ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Учебно-методическое пособие

по выполнению расчетно-графической работы на тему «Расчёт на прочность статически неопределимых стержневых систем при центральном растяжении (сжатии)»

по дисциплине

«Сопротивление материалов»

Авторы

Стрельников Г. П.,

Кадомцева Е. Э.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические положения, примеры решения типовых задач и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Расчёт на прочность статически неопределимых стержневых систем при растяжении (сжатии)» по дисциплинам сопротивление материалов, специальные вопросы сопротивления материалов, механика, теоретическая механика для архитекторов, строительная механика для архитекторов.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Стрельников Г.П.,

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Кадомцева Е.Э.

Оглавление

РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

***Под растяжением (сжатием) понимают такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные (продольные) силы N, а все прочие силовые факторы равны нулю*.**

Очевидно, такой вид деформации вызывается внешними силами (или их равнодействующими) действующими вдоль оси бруса (рис. 1).

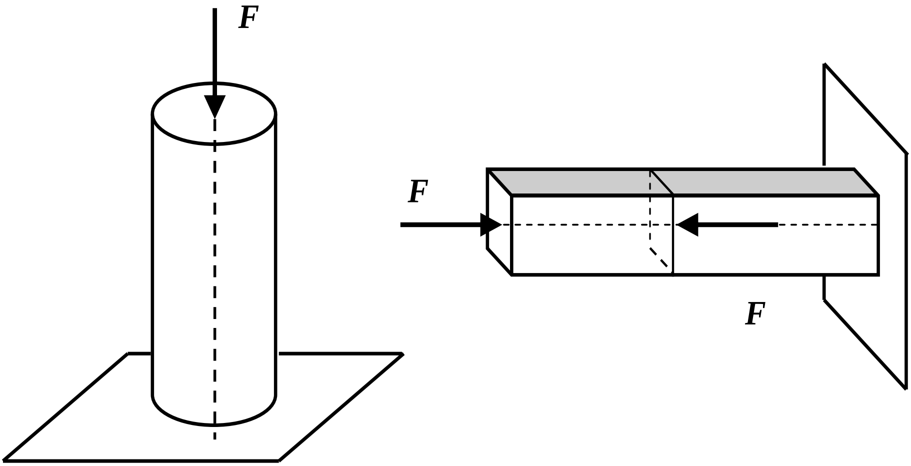


Рис. 1

Брус, испытывающий центральное растяжение сжатие, называется ***стержнем.***

Рассмотрим растяжение стержня внешними силами ***F***, приложенными к его концам. Очевидно, если воспользоваться методом сечений, во всех сечениях возникает продольная сила ***N***, равная внешней нагрузке ***F*** (рис. 2).

При растяжении продольная сила ***N*** направлена от сечения($N > 0$), а при сжатии – к сечению($N < 0$).

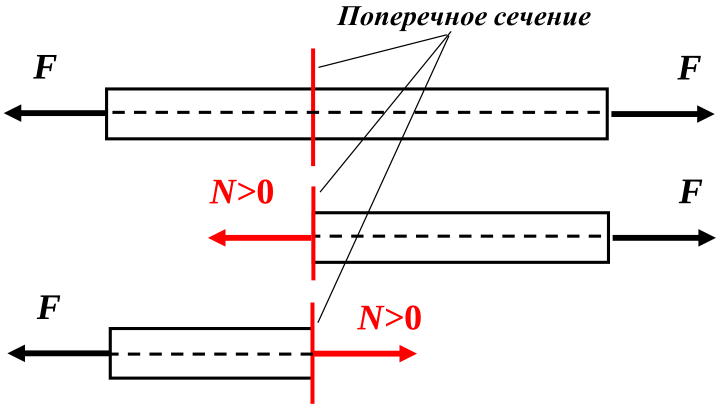


Рис. 2

Если на стержень действует более сложная нагрузка, представляющая собой систему сил, приложенных в различных его точках, то согласно методу сечений ***продольная сила N в произвольном поперечном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения***:

$$N = \left(\sum F_{kx}\right)_{отсеч}.$$

Внешние силы, способствующие растяжению стержня относительно сечения, берут со знаком плюс, а силы, сжимающие стержень, – со знаком минус. Это правило знаков показано на рис. 3.

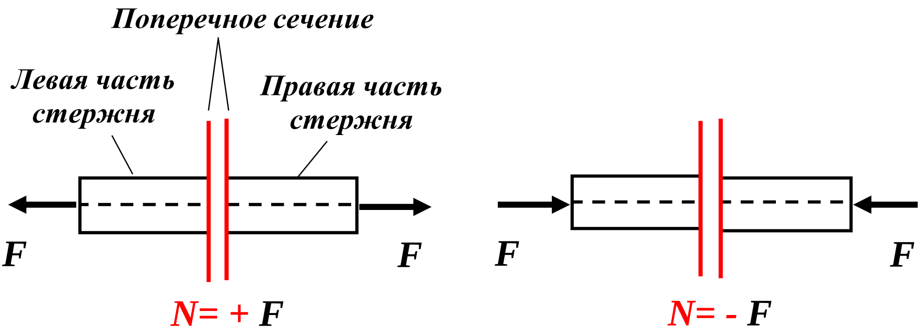


Рис. 3

Нормальные напряжения ($\boldsymbol{\sigma}$), возникающие в поперечном сечении стержня, в случае центрального растяжения-сжатия определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где

N – величина продольной силы, ***A*** – площадь поперечного сечения (Рис. 4).

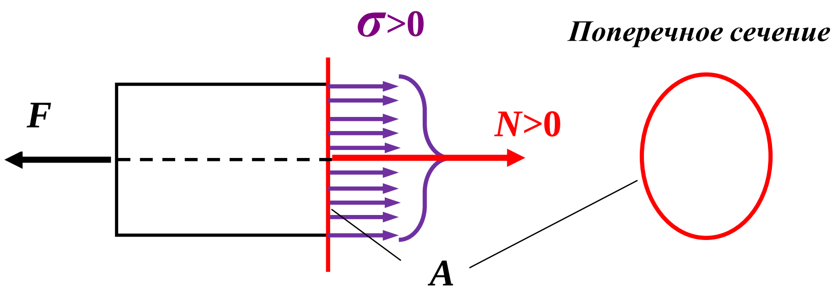


Рис. 4

Наиболее распространенным расчетом на прочность является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому, наибольшее напряжение, возникающее в материале не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы. Эта величина называется допускаемым напряжением [σ].

