

### 5.1. Общие понятия. Критерии прочности

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности элемента конструкции по известному напряженному состоянию, то есть по известным главным напряжениям в каждой точке тела.

Решение задачи о прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, осуществляется с помощью теории предельных напряженных состояний или так называемых *теорий прочности*. Теории прочности представляют собой гипотезы о критериях, определяющих условия перехода материала в опасное состояние.

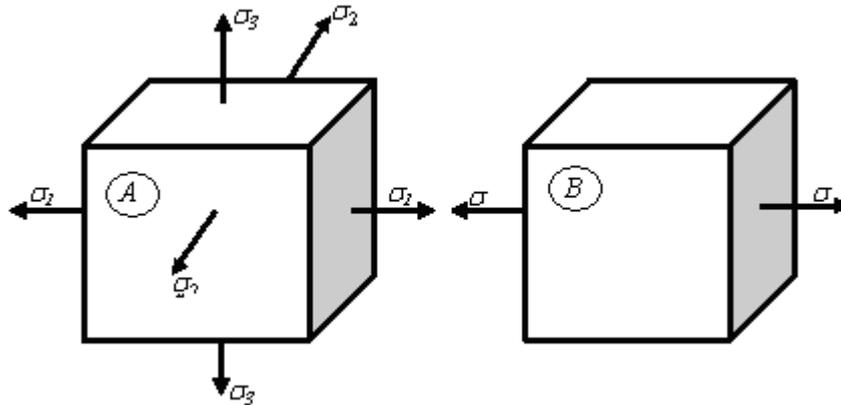
Трудность создания теорий прочности заключается в недостаточности представлений о внутренних процессах, происходящих в материале. В связи с этим задача решается в основном путем анализа и обобщения экспериментальных данных.

Построение теорий прочности основывается на предположении о том, что предельное состояние оказывается одинаковым и в линейном и в любом сложном напряженном состоянии.

Два каких либо напряженных состояний считаются равнопрочными и равноопасными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз, одновременно становятся предельными. В этом случае коэффициенты запаса  $k_1 = k_2$ .

Таким образом, равнопрочными (равноопасными) напряженными состояниями являются напряженные состояния, которые в заданных условиях имеют одинаковые коэффициенты запаса, то есть для вывода их из строя необходимо действующие в каждом из них нагрузки увеличить в одно и то же число раз. При этом под коэффициентом запаса в данном напряженном состоянии понимается число, показывающее, во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным.

Для заданного материала сравнение напряженных состояний можно производить по числовой характеристике какого либо одного напряженного состояния, выбираемого в качестве эталона. За такой эталон (эквивалент) удобнее всего принять центральное растяжение с главным напряжением  $\sigma$  (рис. 5.1).



*Рис. 5.1*

Созданию теорий прочности предшествует гипотеза о том, какое из напряжений или какая их комбинация в сложном напряженном состоянии определяет переход к предельному состоянию – вырабатывается *критерий предельного состояния*.

Чтобы использовать принятую предпосылку (гипотезу) равнопрочности, необходимо связать главные напряжения двух равноопасных напряженных состояний определенной зависимостью. Это оказывается возможным, если известна общая причина разрушения материала. Однако определение истинной причины разрушения материала оказывается трудной и в настоящее время до конца не разрешимой еще задачей. Это обстоятельство не позволяет создать единую (общую) теорию прочности и повлекло за собой появление многих теорий.

Общим при этом является предположение о том, что напряженное состояние в точке остается *единственным* определяющим фактором механического состояния данного материала.

Критерием прочности при линейном напряженном состоянии считается:

нормальное напряжение  $\sigma$ ; относительная линейная деформация  $\varepsilon$ ; касательные напряжения  $\tau$ ; удельная потенциальная энергия формоизменения  $U_f$ .

При рассмотрении материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, необходимо ввести тот или иной критерий прочности.

В зависимости от принимаемых критериев прочности применяют ту или иную теорию прочности:

Первая теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений.

Вторая теория прочности теория наибольших относительных линейных деформаций.

Третья теория прочности – теория наибольших касательных напряжений.

Четвертая (энергетическая) теория прочности – теория удельной потенциальной энергии формоизменения. Теория прочности О. Мора.

*Первая теория прочности* представляет собой гипотезу о том, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда наибольшее растягивающее напряжение достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении – сжатии. В соответствии с этим, при расчетах на прочность ограничивается величина наибольших растягивающих напряжений, которая не должна превышать допускаемого нормального напряжения  $[\sigma]$ , устанавливаемого из опыта на осевое растяжение (центральное растяжение).

Если допускаемые напряжения для материала на растяжение и сжатие одинаковы (пластичные материалы), то условие прочности по первой теории прочности имеет вид

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \quad (5.1)$$

Если же допускаемые напряжения на растяжение  $[\sigma_+]$  и на сжатие  $[\sigma_-]$  различны (хрупкие материалы), то условие прочности по первой теории прочности выражается в виде

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+] \quad (5.2)$$

Первая теория прочности дает удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными в тех случаях, когда главное напряжение  $\sigma_1$  по абсолютной величине значительно больше других. Недостаток первой теории прочности заключается в том, что она не учитывает влияние главных напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

В практических расчетах первая теория прочности в настоящее время почти не применяется.

*Вторая теория прочности* считает, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда максимальная линейная относительная деформация достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении – сжатии.

Условие прочности имеет вид

$$\varepsilon_1 \leq [\varepsilon] \quad (5.3)$$

Для сложного напряженного состояния имеем (4.21)

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] / E \quad (5.4)$$

Для центрального растяжения–сжатия (3.8)

$$[\varepsilon] = [\sigma] / E \quad (5.5)$$

Окончательно условие прочности по второй теории прочности имеет вид

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (5.6)$$

В настоящее время эта теория прочности применяется только для расчета хрупких материалов.

*Третья теория прочности* считает, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении – сжатии.

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (5.7)$$

Для сложного напряженного состояния имеем (4.11)

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad (5.8)$$

Для центрального растяжения–сжатия (4.5)

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad (5.9)$$

Окончательно условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (5.10)$$

Третья теория прочности дает удовлетворительное совпадение результатов теоретического расчета с опытными данными для случая пластического состояния материала. Для расчета хрупких материалов эта теория неприменима.

Недостатком третьей теории прочности является то, что она не учитывает промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ , величина которого, как показывают опыты, влияет на прочность материала. Расхождение результатов теоретических расчетов и опытных данных из-за не учета величины  $\sigma_2$  достигает  $10 \div 15 \%$ .

Несмотря на то, что третья теория прочности дает менее точные результаты, чем четвертая (энергетическая) теория прочности, она наравне с ней широко используется при расчетах конструкций из пластичных материалов.

*Четвертая теория прочности (энергетическая)* считает, что нарушение прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, произойдет тогда, когда величина удельной потенциальной энергии изменения формы (удельная потенциальная энергия формоизменения) достигнет величины опасной для данного материала при центральном растяжении – сжатии (в момент текучести).

Условие прочности по четвертой (энергетической) теории прочности имеет вид

$$u_\phi \leq [u_\phi] \quad (5.11)$$

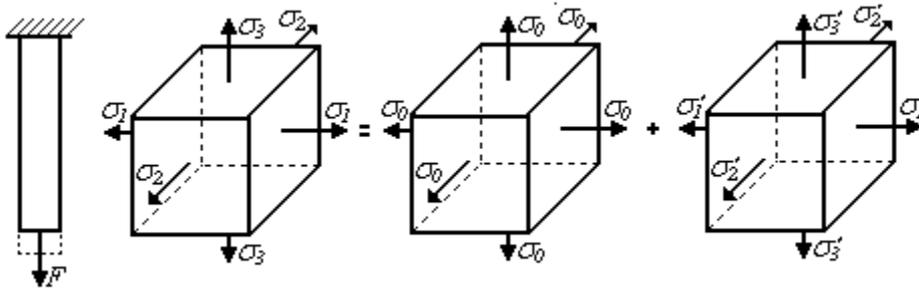
Эта теория прочности весьма хорошо согласуется с опытными данными для пластичных материалов (*для хрупких материалов она неприменима*).

Величину полной удельной потенциальной энергии  $u$  представляем состоящей из двух частей: одной части, идущей на изменение объема (так как в результате деформации изменяется объем), и другой – на изменение формы (так как в результате того, что в общем случае  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  удлинения ребер оказываются различными, поэтому изменяется и форма).

Деление полной удельной потенциальной энергии  $u$  производится по следующему принципу.

Каждое из главных напряжений представляем в виде суммы двух величин (рис. 5.2)

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1; \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \sigma'_2; \quad \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma'_3 \quad (5.12)$$



*Рис. 5.2*

В результате, напряженное состояние разбивается на два. Первое из них представляет центральное растяжение, а второе является дополнительным к нему до заданного напряженного состояния.

Величина  $\sigma_0$  подбирается с таким расчетом, чтобы изменение объема в дополнительном напряженном состоянии отсутствовало, то есть (4.26)

$$\theta' = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0 \rightarrow \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$$

Так как

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0 + (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3),$$

то

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad (5.13)$$

В этом случае система сил первого напряженного состояния ( $\sigma_0$ ) не производит работы на перемещениях, вызванных силами второго состояния ( $\sigma'$ ). Справедливо и обратное утверждение.

Так как взаимные работы отсутствуют, то внутренняя энергия распадается на две части, соответствующие двум напряженным состояниям

$$u = u_{об} + u_{\phi} \rightarrow u_{\phi} = u - u_{об} \quad (5.14)$$

Полная энергия деформации, накапливаемая в единице объема материала, при одноосном напряженном состоянии равна

$$u = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} \quad (5.15)$$

В общем случае объемного напряженного состояния при действии главных напряжений имеем

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2} \quad (5.16)$$

Подставив выражения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  (4.21) из обобщенного закона Гука в формулу для  $u$ , после несложных преобразований получим

$$u = \frac{1}{2E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)]. \quad (5.17)$$

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Таким образом, в общем случае объемного (трехосного) напряженного состояния при действии главных напряжений

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)] \quad (5.18)$$

Удельную потенциальную энергию изменения объема найдем из формулы для  $u$  при центральном растяжении. Имеем

$$u_{\phi} = (1+\mu)\sigma^2 / 3E \quad (5.19)$$

Условие прочности по четвертой (энергетической) теории прочности имеет вид (5.11)

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}]$$

Так как для центрального растяжения

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \cdot \sigma^2; \quad [u_{\phi}] = \frac{1+\mu}{3E} \cdot [\sigma]^2,$$

то условие прочности по четвертой (энергетической) теории прочности окончательно принимает вид

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} \leq [\sigma] \quad (5.20)$$

Новый способ проверки прочности хрупких материалов был предложен О. Мором. Его еще называют *теорией предельных напряженных состояний*.

Главное напряжение  $\sigma_2$  влияет на прочность материала незначительно (в пределах 15%). Поэтому можно считать, что прочность материала определяется лишь наибольшим  $\sigma_1$  и наименьшим  $\sigma_3$  главными напряжениями. Таким образом, расчет прочности в общем случае объемного (трехосного) напряженного состояния сводится к расчету прочности при плоском (двухосном) напряженном состоянии.

Формула условия прочности по теории прочности О. Мора имеет вид

$$\sigma_1 - [\sigma_+] \cdot \sigma_3 / [\sigma_-] \leq [\sigma_+] \quad (5.21)$$

*Условие прочности (5.21) выражает упрощенную теорию Мора.*

Теория прочности О. Мора широко используется при расчетах конструкций из хрупких материалов. Для пластичных материалов допускаемые напряжения  $[\sigma_+]$  и  $[\sigma_-]$  на центральное растяжение и сжатие одинаковы и теория прочности Мора совпадает с третьей теорией прочности. Поэтому теорию прочности Мора иногда рассматривают как обобщение третьей теории применительно к хрупким материалам, не одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию.

Недостатком теории прочности Мора (также как и третьей теории) является пренебрежение влиянием промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ .

Таким образом, для расчета хрупких материалов следует применять теорию прочности Мора, учитывая при этом сделанные выше замечания об области ее применимости.

Для расчета пластичных материалов следует, как правило, применять четвертую теорию прочности. Допустимо применение и третьей теории прочности, так как она, хотя и менее точная, чем четвертая, но разница в результатах, получаемых по этим теориям обычно невелика.

## **5.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Теории прочности»**

1. Какие напряженные состояния называются равнопрочными или равноопасными?
2. Какое напряженное состояние принято принимать за эталон (эквивалент)?
3. Что является критерием прочности при центральном растяжении?
4. Сколько теорий прочности Вы знаете?
5. Какая гипотеза положена в основу первой теории прочности?
6. Как выглядит условие прочности по первой теории прочности?
7. В чем заключается недостаток первой теории прочности?
8. Какая гипотеза положена в основу второй теории прочности?
9. Как выглядит условие прочности по второй теории прочности?
10. Для расчета каких материалов применяется вторая теория прочности?
11. Какая гипотеза положена в основу третьей теории прочности?
12. Как выглядит условие прочности по третьей теории прочности?
13. В чем заключается недостаток третьей теории прочности?
14. Для расчета каких материалов применяется третья теория прочности?
15. Какая гипотеза положена в основу четвертой теории прочности?
16. Как выглядит условие прочности по четвертой теории прочности?
17. Для расчета каких материалов применяется четвертая теория прочности?



18. Как выглядит условие прочности по теории прочности О. Мора (теории предельных напряженных состояний)?
19. Для расчета каких материалов применяется теория прочности О. Мора (теория предельных напряженных состояний)?
20. В чем заключается недостаток теории прочности О. Мора (теории предельных напряженных состояний)?
21. Какие теории прочности применяют обычно при расчете пластичных материалов

## ТЕМА 6. СДВИГ

### 6.1. Понятие о чистом сдвиге, как частном случае плоского напряженного состояния

Деформация сдвига образуется при смещении одного сечения тела относительно другого при неизменном расстоянии между ними и сопровождается возникновением касательных напряжений.

Детали, служащие для соединения отдельных элементов машин и строительных конструкций – шпильки, заклепки, болты, сварные швы, врубки и др. во многих случаях воспринимают нагрузки, перпендикулярные к их продольной оси, то есть испытывают деформацию сдвига.

Определение. Чистым сдвигом называется такой вид плоского напряженного и деформированного состояния, при котором по четырем граням выделенного элемента в виде прямоугольного параллелепипеда, ориентированного определенным образом, действуют только касательные напряжения.

### 6.2. Деформация при сдвиге. Закон Гука при чистом сдвиге

Рассмотрим элемент, по граням которого действуют только касательные напряжения (рис. 6.1).

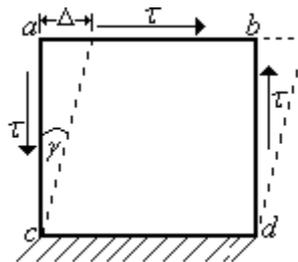


Рис. 6.1

Нижнюю грань будем считать закрепленной. Это допустимо, так как изучаются деформации элементарного параллелепипеда, а не его перемещения как твердого тела.

Напряженное состояние, изображенное на рис. 6.1, представляет собой чистый сдвиг. В результате деформации длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми

гранями – первоначально прямые углы становятся равными: угол при вершине  $c$  станет равным  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ , а угол при вершине  $a$  станет равным  $\frac{\pi}{2} + \gamma$ .

Угол  $\gamma$  является мерой искажения формы элемента при сдвиге и называется *деформацией сдвига*.

Каждая из граней элементарного параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани на величину  $\Delta$ , называемую абсолютным сдвигом.

Определение. Величина, на которую сместилась одна сторона относительно другой, называется абсолютным сдвигом ( $\Delta$ ).

Определение. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется относительным сдвигом.

При малых деформациях оно равно величине угла сдвига  $\gamma$  – изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда, так как

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Абсолютный сдвиг выражается в мерах длины, а относительный сдвиг – в радианах.

Величина  $\gamma$ , как показывает опыт, прямо пропорциональна величине касательных напряжений. Эта зависимость между  $\gamma$  и  $\tau$  называется *законом Гука при сдвиге*, и выражается в виде

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{или} \quad \tau = G \cdot \gamma \quad (6.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $G$  в формулах (6.1) называется *модулем сдвига, или модулем упругости второго рода*.

Модуль сдвига  $G$  является физической постоянной материала, характеризующей его жесткость, то есть способность сопротивляться упругим деформациям при сдвиге.

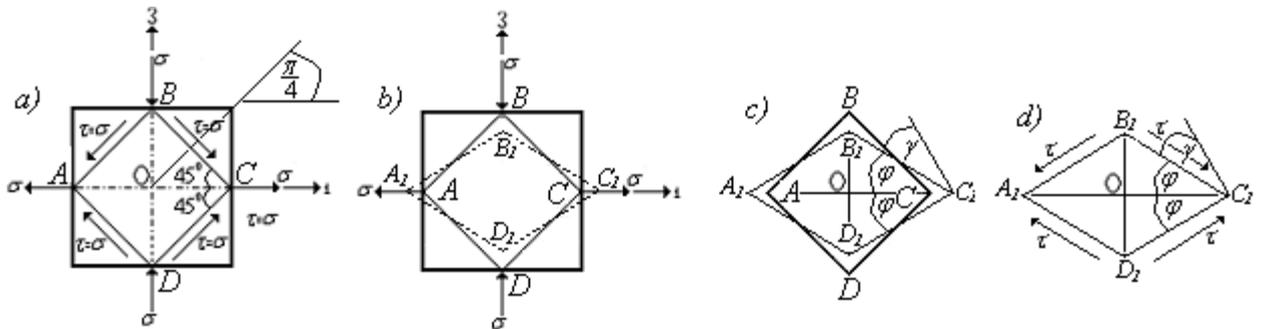
Модуль сдвига  $G$ , как и модуль упругости первого рода  $E$ , выражается в

кг/см<sup>2</sup>, Н/м<sup>2</sup> и т.д.

Деформации сдвига можно определять по формуле (6.1) не только при чистом сдвиге, но и в общем случае плоского напряженного состояния, когда по боковым граням параллелепипеда действуют не только касательные, но также и нормальные напряжения. Это является следствием того, что нормальные напряжения вызывают лишь поступательные перемещения боковых граней параллелепипеда и не вызывают изменения его прямых углов.

### 6.3. Зависимость между тремя упругими постоянными $E$ , $G$ и $\mu$

Чистый сдвиг – есть частный случай плоского напряженного состояния при напряжениях  $\sigma_1 = \sigma$ ; и  $\sigma_3 = -\sigma$  (рис. 6.2).



**Рис. 6.2**

Для плоского напряженного состояния ( $\alpha = \pi/4$ ) имеем (4.15 и 4.16)

$$\sigma_\alpha = \sigma/2 + (-\sigma)/2 = 0; \quad \tau_\alpha = [\sigma - (-\sigma)]/2 = \sigma \quad (6.2)$$

Рассмотрим выделенный элемент (рис.6.2,а). Диагональ **BD** испытывает деформацию сжатия, характеризуемое относительной линейной деформацией  $\epsilon_3$ , а диагональ **AC** – удлинение, характеризуемое относительной линейной деформацией  $\epsilon_1$  (рис.6.2,б).

Из закона Гука для плоского напряженного состояния имеем (4.21)

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2] = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \mu) = \frac{\tau}{E} (1 + \mu); \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot \sigma_1] = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 + \mu) = \frac{-\tau}{E} \cdot (1 + \mu) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Рассмотрим выделенный элемент после деформации (рис.6.2,с)

$$A_1 C_1 = AC + \Delta AC = AC \cdot \left(1 + \frac{\Delta AC}{AC}\right) = AC \cdot (1 + \varepsilon_1) = AC \cdot \left(1 + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right);$$

$$B_1 D_1 = BD + \Delta BD = BD \cdot \left(1 + \frac{\Delta BD}{BD}\right) = BD \cdot (1 + \varepsilon_2) = BD \cdot \left(1 - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right).$$

Отсюда

$$OC_1 = \frac{A_1 C_1}{2} = \frac{AC}{2} \cdot \left(1 + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right);$$

$$OB_1 = \frac{B_1 D_1}{2} = \frac{BD}{2} \cdot \left(1 - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau\right);$$

$$tg \varphi = \frac{OB_1}{OC_1} = \frac{1 - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau}{1 + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \tau}.$$

Имеем (рис. 6.2,d) для  $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - (1 + \mu)\tau/E}{1 + (1 + \mu)\tau/E} = \frac{1 - tg(\gamma/2)}{1 + tg(\gamma/2)} \rightarrow \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2} = \frac{1 - (1 + \mu)\tau/E}{1 + (1 + \mu)\tau/E} \rightarrow \gamma = \frac{2(1 + \mu)\tau}{E}$$

Учитывая, что закон Гука при чистом сдвиге имеет вид (6.1)

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

получим

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (6.4)$$

где

$E$  – модуль упругости первого рода (модуль Юнга);

$G$  – модуль упругости второго рода (модуль сдвига);

$\mu$  – коэффициент Пуассона.

