ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Учебно-методическое пособие

по выполнению расчетно-графической работы на тему «Расчёт на прочность статически определимых стержневых систем при центральном растяжении (сжатии)»

по дисциплине

«Сопротивление материалов»

Авторы
Стрельников Г. П.,
Кадомцева Е. Э.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические положения, примеры решения типовых задач и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Расчёт на прочность статически определимых стержневых систем при центральном растяжении (сжатии)» по дисциплинам сопротивление материалов, специальные вопросы сопротивления материалов, механика, теоретическая механика для архитекторов, строительная механика для архитекторов.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Стрельников Г.П.,

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Кадомцева Е.Э.

Оглавление

РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

***Под растяжением (сжатием) понимают такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные (продольные) силы N, а все прочие силовые факторы равны нулю*.**

Очевидно, такой вид деформации вызывается внешними силами (или их равнодействующими) действующими вдоль оси бруса (рис. 1).

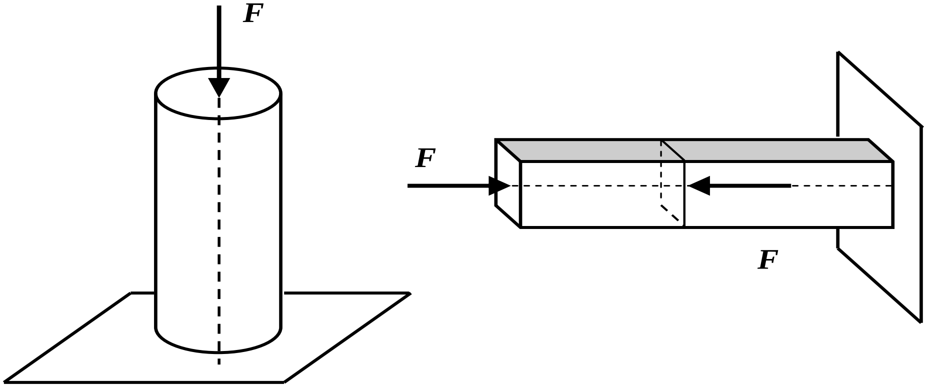


Рис. 1

Брус, испытывающий центральное растяжение (сжатие), называется ***стержнем.***

Рассмотрим растяжение стержня внешними силами ***F***, приложенными к его концам. Очевидно, если воспользоваться методом сечений, во всех сечениях возникает продольная сила ***N,*** равная внешней нагрузке ***F*** (рис. 2).

При растяжении продольная сила ***N*** направлена от сечения ($N > 0$), а при сжатии – к сечению ($N < 0$).

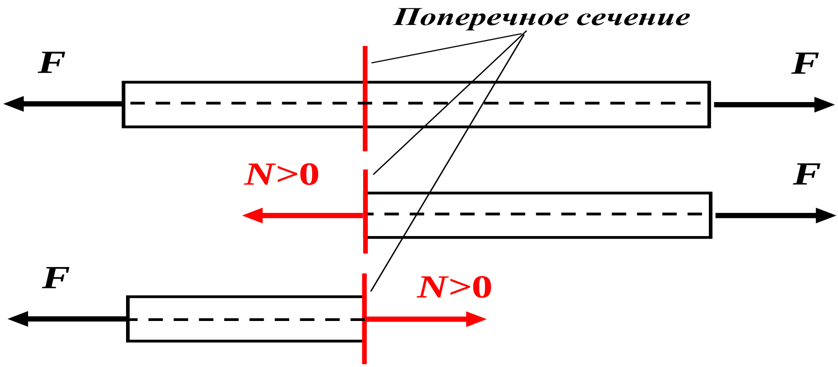


Рис. 2

Если на стержень действует более сложная нагрузка, представляющая собой систему сил, приложенных в различных его точках, то согласно методу сечений ***продольная сила N в произвольном поперечном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения***:

$$N = \left(\sum F_{kx}\right)_{отсеч}.$$

Внешние силы, способствующие растяжению стержня относительно сечения, берут со знаком плюс, а силы, сжимающие стержень, – со знаком минус. Это правило знаков показано на рис. 3.