При осевом растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При расчете элементов конструкции, работающих на центральное растяжение и сжатие, встречаются задачи трех типов:

1). Проверка прочности;

2). Подбор размеров поперечного сечения (проектировочный расчёт);

3).Определение несущей способности (грузоподъемности) стержня или стержневой системы.

Решение первой задачи сводится к проверке выполнений условий прочности при заданной нагрузке, форме, размерах сечений и свойствах материалов, то есть

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Решение второй задачи сводится к определению размеров поперечного сечения за- данной формы при заданных нагрузках и свойствах материала, то есть

$$A \geq \frac{[N]}{[\sigma]}$$

Решение третьей задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождении нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям), то есть

$$[N] \leq A \cdot [\sigma].$$

Абсолютное продольное удлинение стержня

$$\Delta l = l_1 - l,$$

где

l – первоначальная длина стержня;

l_1 – длина стержня после деформации (рис. 5).

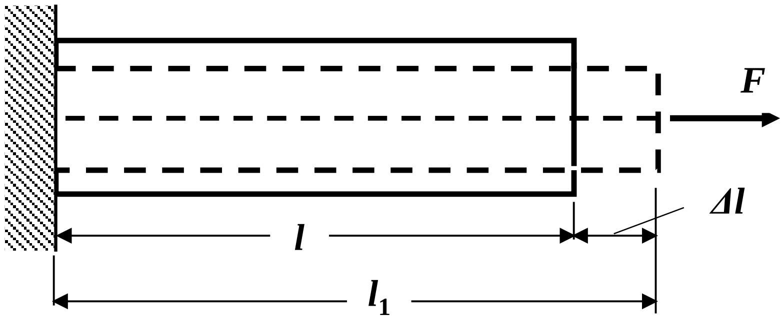


Рис. 5

Закон Гука для абсолютного продольного удлинения имеет вид

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \tag{2}$$

Где

L – длина стержня,

E – модуль продольной (нормальной) упругости или модуль 1-го рода или модуль Юнга;

E·A – жесткость поперечного сечения.

Таким образом, абсолютные деформации прямо пропорциональны продольной силе, длине стержня и обратно пропорциональны жесткости поперечного сечения EA.

Если стержень состоит из нескольких участков, тогда его абсолютная деформация равна алгебраической сумме абсолютных деформации каждого участка, которые можно определить по формуле (2).

Статически неопределимыми конструкциями называются конструкции, в которых число неизвестных усилий или реакций опор больше чем уравнений статики, которые можно составить для данной системы.

То есть уравнений статики недостаточно для определения неизвестных реакций или усилий. Недостающие уравнения получают из условий совместности деформаций. Условия совместности деформаций – это некоторые зависимости между деформациями, полученные из ограничений, накладываемыми лишними связями на деформации или перемещения.

Степень статической неопределимости системы – это разность между числом неизвестных реакций или усилий и числом уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы.

На рис. 6 число неизвестных реакций m = 2 (H_B и H_D), число уравнений равновесия n = 1 (Если все внешние, внутренние силы и реакции приложены по одной оси, то для данной системы можно составить только одно

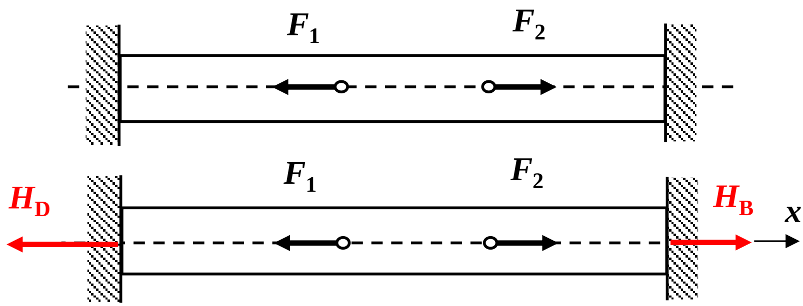


Рис. 6

уравнение равновесия).

Следовательно, степень статической неопределимости $s = m - n$ = 2 – 1 = = 1. *Задача один раз статически неопределима.*

На рис. 7 число неизвестных реакций m = 4 (R_D , H_D , N_1 , N_2), число уравнений равновесия n = 3.

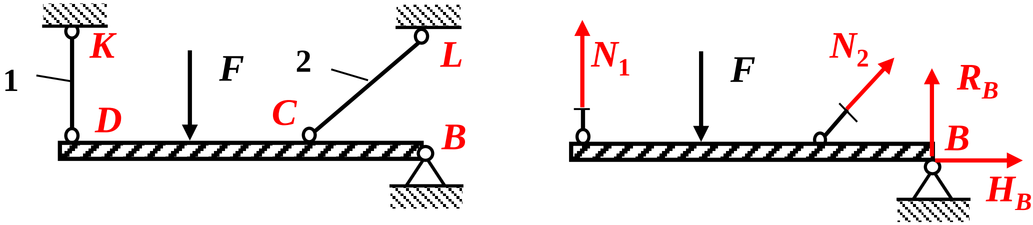


Рис. 7

Следовательно, степень статической неопределимости $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} = 4 - 3 = = 1$. *Задача один раза статически неопределима.* Количество дополнительных условий совместности деформаций (уравнений перемещений), необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно быть равно степени статической неопределимости системы.

Так для стержня, изображенного на рис. 6 условие совместности деформаций имеет вид

$\Delta l = 0$,

где

Δl – абсолютное продольное удлинение стержня.

Для конструкции, изображенной на рис. 7 для составления уравнения совместности деформаций необходимо рассмотреть систему в деформированном состоянии (рис. 8).