Формула (6.4) выражает зависимость между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$  и  $\mu$ .

Коэффициент Пуассона  $\mu$  для различных материалов имеет значение от  $0$  примерно до  $0,5$ , то есть

$$0 \leq \mu \leq 0,5.$$

Следовательно, на основании формулы (6.4) величина модуля упругости второго рода (модуля сдвига)  $G$  составляет от  $0,33$  до  $0,5$  величины модуля упругости первого рода (модуля Юнга)  $E$ .

Для большинства материалов, в том числе и для стали, можно приближенно принимать  $G \approx 0,4 E$ , следовательно, для стали

$$G \approx 0,4 \cdot E \approx 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \approx 0,8 \cdot 10^6 \text{ (кг/см}^2\text{)}$$

#### 6.4. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Сдвиг»

1. Какой вид деформации называется чистым сдвигом?
2. Какое перемещение называется абсолютным сдвигом?
3. Какая величина называется относительным сдвигом?
4. Как читается закон Гука при сдвиге?
5. Какой формулой выражается закон Гука при сдвиге?
6. Какая величина называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода?
7. От чего зависят значения модуля сдвига?
8. В каких единицах измеряется модуль сдвига?
9. Какое выражение показывает зависимость между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$  и  $\mu$ ?

## ТЕМА 7. КРУЧЕНИЕ

### 7.1. Основные понятия. Крутящий момент

Определение. Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только одно внутреннее усилие – крутящий момент  $M_k$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $N$ ,  $Q$ , и  $M_{изг}$ ) равны нулю.

Таким образом, кручение – это такая деформация, которая сопровождается поворотом поперечных сечений стержня вокруг некоторой оси при неизменном расстоянии точек этих сечений от названной оси. Если сечения стержня имеют две оси симметрии, то за ось вращения принимается геометрическая ось стержня. Такая деформация, в частности, имеет место в том случае, когда к концам стержня приложены силы, которые сводятся к противоположно направленным парам сил, действующим в плоскостях концевых поперечных сечений и имеющим равные моменты.

С кручением на практике приходится встречаться достаточно часто: оси подвижного состава, трансмиссионные валы, винтовые пружины, элементы пространственных конструкций и обыкновенный замочный ключ – все это примеры стержней, работающих на кручение.

Исследования показали, что характер деформации скручиваемого стержня в значительной степени зависит от формы его поперечного сечения. Среди стержней с различными формами поперечных сечений, подвергаемых кручению, наибольшее распространение получили стержни с круглым или кольцевым сечением.

Определение. Стержни, работающие на кручение, называются валами.

Если прямой стержень находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к стержню, равна нулю.

$$\sum M_{(x)} = 0$$

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала,

определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений.

Определение. Крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения.

В простейшем случае, когда стержень нагружен только двумя равными друг другу по величине и направленными в противоположные стороны внешними моментами, крутящий момент в любом поперечном сечении стержня по величине равен внешнему моменту.

В более сложных случаях, когда к стержню приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты в поперечных сечениях различных участков будут неодинаковы.

Изменение крутящих моментов по длине стержня изображают графически в виде эпюр крутящих моментов.

Определение. График, изображающий закон изменения  $M_k$  вдоль геометрической оси стержня, называется эпюрой крутящих моментов.

*Ординаты этой эпюры представляют собой численные значения крутящих моментов  $M_k$  в соответствующих сечениях стержня.*

Правила построения этих эпюр  $M_k$  принципиально ничем не отличаются от построения эпюр других внутренних усилий.

При расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента не имеет особого значения, но для удобства построения эпюр  $M_k$  обычно принимают следующее правило знаков.

Правило знаков. Крутящий момент в рассматриваемом сечении стержня считается положительным, если при взгляде со стороны проведенного сечения внешний момент направлен против хода часовой стрелки.

## 7.2. Определение крутящих моментов по мощности « $N$ » и числу оборотов вала « $n$ »

При расчете валов на прочность обычно задается не крутящий момент, а мощность  $N$ , передаваемая валом, и число оборотов вала  $n$ .

Выведем формулу для определения крутящего момента по заданной мощности  $N$  и числу оборотов вала  $n$ .

Из механики нам известно, что мощность вращающего момента равна моменту, умноженному на угловую скорость  $\omega$ , то есть

$$W = M_k \cdot \omega = M_k \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ (кгм/сек)}$$

С другой стороны, если мощность  $N$  задана в лошадиных силах (1 л.с. =  $75 \frac{\text{кгм}}{\text{сек}}$ ), то

$$W = 75 \cdot N \text{ (кгм/сек)}$$

Следовательно,

$$M_k \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = 75 \cdot N.$$

Откуда

$$M_k = \frac{30 \cdot 75 \cdot N}{\pi \cdot n} = 716,2 \cdot \frac{N}{n} \text{ (кг м)}$$

или

$$M_k = 71620 \cdot \frac{N}{n} \text{ (кг см)}, \quad (7.1)$$

где

$N$  – мощность, передаваемая валом, в л.с.;

$n$  – число оборотов вала, в об/мин.

Если мощность  $N$  задана в киловаттах (1 квт.  $\approx 1,36$  л.с.), то

$$M_k = 71620 \cdot 1,36 \cdot \frac{N}{n} = 97360 \frac{N}{n} \text{ (кг см)}, \quad (7.2)$$

где

$N$  – мощность, передаваемая валом, в квт.;

$n$  – число оборотов вала, в об/мин.

Полученные формулы показывают, что скручивающий момент тем меньше, чем больше число оборотов вала. Следовательно, при применении быстроходной машины, делающей большое число оборотов, нагрузка на вал при одной и той же мощности получается меньше, чем в тихоходной машине, поэтому диаметр вала, а, следовательно, и размеры машины при больших числах оборотов уменьшаются. Это объясняется тем, что при работе с большим числом оборотов увеличивается путь, на котором производится работа, а потому получается экономия в силе. На этом основывается выгода применения быстроходных машин.

### 7.3. Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого поперечного сечения

При выводе формул для определения напряжений и угла закручивания при кручении вала круглого сечения предполагаем, что материал работает в пределах пропорциональности, то есть выполняется закон Гука.

Анализируя напряженное состояние стержней при кручении необходимо исходить из действующих в нем внутренних усилий.

В рассматриваемом случае в сечении вала возникает единственный силовой фактор – крутящий момент  $M_k$  (рис.7.1), так как, согласно определению,  $N = Q_y = Q_z = 0$ ;  $M_y = M_z = 0$ .

Составим уравнение равновесия (статики)

$$\Sigma M_x = 0 \rightarrow M_k - \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = 0,$$

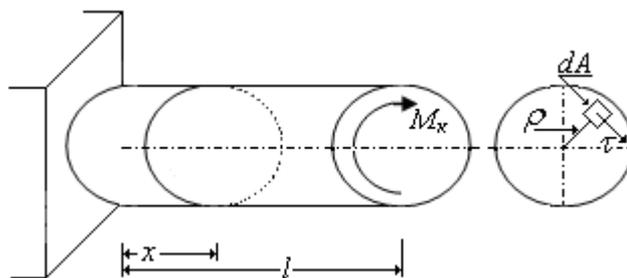


Рис. 7.1

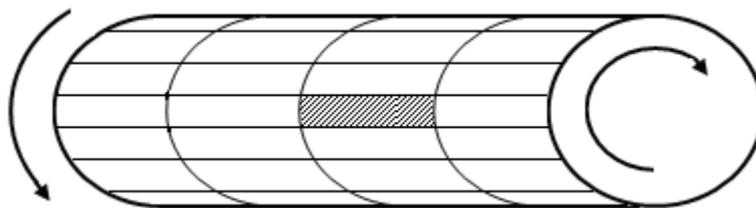
Откуда

$$M_k = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA, \quad (7.3)$$

где

$\tau$  – касательное напряжение, действующее в элементарной площадке  $dA$ , расположенной на расстоянии  $\rho$  от центра тяжести сечения.

Проведем опыт на закручивание стержня. Предварительно нанесем на вал сетку, состоящей из линий параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги (рис. 7.2).



*Рис.7.2*

Для выяснения характера распределения напряжений по сечению рассмотрим картину деформации вала при кручении.

Как показывают эксперименты, после закручивания прямоугольники, образованные сеткой, перекашиваются. Контуры поперечных сечений (параллельных кругов) не искривляются и расстояния между ними не изменяются, а ось стержня остается прямолинейной. Радиусы, проведенные в торцевых сечениях вала, остаются прямыми.

Так как расстояния между поперечными сечениями практически не меняется, то это означает, что продольные волокна не удлиняются и не укорачиваются.

При кручении происходит поворот одного сечения относительно другого на некоторый угол  $\varphi$ , называемый *углом закручивания*.

Это свидетельствует о том, что при кручении возникает деформация чистого сдвига.

На основании этих экспериментальных данных строится теория кручения

круглых стержней, в основу которой положена гипотеза плоских сечений.

Предположим, что:

- поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его продольной оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (гипотеза плоских сечений);
- радиусы поперечных сечений при деформации не искривляются и сохраняют свою длину;
- расстояния (вдоль оси стержня) между поперечными сечениями стержня при деформации не изменяются, то есть длина стержня остается прежней;
- прямолинейная ось стержня (ось кручения) остается прямолинейной и после деформации, а все поперечные сечения стержня поворачиваются вокруг этой оси по отношению друг к другу на угол  $\varphi$ .

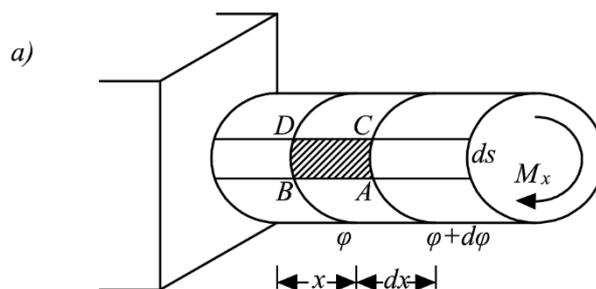
Справедливость принятых гипотез подтверждается тем, что полученные на их основе формулы хорошо согласуются с экспериментальными данными.

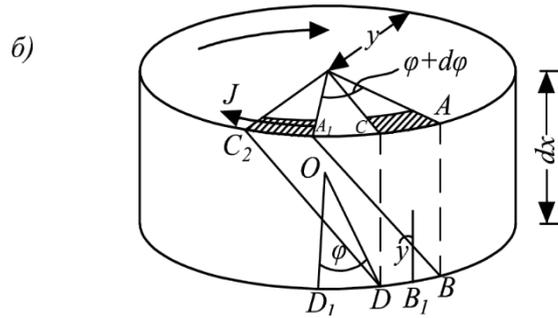
На основании принятых допущений кручение круглых стержней можно представить как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга.

Вследствие этого в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения  $\tau$ , а нормальные напряжения  $\sigma$  равны нулю.

Двумя поперечными сечениями выделим из рассматриваемого бруса, подверженного деформации кручения, участок длиной  $dx$  и рассмотрим его деформацию.

Выделим элементарный объем наружного слоя (рис.7.3)





**Рис.7.3**

Смещения точек **A** и **B** равны

$$AA_1 = r \cdot (\varphi + d\varphi); \quad BB_1 = r \cdot \varphi. \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{r \cdot (\varphi + d\varphi) - r \cdot \varphi}{dx} = r \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

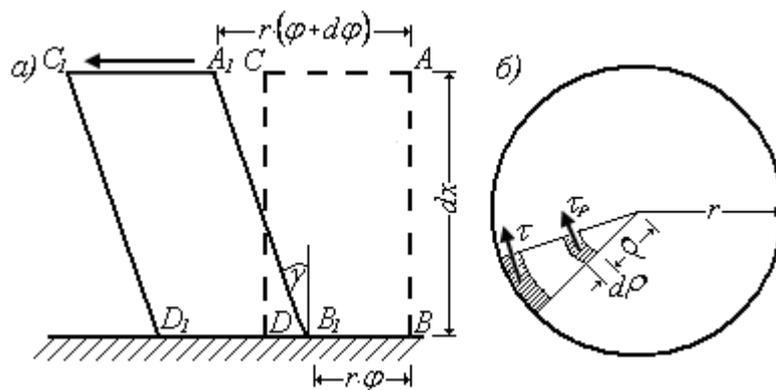
Будем считать стержень жестким, углы поворота малыми, поэтому

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Следовательно,

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx} \tag{7.4}$$

Выделенный элемент испытывает деформацию чистого сдвига (рис.7.4)



**Рис.7.4**

Закон Гука при чистом сдвиге имеет вид (6.1)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad \rightarrow \quad \tau = \gamma \cdot G$$

Или с учетом (7.3)

$$\tau = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot r.$$

Так как при закручивании поперечные сечения вала остаются плоскими, а радиусы прямыми, то выражения для угла сдвига и касательных напряжений в сечении на расстоянии  $\rho$  от центра его можно представить в виде

$$\gamma_\rho = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}; \quad \tau_\rho = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \rho \quad (7.5)$$

Таким образом, касательные напряжения  $\tau_\rho$  в поперечном сечении вала изменяется по линейному закону.

Подставив выражение (7.5) в уравнение (7.3), получим

$$M_K = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \int_A \rho^2 dA = \left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot I_\rho$$

или

$$\left( G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{M_K}{I_\rho} \quad (7.6)$$

Следовательно, подставив выражение (7.6) в уравнение (7.5), получим

$$\tau_\rho = \tau = \frac{M_K \cdot \rho}{I_\rho}. \quad (7.7)$$

Эта формула позволяет определять касательные напряжения в любой точке круглого поперечного сечения с координатой  $\rho$ .

Максимальные значения касательных напряжений возникают в крайних точках сечения  $\rho = r$  и определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \tau_{(\rho=r)} = \frac{M_K \cdot r}{I_\rho} = \frac{M_K}{W_\rho}. \quad (7.8)$$

Где

$I_\rho$  – полярный момент инерции площади круга относительно его центра;

$W_\rho = \frac{I_\rho}{r}$  – полярный момент сопротивления площади круга относительно его

центра.

Как известно, для круга

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (7.9)$$

Для определения угла закручивания  $\varphi$  воспользуемся уравнением (7.6)

$$G \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{I_\rho} \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{G \cdot I_\rho} \rightarrow d\varphi = \frac{M_K}{G \cdot I_\rho} \cdot dx \quad (7.10)$$

После интегрирования получим полный взаимный угол закручивания двух сечений на рассматриваемом участке, где  $M_K = \text{const}$  и  $d = \text{const}$ .

$$\varphi = \frac{M_K}{GI_\rho} \cdot \int_0^l dx = \frac{M_K \cdot l}{GI_\rho} \quad (\text{рад.}) \quad (7.11)$$

Определение. Произведение  $G \cdot I_\rho$  (модуля сдвига на полярный момент инерции поперечного сечения) называют жесткостью стержня при кручении.

Жесткость стержня при кручении характеризует сопротивление стержня закручиванию.

Полный угол закручивания не всегда может характеризовать жесткость стержня при кручении. На протяжении длины стержня крутящие моменты могут иметь разные знаки, поэтому полный угол закручивания может быть небольшим, в то время как на отдельных участках он окажется значительным.

Для объективной оценки жесткости стержня вводится другая величина – относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (7.12)$$

или с учетом (7.11)

$$\Theta = \frac{M_K}{GI_\rho}, \quad (7.13)$$

имеющая размерность рад/см или рад/м.

Таким образом, для случаев, когда на отдельных участках величина  $M_K$  постоянная, относительный угол закручивания  $\Theta$  на рассматриваемом участке численно равен углу закручивания вала, приходящегося на единицу длины.

#### 7.4. Расчет стержня круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении

Наиболее распространенным расчетом на прочность при кручении является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому наибольшее касательное напряжение, возникающее в материале, не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы.

Эта величина называется допускаемым напряжением, то есть

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (7.14)$$

Это требование называется *условием прочности*.

Определение. Допускаемым напряжением называется наибольшее напряжение, при котором обеспечивается прочность и долговечность проектируемого элемента конструкции.

Допускаемое касательное напряжение при кручении  $[\tau]$ , зависит от свойств материала и от принятого коэффициента запаса прочности

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[k]} \quad (7.15)$$

В случае пластичного материала в качестве опасного напряжения  $\tau_{\text{пред}}$  принимается  $\tau_m$  – предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала  $\tau_v$  – предел прочности при сдвиге.

В большинстве случаев допускаемые напряжения на кручение принимаются в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала.

Валы, являющиеся основными объектами, рассчитываемыми на кручение, кроме кручения, часто испытывают и изгиб. Кроме того, возникающие в них напряжения переменны во времени. Поэтому, рассчитывая вал только на кручение статической нагрузкой без учета изгиба и переменности напряжений, необходимо принимать пониженные значения допускаемых напряжений  $[\tau]$ .

Величины допускаемых напряжений устанавливаются СП (Сводом правил).

Максимальное касательное напряжение в вале при кручении возникает в сечении, где крутящий момент  $M_k$  достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором крутящий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение  $M_{\max}$ , называется опасным сечением стержня по касательным напряжениям при кручении.

Величина  $\tau_{max}$  представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении стержня в непосредственной близости к его внешней поверхности ( $\rho = r$ ).

Таким образом, наибольшие касательные напряжения в стержне при кручении будут возникать в опасных точках опасного сечения вала

$$\tau_{max} = \frac{M_K^{max}}{W_\rho} \quad (7.16)$$

Следовательно, условие прочности при кручении по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{M_K^{max}}{W_\rho} \leq [\tau] \quad (7.17)$$

В этой формуле

$\tau_{max}$  – максимальное касательное напряжение в вале;

$M_K^{max}$  – максимальный крутящий момент в вале;

$W_\rho$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала;

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

При расчете скручиваемых стержней на прочность возможны три вида задач, различающихся формой использования условия прочности:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют крутящий момент  $M_K^{max}$  и из условия прочности находят величину требуемого полярного момента сопротивления поперечного сечения

$$W_\rho^{треб} \geq \frac{M_K^{max}}{[\tau]} \quad (7.18)$$

По величине полярного момента сопротивления определяется диаметр сплошного круглого поперечного сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}}$$

или наружный  $d_H$  и внутренний  $d_B$  диаметры кольцевого сечения стержня

$$d_H \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} \cdot \alpha = \frac{d_B}{d_H} \rightarrow d_B = \alpha \cdot d_H$$

б). Определение допускаемой нагрузки. Решение этой задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождение нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям). По известной величине полярного момента сопротивления  $W_\rho$  и допускаемому напряжению  $[\tau]$  определяют наибольшую величину допускаемого крутящего момента  $M_K^{max}$

$$[M_K] \leq [\tau] \cdot W_\rho. \quad (7.19)$$

По найденному значению  $[M_K]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в). Проверочный расчет. По известным значениям  $M_K^{max}$ ,  $W_\rho$  и  $[\tau]$  проверяют выполнение условия прочности (7.17).

$$\tau_{max} = \frac{M_K^{max}}{W_\rho} \leq [\tau]$$

При проверке напряжений по заданным нагрузкам и размерам стержня определяют наибольшие касательные напряжения. Наибольшие касательные напряжения сравниваются с допускаемым напряжением.

Если условие прочности не выполняется, то необходимо увеличить размеры сечения или уменьшить нагрузку.

Расчет вала на прочность не исключает возможности возникновения деформаций, недопустимых при его эксплуатации. Большие углы закручивания вала особенно опасны при передаче им переменного во времени момента, так как при этом возникают опасные для его прочности крутильные колебания.

Поэтому в необходимых случаях валы рассчитывают и на жесткость.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{M_K}{GI_\rho} \leq [\theta] \quad (7.20)$$

По величине полярного момента инерции определяется диаметр сплошного круглого поперечного сечения

$$\theta_{max} = \frac{M_K}{GI_\rho} \leq [\theta] \rightarrow I_\rho \geq \frac{M_K}{G[\theta]} \rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{\pi G[\theta]}}$$

или наружный  $d_n$  и внутренний  $d_v$  диаметры кольцевого сечения стержня

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}}; \quad \alpha = \frac{d_v}{d_n} \rightarrow d_v = \alpha \cdot d_n,$$

Где

$\theta$  – наибольший относительный угол закручивания стержня;

$[\theta]$  – допускаемый относительный угол закручивания, принимаемый в диапазоне  $0,5 \div 2$  градуса на один метр длины стержня.