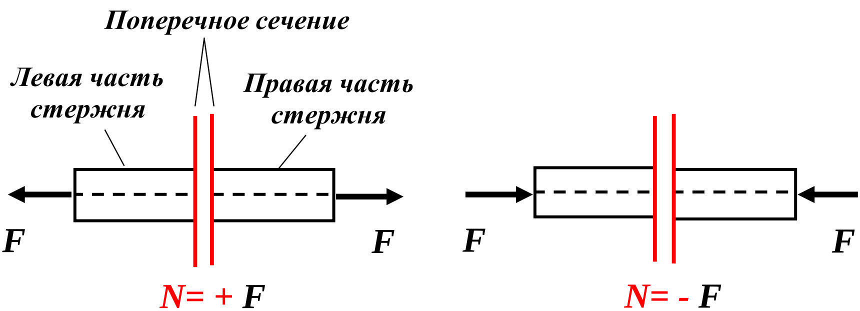


Рис. 3

Нормальные напряжения ($\boldsymbol{\sigma}$), возникающие в поперечном сечении стержня, в случае центрального растяжения-сжатия определяются по формуле

$$\sigma = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}},$$

где

N – величина продольной силы;
A – площадь поперечного сечения (рис. 4).

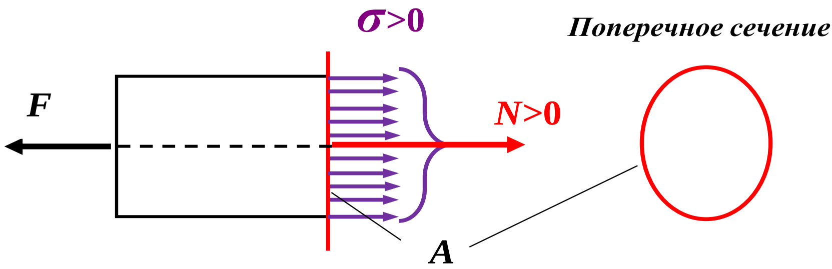


Рис. 4

Наиболее распространенным расчетом на прочность является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому, наибольшее напряжение, возникающее в материале не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы.

Эта величина называется допускаемым напряжением [σ].

При осевом растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При расчете элементов конструкции, работающих на центральное растяжение и сжатие, встречаются задачи трех типов:

1). Проверка прочности;

2). Подбор размеров поперечного сечения (проектировочный расчёт);

3).Определение несущей способности (грузоподъемности) стержня или стержневой системы.

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условий прочности при заданной нагрузке, форме, размерах сечений и свойствах материалов, то есть

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Решение второй задачи сводится к определению размеров поперечного сечения заданной формы при заданных нагрузках и свойствах материала, то есть

$$A \geq \frac{[N]}{[\sigma]}$$

Решение третьей задачи сводится к определению грузоподъемности стержня или стержневой системы (нахождении нагрузки, при действии которой напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям), то есть

$$[N] \leq A \cdot [\sigma].$$

Абсолютная продольная деформация (удлинение при растяжении и укорочение при сжатии)

$$\Delta l = l_1 - l\,,$$

где

l — первоначальная длина стержня;

l_1 — конечная длина (рис. 5).

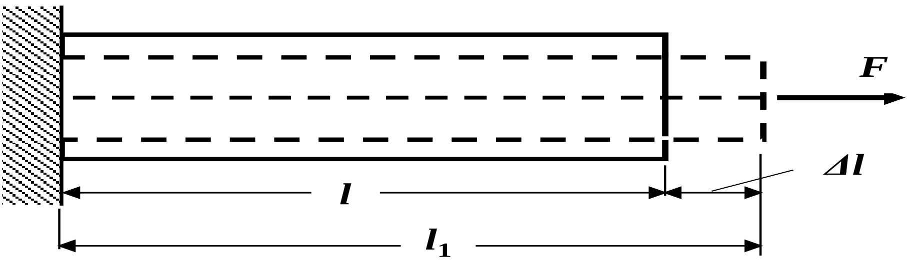


Рис. 5

Закон Гука для абсолютной продольной деформации имеет вид

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \qquad (2)$$

Где

l – длина стержня;

E – модуль продольной (нормальной) упругости или модуль 1-го рода или модуль Юнга;

E·A – жесткость поперечного сечения стержня при центральном растяжении (сжатии).