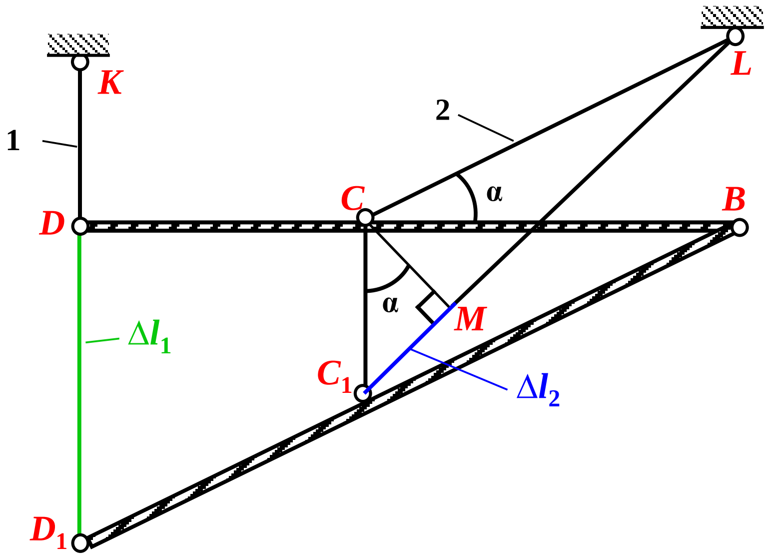


Рис. 8

Под действием силы ***F*** жёсткий брус ***BD*** повернется вокруг шарнира ***B***, при этом узел ***C*** переместится в точку C_1 (Вследствие малости перемещений узлов конструкции действительные перемещения точки ***C*** по дуге окружности заменим перемещением по вертикальной прямой CC_1). Узел ***D*** переместится в точку D_1. DD_1 - величина, на которую удлинился первый стержень, то есть

$$\Delta l_1 = DD_1.$$

Чтобы найти величину, на которую удлинился второй стержень, опустим перпендикуляр из ***C*** на C_1L (длина второго стержня после деформации), тогда

$$C_1M = \Delta l_2. \qquad C_1L \perp CM.$$

Из подобия треугольников DBD_1 и CBC_1 имеем

$$\frac{DD_1}{BD} = \frac{CC_1}{BC} \rightarrow CC_1 = \frac{BC}{BD} \cdot \Delta l_1 .$$

С другой стороны из треугольника CMC_1 имеем

$$CC_1 = \frac{C_1 M}{\sin\alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha} .$$

Приравнивая два последних соотношения, получаем

$$\frac{BC}{BD} \cdot \Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha}$$

Мы получили уравнение совместности деформаций.

<u>План решения статически неопределимых задач</u>

Статически неопределимые конструкции будем рассчитывать, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задач. При этом будем придерживаться следующего порядка:

1. **<u>Кинематический анализ задачи</u>** (определение степени статической неопределимости конструкции).

Определяем число неизвестных реакций или усилий (***m***), определяем число уравнений равновесия (***n***), которые необходимо составить для данной конструкции, определяем степень статической неопределимости конструкции (***s***) $s = m - n$.

Величина ***s*** равна числу условий (уравнений) совместности деформаций.

2. **Статическая сторона задачи.** Составляем уравнения равновесия.

3. **Геометрическая сторона задачи**. Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливаем связи между деформациями и перемещениями отдельных элементов конструкции и записываем уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений).

4. **Физическая сторона задачи**. На основании закона Гука выражаем перемещения или деформации элементов конструкции через действующие в них неизвестные (пока) усилия.

5. **Математическая сторона задачи (синтез)**. Решая совместно статические, геометрические и физические уравнения, находим неизвестные опорные реакции или усилия.

Статически неопределимые системы обладают рядом характерных особенностей:

1. Статически неопределимые конструкции являются более жесткими, чем соответствующие статически определимые, так как имеют дополнительные связи.

2. В статически неопределимых системах возникают меньшие по величине внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определимыми системами при одинаковых внешних нагрузках.

3. Нарушение лишних связей в статически неопределимой системе не всегда приводит к разрушению, в то время как потеря связи в статически определимой системе делает ее геометрически изменяемой.

4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, то есть фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы.

5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.

6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий и поэтому должны обязательно учитываться.

2. РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТЕРЖНЯ

Задача 1. Для многоступенчатого статически неопределимого стального стержня (рис. 9), нагруженного осевыми продольными силами F_1 и F_2, **требуется**:

1. Раскрыть статическую неопределимость (Определить опорные реакции).
2. Построить эпюры продольных сил.
3. Определить нормальные напряжения (σ) на каждом участке, выразив их через значение площади поперечного сечения стержня ***A.***
4. Подобрать площадь поперечного сечения ***A*** из условия прочности по нормальным напряжениям на каждом участке многоступенчатого стержня, выбрать значение ***A,*** обеспечивающего прочность всего многоступенчатого стержня.

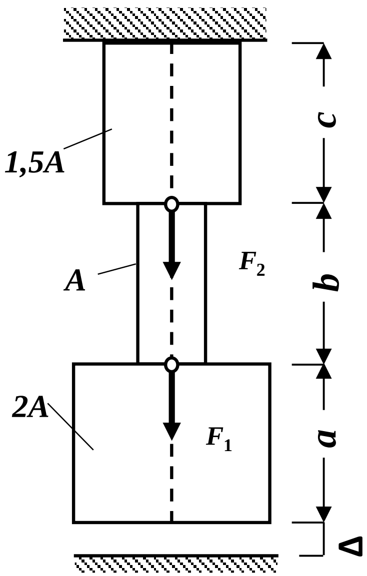


Рис. 9

Допускаемое напряжение [σ] = 160МПа, модуль упругости при растяжении-сжатии стального стержня ***E*** = $2{\cdot}10^5$ МПа. Зазор $\Delta = \dfrac{1\cdot 10^{-6}\,м^3}{A}$ имеют указанный размер до приложения нагрузок. После приложения нагрузки зазор закрывается.

Исходные данные:

a = 1, 8м; ***b*** = 1,2м; ***c***=1,5 м; F_1 = 600кН; F_2 = 300кН;
[σ] = 160Мпа = 16кН/см^2.