*На практике обычно производят расчет на прочность, а затем делают проверку выполнения условия жесткости.*

Если при проверке окажется, что условие жесткости удовлетворяется, то на этом обычно расчет вала заканчивается.

В противном случае размеры вала должны быть подобраны из условия жесткости (7.20).

$$I_{\text{треб}} \geq \frac{M_k}{G \cdot [\theta]} \quad (7.21)$$

### 7.5. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Кручение»

1. Какой вид деформации называется кручением?
2. Чему равен крутящий момент в поперечном сечении вала?
3. Правило знаков для крутящего момента?
4. Что называется эпюрой крутящего момента?
5. Какая зависимость между крутящим моментом, мощностью, передаваемой валом, и числом оборотов вала?
6. Какие предположения (гипотезы) лежат в основе теории кручения стержня круглого сечения?
7. По какой формуле определяются максимальные касательные напряжения стержня круглого сечения?
8. В каких точках круглого вала возникают наибольшие напряжения при кручении?



9. Как определяется опасное сечение при кручении стержня круглого сечения?
10. Как распределяются касательные напряжения по поперечному сечению вала?
11. Напишите условие прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при кручении стержня круглого сечения.
12. Какие три типа задач вытекают из условия прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при кручении стержня круглого сечения?
13. Какой угол называется полным углом закручивания?
14. По какой формуле определяется полный угол закручивания?
15. Какая величина называется жесткостью стержня при кручении?

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов. /А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. – М.: Изд-во АСВ, 2012. –251 с.
3. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100.– М.: ИНФРА – М, 2010.– 323 с.
4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) / Г.С. Варданян, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; под ред. Г.С. Варданяна. – М.: ИНФРА–М, 2011. – 480 с.
5. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть I): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на Дону: ИЦ ДГТУ, 2018. – 124 с.
6. Михайлов А.М. Сопротивление материалов: учебник для студентов высших учебных заведений / А.М. Михайлов. – М.: Издательский центр «Академия», – 2009. – 448 с.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 591 с.



Управление цифровых образовательных технологий

«Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов»

## **ПРИЛОЖЕНИЯ**

### **СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ**

**для выполнения расчетно-графических, контрольных работ**

**и проведения практических занятий**

**по дисциплинам «Сопротивление материалов» и**

**«Специальные вопросы сопротивления материалов»**

## 1. Сортамент прокатной стали

### 1.1. Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240—97

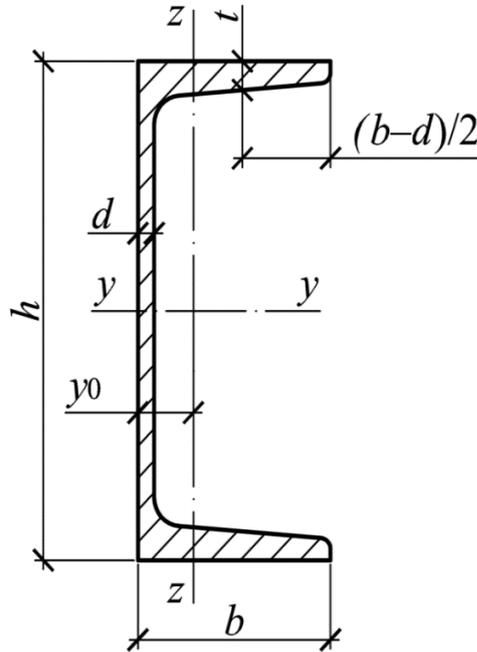


Рисунок 1.1 — Швеллер с уклоном внутренних граней полки

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- $h$  — высота (швеллера);
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — толщина полки;
- $y_0$  — расстояние от оси  $z - z$  до наружной грани стенки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S_y$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м швеллера вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .



Таблица 1.1 — Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$S_y$ см <sup>3</sup>	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см	$y_0$ см	Масса 1 п. м. кг
5У	50	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.95	1.16	4.84
6,5У	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.00	8.70	3.68	1.08	1.24	5.90
8У	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.30	12.80	4.75	1.19	1.31	7.05
10У	100	46	4.5	7.6	10.90	174.0	34.8	3.99	20.40	20.40	6.46	1.37	1.44	8.59
12У	120	52	4.8	7.8	13.30	304.0	50.6	4.78	29.60	31.20	8.52	1.53	1.54	10.40
14У	140	58	4.9	8.1	15.60	491.0	70.2	5.60	40.80	45.40	11.00	1.70	1.67	12.30
16У	160	64	5.0	8.4	18.10	747.0	93.4	6.42	54.10	63.30	13.80	1.87	1.80	14.20
16аУ	160	68	5.0	9.0	19.50	823.0	103.0	6.49	59.40	78.80	16.40	2.01	2.00	15.30
18У	180	70	5.1	8.7	20.70	1 090.0	121.0	7.24	69.80	86.00	17.00	2.04	1.94	16.30
18аУ	180	74	5.1	9.3	22.20	1 190.0	132.0	7.32	76.10	105.00	20.00	2.18	2.13	17.40
20У	200	76	5.2	9.0	23.40	1 520.0	152.0	8.07	87.80	113.00	20.50	2.20	2.07	18.40
22У	220	82	5.4	9.5	26.70	2 110.0	192.0	8.89	110.00	151.00	25.10	2.37	2.21	21.00
24У	240	90	5.6	10.0	30.60	2 900.0	242.0	9.73	139.00	208.00	31.60	2.60	2.42	24.00
27У	270	95	6.0	10.5	35.20	4 160.0	308.0	10.90	178.00	262.00	37.30	2.73	2.47	27.70
30У	300	100	6.5	11.0	40.50	5 810.0	387.0	12.00	224.00	327.00	43.60	2.84	2.52	31.80
33У	330	105	7.0	11.7	46.50	7 980.0	484.0	13.10	281.00	410.00	51.80	2.97	2.59	36.50
36У	360	110	7.5	12.6	43.40	10 820.0	601.0	14.20	350.00	513.00	61.70	3.10	2.68	41.90
40У	400	115	8.0	13.5	61.50	15 220.0	761.0	15.70	444.00	642.00	73.40	3.23	2.75	48.30

**1.2. Выборка двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок по ГОСТ Р 57837—2017**

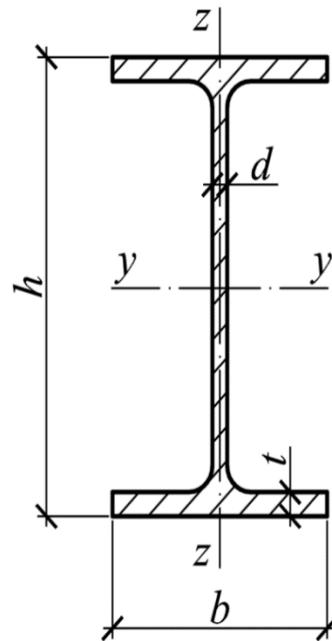


Рисунок 1.2 — Двутавр стальной горячекатаный с параллельными гранями полок

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

- $h$  — высота (двутавра);
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — толщина полки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .

Таблица 1.2 — Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$S_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$S_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
<b>Тип Б — Балочные нормальные двутавры</b>														
10Б1	100.0	55.0	4.1	5.7	10.32	8.10	171.01	34.20	19.70	40.70	15.92	5.79	4.57	12.42
12Б1	117.6	64.0	3.8	5.1	11.03	8.70	257.36	43.80	24.94	48.30	22.39	7.00	5.49	14.25
12Б2	120.0	64.0	4.4	6.3	13.21	10.40	317.75	53.00	30.36	49.04	27.67	8.65	6.79	14.47
14Б1	137.4	73.0	3.8	5.6	13.39	10.50	434.86	63.30	35.80	56.98	36.42	9.98	7.76	16.49
14Б2	140.0	73.0	4.7	6.9	16.43	12.90	541.22	77.30	44.17	57.40	44.92	12.31	9.62	16.54
16Б1	157.0	82.0	4.0	5.9	16.18	12.70	689.28	87.80	49.55	65.27	54.43	13.27	10.35	18.34
16Б2	160.0	82.0	5.0	7.4	20.09	15.80	869.29	108.70	61.93	65.78	68.31	16.66	13.05	18.44
18Б1	177.0	91.0	4.3	6.5	19.58	15.40	1062.74	120.10	67.66	73.68	81.89	18.00	13.98	20.45
18Б2	180.0	91.0	5.3	8.0	23.95	18.80	1316.96	146.30	83.21	74.16	100.85	22.16	17.30	20.52
20Б0	198.0	99.0	4.5	7.0	23.18	18.20	1581.56	159.80	89.88	82.60	113.62	22.95	17.86	22.14
20Б1	200.0	100.0	5.5	8.0	27.16	21.30	1844.26	184.40	104.73	82.41	133.91	26.78	20.97	22.21
20Б2	203.0	101.0	6.5	9.5	32.19	25.30	2218.49	218.60	124.99	83.02	163.93	32.46	25.50	22.57
20Б3	208.0	102.0	8.0	12.0	40.24	31.60	2852.62	274.30	158.46	84.20	213.50	41.86	33.02	23.03
25Б1	248.0	124.0	5.0	8.0	32.68	25.70	3537.11	285.30	159.68	104.04	254.85	41.11	31.80	27.93
25Б2	250.0	125.0	6.0	9.0	37.66	29.60	4051.73	324.10	182.93	103.73	293.85	47.02	36.55	27.93
25Б3	255.0	126.0	7.5	11.5	47.62	37.40	5238.16	410.80	233.88	104.88	384.79	61.08	47.67	28.43
25Б4	260.0	127.0	9.0	14.0	57.68	45.30	6481.01	498.50	286.25	106.00	480.07	75.60	59.24	28.85
30Б1	298.0	149.0	5.5	8.0	40.80	32.00	6318.22	424.00	237.53	124.44	442.00	59.33	45.88	32.91
30Б2	300.0	150.0	6.5	9.0	46.78	36.70	7209.26	480.60	271.06	124.14	507.53	67.67	52.56	32.94
30Б3	305.0	151.0	8.0	11.5	58.74	46.10	9254.92	606.90	344.37	125.52	661.88	87.67	68.31	33.57
30Б4	310.0	152.0	9.5	14.0	70.80	55.60	11381.41	734.30	419.40	126.79	822.37	108.21	84.60	34.08
35Б1	346.0	174.0	6.0	9.0	52.68	41.40	11094.49	641.30	358.09	145.12	791.54	90.98	70.11	38.76
35Б2	350.0	175.0	7.0	11.0	63.14	49.60	13559.01	774.80	433.96	146.54	984.34	112.50	86.79	39.48
35Б3	355.0	176.0	8.5	13.5	77.08	60.50	16797.02	946.30	533.54	147.62	1229.36	139.70	108.13	39.94
35Б4	361.0	177.0	10.0	16.5	92.89	72.90	20719.71	1147.90	651.07	149.35	1528.90	172.76	134.02	40.57
40Б1	396.0	199.0	7.0	11.0	72.16	56.60	20018.83	1011.10	563.93	166.56	1447.14	145.44	111.97	44.78
40Б2	400.0	200.0	8.0	13.0	84.12	66.00	23704.43	1185.20	663.13	167.87	1736.39	173.64	133.82	45.43
40Б3	406.0	201.0	9.5	16.0	102.05	80.10	29352.45	1445.90	813.38	169.60	2169.89	215.91	166.74	46.11

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.2

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$S_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$S_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
40Б4	412.0	202.0	11.0	19.0	120.10	94.30	35196.83	1708.60	966.65	171.19	2616.25	259.03	200.47	46.67
45Б1	446.0	199.0	8.0	12.0	84.30	66.20	28697.35	1286.90	725.06	184.50	1580.03	158.80	123.29	43.29
45Б2	450.0	200.0	9.0	14.0	96.76	76.00	33450.76	1486.70	839.53	185.93	1871.57	187.16	145.46	43.98
45Б3	456.0	201.0	10.5	17.0	115.43	90.60	40710.41	1785.50	1012.55	187.80	2307.62	229.61	178.81	44.71
45Б4	462.0	202.0	12.0	20.0	134.22	105.40	48197.42	2086.50	1188.75	189.50	2756.66	272.94	213.01	45.32
50Б1	492.0	199.0	8.8	12.0	92.38	72.50	36841.89	1497.60	853.45	199.70	1581.96	158.99	124.86	41.38
50Б2	496.0	199.0	9.0	14.0	101.27	79.50	41869.08	1688.30	957.23	203.33	1844.89	185.42	144.88	42.68
50Б3	500.0	200.0	10.0	16.0	114.23	89.70	47846.05	1913.80	1087.59	204.66	2140.79	214.08	167.48	43.29
50Б4	508.0	201.0	12.0	20.0	139.99	109.90	59953.57	2360.40	1348.82	206.94	2717.85	270.43	212.23	44.06
50Б5	516.0	202.0	15.0	24.0	170.59	133.90	73345.26	2842.80	1642.68	207.35	3315.53	328.27	260.04	44.09
55Б1	543.0	220.0	9.5	13.5	113.36	89.00	55677.42	2050.70	1164.94	221.62	2405.54	218.69	171.67	46.06
55Б2	547.0	220.0	10.0	15.5	124.74	97.90	62784.45	2295.60	1301.49	224.34	2761.34	251.03	196.56	47.05
55Б3	553.0	221.0	12.0	18.5	148.63	116.70	75321.22	2724.10	1554.49	225.11	3342.92	302.53	237.99	47.42
55Б4	560.0	222.0	14.0	22.0	174.86	137.30	89907.09	3211.00	1842.20	226.75	4032.07	363.25	286.76	48.02
60Б1	596.0	199.0	10.0	15.0	120.45	94.60	68715.90	2305.90	1325.36	238.85	1979.66	198.96	157.64	40.54
60Б2	600.0	200.0	11.0	17.0	134.41	105.50	77632.25	2587.70	1489.36	240.32	2278.16	227.82	180.72	41.17
60Б3	604.0	201.0	12.5	19.0	151.28	118.80	87472.10	2896.40	1675.38	240.46	2586.62	257.38	205.28	41.35
60Б4	612.0	202.0	15.0	23.0	181.97	142.90	106509.50	3480.70	2026.68	241.93	3182.62	315.11	253.12	41.82
70Б1	691.0	260.0	12.0	15.5	164.74	129.30	125922.20	3644.60	2094.79	276.47	4557.35	350.57	276.64	52.60
70Б2	697.0	260.0	12.5	18.5	183.64	144.16	145904.02	4186.63	2392.68	281.87	5437.68	418.28	328.41	54.41
70Б3	702.0	261.0	14.5	21.0	210.26	165.10	167085.05	4760.30	2736.06	281.89	6248.49	478.81	378.10	54.51
70Б4	710.0	262.0	17.0	25.0	248.14	194.80	199679.98	5624.80	3249.28	283.67	7531.16	574.90	456.29	55.09
<b>Тип Ш — Балочные широкополочные двутавры</b>														
20Ш0	190.0	149.0	5.0	7.0	31.11	24.40	2079.60	218.90	120.97	81.76	386.62	51.90	39.79	35.25
20Ш1	194.0	150.0	6.0	9.0	39.01	30.60	2689.74	277.30	154.28	83.04	507.16	67.62	51.85	36.06
20Ш2	199.0	151.0	7.5	11.5	49.38	38.80	3502.14	352.00	198.01	84.21	661.25	87.58	67.27	36.59
20Ш3	204.0	152.0	9.0	14.0	59.85	47.00	4362.01	427.70	243.18	85.37	821.37	108.08	83.18	37.05
20Ш4	211.0	155.0	11.0	17.5	75.06	58.90	5696.83	540.00	311.20	87.12	1089.19	140.54	108.38	38.09
20Ш5	218.0	157.0	13.0	21.0	90.27	70.90	7117.64	653.00	381.26	88.80	1359.05	173.13	133.81	38.80
20Ш6	228.0	159.0	16.0	26.0	112.29	88.20	9312.80	816.90	485.66	91.07	1749.68	220.09	170.75	39.47

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.2

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$S_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$S_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
25Ш0	240.0	174.0	6.0	9.0	46.84	36.80	4981.13	415.10	229.64	103.13	791.75	91.01	69.84	41.11
25Ш1	244.0	175.0	7.0	11.0	56.24	44.20	6121.23	501.70	279.19	104.33	984.48	112.51	86.36	41.84
25Ш2	249.0	176.0	8.5	13.5	68.59	53.80	7624.69	612.40	343.94	105.44	1229.33	139.70	107.41	42.34
25Ш3	256.0	177.0	10.5	17.0	85.69	67.30	9819.49	767.20	436.06	107.05	1575.20	177.99	137.18	42.88
25Ш4	264.0	182.0	13.0	21.0	107.50	84.40	12751.44	966.00	556.26	108.91	2116.49	232.58	179.70	44.37
25Ш5	274.0	184.0	16.0	26.0	133.40	104.70	16478.26	1202.80	703.59	111.14	2710.17	294.58	228.44	45.07
25Ш6	286.0	186.0	19.0	32.0	163.42	128.30	21287.68	1488.70	884.76	114.13	3448.57	370.81	288.22	45.94
30Ш0	290.0	199.0	7.0	10.0	61.48	48.30	9429.75	650.30	360.60	123.85	1316.09	132.27	101.70	46.27
30Ш1	294.0	200.0	8.0	12.0	72.38	56.80	11338.30	771.30	429.51	125.16	1603.26	160.33	123.28	47.06
30Ш2	300.0	201.0	9.0	15.0	87.38	68.60	14209.66	947.30	529.86	127.52	2034.13	202.40	155.42	48.25
30Ш3	306.0	203.0	11.0	18.0	105.56	82.90	17455.33	1140.90	644.63	128.59	2515.46	247.83	190.85	48.82
30Ш4	314.0	206.0	13.0	22.0	128.52	100.90	21967.16	1399.20	798.35	130.74	3213.67	312.01	240.56	50.00
30Ш5	326.0	208.0	16.0	28.0	162.46	127.50	29037.68	1781.50	1031.79	133.69	4213.04	405.10	313.16	50.92
30Ш6	342.0	210.0	20.0	36.0	207.98	163.30	39315.66	2299.20	1357.14	137.49	5580.38	531.47	412.35	51.80
35Ш1	334.0	249.0	8.0	11.0	83.17	65.30	17107.05	1024.40	565.71	143.42	2834.62	227.68	174.45	58.38
35Ш2	340.0	250.0	9.0	14.0	101.51	79.70	21676.50	1275.10	706.03	146.13	3650.97	292.08	223.45	59.97
35Ш3	347.0	252.0	11.0	17.5	125.95	98.90	27535.21	1587.00	886.41	147.86	4674.90	371.02	284.26	60.92
35Ш4	354.0	254.0	13.0	21.0	150.67	118.30	33692.45	1903.50	1072.31	149.54	5745.80	452.43	347.18	61.75
35Ш5	364.0	258.0	16.0	26.0	187.51	147.20	43231.44	2375.40	1354.36	151.84	7458.32	578.16	444.79	63.07
35Ш6	376.0	260.0	19.0	32.0	229.11	179.90	54967.48	2923.80	1688.25	154.89	9398.88	722.99	557.28	64.05
35Ш7	392.0	262.0	23.0	40.0	284.79	223.60	71815.25	3664.00	2150.36	158.80	12030.69	918.37	709.81	65.00
40Ш1	383.0	299.0	9.5	12.5	112.91	88.60	30554.32	1595.50	880.73	164.50	5576.08	372.98	285.42	70.27
40Ш2	390.0	300.0	10.0	16.0	135.95	106.70	38674.10	1983.30	1093.97	168.66	7207.77	480.52	366.53	72.81
40Ш3	397.0	302.0	12.0	19.5	164.89	129.40	47846.38	2410.40	1339.96	170.34	8962.48	593.54	453.33	73.72
40Ш4	406.0	304.0	14.5	24.0	201.98	158.60	60107.10	2960.90	1662.00	172.51	11253.74	740.38	566.43	74.64
40Ш5	418.0	309.0	17.5	30.0	252.20	198.00	77867.25	3725.70	2114.90	175.71	14776.27	956.39	732.65	76.54
40Ш6	430.0	311.0	21.0	36.0	303.25	238.10	96432.24	4485.20	2578.21	178.32	18086.35	1163.11	893.43	77.23
40Ш7	446.0	313.0	25.0	44.0	369.09	289.70	122543.61	5495.20	3204.85	182.21	22547.07	1440.71	1109.25	78.16
45Ш0	434.0	299.0	10.0	15.0	135.04	106.00	46794.17	2156.40	1192.24	186.15	6692.40	447.65	342.87	70.40
45Ш1	440.0	300.0	11.0	18.0	157.38	123.60	56069.13	2548.60	1412.44	188.75	8111.31	540.75	413.80	71.79