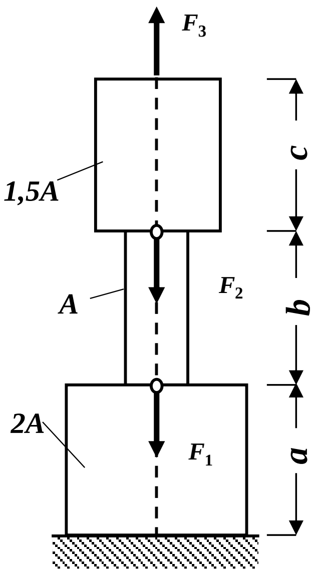
Таким образом, абсолютные деформации прямо пропорциональны продольной силе, длине стержня и обратно пропорциональны жесткости поперечного сечения EA.

Если стержень состоит из нескольких участков, тогда его абсолютная деформация равна алгебраической сумме абсолютных деформации каждого участка, которые можно определить по формуле (2).

2. РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

__Задача 1.__ Для многоступенчатого стального стержня, нагруженного осевыми продольными силами F_1, F_2 и F_3 (рис. 6), **требуется**:

1. Построить эпюру продольных сил ***N***.
2. Определить нормальные напряжения σ на каждом участке, выразив их через значение площади поперечного сечения стержня ***A***.
3. Подобрать площадь поперечного сечения ***A*** из условия прочности по нормальным напряжениям на каждом участке многоступенчатого стержня, выбрать значение ***A***, обеспечивающего прочность всего многоступенчатого стержня, приняв допускаемое напряжение $[\sigma]$ = 160МПа.
4. Найти полное абсолютное удлинение всего многоступенчатого стержня.



Исходные данные:

a = 1, 8 м; b = 1,2 м; c = 1,5 м;

F_1 = 60 кН; F_2 = 30 кН; F_3 = 50 кН;

Рис. 6

$[\sigma]$ = 160Мпа = 16кН/см^2.

A - ? Δl - ?

Решение

2.1. Определение опорных реакций

Развернем стержень по часовой стрелке на 90^0, чтобы он стал горизонтальным. Действие опоры (жесткая заделка) заменим опорными реакциями H_B, R_B и опорным моментом M_B (рис. 7). Для их определения составим три уравнения статики:

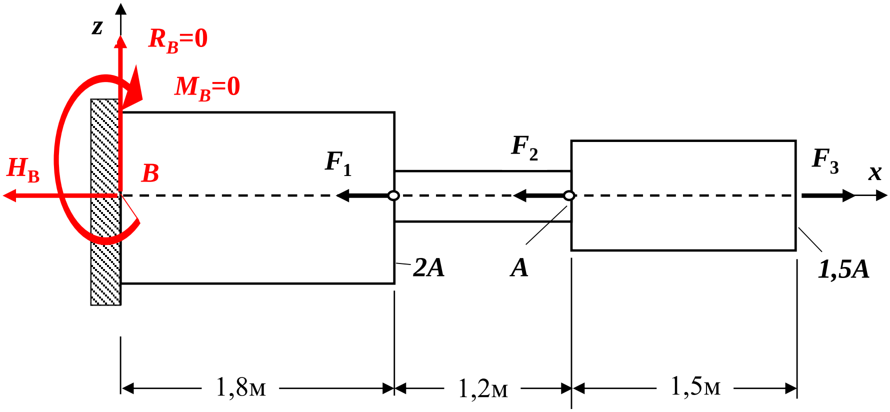


Рис. 7

Сумма проекций всех сил на ось ***x*** равна нулю:

Σ ***F_x =*** 0: ***−H_B − F_1 − F_2*** + ***F_3*** = 0; ***−H_B* − 60 − 30** + **50** = 0; ***H_B*** = − **40 кН;**

Сумма проекций всех сил на ось ***z*** равна нулю:

Σ ***F_z =*** 0: ***R_B =*** 0.

Сумма моментов всех сил относительно точки ***B*** равна нулю:

Σ ***M_B =*** 0: − ***M_B =*** 0 → ***M_B =*** 0.

2.2. Определение продольных сил и построение её эпюры

Разбиваем стержень на участки. Границами участка являются сечения приложения сил, а также сечения, где изменяется площадь поперечного

сечения. В нашем случае три участка, которые нумеруем, как показано на
рис. 8.