Решение

2.1. Определение опорных реакций

2.1.1. Кинематический анализ

Развернем стержень по часовой стрелке на 90^0, чтобы он стал горизонтальным. Под действием нагрузки стержень растянется, зазор закроется и возникают опорные реакции H_B и H_D (рис. 10)

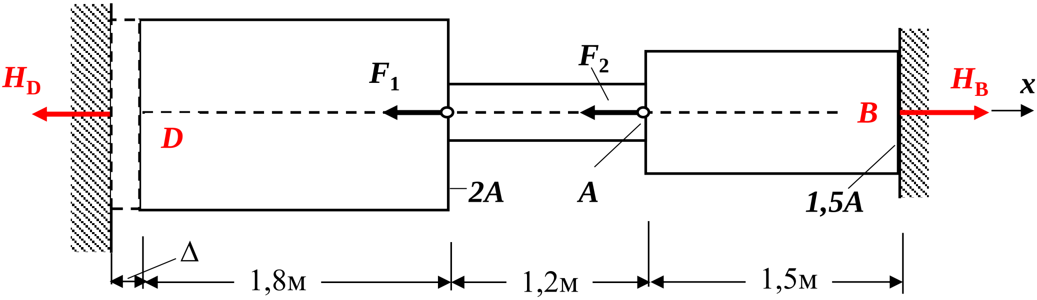


Рис. 10

Число неизвестных опорных реакций m = 2 (H_B и H_D), число уравнений равновесия n = 1, степень статической неопределимости $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} = 2 - 1 = 1$. *Задача один раз статически неопределима.*

2.1.2. Статическая сторона задачи

Сумма проекций всех сил на ось $\boldsymbol{x}$ равна нулю:

$\Sigma\ \boldsymbol{F_x} = 0$: $-\boldsymbol{H_D} - \boldsymbol{F_1} - \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{H_B} = 0$; $-\boldsymbol{H_D}$ – 600кН – 300кН + $\boldsymbol{H_B}$ = 0;

$$-\boldsymbol{H_D} + \boldsymbol{H_B} = 900 \text{ кН} \quad (3)$$

2.1.3. Геометрическая сторона задачи

Длина стержня после деформации увеличивается на величину Δ, поэтому абсолютное удлинение стержня равна Δ:

$$\Delta l = \Delta \quad (4)$$

2.1.4. Физическая сторона задачи

Закон Гука для абсолютного продольного удлинения на каждом участке стержня определяется по формуле (2).

Границами участка являются сечения приложения сил, а также сечения, где изменяется площадь поперечного сечения.

В нашем случае стержень имеет три участка, которые нумеруем, как показано на рис. 11

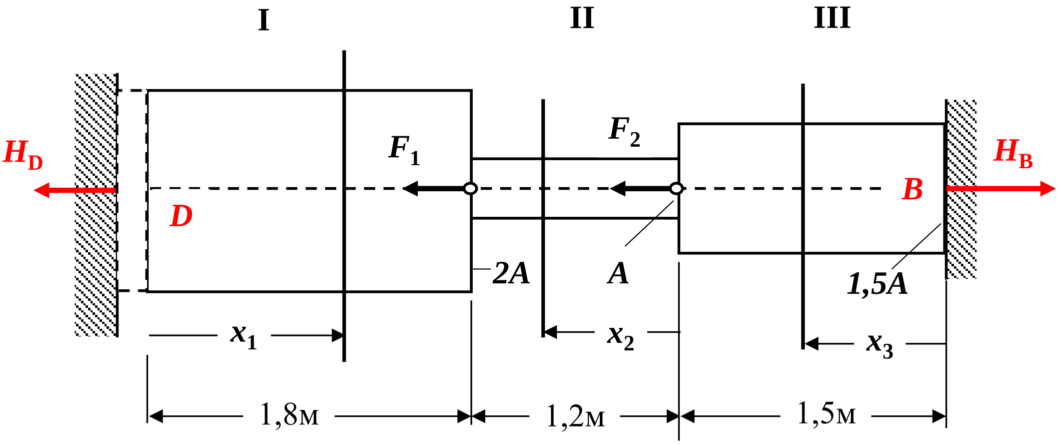
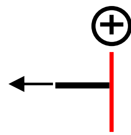


Рис. 11

Для определения абсолютной деформации стержня необходимо знать продольную силу на каждом участке стержня, которую определяем, используя определение и правило знаков.
Проводим сечение на **I** участке стержня и рассмотрим левую от сечения часть стержня (рис. 11). Поскольку сечение может перемещаться от левой границы участка до правой границы, координата x_1 ,будет изменяться

<u>I участок</u> $0 \le x_1 \le 1{,}8$ м.



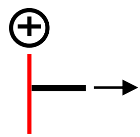
$$N_I = +H_D;$$

Справа показан фрагмент правила знаков.
Абсолютное продольное удлинения на этом участке

$$\Delta l_I = \frac{N_I l_I}{E_I A_I} = \frac{H_D \cdot 180\ \text{см}}{2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 2A} = \frac{H_D \cdot 45 \cdot 10^{-4}}{A} \frac{\text{см}^3}{\text{кН}}$$

Здесь площадь поперечного сечения $A_I = 2A$; длина участка l_I = 1,8м = =180 см; $E_I = E_{стали} = 2 \cdot 10^5$МПа = $2 \cdot 10^4$кН/см^2.
Проводим сечение на **II** участке стержня и рассмотрим правую от сечения часть стержня (рис. 11). Поскольку сечение может перемещаться от левой границы участка до правой границы, координата x_2 ,будет изменяться

<u>II участок</u> $1{,}2\text{м} \ge x_2 \ge 0$.



$$N_{II} = +H_B - F_2 = H_B - 300;$$

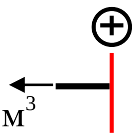
Абсолютное продольное удлинение стержня на этом участке

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{E_{II} A_{II}} = \frac{(\boldsymbol{H}_B - 300\text{кН}) \cdot 120\text{ см}}{2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot \boldsymbol{A}} = \frac{(\boldsymbol{H}_B - 300\text{кН}) \cdot 60 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \frac{\text{с}}{\text{к}}$$

Здесь площадь поперечного сечения $\boldsymbol{A}_{II}$ = $\boldsymbol{A}$; длина участка $\boldsymbol{l}_{II}$ = 1,2м = =120 см; $\boldsymbol{E}_{II}$ = $\boldsymbol{E}_{стали}$ = 2·10^{5}МПа = 2·10^{4}кН/см^2. Проводим сечение на **III** участке стержня и рассмотрим правую от сечения часть стержня (рис. 11). Поскольку сечение может перемещаться от левой границы участка до правой границы, координата $\boldsymbol{x}_3$,будет изменяться

<u>**III участок**</u> $1{,}5\text{м} \geq \boldsymbol{x}_3 \geq 0$.