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.2

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$S_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$S_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
45III2	446.0	302.0	13.0	21.0	184.30	144.70	66379.08	2976.60	1661.51	189.78	9655.62	639.44	490.29	72.38
45III3	452.0	304.0	15.0	24.0	211.46	166.00	77050.83	3409.30	1915.99	190.88	11258.33	740.68	569.04	72.97
45III4	464.0	308.0	18.0	30.0	262.46	206.00	98962.82	4265.60	2420.93	194.18	14639.89	950.64	731.39	74.69
45III5	476.0	310.0	21.0	36.0	312.98	245.70	121722.09	5114.40	2932.26	197.21	17919.22	1156.08	891.09	75.67
45III6	492.0	312.0	25.0	44.0	380.50	298.70	153856.39	6254.30	3633.74	201.08	22341.69	1432.16	1106.76	76.63
50III1	482.0	300.0	11.0	15.0	145.52	114.20	60366.76	2504.80	1395.56	203.67	6763.81	450.92	347.62	68.18
50III2	487.0	300.0	14.5	17.5	176.34	138.40	71863.01	2951.30	1666.63	201.87	7897.76	526.52	409.42	66.92
50III3	493.0	300.0	15.5	20.5	198.86	156.10	83437.19	3384.90	1912.66	204.83	9251.07	616.74	478.76	68.21
50III4	499.0	300.0	16.5	23.5	221.38	173.80	95277.59	3818.70	2161.40	207.45	10604.77	706.98	548.21	69.21
50III5	508.0	302.0	19.0	28.0	260.80	204.70	114959.83	4526.00	2578.55	209.95	12894.50	853.94	663.27	70.31
50III6	518.0	310.0	22.0	33.0	309.84	243.20	140248.12	5415.00	3106.50	212.75	16442.93	1060.83	825.05	72.85
50III7	532.0	312.0	26.0	40.0	372.92	292.70	174203.77	6549.00	3797.96	216.13	20335.66	1303.57	1017.09	73.84
50III8	548.0	314.0	30.0	48.0	442.84	347.60	214879.98	7842.30	4598.03	220.28	24895.52	1585.70	1240.04	74.98
60III1	582.0	300.0	12.0	17.0	174.49	137.00	102709.98	3529.60	1981.30	242.62	7669.85	511.32	396.49	66.30
60III2	589.0	300.0	16.0	20.5	217.41	170.70	126193.28	4285.00	2438.84	240.92	9259.23	617.28	483.58	65.26
60III3	597.0	300.0	18.0	24.5	252.37	198.10	150035.32	5026.30	2869.72	243.82	11069.15	737.94	578.58	66.23
60III4	605.0	300.0	20.0	28.5	287.33	225.60	174450.48	5767.00	3305.39	246.40	12881.17	858.74	674.12	66.96
60III5	616.0	302.0	23.0	34.0	338.13	265.40	210467.04	6833.40	3941.46	249.49	15686.68	1038.85	817.44	68.11
60III6	630.0	315.0	27.0	41.0	412.99	324.20	266239.93	8452.10	4907.09	253.90	21476.18	1363.57	1073.64	72.11
60III7	644.0	317.0	31.0	48.0	480.93	377.50	318172.04	9881.10	5788.14	257.21	25653.76	1618.53	1279.02	73.04
60III8	664.0	319.0	36.0	58.0	574.05	450.60	394963.73	11896.50	7047.57	262.30	31634.21	1983.34	1572.47	74.23
70III1	692.0	300.0	13.0	20.0	211.49	166.00	172424.05	4983.40	2814.39	285.53	9024.74	601.65	468.07	65.32
70III2	698.0	300.0	15.0	23.0	242.53	190.40	198779.77	5695.70	3233.41	286.29	10382.92	692.19	540.47	65.43
70III3	707.0	300.0	18.0	27.5	289.09	226.90	239021.10	6761.60	3867.01	287.54	12424.20	828.28	650.29	65.56
70III4	715.0	300.0	20.5	31.5	329.39	258.60	275127.01	7695.90	4426.46	289.01	14242.00	949.47	748.55	65.76
70III5	725.0	300.0	23.0	36.5	375.69	294.90	319781.96	8821.60	5099.30	291.75	16514.18	1100.95	870.34	66.30
70III6	740.0	313.0	27.0	44.0	458.21	359.70	403258.33	10898.90	6334.98	296.66	22622.21	1445.51	1143.72	70.26
70III7	758.0	315.0	32.0	53.0	549.27	431.20	496466.98	13099.40	7693.00	300.64	27822.58	1766.51	1405.68	71.17
70III8	780.0	317.0	38.0	64.0	660.25	518.30	616075.38	15796.80	9389.94	305.47	34321.60	2165.40	1734.01	72.10

Тип К — Колонные двутавры

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.2

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$S_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$S_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
15K1	147.0	149.0	6.0	8.5	34.17	26.80	1366.76	186.00	103.63	63.25	469.21	62.98	48.05	37.06
15K2	150.0	150.0	7.0	10.0	40.14	31.50	1641.33	218.80	123.04	63.95	563.28	75.10	57.36	37.46
15K3	155.0	151.0	8.5	12.5	49.84	39.10	2117.61	273.20	155.69	65.18	718.46	95.16	72.78	37.97
15K4	160.0	152.0	10.0	15.0	59.64	46.80	2629.16	328.60	189.67	66.40	879.66	115.74	88.65	38.41
15K5	166.0	153.0	12.0	18.0	71.72	56.30	3291.43	396.60	232.39	67.74	1077.13	140.80	108.12	38.75
20K1	196.0	199.0	6.5	10.0	52.69	41.40	3846.06	392.50	216.41	85.44	1314.47	132.11	100.38	49.95
20K2	200.0	200.0	8.0	12.0	63.53	49.90	4715.63	471.60	262.75	86.15	1601.53	160.15	121.91	50.21
20K3	204.0	201.0	9.0	14.0	73.57	57.80	5602.48	549.30	308.35	87.26	1896.76	188.73	143.72	50.78
20K4	210.0	201.0	10.5	17.0	88.27	69.30	6962.62	663.10	376.57	88.81	2303.59	229.21	174.72	51.09
20K5	214.0	202.0	12.0	19.0	99.33	78.00	7970.40	744.90	426.84	89.58	2613.87	258.80	197.63	51.30
20K6	220.0	202.0	14.0	22.0	114.97	90.30	9488.15	862.60	500.34	90.84	3027.75	299.78	229.45	51.32
20K7	226.0	203.0	16.0	25.0	131.11	102.90	11136.66	985.60	578.16	92.16	3493.41	344.18	263.98	51.62
20K8	234.0	203.0	18.0	29.0	150.87	118.40	13375.48	1143.20	679.29	94.16	4053.99	399.41	306.76	51.84
25K1	246.0	249.0	8.0	12.0	79.72	62.60	9170.92	745.60	410.68	107.26	3090.06	248.20	188.61	62.26
25K2	250.0	250.0	9.0	14.0	92.18	72.40	10832.61	866.60	480.25	108.41	3648.81	291.90	221.88	62.92
25K3	253.0	251.0	10.0	15.5	102.21	80.20	12153.56	960.80	535.41	109.05	4088.75	325.80	247.85	63.25
25K4	257.0	252.0	11.0	17.5	114.82	90.10	13927.17	1083.80	607.67	110.14	4672.01	370.79	282.18	63.79
25K5	262.0	253.0	12.5	20.0	131.15	103.00	16243.92	1240.00	701.07	111.29	5404.02	427.20	325.46	64.19
25K6	267.0	253.0	14.0	22.5	147.13	115.50	18593.24	1392.80	793.96	112.42	6080.59	480.68	366.65	64.29
25K7	274.0	258.0	16.0	26.0	171.88	134.90	22416.62	1636.30	942.16	114.20	7452.57	577.72	441.04	65.85
25K8	281.0	259.0	18.0	29.5	194.97	153.10	26169.72	1862.60	1083.49	115.86	8556.67	660.75	505.09	66.25
25K9	288.0	260.0	20.0	33.0	218.20	171.30	30128.76	2092.30	1228.96	117.51	9685.85	745.07	570.29	66.63
25K10	298.0	261.0	23.0	38.0	251.62	197.50	36112.37	2423.70	1442.84	119.80	11288.10	864.99	663.49	66.98
30K1	298.0	299.0	9.0	14.0	110.80	87.00	18848.66	1265.00	694.64	130.43	6241.19	417.47	316.82	75.05
30K2	300.0	300.0	10.0	15.0	119.78	94.00	20410.21	1360.70	750.59	130.54	6754.83	450.32	342.13	75.10
30K3	300.0	305.0	15.0	15.0	134.78	105.80	21535.21	1435.70	806.84	126.40	7104.76	465.89	358.04	72.60
30K4	304.0	301.0	11.0	17.0	134.82	105.80	23380.49	1538.20	852.74	131.69	7732.59	513.79	390.46	75.73
30K5	308.0	301.0	12.0	19.0	149.56	117.40	26362.99	1711.90	953.96	132.77	8642.78	574.27	436.61	76.02
30K6	312.0	302.0	13.0	21.0	164.72	129.30	29508.74	1891.60	1059.44	133.84	9648.60	638.98	485.99	76.53
30K7	316.0	302.0	14.5	23.0	180.85	142.00	32732.42	2071.70	1167.93	134.53	10569.09	699.94	533.09	76.45

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.2

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$S_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$S_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
30K8	316.0	357.0	14.5	23.0	206.15	161.80	38173.52	2416.10	1353.26	136.08	17452.10	977.71	741.50	92.01
30K9	322.0	358.0	16.0	26.0	232.14	182.20	43983.21	2731.90	1541.60	137.65	19896.06	1111.51	843.38	92.58
30K10	328.0	359.0	18.0	29.0	259.60	203.80	50113.52	3055.70	1738.68	138.94	22381.16	1246.86	947.13	92.85
30K11	334.0	360.0	20.0	32.0	287.18	225.40	56488.07	3382.50	1939.98	140.25	24906.98	1383.72	1052.25	93.13
30K12	341.0	361.0	22.0	35.5	318.49	250.00	64158.87	3763.00	2176.26	141.93	27866.03	1543.82	1175.02	93.54
30K13	350.0	362.0	24.0	40.0	357.18	280.40	74376.59	4250.10	2481.31	144.30	31663.84	1749.38	1332.11	94.15
30K14	356.0	371.0	27.0	43.0	394.74	309.90	83542.72	4693.40	2760.90	145.48	36649.59	1975.72	1506.68	96.36
30K15	364.0	372.0	30.0	47.0	433.46	340.30	93889.39	5158.80	3062.80	147.17	40396.23	2171.84	1659.03	96.54
30K16	374.0	373.0	33.0	52.0	479.80	376.60	107317.14	5738.90	3441.68	149.56	45068.65	2416.55	1848.28	96.92
30K17	384.0	374.0	36.0	57.0	526.34	413.20	121512.35	6328.80	3831.76	151.94	49816.72	2664.00	2040.04	97.29
30K18	396.0	375.0	39.0	63.0	580.58	455.80	139424.86	7041.70	4307.16	154.97	55520.26	2961.08	2269.45	97.79
30K19	408.0	385.0	43.0	69.0	650.18	510.40	162282.28	7955.00	4912.82	157.99	65823.94	3419.43	2622.83	100.62
30K20	422.0	387.0	47.0	76.0	717.92	563.60	187072.37	8866.00	5534.78	161.42	73671.75	3807.33	2923.99	101.30
30K21	440.0	389.0	52.0	85.0	804.48	631.50	221339.16	10060.90	6361.10	165.87	83732.23	4305.00	3311.01	102.02
35K1	342.0	348.0	10.0	15.0	139.03	109.10	31247.91	1827.40	1001.17	149.92	10542.21	605.87	459.67	87.08
35X1.5	346.0	349.0	11.0	17.0	156.41	122.80	35711.23	2064.20	1135.84	151.10	12051.44	690.63	524.08	87.78
35K2	350.0	350.0	12.0	19.0	173.87	136.50	40295.09	2302.60	1272.61	152.23	13585.82	776.33	589.29	88.39
35K3	355.0	351.0	13.5	21.5	196.48	154.20	46230.77	2604.60	1448.66	153.39	15506.81	883.58	671.24	88.84
35K4	360.0	352.0	15.0	24.0	219.19	172.10	52353.70	2908.50	1627.80	154.55	17459.86	992.04	754.25	89.25
35K5	365.0	353.0	16.5	26.5	242.00	190.00	58667.44	3214.70	1810.04	155.70	19445.30	1101.72	838.34	89.64
35K6	369.0	360.0	18.0	28.5	264.79	207.90	64960.86	3520.90	1991.80	156.63	22183.47	1232.42	938.35	91.53
35K7	376.0	361.0	20.0	32.0	296.87	233.10	74398.83	3957.40	2256.32	158.31	25119.61	1391.67	1060.65	91.99
35K8	382.0	362.0	22.0	35.0	325.47	255.50	82894.78	4340.00	2491.96	159.59	27708.51	1530.86	1168.17	92.27
35K9	389.0	363.0	24.0	38.5	357.82	280.90	93053.12	4784.20	2767.25	161.26	30738.03	1693.56	1293.57	92.68
35K10	396.0	364.0	26.5	42.0	391.87	307.60	103736.94	5239.20	3054.44	162.70	33819.63	1858.22	1421.64	92.90
35K11	404.0	374.0	29.0	46.0	437.99	343.80	118982.06	5890.20	3458.40	164.82	40183.36	2148.84	1644.63	95.78
35K12	414.0	375.0	32.0	51.0	485.77	381.30	135721.11	6556.60	3886.58	167.15	44924.28	2395.96	1836.42	96.17
35K13	424.0	376.0	35.0	56.0	533.75	419.00	153322.14	7232.20	4326.20	169.49	49742.08	2645.86	2030.81	96.54
35K14	434.0	377.0	38.0	61.0	581.93	456.80	171810.18	7917.50	4777.34	171.83	54637.74	2898.55	2227.81	96.90
35K15	446.0	378.0	42.0	67.0	640.99	503.20	195206.29	8753.70	5336.35	174.51	60526.72	3202.47	2466.48	97.17

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.2

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$S_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$S_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
35K16	458.0	392.0	46.0	73.0	719.27	564.60	227053.17	9915.00	6094.32	177.67	73566.95	3753.42	2891.61	101.13
35K17	472.0	393.0	50.0	80.0	788.23	618.80	258357.05	10947.30	6796.66	181.04	81286.57	4136.72	3191.54	101.55
35K18	488.0	394.0	55.0	88.0	868.47	681.80	296560.11	12154.10	7629.66	184.79	90173.86	4577.35	3538.66	101.90
35K19	506.0	395.0	60.0	97.0	956.93	751.20	342451.59	13535.60	8591.51	189.17	100237.84	5075.33	3929.92	102.35
35K20	520.0	409.0	65.0	104.0	1056.95	829.70	392963.38	15114.00	9664.42	192.82	119352.51	5836.31	4520.43	106.26
35K21	540.0	411.0	71.0	114.0	1162.03	912.20	454051.02	16816.70	10869.85	197.67	132896.31	6466.97	5017.71	106.94
35K22	562.0	413.0	77.0	125.0	1276.17	1001.80	526659.93	18742.40	12243.01	203.15	148011.27	7167.62	5568.89	107.69
35K23	580.0	426.0	84.0	134.0	1407.19	1104.70	606878.23	20926.80	13777.86	207.67	174271.92	8181.78	6362.61	111.29
35K24	604.0	430.0	92.0	146.0	1546.07	1213.70	704826.44	23338.60	15522.09	213.51	195579.56	9096.72	7087.61	112.47
40K1	394.0	398.0	11.0	18.0	186.81	146.70	56145.31	2850.00	1559.22	173.36	18922.62	950.89	720.40	100.64
40K2	400.0	400.0	13.0	21.0	218.69	171.70	66621.41	3331.10	1836.23	174.54	22412.67	1120.63	849.93	101.23
40K3	406.0	403.0	16.0	24.0	254.87	200.10	78039.22	3844.30	2139.84	174.98	26200.19	1300.26	988.59	101.39
40K4	414.0	405.0	18.0	28.0	295.39	231.90	92771.14	4481.70	2513.15	177.22	31026.87	1532.19	1165.56	102.49
40K4,5	420.0	403.0	20.0	31.0	325.61	255.60	103629.70	4934.80	2786.46	178.40	33850.08	1679.90	1279.67	101.96
40K5	429.0	400.0	23.0	35.5	370.49	290.80	120290.27	5607.90	3198.49	180.19	37914.87	1895.74	1447.08	101.16
40K6	438.0	370.0	25.0	40.0	389.65	305.90	128432.35	5864.50	3381.88	181.55	33828.59	1828.57	1400.59	93.18
40K7	448.0	371.0	28.0	45.0	438.29	344.10	148100.16	6611.60	3848.78	183.82	38379.67	2068.98	1587.47	93.58
40K8	458.0	372.0	31.0	50.0	487.13	382.40	168699.38	7366.80	4327.20	186.09	43005.94	2312.15	1777.05	93.96
40K9	470.0	373.0	35.0	56.0	547.21	429.60	194740.01	8286.80	4920.70	188.65	48584.93	2605.09	2007.28	94.23
40K10	484.0	374.0	39.0	63.0	615.01	482.80	226537.95	9361.10	5620.76	191.92	55131.74	2948.22	2276.18	94.68
40K11	494.0	392.0	43.0	68.0	691.21	542.60	261626.63	10592.20	6402.77	194.55	68534.68	3496.67	2700.52	99.57
40K12	510.0	393.0	48.0	76.0	773.35	607.10	303779.05	11912.90	7286.50	198.19	77250.09	3931.30	3043.64	99.94
40K13	528.0	394.0	53.0	85.0	863.69	678.00	354176.39	13415.80	8303.29	202.50	87133.42	4423.02	3430.99	100.44
40K14	548.0	395.0	59.0	95.0	965.87	758.20	414486.60	15127.30	9480.79	207.15	98243.26	4974.34	3868.52	100.85
40K15	564.0	410.0	65.0	103.0	1081.45	848.90	482318.02	17103.50	10811.51	211.18	119192.55	5814.27	4525.42	104.98
40K16	588.0	412.0	72.0	115.0	1209.51	949.50	569246.79	19362.10	12395.01	216.94	135224.96	6564.32	5120.62	105.74
40K17	616.0	414.0	80.0	129.0	1358.67	1066.60	679972.83	22077.00	14322.16	223.71	154171.56	7447.90	5823.25	106.52
40K18	638.0	430.0	87.0	140.0	1519.61	1192.90	800682.16	25099.80	16419.75	229.54	187578.96	8724.60	6820.27	111.10
40K19	668.0	435.0	96.0	155.0	1696.33	1331.60	952172.58	28508.20	18868.64	236.92	215398.09	9903.36	7755.88	112.68

### 1.3. Уголки стальные горячекатаные равнополочные по ГОСТ 8509—93

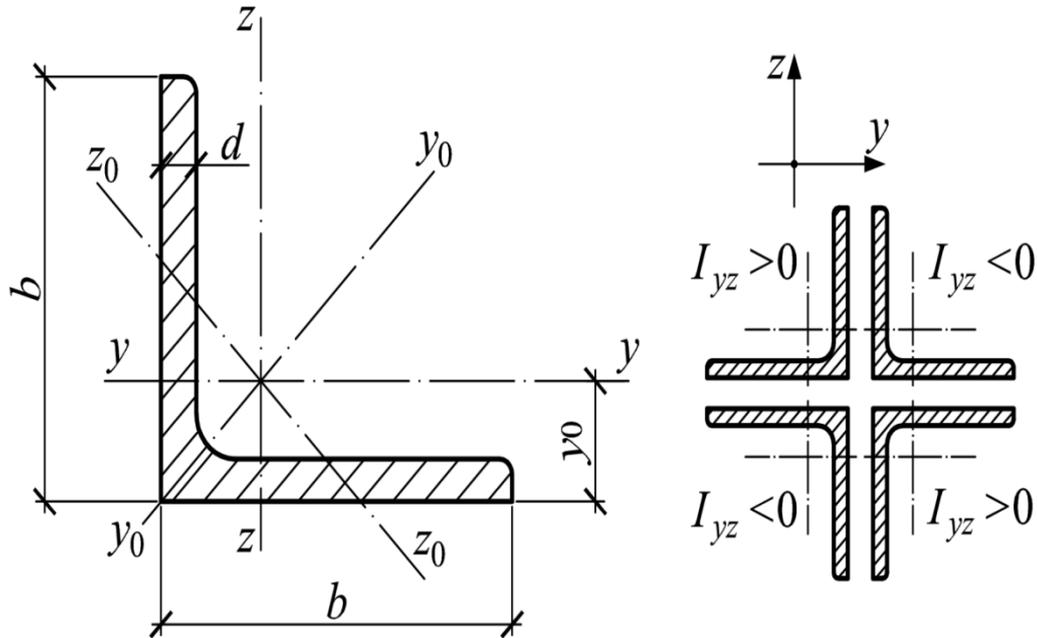


Рисунок 1.3 — Уголок стальной горячекатаный равнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина полки;
- $t$  — толщина полки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $y_0$  — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
- $I_{yx}$  — центробежный момент инерции;
- $i$  — радиус инерции.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м равнополочного уголка вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .