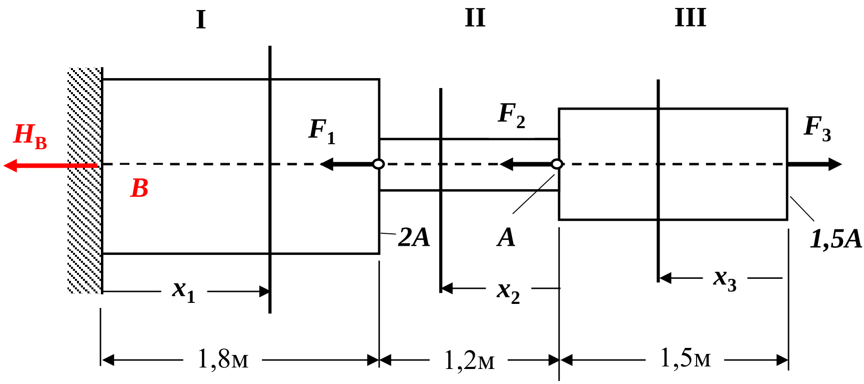


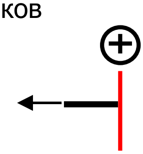
Рис. 8

Проводим сечение на **I** участке стержня и рассмотрим левую от сечения часть стержня (рис. 8). Поскольку сечение может перемещаться от левой границы участка до правой границы, координата x_1 ,будет изменяться

<u>I участок</u> $0 \le x_1 \le 1{,}8$м.

Для нахождения продольной силы используем определение (***продольная сила N в произвольном поперечном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения***) и правило знаков.

Слева от сечения вдоль оси стержня действует внешняя сила H_B, направленная влево (рис. 8), поэтому с учетом правила знаков слева от сечения



$$N_I = +H_B = -40 \text{ кН};$$

Графиком этой функции является прямая, параллельная оси ***x***.

Для построения эпюры продольных сил на ***I*** участке, откладываем значение **40** по вертикали вниз от оси ***x*** на левой и правой границах участка,

соединяем прямой линией эти точки. Внутри полученного прямоугольника ставим знак "– ", а затем проводим вертикальные ординаты (рис. 9).

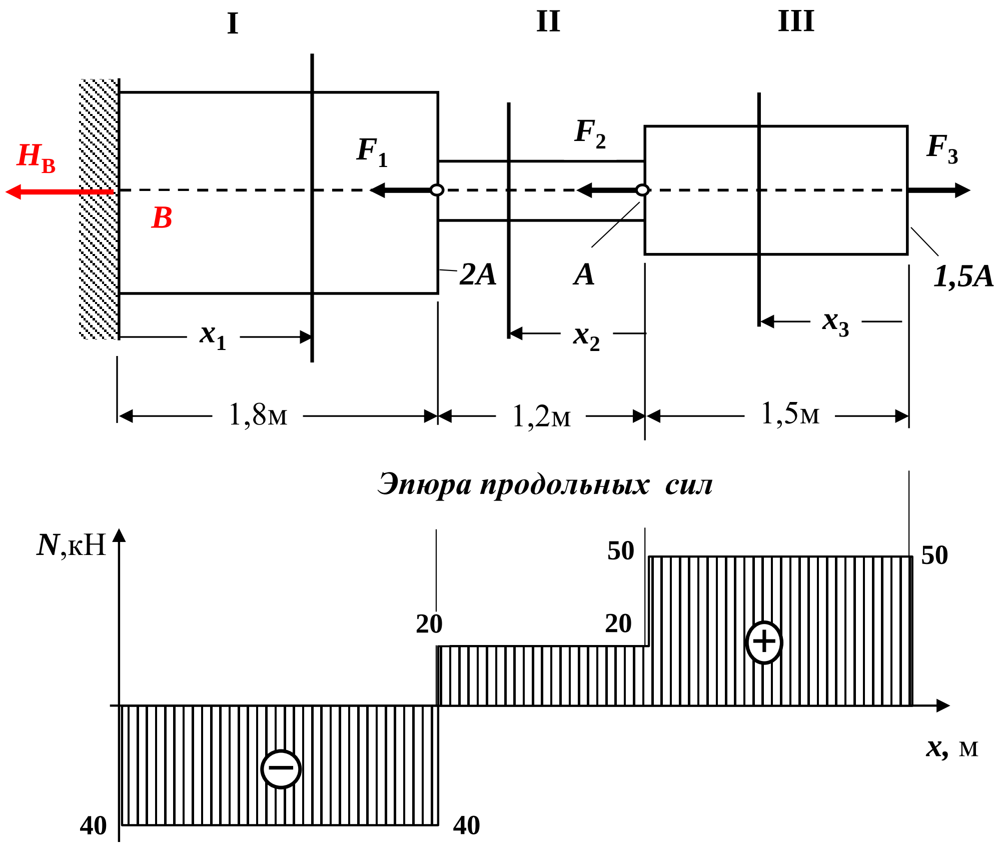
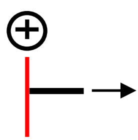