$\boldsymbol{N}_{III} = +\boldsymbol{H}_B$;



Абсолютное продольное удлинение стержня на этом участке

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III} l_{III}}{E_{III} A_{III}} = \frac{\boldsymbol{H}_B \cdot 150\text{ см}}{2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 1{,}5\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{H}_B \cdot 50 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \frac{\text{см}^3}{\text{кН}}$$

Здесь площадь поперечного сечения $\boldsymbol{A}_{III}$ =1,5$\boldsymbol{A}$; длина участка
$\boldsymbol{l}_{III}$ = 1,5м = 150 см; $\boldsymbol{E}_{III}$ = $\boldsymbol{E}_{стали}$ = 2·10^{5}МПа = 2·10^{4}кН/см^2.
Находим абсолютное удлинение всего стержня
$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} =$
=

$$\left(\frac{\boldsymbol{H}_D \cdot 45 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} + \frac{(\boldsymbol{H}_B - 300\text{кН}) \cdot 60 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} + \frac{\boldsymbol{H}_B \cdot 50 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \right) \frac{\text{см}^3}{\text{кН}}$$

;

$$\Delta l = (45\boldsymbol{H}_D + 110\boldsymbol{H}_B - 18000\text{кН}) \cdot \frac{10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \frac{\text{см}^3}{\text{кН}}. \qquad (5)$$

2.1.5. Математическая сторона задачи (синтез)

Подставим выражение (5) в уравнение совместности деформаций (4):
Δl=

$$\left(45\,\boldsymbol{H}_D+110\,\boldsymbol{H}_B-18000\text{кН}\right)\cdot\frac{10^{-4}}{\boldsymbol{A}}\frac{\text{см}^3}{\text{кН}}=\Delta=\frac{1\cdot10^{-6}\text{м}^3}{\boldsymbol{A}}=\frac{1\cdot10^{-6}\cdot10^{6}\text{см}^3}{\boldsymbol{A}}=\frac{1\text{см}^3}{\boldsymbol{A}}$$

=

$$45\,\boldsymbol{H}_D+110\,\boldsymbol{H}_B=28000\text{кН}$$

(6)

Данное уравнение вместе с уравнением равновесия (3) образуют, так называемую, полную систему уравнений, решение которой позволяет найти все неизвестные опорные реакции:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{H_D} + \boldsymbol{H_B} = 900 \text{ кН} \\ 45\boldsymbol{H_D} + 110\,\boldsymbol{H_B} = 28000 \text{ кН} \end{cases} \quad (7)$$

Умножая первое уравнение системы на 45, и складывая его со вторым уравнением, получаем

155 $\boldsymbol{H_B}$ = (900 · 45 + 28000) кН = 68500 кН →

$$\boldsymbol{H_B} = \frac{68500\text{ кН}}{155}=441{,}93\text{кН}=442\text{кН}.$$

Из первого уравнения системы находим $\boldsymbol{H_D}$

$\boldsymbol{H_D}$ = –900 кН + $\boldsymbol{H_B}$= –900 кН + 442 кН= –458 кН.

Итак,

$\boldsymbol{H_D}$ = –458 кН; $\boldsymbol{H_B}$ = 442 кН.

Выполним две проверки:

a) Проверяем правильно ли решена система уравнений

$$\begin{cases} -\boldsymbol{H_D} + \boldsymbol{H_B} - 900 \text{ кН} = (-(-458) + 442 - 900) \text{ кН} = 900 - 900 \text{ кН} = 0 \\ 45\boldsymbol{H_D} + 110\,\boldsymbol{H_B} - 28000 \text{ кН} = (45\cdot(-458) + 110\cdot442 - 28000) \text{ кН} = \\ \quad = (-48610 + 48620) \text{ кН} = 10 \text{ кН} \approx 0. \end{cases}$$

Определяем погрешность в последнем уравнении

$$\delta=\frac{|10|}{\dfrac{48610+48620}{2}}\cdot100\%=0{,}02\%<5\%$$

b) Кинематическая проверка:

Δ/– Δ = 0 ?

Δ/– Δ = $\left(45\,\boldsymbol{H}_D+110\,\boldsymbol{H}_B-18000\text{кН}\right)\cdot\dfrac{10^{-4}}{\boldsymbol{A}}\dfrac{\text{см}^3}{\text{кН}}-\dfrac{1\text{см}^3}{\boldsymbol{A}}=$

=

$$\left(45\cdot(-458)+110\cdot 442-18000\right)\text{кН}\cdot\frac{10^{-4}}{\boldsymbol{A}}\frac{\text{см}^3}{\text{кН}}-\frac{1\text{см}^3}{\boldsymbol{A}}=\frac{(1{,}001-1)}{\boldsymbol{A}}$$

Проверки выполняются.

2.2. Определение величин продольных сил и нормальных напряжений. Построение эпюры продольных сил

<u>На I участке:</u>

Продольная сила равна

$$\boldsymbol{N_I} = +\boldsymbol{H}_D = -458 \text{ кН}.$$

Площадь поперечного сечения

$$\boldsymbol{A_I} = 1{,}5\boldsymbol{A}.$$

Нормальные напряжения

$$\sigma_I=\frac{\boldsymbol{N_I}}{\boldsymbol{A_I}}=\frac{-458\text{кН}}{1{,}5\,\boldsymbol{A}}=-\frac{305\,\text{кН}}{\boldsymbol{A}}.$$

<u>На II участке:</u>

Продольная сила равна

$$\boldsymbol{N_{II}} = \boldsymbol{H}_B - 300 \text{ кН} = (442-300) \text{ кН} = 142 \text{ кН}.$$

Площадь поперечного сечения

$$\boldsymbol{A_{II}} = \boldsymbol{A}.$$

Нормальные напряжения

$$\sigma_{II}=\frac{\boldsymbol{N_{II}}}{\boldsymbol{A_{II}}}=\frac{142\text{кН}}{\boldsymbol{A}}.$$

<u>На III участке:</u>

Продольная сила равна

$$\boldsymbol{N_{III}} = +\boldsymbol{H}_B = 442 \text{ кН};$$

Площадь поперечного сечения

$$\boldsymbol{A_{III}} = 2\boldsymbol{A}.$$

Нормальные напряжения

$$\sigma_{III}=\frac{\boldsymbol{N_{III}}}{\boldsymbol{A_{III}}}=\frac{442\text{кН}}{2\,\boldsymbol{A}}=\frac{221\text{кН}}{\boldsymbol{A}}.$$

Для построения эпюры продольных сил откладываем положительные значения продольной силы вверх, а отрицательные – вниз.