Таблица 1.3 — Уголки стальные горячекатаные равнополочные

№	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_{y0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y0}$ см	$I_{z0}$ см <sup>4</sup>	$W_{z0}$ см <sup>3</sup>	$i_{z0}$ см	$I_{yz}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см	Масса 1 п. м. кг
2	20	3	1.13	0.40	0.28	0.59	0.63	0.75	0.17	0.20	0.39	0.23	0.60	0.89
2	20	4	1.46	0.50	0.37	0.58	0.78	0.73	0.22	0.24	0.38	0.28	0.64	1.15
2,5	25	3	1.43	0.81	0.46	0.75	1.29	0.95	0.34	0.33	0.49	0.47	0.73	1.12
2,5	25	4	1.86	1.03	0.59	0.74	1.62	0.93	0.44	0.41	0.48	0.59	0.76	1.46
2,8	28	3	1.62	1.16	0.58	0.85	1.84	1.07	0.48	0.42	0.55	0.68	0.80	1.27
3	30	3	1.74	1.45	0.67	0.91	2.30	1.15	0.60	0.53	0.59	0.85	0.85	1.36
3	30	4	2.27	1.84	0.87	0.90	2.92	1.13	0.77	0.61	0.58	1.08	0.89	1.78
3,2	32	3	1.86	1.77	0.77	0.97	2.80	1.23	0.74	0.59	0.63	1.03	0.89	1.46
3,2	32	4	2.43	2.26	1.00	0.96	3.58	1.21	0.94	0.71	0.62	1.32	0.94	1.91
3,5	35	3	2.04	2.35	0.93	1.07	3.72	1.35	0.97	0.71	0.69	1.37	0.97	1.60
3,5	35	4	2.67	3.01	1.21	1.06	4.76	1.33	1.25	0.88	0.68	1.75	1.01	2.10
3,5	35	5	3.28	3.61	1.47	1.05	5.71	1.32	1.52	1.02	0.68	2.10	1.05	2.58
4	40	3	2.35	3.55	1.22	1.23	5.63	1.55	1.47	0.95	0.79	2.08	1.09	1.85
4	40	4	3.08	4.58	1.60	1.22	7.26	1.53	1.90	1.19	0.78	2.68	1.13	2.42
4	40	5	3.79	5.53	1.95	1.21	8.75	1.52	2.30	1.39	0.78	3.22	1.17	2.98
4,5	45	3	2.65	5.13	1.56	1.39	8.13	1.75	2.12	1.24	0.89	3.00	1.21	2.08
4,5	45	4	3.48	6.63	2.04	1.38	10.52	1.74	2.74	1.54	0.89	3.89	1.26	2.73
4,5	45	5	4.29	8.03	2.51	1.37	12.74	1.72	3.33	1.81	0.88	4.71	1.30	3.37
5	50	3	2.96	7.И	1.94	1.55	11.27	1.95	2.95	1.57	1.00	4.16	1.33	2.32
5	50	4	3.89	9.21	2.54	1.54	14.63	1.94	3.80	1.95	0.99	5.42	1.38	3.05
5	50	5	4.80	11.20	3.13	1.53	17.77	1.92	4.63	2.30	0.98	6.57	1.42	3.77
5	50	6	5.69	13.07	3.69	1.52	20.72	1.91	5.43	2.63	0.98	7.65	1.46	4.47
5,6	56	4	4.38	13.10	3.21	1.73	20.79	2.18	5.41	2.52	1.11	7.69	1.52	3.44

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.3

№	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_{y0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y0}$ см	$I_{z0}$ см <sup>4</sup>	$W_{z0}$ см <sup>3</sup>	$i_{z0}$ см	$I_{yx}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см	Масса 1 п. м. кг
5,6	56	5	5.41	15.97	3.96	1.72	25.36	2.16	6.59	2.97	1.10	9.41	1.57	4.25
6,3	63	4	4.96	18.86	4.09	1.95	29.90	2.45	7.81	3.26	1.25	11.00	1.69	3.90
6,3	63	5	6.13	23.10	5.05	1.94	36.80	2.44	9.52	3.87	1.25	13.70	1.74	4.81
6,3	63	6	7.28	27.06	5.98	1.93	42.91	2.43	11.18	4.44	1.24	15.90	1.78	5.72
7	70	4.5	6.20	29.04	5.67	2.16	46.03	2.72	12.04	4.53	1.39	17.00	1.88	4.87
7	70	5	6.86	31.94	6.27	2.16	50.67	2.72	13.22	4.92	1.39	18.70	1.90	5.38
7	70	6	8.15	37.58	7.43	2.15	59.64	2.71	15.52	5.66	1.38	22.10	1.94	6.39
7	70	7	9.42	42.98	8.57	2.14	68.19	2.69	17.77	6.31	1.37	25.20	1.99	7.39
7	70	8	10.67	48.16	9.68	2.12	76.35	2.68	19.97	6.99	1.37	28.20	2.02	8.37
7,5	75	5	7.39	39.53	7.21	2.31	62.65	2.91	16.41	5.74	1.49	23.10	2.02	5.80
7,5	75	6	8.78	46.57	8.57	2.30	73.87	2.90	19.28	6.62	1.48	27.30	2.06	6.89
7,5	75	7	10.15	53.34	9.89	2.29	84.61	2.89	22.07	7.43	1.47	31.20	2.10	7.96
7,5	75	8	11.50	59.84	11.18	2.28	94.89	2.87	24.80	8.16	1.47	35.00	2.15	9.02
7,5	75	9	12.83	66.10	12.43	2.27	104.72	2.86	27.48	8.91	1.46	38.60	2.18	10.07
8	80	5.5	8.63	52.68	9.03	2.47	83.56	з.и	21.80	7.10	1.59	30.90	2.17	6.78
8	80	6	9.38	56.97	9.80	2.47	90.40	з.и	23.54	7.60	1.58	33.40	2.19	7.36
8	80	7	10.85	65.31	11.32	2.45	103.60	3.09	26.97	8.55	1.58	38.30	2.23	8.51
8	80	8	12.30	73.36	12.80	2.44	116.39	3.08	30.32	9.44	1.57	43.00	2.27	9.65
9	90	6	10.61	82.10	12.49	2.78	130.00	3.50	33.97	9.88	1.79	48.10	2.43	8.33
9	90	7	12.28	94.30	14.45	2.77	149.67	3.49	38.94	11.15	1.78	55.40	2.47	9.64
9	90	8	13.93	106.11	16.36	2.76	168.42	3.48	43.80	12.34	1.77	62.30	2.51	10.93
9	90	9	15.60	118.00	18.29	2.75	186.00	3.46	48.60	13.48	1.77	68.00	2.55	12.20
10	100	6.5	12.82	122.10	16.69	3.09	193.46	3.89	50.73	13.38	1.99	71.40	2.68	10.06
10	100	7	13.75	130.59	17.90	3.08	207.01	3.88	54.16	14.13	1.98	76.40	2.71	10.79

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.3

№	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_{y0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y0}$ см	$I_{z0}$ см <sup>4</sup>	$W_{z0}$ см <sup>3</sup>	$i_{z0}$ см	$I_{yx}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см	Масса 1 п. м. кг
10	100	8	15.60	147.19	20.30	3.07	233.46	3.87	60.92	15.66	1.98	86.30	2.75	12.25
10	100	10	19.24	178.95	24.97	3.05	283.83	3.84	74.08	18.51	1.96	110.00	2.83	15.10
10	100	12	22.80	208.90	29.47	3.03	330.95	3.81	86.84	21.10	1.95	122.00	2.91	17.90
10	100	14	26.28	237.15	33.83	3.00	374.98	3.78	99.32	23.49	1.94	138.00	2.99	20.63
10	100	16	29.68	263.82	38.04	2.98	416.04	3.74	111.61	25.79	1.94	152.00	3.06	23.30
11	110	7	15.15	175.61	21.83	3.40	278.54	4.29	72.68	17.36	2.19	106.00	2.96	11.89
11	110	8	17.20	198.17	24.77	3.39	314.51	4.28	81.83	19.29	2.18	116.00	3.00	13.50
12,5	125	8	19.69	294.36	32.20	3.87	466.76	4.87	121.98	25.67	2.49	172.00	3.36	15.46
12,5	125	9	22.00	327.48	36.00	3.86	520.00	4.86	135.88	28.26	2.48	192.00	3.40	17.30
12,5	125	10	24.33	359.82	39.74	3.85	571.04	4.84	148.59	30.45	2.47	211.00	3.45	19.10
12,5	125	12	28.89	422.23	47.06	3.82	670.02	4.82	174.43	34.94	2.46	248.00	3.53	22.68
12,5	125	14	33.37	481.76	54.17	3.80	763.90	4.78	199.62	39.10	2.45	282.00	3.61	26.20
12,5	125	16	37.77	538.56	61.09	3.78	852.84	4.75	224.29	43.10	2.44	315.00	3.68	29.65
14	140	9	24.72	465.72	45.55	4.34	739.42	5.47	192.03	35.92	2.79	274.00	3.76	19.41
14	140	10	27.33	512.29	50.32	4.33	813.62	5.46	210.96	39.05	2.78	301.00	3.82	21.45
14	140	12	32.49	602.49	59.66	4.31	956.98	5.43	248.01	44.97	2.76	354.00	3.90	25.50
16	160	10	31.43	774.24	66.19	4.96	1229.10	6.25	319.33	52.52	3.19	455.00	4.30	24.67
16	160	11	34.42	844.21	72.44	4.95	1340.06	6.24	347.77	56.53	3.18	496.00	4.35	27.02
16	160	12	37.39	912.89	78.62	4.94	1450.00	6.23	375.78	60.53	3.17	537.00	4.39	29.35
16	160	14	43.57	1046.47	90.77	4.92	1662.13	6.20	430.81	68.15	3.16	615.00	4.47	34.20
16	160	16	49.07	1175.19	102.64	4.89	1865.73	6.17	484.64	75.92	3.14	690.00	4.55	38.52
16	160	18	54.79	1290.24	114.24	4.87	2061.03	6.13	537.46	82.08	3.13	771.00	4.63	43.01
16	160	20	60.40	1418.85	125.60	4.85	2248.26	6.10	589.43	90.02	3.12	830.00	4.70	47.41
18	180	11	38.80	1216.44	92.47	5.60	1933.10	7.06	499.78	72.86	3.59	716.00	4.85	30.47

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.3

№	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_{y0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y0}$ см	$I_{z0}$ см <sup>4</sup>	$W_{z0}$ см <sup>3</sup>	$i_{z0}$ см	$I_{yx}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см	Масса 1 п. м. кг
18	180	12	42.19	1316.62	100.41	5.59	2092.78	7.04	540.45	78.15	3.58	776.00	4.89	33.12
20	200	12	47.10	1822.78	124.61	6.22	2896.16	7.84	749.40	98.68	3.99	1073.00	5.37	36.97
20	200	13	50.85	1960.77	134.44	6.21	3116.18	7.83	805.35	105.07	3.98	1156.00	5.42	39.92
20	200	14	54.60	2097.00	144.17	6.20	3333.00	7.81	861.00	111.50	3.97	1236.00	5.46	42.80
20	200	16	61.98	2362.57	163.37	6.17	3755.39	7.78	969.74	123.77	3.96	1393.00	5.54	48.65
20	200	20	76.54	2871.47	200.37	6.12	4860.42	7.72	1181.92	146.62	3.93	1689.00	5.70	60.08
20	200	25	94.29	3466.21	245.59	6.06	5494.04	7.63	1438.38	172.68	3.91	2028.00	5.89	74.02
20	200	30	111.54	4019.60	288.57	6.00	6351.05	7.55	1698.16	193.06	3.89	2332.00	6.07	87.56
22	220	14	60.38	2814.36	175.18	6.83	4470.15	8.60	1158.56	138.62	4.38	1655.00	5.91	47.40
22	220	16	68.58	3175.44	198.71	6.80	5045.37	8.58	1305.52	153.34	4.36	1869.00	6.02	53.83
25	250	16	78.40	4717.10	258.43	7.76	7492.10	9.78	1942.09	203.45	4.98	2775.00	6.75	61.55
25	250	18	87.72	5247.24	288.82	7.73	8336.69	9.75	2157.78	223.39	4.96	3089.00	6.83	68.86
25	250	20	96.96	5764.87	318.76	7.71	9159.73	9.72	2370.01	242.52	4.94	3395.00	6.91	76.11
25	250	22	106.12	6270.32	348.26	7.69	9961.30	9.69	2579.04	260.52	4.93	3691.00	7.00	83.31
25	250	25	119.71	7006.39	391.72	7.65	11125.52	9.64	2887.26	287.14	4.91	4119.00	7.11	93.97
25	250	28	133.12	7716.86	434.25	7.61	12243.84	9.59	3189.89	311.98	4.90	4527.00	7.23	104.50
25	250	30	141.96	8176.82	462.11	7.59	12964.66	9.56	3388.98	327.82	4.89	4788.00	7.31	111.44
25	250	35	163.71	9281.05	530.11	7.53	14682.73	9.47	3879.37	366.13	4.87	5401.68	7.53	128.51

1.4. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные по ГОСТ 8510—86

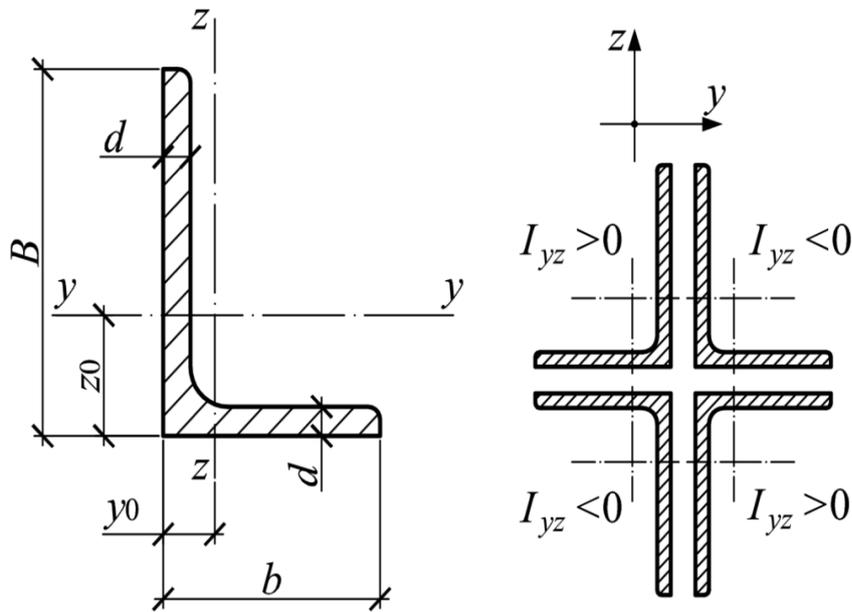


Рисунок 1.4 — Уголок стальной горячекатаный неравнополочный

Условные обозначения величин, характеризующих свойства швеллера:

$h$  — высота (швеллера);

$b$  — ширина полки;

$d$  — толщина стенки;

$t$  — толщина полки;

$y_0$  — расстояние от оси  $z - z$  до наружной грани стенки;

$A$  — площадь поперечного сечения;

$I$  — момент инерции;

$W$  — момент сопротивления;

$i$  — радиус инерции;

$S_y$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и справочные величины вычислены по номинальным размерам. При вычислении массы 1 м уголка плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .



Таблица 1.4 — Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

№	$B$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см	$y_0$ см	$z_0$ см	$I_{yz}$ см <sup>4</sup>	$\operatorname{tg} \alpha$	Масса 1 п. м. кг
2,5/1,6	25	16	3	1.16	0.70	0.43	0.78	0.22	0.19	0.44	0.42	0.86	0.22	0.392	0.91
3/2*	30	20	3	1.43	1.27	0.62	0.94	0.45	0.30	0.56	0.51	1.0	0.43	0.427	1.12
3/2*	30	20	4	1.86	1.61	0.82	0.93	0.56	0.39	0.55	0.54	1.04	0.54	0.421	1.46
3,2/2	32	20	3	1.49	1.52	0.72	1.01	0.46	0.30	0.55	0.49	1.08	0.47	0.382	1.17
3,2/2	32	20	4	1.94	1.93	0.93	1.00	0.57	0.39	0.54	0.53	1.12	0.59	0.374	1.52
4/2,5	40	25	3	1.89	3.06	1.14	1.27	0.93	0.49	0.70	0.59	1.32	0.96	0.385	1.48
4/2,5	40	25	4	2.47	3.93	1.49	1.26	1.18	0.63	0.69	0.63	1.37	1.22	0.281	1.94
4/2,5	40	25	5	3.03	4.73	1.82	1.25	1.41	0.77	0.68	0.66	1.41	1.44	0.374	2.37
4/3*	40	30	4	2.67	4.18	1.54	1.25	2.01	0.91	0.87	0.78	1.28	1.68	0.544	2.26
4/3*	40	30	5	3.28	5.04	1.88	1.24	2.41	1.11	0.86	0.82	1.32	2.00	0.539	2.46
4,5/2,8	45	28	3	2.14	4.41	1.45	1.48	1.32	0.61	0.79	0.64	1.47	1.38	0.382	1.68
4,5/2,8	45	28	4	2.80	5.68	1.90	1.42	1.69	0.80	0.78	0.68	1.51	1.77	0.379	2.20
5/3,2	50	32	3	2.42	6.18	1.82	1.60	1.99	0.81	0.91	0.72	1.60	2.01	0.403	1.9
5/3,2	50	32	4	3.17	7.98	2.38	1.59	2.56	1.05	0.90	0.76	1.65	2.59	0.401	2.4
5,6/3,6	56	36	4	3.58	11.37	3.01	1.78	3.70	1.34	1.02	0.84	1.82	3.74	0.406	2.81
5,6/3,6	56	36	5	4.41	13.82	3.70	1.77	4.48	1.65	1.01	0.88	1.87	4.50	0.404	3.46
6,3/4,0	63	40	4	4.04	16.33	3.83	2.01	5.16	1.67	1.13	0.91	2.03	5.25	0.397	3.17
6,3/4,0	63	40	5	4.98	19.91	4.72	2.00	6.26	2.05	1.12	0.95	2.08	6.41	0.396	3.91
6,3/4,0	63	40	6	5.90	23.31	5.58	1.99	7.29	2.42	1.11	0.99	2.12	7.44	0.393	4.63
6,3/4,0	63	40	8	7.68	29.60	7.22	1.96	9.15	3.12	1.09	1.07	2.20	9.27	0.386	6.03
6,5/5*	65	50	5	5.56	23.41	5.20	2.05	12.08	3.23	1.47	1.26	2.00	9.77	0.576	4.36
6,5/5*	65	50	6	6.60	27.46	6.16	2.04	14.12	3.82	1.46	1.30	2.04	11.46	0.575	5.18
6,5/5*	65	50	7	7.62	31.32	7.08	2.03	16.05	4.38	1.45	1.34	2.08	12.94	0.571	5.98