Рис. 9

Проводим сечение на **II** участке стержня и рассмотрим правую от сечения часть стержня (рис. 8). Поскольку сечение может перемещаться от левой границы участка до правой границы, координата $\boldsymbol{x_2}$,будет изменяться

<u>II участок</u> $1{,}2 \ge x_2 \ge 0$.

Справа от сечения вдоль оси стержня действует внешние силы F_3 и $\boldsymbol{F_2}$ (рис. 8), поэтому с учетом правила знаков справа от сечения



$$\boldsymbol{N}_{\text{II}} = +\ \boldsymbol{F_3} - \boldsymbol{F_2} = 50 - 30 = \mathbf{20\ кН;}$$

Графиком этой функции является прямая, параллельная оси ***x***.

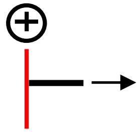
Строим эпюру продольных сил на ***II*** участке (рис. 9).

Проводим сечение на **III** участке стержня и рассмотрим правую от сечения часть стержня (рис. 8). Поскольку сечение может перемещаться от левой границы участка до правой границы, координата x_3 ,будет изменяться

<u>III участок</u> $1{,}5 \geq x_3 \geq 0$.

Справа от сечения вдоль оси стержня действует внешние силы F_3 (рис. 8), поэтому с учетом правила знаков справа от сечения

N_{III} = + F_3 = **50 кН;**



Графиком этой функции является прямая, параллельная оси ***x***.

Строим эпюру продольных сил на ***III*** участке (рис. 9).

2.3. Определение площади поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям и полной абсолютной деформации стержня

<u>На **I участке**</u>**:** Продольная сила N_I = – 40 кН; площадь поперечного сечения A_I = 2A; длина участка l_I = 1, 8м = 180 см (см. рис. 7);

$E_I = E_{стали}$ = 2·10^{5}МПа = 2·10^{4}кН/см^2.

Нормальные напряжения

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{-40\text{кН}}{2\boldsymbol{A}} = \frac{-20\text{кН}}{\boldsymbol{A}}.$$

Абсолютная деформация

$$\Delta l_I = \frac{N_I l_I}{E_I A_I} = \frac{-40\ \text{кН} \cdot 180\ \text{см}}{2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 2\boldsymbol{A}} = -\frac{0{,}18\ \text{см}^3}{\boldsymbol{A}}.$$

<u>На **II участке:**</u> Продольная сила N_{II} = +20кН; площадь поперечного сечения A_{II} =A; длина участка l_{II} = 1, 2м = 120 см (см. рис. 7);

$E_{II} = E_{стали}$ = 2·10^{5}МПа = 2·10^{4}кН/см^2.

Нормальные напряжения $\sigma_{II} = \dfrac{N_{II}}{A_{II}} = \dfrac{20\text{кН}}{\boldsymbol{A}}$.

Абсолютная деформация

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{E_{II} A_{II}} = \frac{20\ \text{кН} \cdot 120\ \text{см}}{2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot \boldsymbol{A}} = \frac{0{,}12\ \text{см}^3}{\boldsymbol{A}}.$$

<u>На **III участке:**</u> Продольная сила $\boldsymbol{N_{III}}$ = 50 кН; площадь поперечного сечения $\boldsymbol{A_{III}}$ = 1,5$\boldsymbol{A}$; длина участка $\boldsymbol{l_{III}}$ = 1, 5м = 150 см (см. рис. 7);

$\boldsymbol{E_{III}} = \boldsymbol{E_{стали}} = 2 \cdot 10^5$МПа $= 2 \cdot 10^4$кН/см^2.