В пределах участка продольная сила постоянна, на эпюре – прямая линия параллельная оси $\boldsymbol{x}$ (рис. 12)

2.3. Определение площади поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям

Наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения в стержне будут на ***III*** участке, для которого запишем условие прочности

$$\sigma_{max} = \sigma_{III} = \frac{221\text{кН}}{\boldsymbol{A}} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{A} \geq \frac{221\text{кН}}{16\dfrac{\text{кн}}{\text{см}^2}} = 13{,}8125\text{см}^2.$$

Принимаем *A* = 13,8см².

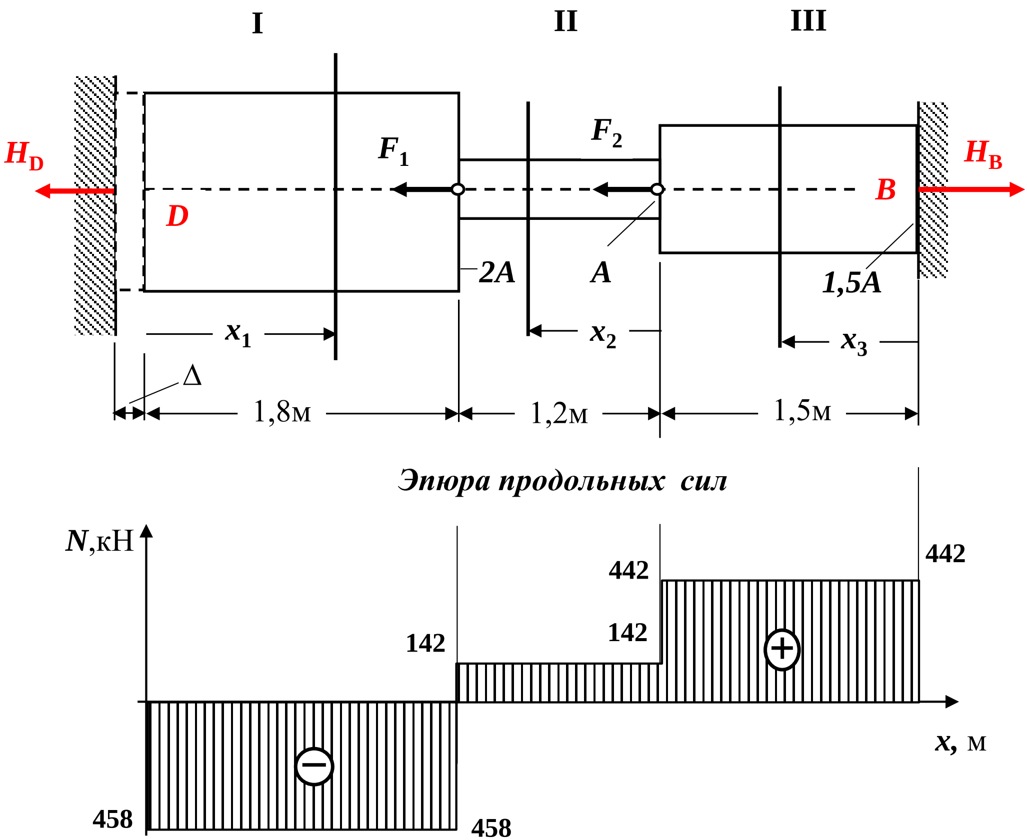


Рис. 12

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ КОНСТРУКЦИИ

Задача 2. Для статически неопределимой конструкции (рис. 13), состоящей из жёсткого бруса, опирающегося на шарнирную опору и два стержня с одинаковой площадью поперечных сечений, нагруженной силой ***F***, необходимо:

1. Раскрыть статическую неопределимость системы (Определить опорные реакции и усилия в стержнях).

2. Подобрать поперечные сечения стержней ***1*** и ***2*** из условия прочности по допускаемым нормальным напряжениям.

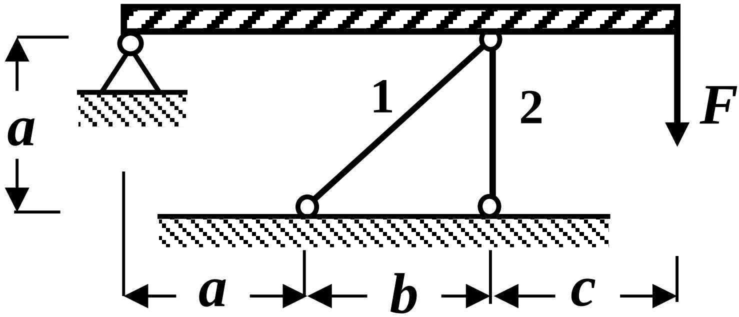


Рис. 13

Считать, что стержень ***1*** стальной с поперечным сечением, состоящим из двух равнополочных уголков.

Принять допускаемое напряжением $[\sigma_1]$ = 160МПа, модуль упругости при растяжении (сжатии) $E_1 = 2{\cdot}10^5$ МПа.

Считать, что стержень ***2*** медный, круглого поперечного сечения.

Принять допускаемое напряжение $[\sigma_2]$ = 60МПа, модуль упругости при растяжении (сжатии) $E_2 = 1{\cdot}10^5$ МПа.

Исходные данные:

$a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 2$ м; $F = 800$ кН;

$$[\sigma_1] = 160\text{Мпа} = 16\left(\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right);\quad [\sigma_2] = 0\text{Мпа} = 6\left(\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right);$$

Решение

3.1. Определение опорных реакций

3.1.1. Кинематический анализ

Действие шарнирно неподвижной опоры заменим опорными реакциями (H_B и R_B).

Используя метод сечений, отбросим нижние части стержней и их действие заменим продольными силами N_1 и N_2, вызывающих растяжение (рис. 14).