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.4

№	$B$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см	$y_0$ см	$z_0$ см	$I_{yx}$ см <sup>4</sup>	$\text{tg } \alpha$	Масса 1 п. м. кг
6,5/5*	65	50	8	8.62	35.00	7.99	2.02	18.88	4.93	1.44	1.37	2.12	13.61	0.570	6.77
7/4,5	70	45	5	5.59	27.76	5.88	2.23	9.05	2.62	1.27	1.05	2.28	9.12	0.406	4.39
7,5/5	75	50	5	6.11	34.81	6.81	2.39	12.47	3.25	1.43	1.17	2.39	12.00	0.436	4.79
7,5/5	75	50	6	7.25	40.92	8.08	2.38	14.60	3.85	1.42	1.21	2.44	14.10	0.435	5.69
7,5/5	75	50	7*	8.37	46.77	9.31	2.36	16.61	4.43	1.41	1.25	2.48	16.18	0.435	6.57
7,5/5	75	50	8	9.47	52.38	10.52	2.35	18.52	4.88	1.40	1.29	2.52	17.80	0.430	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.64	7.71	2.56	12.68	3.28	1.41	1.13	2.60	13.20	0.387	4.49
8/5	80	50	6	7.55	48.98	9.15	2.55	14.85	3.88	1.40	1.17	2.65	15.50	0.386	5.92
8/5	80	50	6	8.15	52.06	9.42	2.53	25.18	5.58	1.76	1.49	2.47	20.98	0.547	6.39
8/6*	80	60	7	9.42	59.61	10.87	2.52	28.74	6.43	1.75	1.53	2.52	24.01	0.546	7.39
8/6*	80	60	8	10.67	66.88	12.38	2.50	32.15	7.26	1.74	1.57	2.56	26.83	0.544	8.37
9/5,6	90	56	5.5	7.86	65.28	10.74	2.88	19.67	4.53	1.58	1.26	2.92	20.54	0.384	6.17
9/5,6	90	56	6	8.54	70.58	11.66	2.88	21.22	4.91	1.58	1.28	2.95	22.23	0.384	6.70
9/5,6	90	56	8	11.18	90.87	15.24	2.85	27.08	6.39	1.56	1.36	3.04	28.33	0.380	8.77
10/6,3	100	63	6	9.58	98.29	14.52	3.20	30.58	6.27	1.79	1.42	3.23	31.50	0.393	7.53
10/6,3	100	63	7	11.09	112.86	16.78	3.19	34.99	7.23	1.78	1.46	3.28	36.10	0.392	8.70
10/6,3	100	63	8	12.57	126.96	19.01	3.18	39.21	8.17	1.77	1.50	3.32	40.50	0.391	9.87
10/6,3	100	63	10	15.47	153.95	23.32	3.15	47.18	9.99	1.75	1.58	3.40	48.60	0.387	12.14
10/6,5*	100	65	7	11.23	114.05	16.87	3.19	38.32	7.70	1.85	1.52	3.24	38.00	0.415	8.81
10/6,5*	100	65	8	12.73	128.31	19.11	3.18	42.96	8.70	1.84	1.56	3.28	42.64	0.414	9.99
10/6,5*	100	65	10	15.67	155.52	23.45	3.15	51.68	10.64	1.82	1.64	3.37	51.18	0.410	12.30
11/7	110	70	6.5	11.45	142.42	19.11	3.53	45.61	8.42	2.00	1.58	3.55	46.80	0.402	8.98
11/7	110	70	8	13.93	171.54	23.22	3.51	54.64	10.20	1.98	1.64	3.61	55.90	0.400	10.93
12,5/8	125	80	7	14.06	226.53	26.67	4.01	73.73	11.89	2.29	1.80	4.01	74.70	0.407	11.04

Продолжение на следующей странице



Продолжение таблицы 1.4

№	$B$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см	$y_0$ см	$z_0$ см	$I_{yx}$ см <sup>4</sup>	$\text{tg } \alpha$	Масса 1 п. м. кг
12,5/8	125	80	8	15.98	225.62	30.26	4.00	80.95	13.47	2.28	1.84	4.05	84.10	0.406	12.58
12,5/8	125	80	10	19.70	311.61	37.27	3.98	100.47	16.52	2.26	1.92	4.14	102.00	0.404	15.47
12,5/8	125	80	12	23.36	364.79	44.07	3.95	116.84	19.46	2.24	2.00	4.22	118.00	0.400	18.34
14/9	140	90	8	18.00	363.68	38.25	4.49	119.79	17.19	2.58	2.03	4.49	121.00	0.411	14.13
14/9	140	90	10	22.24	444.45	47.19	4.47	145.54	21.14	2.58	2.12	4.58	147.00	0.409	17.46
16/10	160	100	9	22.87	605.97	56.04	5.15	186.03	23.96	2.85	2.24	5.19	194.00	0.391	17.96
16/10	160	100	10	25.28	666.59	61.91	5.13	204.09	26.42	2.84	2.28	5.23	213.00	0.390	19.85
16/10	160	100	12	30.04	784.22	73.42	5.11	238.75	31.23	2.82	2.36	5.32	249.00	0.388	23.58
16/10	160	100	14	34.72	897.19	84.65	5.08	271.60	35.89	2.80	2.43	5.40	282.00	0.385	27.26
18/11	180	110	10	28.33	952.28	78.59	5.80	276.37	32.27	3.12	2.44	5.88	295.00	0.376	22.20
18/11	180	110	12	33.69	1122.56	93.33	5.77	324.09	38.20	3.10	2.52	5.97	348.00	0.374	26.40
20/12,5	200	125	11	34.87	1449.02	107.31	6.45	446.36	45.98	3.58	2.79	6.50	465.00	0.392	27.37
20/12,5	200	125	12	37.89	1568.19	116.51	6.43	481.93	49.85	3.57	2.83	6.54	503.00	0.392	29.74
20/12,5	200	125	14	43.87	1800.83	134.64	6.41	550.77	57.43	3.54	2.91	6.62	575.00	0.390	34.43
20/12,5	200	125	16	49.77	2026.08	152.41	6.38	616.66	64.83	3.52	2.99	6.71	643.00	0.388	39.07

\* Уголки изготавливают по требованию потребителя

### 1.5. Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239—89

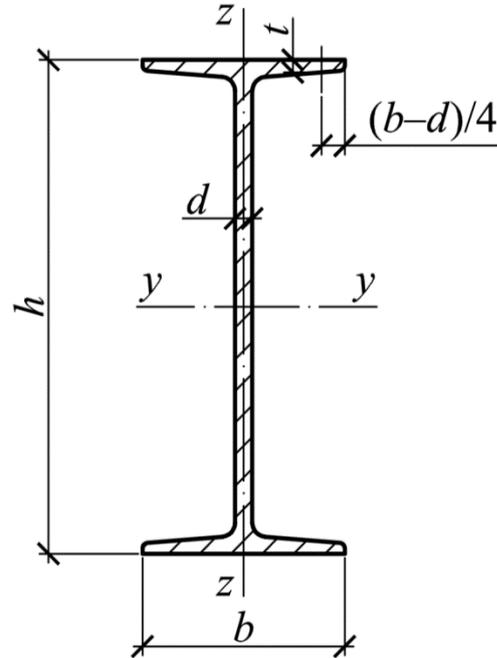


Рисунок 1.5 — Двутавр стальной горячекатаный

**ВНИМАНИЕ!** ГОСТ утратил силу на территории Российской Федерации с 30 ноября 2018 года в связи с изданием Приказа Росстандарта от 30.11.2018 № 1047-ст. Взамен введён ГОСТ Р 57837—2017.

Условные обозначения величин, характеризующих свойства двутавра:

- $h$  — высота (двутавра);
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — толщина полки;
- $A$  — площадь поперечного сечения;
- $I$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $i$  — радиус инерции;
- $S$  — статический момент полусечения.

Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам, плотность стали принята равной  $7.85 \text{ г/см}^3$ .



Таблица 1.5 — Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ утратил силу на территории РФ)

№	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	Масса 1 п. м. кг	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$S_y$ см <sup>3</sup>	$I_z$ см <sup>4</sup>	$W_z$ см <sup>3</sup>	$i_z$ см
10	100	55	4.5	7.2	12.0	9.46	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	14.7	11.50	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38
14	140	73	4.9	7.5	17.4	13.70	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.50	1.55
16	160	81	5.0	7.8	20.2	15.90	873	109.0	6.57	62.3	58.6	14.50	1.70
18	180	90	5.1	8.1	23.4	18.40	1290	143.0	7.42	81.4	82.6	18.40	1.88
20	200	100	5.2	8.4	26.8	21.00	1840	184.0	8.28	104.0	115.0	23.10	2.07
22	220	110	5.4	8.7	30.6	24.00	2550	232.0	9.13	131.0	157.0	28.60	2.27
24	240	115	5.6	9.5	34.8	27.30	3460	289.0	9.97	163.0	198.0	34.50	2.37
27	270	125	6.0	9.8	40.2	31.50	5010	371.0	11.20	210.0	260.0	41.50	2.54
30	300	135	6.5	10.2	46.5	36.50	7080	472.0	12.30	268.0	337.0	49.90	2.69
33	330	140	7.0	11.2	53.8	42.20	9840	597.0	13.50	339.0	419.0	59.90	2.79
36	360	145	7.5	12.3	61.9	48.60	13380	743.0	14.70	423.0	516.0	71.10	2.89
40	400	155	8.3	13.0	72.6	57.00	19062	953.0	16.20	545.0	667.0	86.10	3.03
45	450	160	9.0	14.2	84.7	66.50	27696	1231.0	18.10	708.0	808.0	101.00	3.09
50	500	170	10.0	15.2	100.0	78.50	39727	1589.0	19.90	919.0	1043.0	123.00	3.23
55	550	180	11.0	16.5	118.0	92.60	55962	2035.0	21.80	1181.0	1356.0	151.00	3.39
60	600	190	12.0	17.8	138.0	108.00	76806	2560.0	23.60	1491.0	1725.0	182.00	3.54

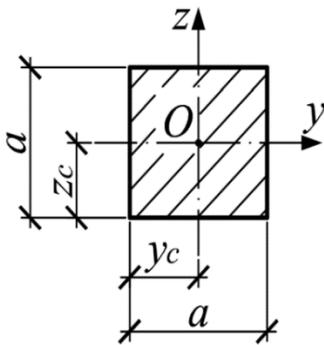
## 2. Геометрические характеристики простейших фигур

Принятые обозначения:

- $A$  — площадь фигуры;
- $y, z$  — главные оси;
- $I_y, I_z$  — моменты инерции;
- $I_y$  — центробежный момент инерции;
- $W_y, W_z$  — моменты сопротивления;
- $i_y, i_z$  — радиусы инерции.

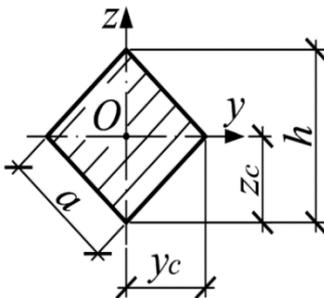
Значок «\*» у момент сопротивления  $W$  приводится для наиболее удалённых волокон от центра тяжести сечения.

### Квадрат



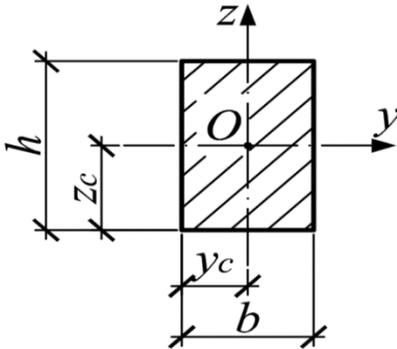
$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{a}{2}; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_y &= W_z = \frac{a^3}{6}; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.
 \end{aligned}$$

### Квадрат, поставленный на ребро



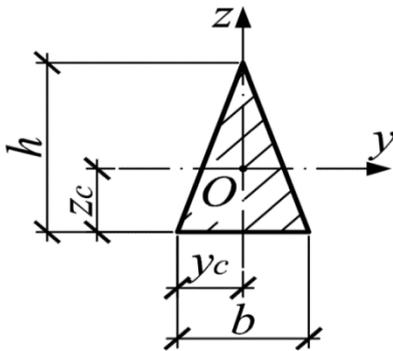
$$\begin{aligned}
 A &= a^2; \\
 y_c &= z_c = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0.71a; \\
 I_y &= I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}; \quad I_{yz} = 0; \\
 W_y &= W_z = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3; \\
 i_y &= i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0.289a.
 \end{aligned}$$

### Прямоугольник



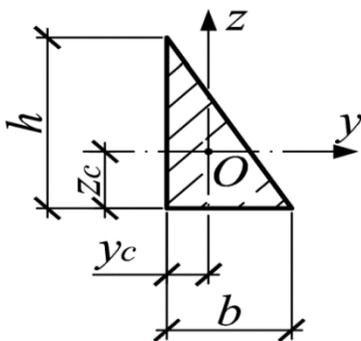
$$\begin{aligned}
 A &= bh; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{2}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{12}; \quad I_z = \frac{hb^3}{12}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_y &= \frac{bh^2}{6}; \quad W_z = \frac{hb^2}{6}; \\
 i_y &= 0.289h; \quad i_z = 0.289b.
 \end{aligned}$$

### Равнобедренный треугольник



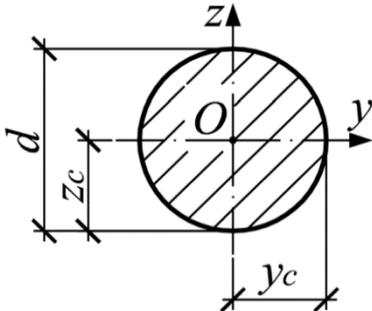
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{2}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{48}; \\
 I_{yz} &= 0; \\
 W_{y*} &= \frac{bh^2}{24} \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{2\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

### Прямоугольный треугольник



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{bh}{2}; \\
 y_c &= \frac{b}{3}; \quad z_c = \frac{h}{3}; \\
 I_y &= \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{36}; \\
 I_{yz} &= \pm \frac{b^2h^2}{72}; \\
 W_{y*} &= \frac{bh^2}{24}; \quad W_{z*} = \frac{hb^2}{24}; \\
 i_y &= \frac{h}{3\sqrt{2}}; \quad i_z = \frac{b}{3\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

### Круг



$$A = \frac{\pi d^2}{4};$$

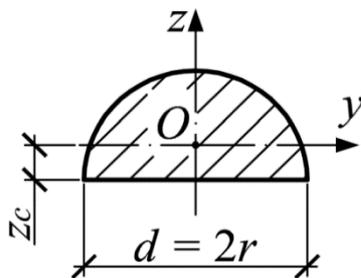
$$y_c = z_c = \frac{d}{2};$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}; \quad I_\rho = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$i_y = i_z = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}.$$

### Полукруг



$$A = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2};$$

$$y_c = \frac{d}{2} = r; \quad z_c = \frac{2d}{3\pi} = \frac{4r}{3\pi};$$

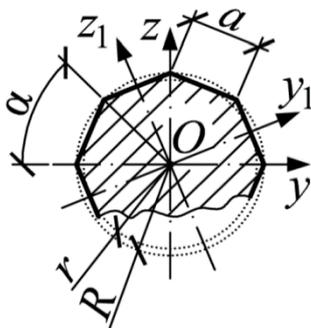
$$I_y = \frac{d^4}{16} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right); \quad I_z = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8};$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$W_y^* \approx 0.0239d^3; \quad W_z = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8}$$

$$i_y \approx 0.132d; \quad i_z = \frac{d}{4}.$$

### Правильный многоугольник с $n$ сторонами



$$A = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \alpha = nr^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{nar}{2};$$

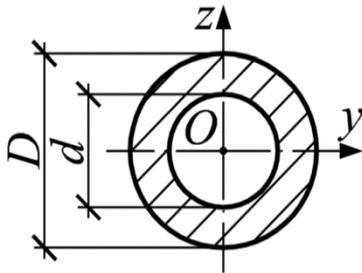
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha};$$

$$I_y = I_z = \frac{nar}{48} (6R^2 - a^2) = \frac{nar}{96} (12r^2 + a^2);$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}}.$$

### Кольцо



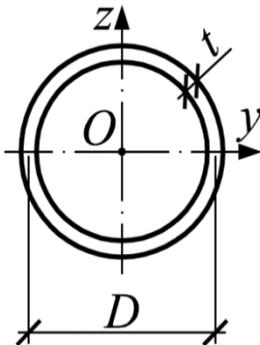
$$A = \frac{\pi d^2}{4} (1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0.05 D^4 (1 - \alpha^4);$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^3 (1 - \alpha^4);$$

$$i_y = i_z = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

### Тонкое кольцо $t \ll D$



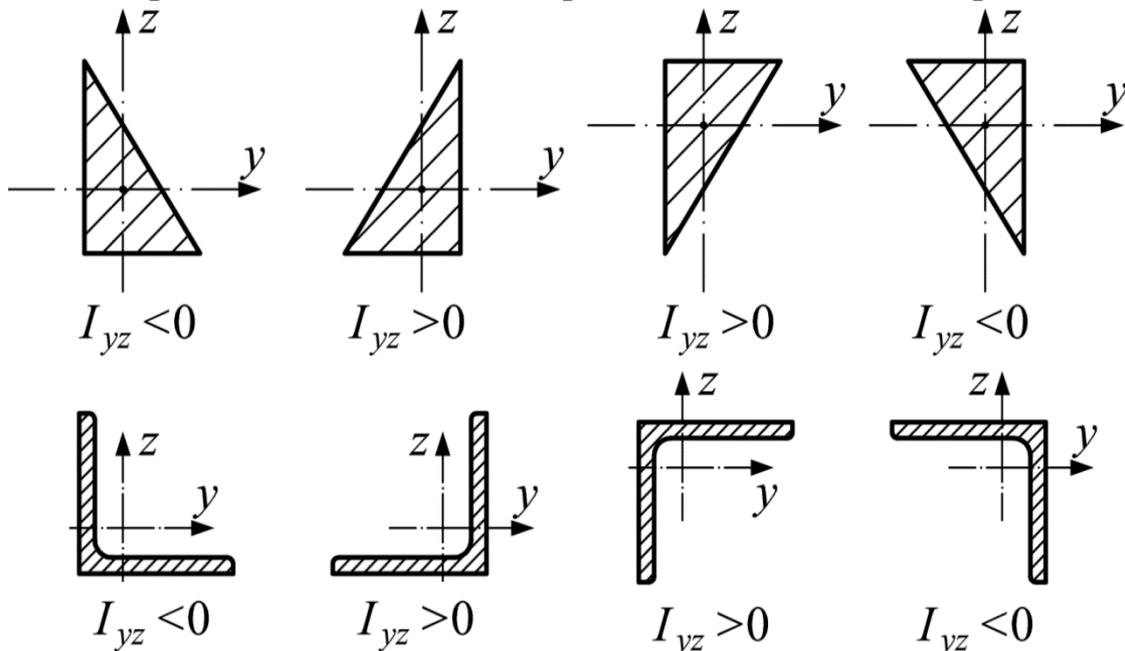
$$A = \pi D t;$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^3 t}{4} \approx 0.3926 D^3 t;$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi D^2 t}{4} \approx 0.7853 D^2 t;$$

$$i_y = i_z = 0.353 D.$$

### Правило знаков для центробежного момента инерции





### 3. Перевод единиц. Механические характеристики материалов

#### 3.1. Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами

Величина	Единица ее обозначения		Соотношение единиц
	по СНиП	в системе СИ	
Сила, нагрузка, вес	килограмм-сила (кгс) тонна-сила (тс)	ньютон (Н) килоньютон (кН)	1 кгс = 9.8Н ≈ 10Н 1 тс ≈ 10000Н = = 10кН
Линейная нагрузка, поверхностная нагрузка	килограмм-сила на метр (кгс/м), тонна-сила на метр (тс/м) килограмм-сила на квадратный метр (кгс/м <sup>2</sup> ) тонна-сила на квадратный метр (тс/м <sup>2</sup> )	ньютон на метр (Н/м) килоньютон на метр (кН/м), ньютон на квадратный метр (Н/м <sup>2</sup> ) килоньютон на квадратный метр (кН/м <sup>2</sup> )	1 кгс/м ≈ 10Н/м 1 тс/м ≈ 10кН/м 1 кгс/м <sup>2</sup> ≈ 10Н/м <sup>2</sup> 1 тс/м <sup>2</sup> ≈ 10кН/м <sup>2</sup>
Напряжение, давление, модуль упругости	килограмм-сила на квадратный миллиметр (кгс/мм <sup>2</sup> ), килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см <sup>2</sup> ) тонна-сила на квадратный метр (тс/м <sup>2</sup> )	паскаль (Па) (1 Па ≈ 0.1 миллиметра водного столба), мегапаскаль (МПа)	1 кгс/мм <sup>2</sup> ≈ ≈ 10 <sup>7</sup> Па = 10МПа 1 кгс/см <sup>2</sup> ≈ ≈ 10 <sup>5</sup> Па = 0.1 МПа 1 тс/м <sup>2</sup> ≈ 10 <sup>4</sup> Па = = 10кПа
Момент силы	килограмм-сила-метр (кгс · м) тонна-сила-метр (тс · м)	ньютон-метр (Н · м) килоньютон-метр (кН · м)	1 кгс · м ≈ 10Н · м 1 тс · м ≈ 10кН · м

$$\begin{aligned}
 1 \text{ м} &= 10^2 \text{ см}; & 1 \text{ м}^2 &= 10^4 \text{ см}^2; & 1 \text{ м}^3 &= 10^6 \text{ см}^3; & 1 \text{ м}^4 &= 10^8 \text{ см}^4; \\
 1 \text{ см} &= 10^{-2} \text{ м}; & 1 \text{ см}^2 &= 10^{-4} \text{ м}^2; & 1 \text{ см}^3 &= 10^{-6} \text{ м}^3; & 1 \text{ см}^4 &= 10^{-8} \text{ м}^4; \\
 1 \text{ Н} &= 10^{-3} \text{ кН}; & 1 \text{ Н} &= 10^{-6} \text{ МН}; & 1 \text{ кН} &= 10^{-3} \text{ МН}; & 1 \text{ тс} &= 10 \text{ кН}; \\
 1 \text{ кН} &= 10^3 \text{ Н}; & 1 \text{ МН} &= 10^3 \text{ Н}^2; & 1 \text{ МН} &= 10^6 \text{ Н}; & 1 \text{ кгс} &= 10 \text{ Н}; \\
 1 \text{ Па} &= 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ кПа} &= 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МПа} &= 1 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}; & 1 \text{ МН} &= 100 \text{ тс}; \\
 1 \text{ кПа} &= 10^3 \text{ Па}; & 1 \text{ кПа} &= 10^{-3} \text{ МПа}; & 1 \text{ МПа} &= 10^3 \text{ кПа}; & 1 \text{ МПа} &= 10 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}; \\
 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} &= 10 \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$



### 3.2. Механические характеристики материалов

Материал	$E$ , МПа	$G$ , МПа	$\alpha$ , $\frac{1}{\text{град}}$	$\gamma$ , $\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$
Сталь	$2.06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78.5
Медь прокатная	$1.1 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$165 \cdot 10^{-7}$	88.9
Серый чугун	$1.18 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^4$	$100 \cdot 10^{-7}$	68.0÷74.0
Дерево вдоль волокон	$1 \cdot 10^4$	$0.055 \cdot 10^4$	$20 \div 40 \cdot 10^{-7}$	5.5÷7.4

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Обозначения:  $E$  — модуль упругости при растяжении материала;

$G$  — модуль упругости при сдвиге;

$\nu$  — коэффициент Пуассона;

$\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения;

$\gamma$  — объёмный вес.