Нормальные напряжения

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{50\text{кН}}{1{,}5\,\boldsymbol{A}} = \frac{33{,}3\text{кН}}{\boldsymbol{A}}.$$

Абсолютная деформация

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III} l_{III}}{E_{III} A_{III}} = \frac{50\ \text{кН} \cdot 150\ \text{см}}{2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 1{,}5\,\boldsymbol{A}} = \frac{0{,}25\ \text{см}^3}{\boldsymbol{A}}.$$

Наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения в стержне будут на ***III*** участке, для которого запишем условие прочности

$$\sigma_{max} = \sigma_{III} = \frac{33{,}3\text{кН}}{\boldsymbol{A}} \le [\sigma] = 16 \frac{\text{кн}}{\text{см}^2} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{A} \ge \frac{33{,}3\text{кН}}{16 \dfrac{\text{кн}}{\text{см}^2}} = 2{,}0625\text{см}^2.$$

Принимаем $\boldsymbol{A}$ = 2,1см^2.

Определяем полную абсолютную деформацию стержня

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = \frac{1\ \text{см}^3}{\boldsymbol{A}}(-0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}25) = \frac{0{,}19\ \text{см}^3}{\boldsymbol{A}} = \frac{0{,}19\ \text{см}^3}{2{,}1\ \text{см}^2} = 0{,}0905\ \text{см}$$

Полученный результат показывает, что длина стержня увеличивается на 0,0905 см.

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ КОНСТРУКЦИИ

Задача 2. Для статически определимой конструкции, состоящей из жёсткого бруса, опирающегося на шарнирную опору и стальной стержень, нагруженной силой ***F*** и равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью ***q* = *F/a*** (рис. 10), **необходимо**:

1. Подобрать диаметр стального стержня **1** круглого поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям, приняв допускаемое напряжение [σ] = 160МПа.
2. Считая, что площадь поперечного сечения стального стержня известна, определить допускаемое значение силы [***F***] или нагрузки [***q***] из условия прочности по нормальным напряжениям.

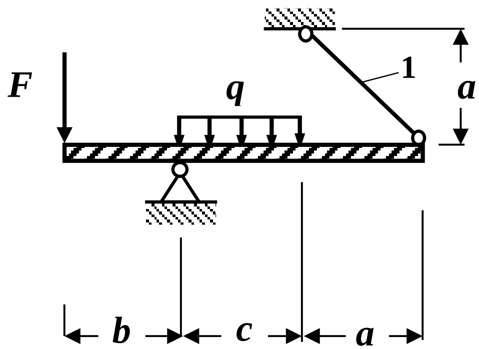


Рис. 10

Исходные данные:

F = 800 кН;

a = 1, 4 м; ***b*** = 1,6 м; ***c*** = 1,2 м;

[*σ*] = 160Мпа =16 $\left(\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right)$;

Решение

3.1. Определение продольной силы

Для определения усилия в стержне проведем сечение, отбросим верхнюю его часть и её действие заменим продольной силой ***N***, вызывающей растяжение, действие шарнирно неподвижной опоры заменим опорными реакциями, действие распределенной нагрузки заменим её равнодействующей R_q (рис. 11).

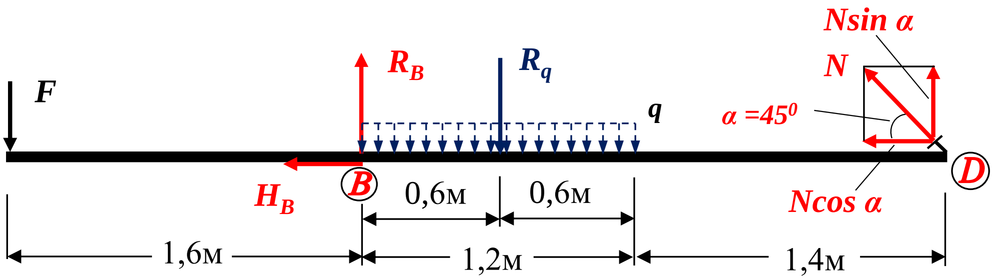


Рис. 11

Продольную силу ***N*** разложим на две составляющие по горизонтальной и вертикальной осям (рис. 11).