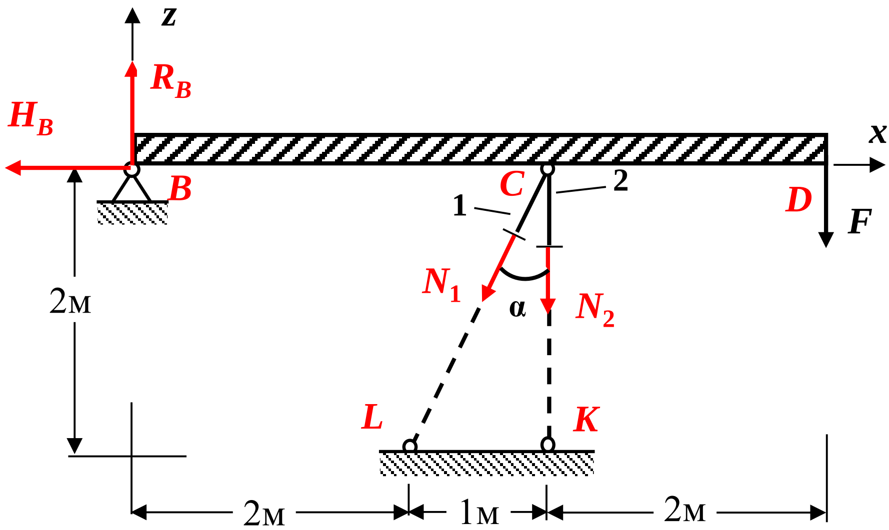


Рис. 14

Число неизвестных опорных реакций $\boldsymbol{m}$ = 4 (H_B, R_B, N_1, N_2), число уравнений равновесия $\boldsymbol{n}$ = 3 (для плоской системы сил имеем **три** уравнения равновесия):

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_z = 0; \quad \Sigma M_B = 0),$$

Степень статической неопределимости

$$\boldsymbol{s = m - n = 4 - 3 = 1.}$$

Задача один раз статически неопределима.

3.1.2. Статическая сторона задачи

Так как определять реакции шарнира по условию задачи не требуется, то из трех используем только одно уравнение равновесия:

Сумма моментов всех сил относительно точки ***B*** равна нулю

$$\sum M_B = 0: \; - N_1 \cdot \cos\alpha \cdot (2м + 1м) - N_2 \cdot (2м + 1м) - F \cdot (2м + 1м + 2м) = 0;$$

$$- N_1 \cdot 0{,}894 \cdot 3м - N_2 \cdot 3м - 800 \text{ кН} \cdot 5м = 0$$

$$- 2{,}68 N_1 - 3 N_2 = 4000 \text{ кН} \qquad (8)$$

Из Δ ***CKL***

$$tg\alpha = \frac{KL}{CK} = \frac{1м}{2м} = 0{,}5$$

$$\alpha = arctg0{,}5 = 26{,}6^0; \quad \cos\alpha = \cos 26{,}6^0 = 0{,}894$$

3.1.3. Геометрическая сторона задачи

Для составления дополнительного уравнения (уравнения совместности деформаций) рассмотрим систему в деформированном виде (рис. 15).

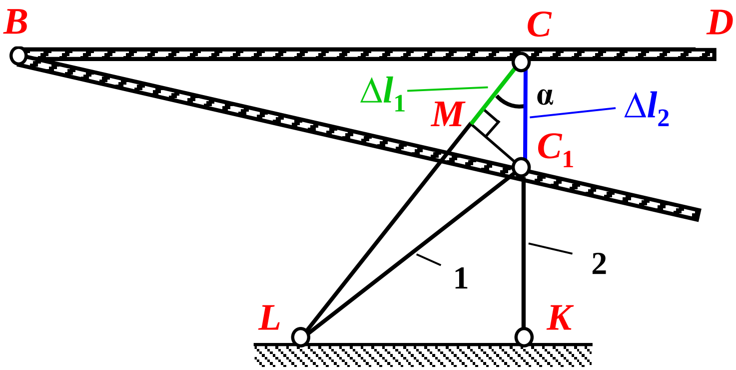


Рис.15

Под действием силы ***F*** жёсткий брус ***BD*** повернется вокруг шарнира ***B***, при этом узел С переместится в точку C_1 (Вследствие малости перемещений узлов конструкции действительные перемещения точки ***C*** по дуге окружности заменим перемещением по вертикальной прямой CC_1).

CC_1 - величина, на которую сжался (укоротился) второй стержень, то есть

$$\Delta l_2 = CC_1.$$

Чтобы найти величину, на которую сжался (укоротился) первый стержень, опустим перпендикуляр из C_1 на ***CL***, тогда

$$CM = \Delta l_1. \qquad CL \perp C_1M.$$

Из Δ CC_1M найдем зависимости между ***CM*** и CC_1.

$$CM = CC_1 \cdot \cos\alpha \quad \rightarrow \quad \Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot 0{,}894. \tag{9}$$

Последнее уравнение - уравнение совместности деформаций.

3.1.4. Физическая сторона задачи

Здесь необходимо установить связь между перемещениями и внутренними усилиями. Такая связь устанавливается при помощи закона Гука (2) с учетом знаков $\boldsymbol{\Delta l}$ и $\boldsymbol{N}$ (в данной задаче продольные силы показаны на растяжение, а схема деформации показывает, что стержни сжимаются):

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = -\frac{N_1 \cdot 224\,\text{см}}{2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot \boldsymbol{A}} = -\frac{N_1 \cdot 112 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \frac{\text{см}^3}{\text{кН}} \tag{10}$$

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = -\frac{N_2 \cdot 200\,\text{см}}{1 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot \boldsymbol{A}} = -\frac{N_2 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \frac{\text{см}^3}{\text{кН}} \tag{11}$$

Здесь

$\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{E_{стали}} = 2 \cdot 10^5$МПа $= 2 \cdot 10^4$кН/см^2; $\boldsymbol{E_2} = \boldsymbol{E_{меди}} = 1 \cdot 10^5$МПа $= =1 \cdot 10^4$кН/см^2;

$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{l_1} = 2$м/cos α = 200см/ 0,894 = 224 см; $\boldsymbol{l_2} =$ 2м = 200 см.