#### 4. Устойчивость сжатых стержней

Значения  $\varphi$  для дерева определяются в соответствии с п.7.3 СП 64.13330.2017 «Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—25—80»:

$$\varphi = 1 - 0.8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad \text{если } \lambda \leq 70;$$

$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \quad \text{если } \lambda > 70,$$

где  $\lambda$  — гибкость стержня;

$\mu$  — коэффициент приведения длины;

$l$  — длина стержня;

$i_{\min}$  — минимальный радиус инерции.

В случае стали С245, значение  $\varphi$  приведены в таблицы ниже и определены согласно выражению (8) СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81\*»:

$$\varphi = \frac{0.5 \left( \delta - \sqrt{\delta^2 - 39.48\bar{\lambda}^2} \right)}{\bar{\lambda}^2}.$$

Значение коэффициента  $\delta$  определяется по формуле

$$\delta = 9.87 (1 - \alpha + \beta\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}^2.$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}}$  — условная гибкость стержня;

$\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты, определяемые по таблице 7

СП 16.13330.2011.

Для типов сечений «б» по таблице 7 СП 16.330.2017  $\alpha = 0.04$  и  $\beta = 0.09$ , а также согласно таблицы В.5 для стали С245  $R_y = 235$  МПа;  $E = 2.06 \cdot 10^5$  МПа значения коэффициента  $\varphi$  приведены в таблице

$\varphi$	Материал	Гибкость $\lambda$									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\varphi$	Сталь С245	0.99	0.98	0.95	0.91	0.87	0.82	0.77	0.70	0.63	0.57
	Дерево	0.99	0.97	0.93	0.87	0.80	0.71	0.61	0.47	0.37	0.30
$\varphi$	Материал	Гибкость $\lambda$									
		110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$\varphi$	Сталь С245	0.50	0.44	0.39	0.35	0.31	0.28	0.25	0.23	0.21	0.19
	Дерево	0.25	0.21	0.18	0.15	0.13	0.12	0.10	0.09	0.08	0.08

Расчётное сопротивление стали  $R_y$  определяется согласно СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II—23—81\*».

В случае, если гибкость стержня  $\lambda$  превышает предельную гибкость  $\lambda_{пред}$ , критическое напряжение определяется по формуле Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{Э}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{A(\mu l)^2}.$$

В случае, если гибкость стержня  $\lambda$  не превышает предельную гибкость  $\lambda_{пред}$ , критическое напряжение определяется по формуле В. Ф. Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где  $a$  и  $b$  — эмпирические коэффициенты, определяемые для различных материалов на основе экспериментальных данных.

Таблица 4.1 — Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  для некоторых материалов, используемых в формуле Ф. С. Ясинского

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$\lambda_{пред}$
Сталь	310	1.14	100
Дерево	40	0.203	70

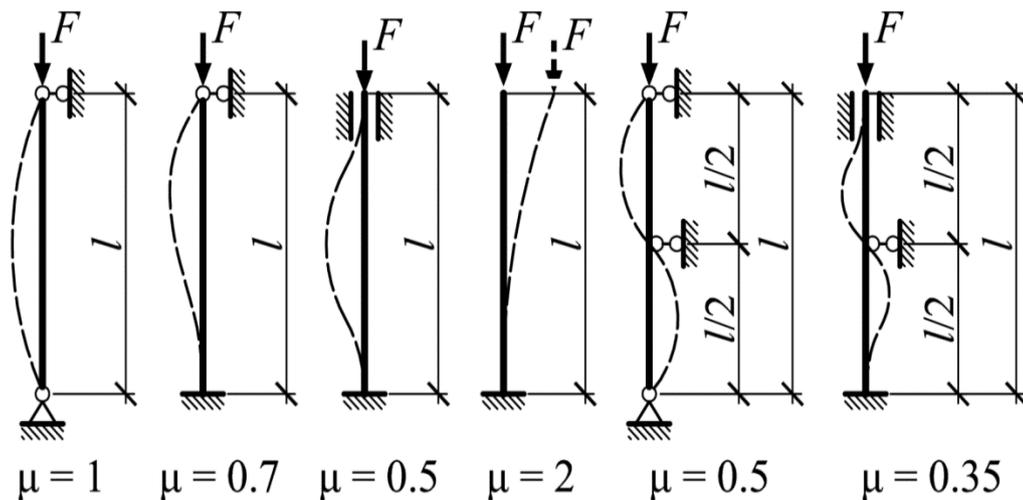


Рисунок 4.1 — Зависимость коэффициента приведения длины  $\mu$  от схемы закрепления стержня

## 5. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок

### 5.1. Правила построения и контроля эпюр (метод начальных параметров)

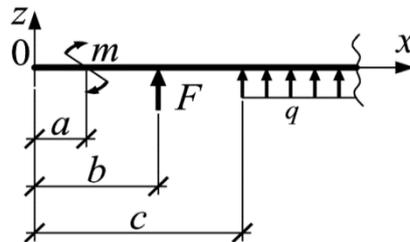


Рисунок 5.1 — К методу начальных параметров: положительное направление внешних нагрузок

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[ \sum m(x-a) + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} \right];$$

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ \sum m \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} \right],$$

- где  $E$  — Модуль упругости балки;  
 $I$  — момент инерции балки относительно оси  $y$ ;  
 $a$  — расстояние от начала координат до точки приложения изгибающего момента  $m$ ;  
 $b$  — расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы  $F$ ;  
 $c$  — расстояние от начала координат до начала распределённой нагрузки  $q$ .

Использование приведённого выражения может быть возможно при соблюдении двух из четырёх правил Клебша: 1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят. 2. При действии на балку распределённой нагрузки, не достигающей до правого конца балки, её необходимо продолжить до правого концевого сечения, одновременно уравнивая её противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности.

Дифференциальная зависимость между внутренними силовыми факторами может быть записана:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^3\varphi}{dx^3} = EI \frac{d^4w}{dx^4}.$$



Тогда правила построения эпюр углов поворота и прогибов могут быть сформулированы:

1. На участке, где эпюра поперечных сил  $Q$  положительна, эпюра углов поворота  $\varphi$  имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра поперечных сил  $q$  отрицательная, эпюра углов поворота  $\varphi$  имеет выпуклость вверх.
2. В точке, где эпюра поперечных сил  $Q$  проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре углов поворота  $\varphi$  в этом месте точка перегиба (т. п.).
3. В точке, где эпюра изгибающего момента  $\varphi$  проходит через ноль, на эпюре углов поворота  $\varphi$  в этом месте экстремум (ext).
4. В точке, где на эпюре изгибающего момента  $M$  наблюдается скачок, на эпюре углов поворота  $\varphi$  точка излома (т. и.).
5. На участке, где эпюра изгибающего момента  $M$  положительна, эпюра прогибов  $w$  имеет выпуклость вниз; на участке, где эпюра изгибающего момента  $M$  отрицательная, эпюра прогибов  $w$  имеет выпуклость вверх.
6. В точке, где эпюра изгибающего момента  $M$  проходит через ноль, или происходит скачок через ноль, на эпюре прогибов  $w$  в этом месте точка перегиба (т. п.).
7. В точке, где эпюра углов поворота  $\varphi$  проходит через ноль, на эпюре прогибов  $w$  в этом месте экстремум (ext).

Сокращённо данные правила могут быть представлены графически:

Нагрузка					0	—		
$Q$					ext	0		
$M$					т.п.	ext	0	
$\varphi$						т.п.	ext	0
$w$							т.п.	ext

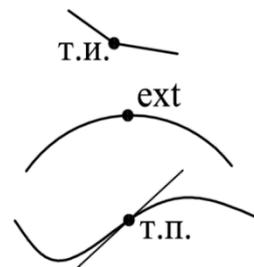
где — парабола;

— излом;

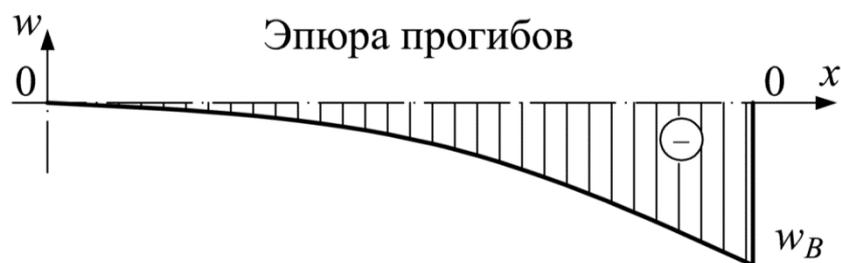
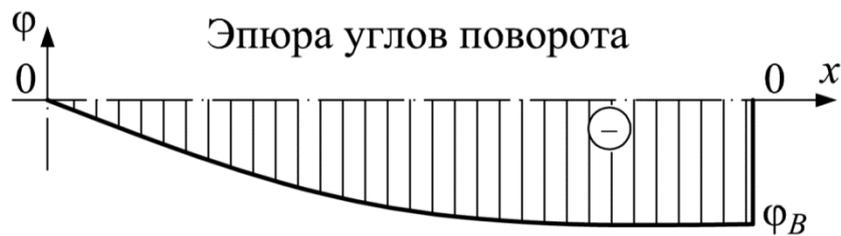
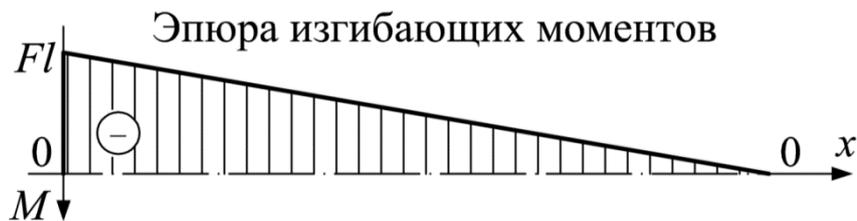
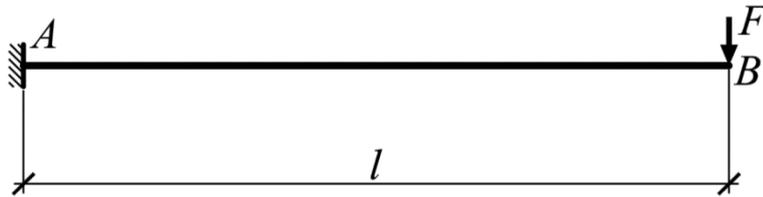
— скачок;

ext — экстремум;

т.п. — точка перегиба.

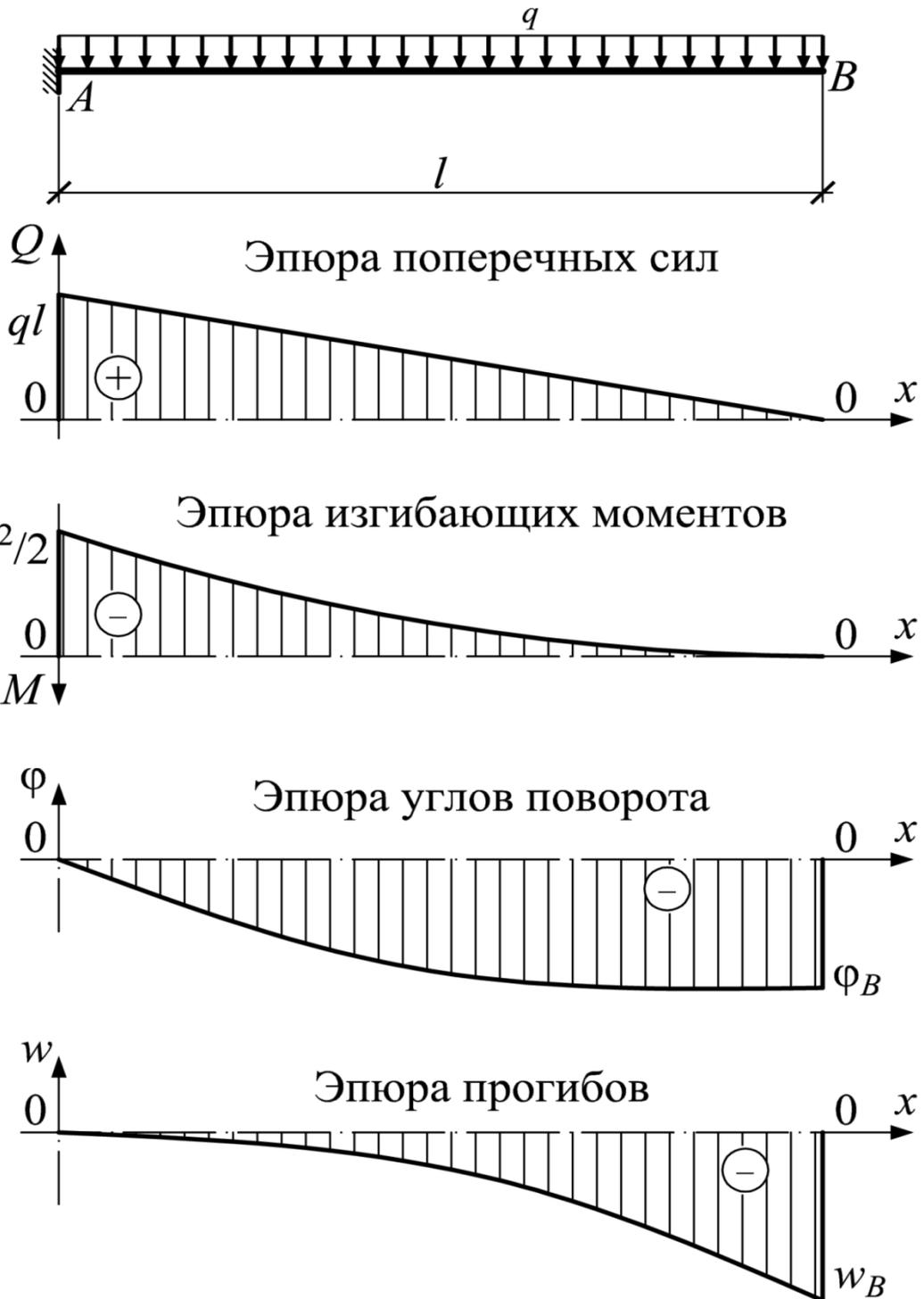


5.2. Эпюры внутренних усилий и перемещений для некоторых простых балок



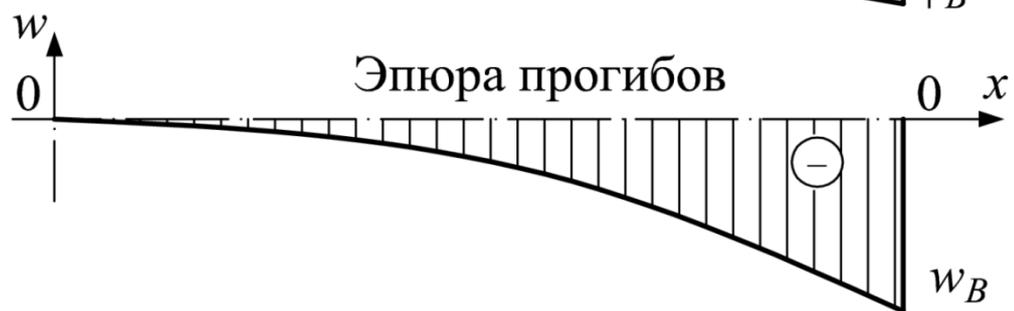
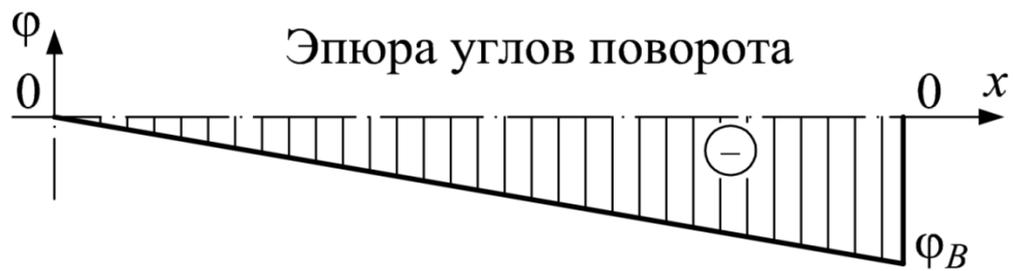
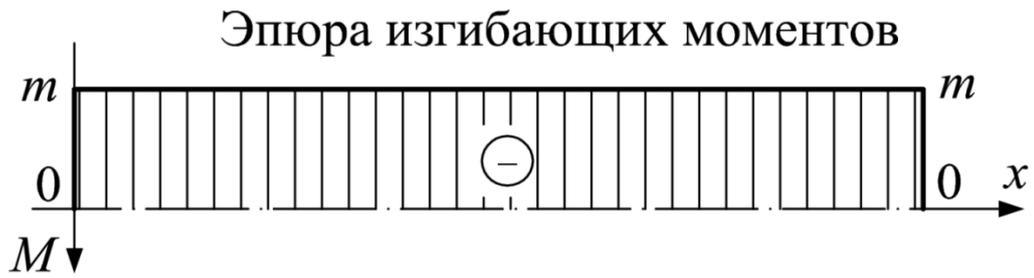
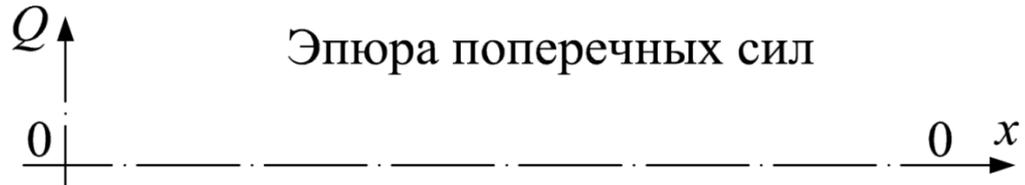
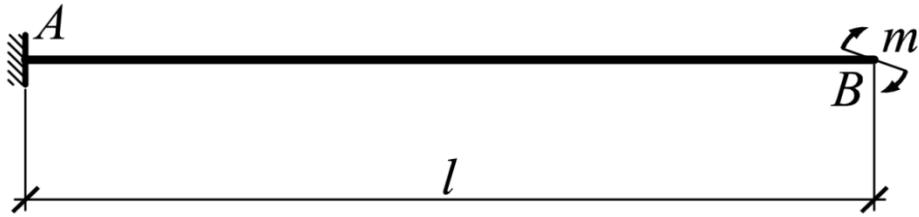
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{Fl^2}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}.$$