По условию задачи

$$\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{F}}{1{,}4\text{м}},$$

поэтому

$$\boldsymbol{R_q} = q \cdot 1{,}2\text{м} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot 1{,}2\text{м}}{1{,}4\text{м}} = 0{,}857\,\boldsymbol{F}\ .$$

Из трех уравнений статики составим одно уравнение (так как опорные реакции нам не нужны).

Сумма моментов всех сил относительно точки ***B*** должна быть равна нулю:

$\sum M_B = 0:$ ***F***·1,6м – ***R******q***· 0,6м + ***N · sin***45⁰ ·(1,2м + 1, 4м) = 0;

F·1,6м – 0,857 · ***F***· 0,6м + ***N*** · 0,707 · 2, 6м = 0;

F·1,09м + *N*·1,84м = 0;

$$N = -\frac{\boldsymbol{F} \cdot 1{,}09\text{м}}{1{,}84\text{м}} = -0{,}592\,\boldsymbol{F} = -0{,}592 \cdot 800\,\text{кН} = -474\,\text{кН}$$

;

Итак, ***N*** = – 0,592 ***F***; ***N* = – 474 кН.** Знак "– " показывает, что стержень испытывает сжатие.

3.2. Подбор диаметра стального стержня

Из условия прочности при растяжении или сжатии по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma],$$

определяем требуемую площадь поперечного сечения

$$A^{треб} \ge \frac{|N|}{[\sigma]} = \frac{474\,кН}{16\,\dfrac{кН}{см^2}} = 29{,}6\,см^2.$$

Но наш стержень имеет круглое поперечное сечение, поэтому его площадь $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$. Приравнивая $A = A^{треб}$, получаем

$$\frac{\pi d^2}{4} \ge 29{,}6\,см^2 \text{ или } d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 29{,}6\,см^2}{\pi}} = 6{,}14\,см.$$

Принимаем ***d* = 6,2см.**

Проверяем выполнение условия прочности.

Очевидно, фактическая площадь поперечного сечения стержня будет равна

$$A^{факт} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot (6{,}2\,см)^2}{4} = 30{,}175\,см^2 = 30{,}2\,см^2.$$

Нормальное напряжение в стержне, взятое по абсолютной величине

$$|\sigma| = \frac{|N|}{A^{факт}} = \frac{474\,кН}{30{,}2\,см^2} = 15{,}695\,\frac{кН}{см^2} = 15{,}7\,\frac{кН}{см^2} < [\sigma] = 16\,\frac{кН}{см^2}.$$

Стержень недогружен. Величина недогрузки

$$\delta=|\sigma|=\frac{\left|[\sigma]-|\sigma|\right|}{[\sigma]}\cdot 100\%=\frac{\left|16\,\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}-15{,}7\,\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right|}{16\,\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}}100\%=1{,}88\%<5\%.$$

Условие прочности выполняется. Окончательно принимаем диаметр стержня ***d* = 6,2см.**

Замечание. Если стержень будет перегружен ($|\sigma|>[\sigma]$), необходимо определить величину перегрузки по формуле

$$\delta=|\sigma|=\frac{\left|[\sigma]-|\sigma|\right|}{[\sigma]}\cdot 100\%.$$

Перегрузка $\delta\le 5\%$ в этом методе расчета допускается.

3.3. Определение допускаемой силы [*F*]

Подставляя ранее полученное выражение продольной силы **(*N*)** через внешнюю силу (***F***), ***N* = – 0,592 *F*,** и найденное значение фактической площади поперечного сечения $A^{факт}=30{,}2\ \text{см}^2$ в условие прочности, получаем

$$|\sigma|=\frac{|N|}{A^{факт}}=\frac{0{,}592\,F}{30{,}2\ \text{см}^2}\le[\sigma]=16\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$ Отсюда

$$F\le\frac{16\,\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}\cdot 30{,}2\ \text{см}^2}{0{,}592}=816\text{кН}=[F].$$

Итак, допускаемая сила [***F***] = 816 кН. Её значение близко к значению заданной силы ***F*** = 800 кН.

Замечание. Если стержень будет перегружен в пределах 5%, допускаемая сила будет чуть меньше заданной силы ***F.***

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014.

2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011.

3. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011.

4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.

5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – СПб.: Лань, 2005.

6. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.