3.1.5. Математическая сторона задачи (синтез)

Подставив выражения (10), (11) в уравнение совместности деформаций (9), получаем

$$\boldsymbol{\Delta l_1} = \boldsymbol{\Delta l_2} \cdot 0{,}894 \quad \rightarrow$$

$$-\frac{N_1 \cdot 112 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \frac{\text{см}^3}{\text{кН}} = -\frac{N_2 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{\boldsymbol{A}} \frac{\text{см}^3}{\text{кН}} \cdot 0{,}894$$

$$\boldsymbol{N_1 = 1{,}60\,N_2} \tag{12}$$

Данное уравнение вместе с уравнением равновесия (3) образуют, так называемую, полную систему уравнений, решение которой позволяет найти все неизвестные усилия:

$$\begin{cases} -\ 2{,}68 N_1 - 3 N_2 = \ 4000 \text{ кН} \\ \boldsymbol{N_1} = 1{,}60\ \boldsymbol{N_2} \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение системы в первое уравнение, получаем

$-2{,}68 \cdot 1{,}60\boldsymbol{N_2} - 3N_2 = 4000$ кН $\rightarrow$ $-7{,}29\boldsymbol{N_2} = 4000$ кН $\rightarrow$

$\boldsymbol{N_2} = -4000$ кН$/7{,}29 = -549$ кН;

$\boldsymbol{N_1} = 1{,}60\boldsymbol{N_2} = 1{,}60 \cdot (-549$ кН$) = -878$ кН.

Итак,

$N_1 = -878$ кН; $N_2 = -549$ кН.

Знаки "– " показывают, что стержни испытывают сжатие.

Выполним две проверки:

а) *Проверяем, правильно ли решена система уравнений*

$-2{,}68N_1 - 3N_2 - 4000 = (-2{,}68 \cdot (-878) - 3 \cdot (-549) - 4000) = 4000{,}04 - 4000 = =0{,}04$

$\boldsymbol{N_1} - 1{,}60\boldsymbol{N_2} = (-878) - 1{,}60 \cdot (-549) = -878 + 878{,}4 = 0{,}4$ (13)

Определяем погрешность в последнем уравнении

$$\delta = \frac{|0{,}4|}{\dfrac{878 + 878{,}4}{2}} \cdot 100\% = 0{,}05\% < 5\%$$

b) *Кинематическая проверка*

$\boldsymbol{\Delta l_1} - 0{,}894\boldsymbol{\Delta l_2} = 0$?

$\boldsymbol{\Delta l_1} - 0{,}894\boldsymbol{\Delta l_2} =$

$$-\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} - 0{,}894\left(-\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}\right) = \frac{878 \cdot 224}{2 \cdot 10^4 A} - 0{,}894\frac{549 \cdot 200}{1 \cdot 10^4 A} = \frac{9{,}83 - 9{,}82}{A}$$

.

Здесь $\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{E_{стали}} = 2 \cdot 10^5$МПа $= 2 \cdot 10^4$кН/см^2; $\boldsymbol{E_2} = \boldsymbol{E_{меди}} = 1 \cdot 10^5$МПа $= =1 \cdot 10^4$кН/см^2;

$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{l_1} = 2$м$/\cos\alpha = 200$см$/\ 0{,}894 = 224$ см; $\boldsymbol{l_2} = 2$м $= 200$ см.

3.2. Подбор поперечных сечений стержней из условия прочности по допускаемым нормальным напряжениям

<u>Для *1* стержня:</u>

$\boldsymbol{N_1} = -878$ кН; $[\sigma_1] = 16\left(\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right)$,

поэтому требуемая площадь поперечного сечения из условия прочности при растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

$$A_1^{треб} \geq \frac{|N_1|}{[\sigma_1]} = \frac{878\,\text{кН}}{16\,\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 54{,}9\,\text{см}^2.$$

Для *2* стержня:

N₂ = –549 кН; $[\sigma_2] = 6\left(\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right)$,

поэтому требуемая площадь поперечного сечения из условия прочности при растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

$$A_2^{треб} \geq \frac{|N_2|}{[\sigma_2]} = \frac{549\,\text{кН}}{6\,\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 91{,}2\,\text{см}^2.$$

Поскольку, по условию задачи оба стержня должны иметь одинаковую площадь, принимаем $A_1^{треб} = A_2^{треб} \geq 91{,}2$ см^2.

Стержень ***1*** имеет поперечное сечение, состоящее из двух равнополочных уголков $A_1 = 2A^{уголка}$. Приравнивая $2A^{уголка} = A_2^{треб}$, получаем

$$A^{уголка} \geq 91{,}2\ \text{см}^2/2 = 45{,}6\ \text{см}^2.$$

По сортаменту прокатной стали ближайшим к этому значению является значение площади уголка $A_{справ}^{уголка} = 43{,}6$см^2, которое соответствует равнополочному уголку 160×160×14. Фактическая площадь поперечного сечения ***1*** стержня $A_1^{факт} = 2\,A_{справ}^{уголка} = 2\cdot 43{,}6$ см^2 = 87,2 см^2.

Проверяем выполнение условия прочности.

Нормальное напряжение в стержне, взятое по абсолютной величине

$$|\sigma_1| = \frac{|N_1|}{A_1^{факт}} = \frac{878\,\text{кН}}{87{,}2\ \text{см}^2} = 10{,}1\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < [\sigma_1] = 16\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Стержень недогружен. *Условие прочности выполняется.*

Стержень ***2*** имеет круглое поперечное сечение, поэтому его площадь $A^{круга} = \frac{\pi d^2}{4}$. Приравнивая $A^{круга} = A_2^{треб}$, получаем

$$\frac{\pi d^2}{4} \geq 91{,}2\,\text{см}^2 \text{ или } d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 91{,}2\,\text{см}^2}{\pi}} = 10{,}776\,\text{см}.$$

Принимаем ***d*** = 10,8см.

Проверяем выполнение условия прочности. Очевидно, фактическая площадь поперечного сечения будет

$$A_2^{факт} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot (10{,}8\,\text{см})^2}{4} = 91{,}562\ \text{см}^2 = 91{,}6\ \text{см}^2$$

.

Нормальное напряжение в стержне, взятое по абсолютной величине

$$|\sigma_2| = \frac{|N_2|}{A_2^{факт}} = \frac{549\ \text{кН}}{91{,}6\ \text{см}^2} = 5{,}99\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} =< [\sigma_2] = 6\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

.

Стержень недогружен. *Условие прочности выполняется.*

Замечание. Если стержень будет перегружен ($|\sigma| > [\sigma]$), необходимо определить величину перегрузки по формуле

$$\delta = |\sigma| = \frac{|[\sigma] - |\sigma||}{[\sigma]} \cdot 100\%.$$

Перегрузка $\delta \leq 5\%$ в этом методе расчета допускается.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011.
3. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.
5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика.

– СПб.: Лань, 2005.

6. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.