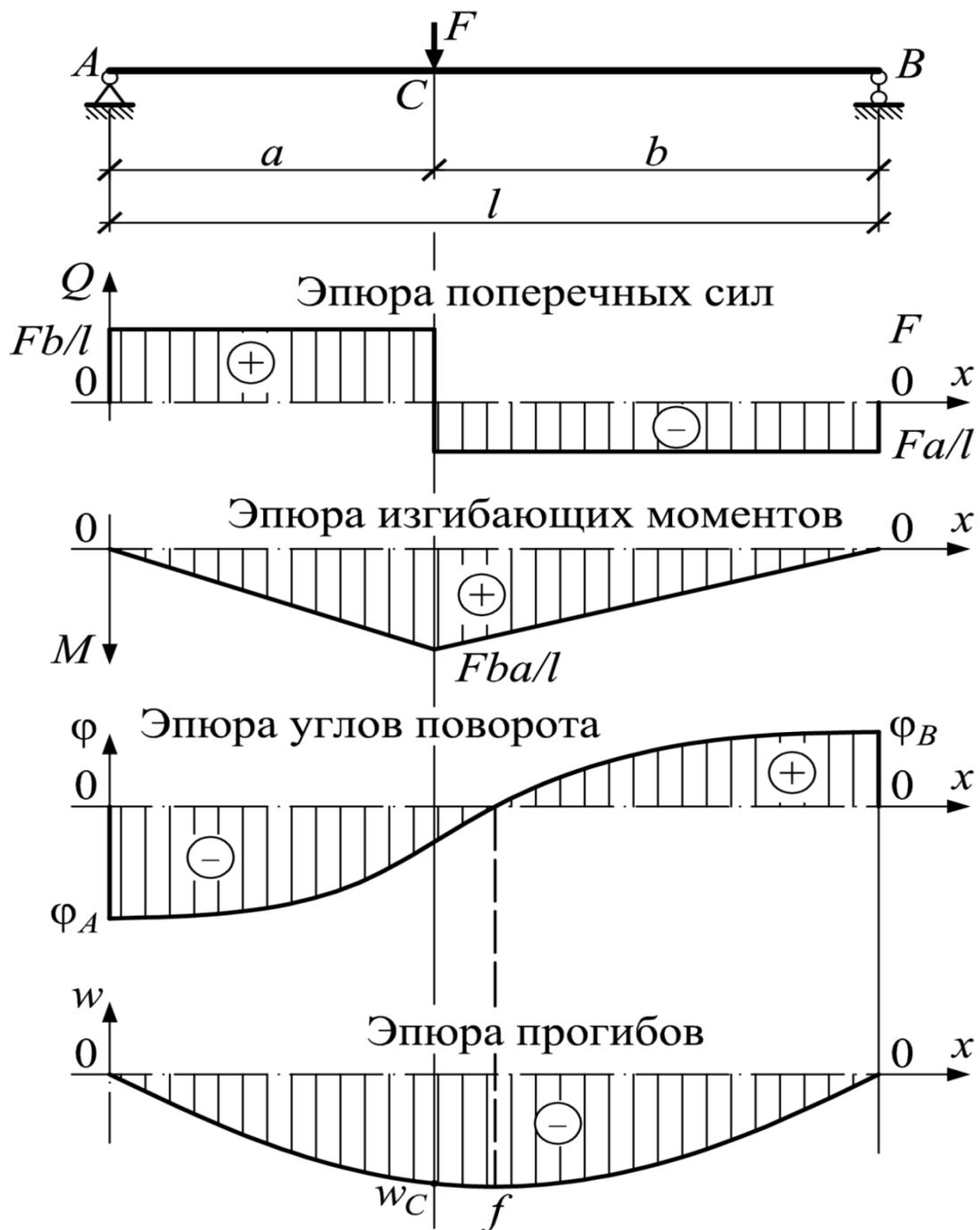
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI};$$

$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$



$$\varphi_B = -\frac{ml}{EI};$$

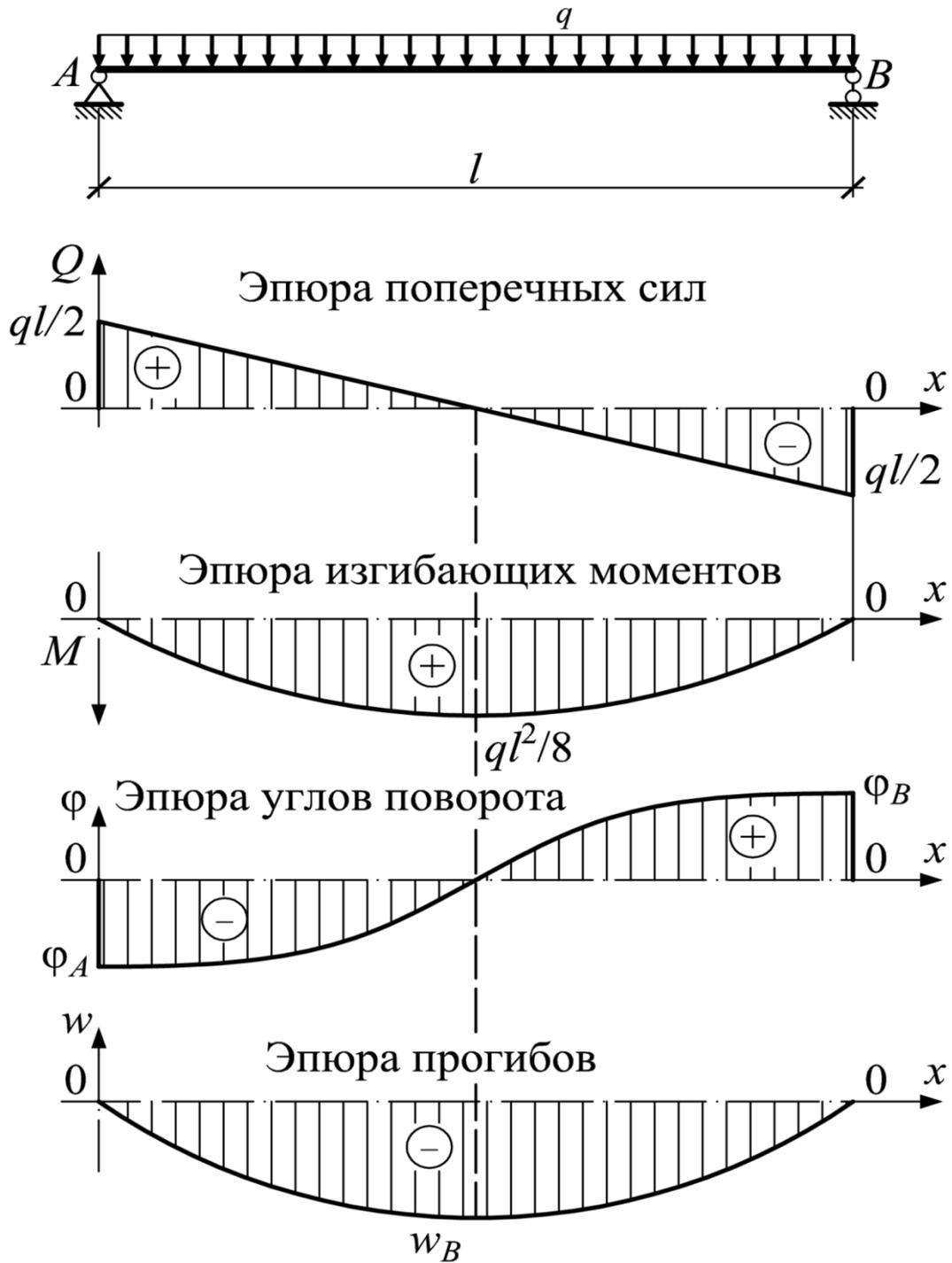
$$w_B = w_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{ml^2}{EI}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{Fba}{EI} (a+2b); \quad \varphi_B = \frac{1}{6} \frac{Fa}{EI} (l^2 - a^2);$$

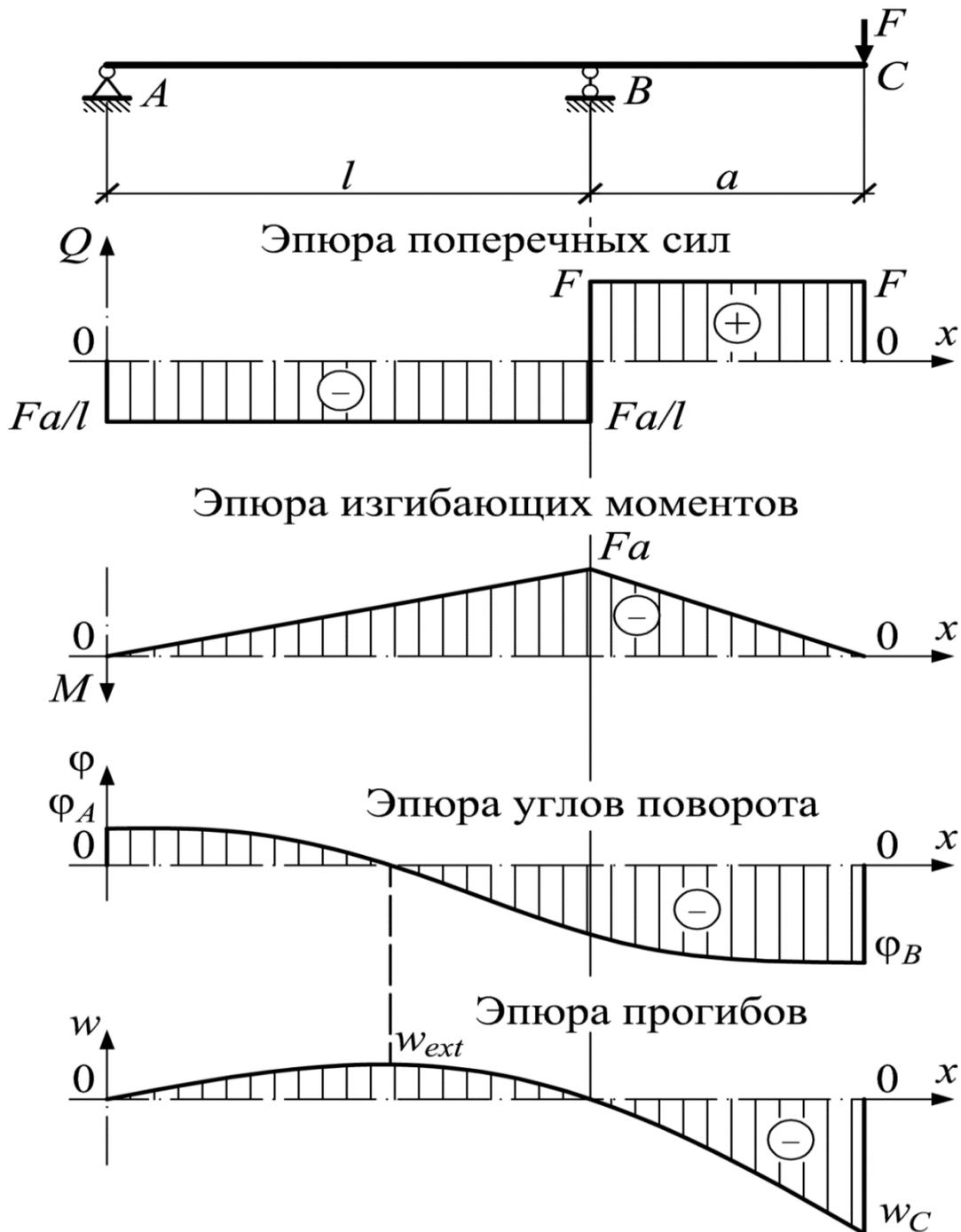
$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F}{EI} \frac{(ab)^2}{l}, \quad \text{при } x = a;$$

$$f = w_{\max} = w_C = -\frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI}, \quad \text{при } x = a = b = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}; \quad \varphi_B = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI};$$

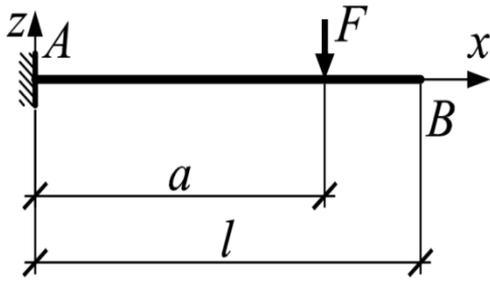
$$w_{\max} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad \text{при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{F a l}{E I}; \quad \varphi_C = -\frac{1}{6} \frac{F a}{E I} (2l + 3a);$$

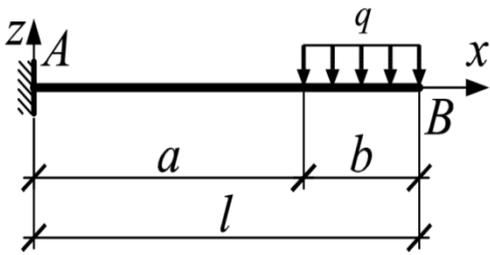
$$w_{ext} = 0.0642 \frac{F a l^2}{E I}; \quad \text{при } x = 0.578l;$$

$$w_C = -\frac{1}{3} \frac{F a^2}{E I} (l + a).$$



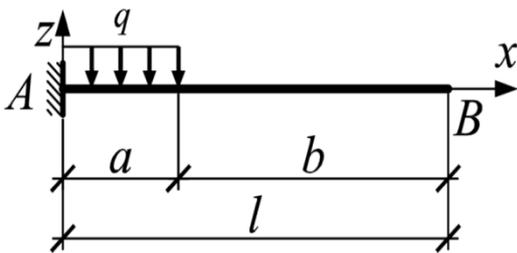
$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{Fa^2}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{6} \frac{Fa^2}{EI} (3l - a).$$



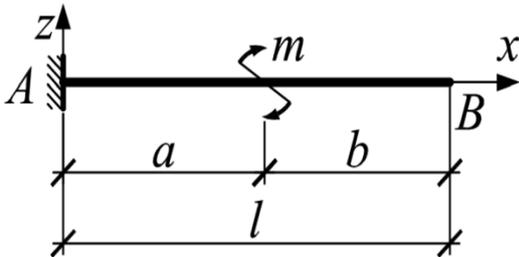
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI} \left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right);$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{ql^4}{EI} \left(3 - 3\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4}\right).$$



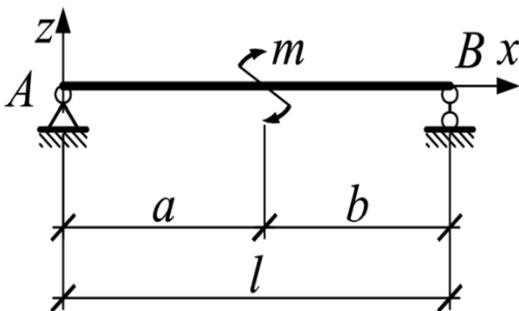
$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI};$$

$$w_B = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI} (4l - a).$$



$$\varphi_B = -\frac{ma}{EI};$$

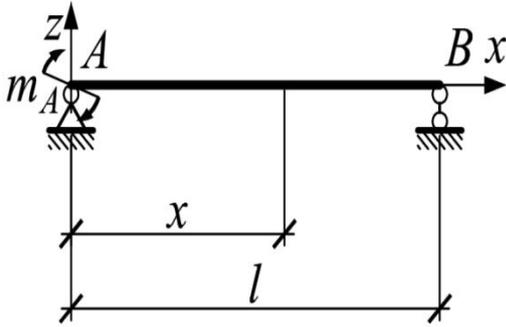
$$w_B = -\frac{1}{2} \frac{ma(l+b)}{EI}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{6} \frac{ml}{EI} \left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ml}{EI} \left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right);$$

$$w(a) = -\frac{1}{3} \frac{mab}{EI} \left(\frac{a-b}{l}\right) \text{ при } x = a.$$

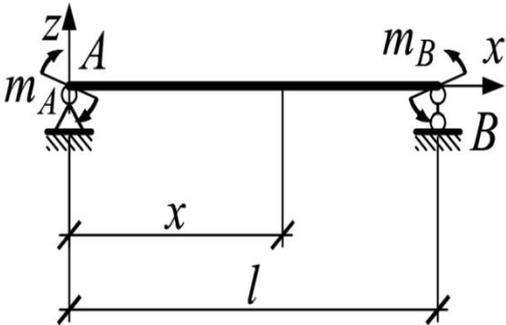


$$\varphi_A = -\frac{1}{3} \frac{ml}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{ml}{EI};$$

$$w_{\max} = -0.0642 \frac{ml^2}{EI};$$

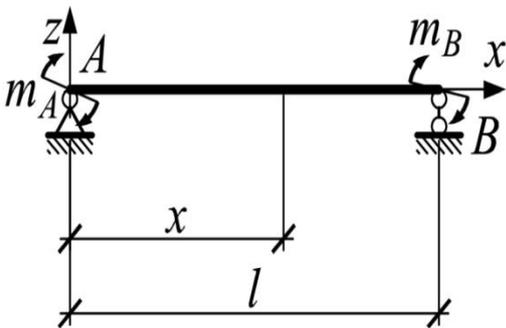
$$w = -\frac{1}{16} \frac{ml^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} + \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

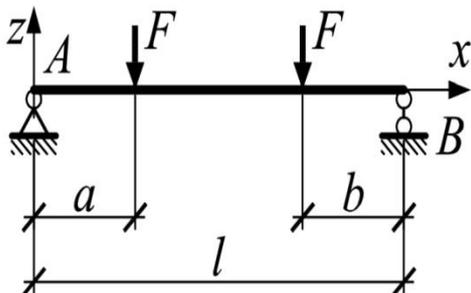
$$w_{\max} = -\frac{1}{16} \frac{(m_A + m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{3} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{6} \frac{m_B l}{EI};$$

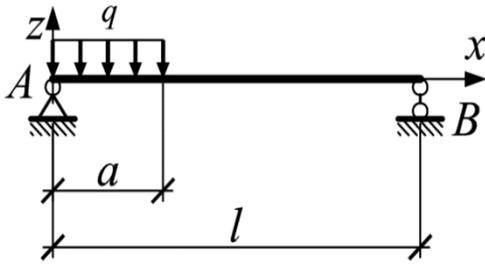
$$\varphi_B = \frac{1}{6} \frac{m_A l}{EI} - \frac{1}{3} \frac{m_B l}{EI};$$

$$w = -\frac{1}{16} \frac{(m_A - m_B) l^2}{EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{2} \frac{Fa}{EI} (l - a);$$

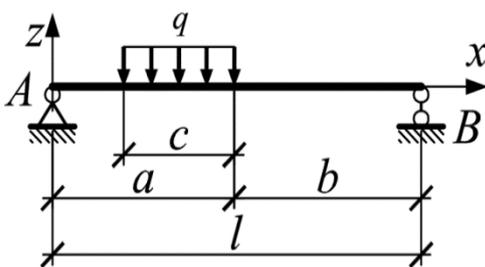
$$w_{\max} = -\frac{1}{24} \frac{Fl^3}{EI} \left( 3 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{1}{6} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a}{2l}\right);$$

$$\varphi_B = \frac{1}{12} \frac{a^2 l}{EI} \left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right);$$

$$w = -\frac{1}{24} \frac{a^3 b}{EI} \left(4 - 3\frac{a}{l}\right).$$

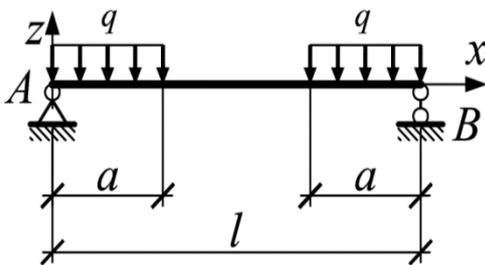


$$\varphi_A = \frac{1}{24} \frac{qbc}{EI} \left[4a(l+b) - c^2\right];$$

$$\varphi_B = \frac{1}{24} \frac{qac}{EI} \left[4b(l+a) - c^2\right];$$

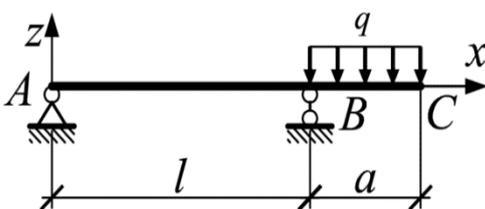
$$w = -\frac{1}{6} \frac{qc}{EI} \left[\frac{ab}{l} \left(2al - 2a^2 - \frac{c}{4}\right) + \frac{c^3}{64}\right]$$

при  $x = a$ .



$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{1}{12} \frac{qa^2}{EI} (3l - 2a);$$

$$w_{\max} = -\frac{1}{48} \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2\frac{a^2}{l^2}\right) \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{1}{12} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{6} \frac{qa^2 l}{EI};$$

$$\varphi_C = \frac{1}{6} \frac{qa^2}{EI} (a+l);$$

$$w_C = -\frac{1}{24} \frac{qa^2}{EI} (4l + 3a);$$

$$w_{\max} = 0.0321 \frac{qa^2 l^2}{EI} \text{ при } x = 0.577l.$$