ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Учебно-методическое пособие

для проведения практических занятий на тему «Расчет элементов конструкций с учетом динамических воздействий» по дисциплинам

«Сопротивление материалов», «Техническая механика», «Механика»

Авторы
Маяцкая И. А.,
Языев Б. М.,
Языев С. Б.,
Чепурненко А. С.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические положения, примеры решения задач на тему «Расчет элементов конструкций с учетом динамических воздействий».

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01 – Строительство и специальностям 08.05.01 – Строительство уникальных зданий и сооружений; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей, изучающих курс дисциплин «Сопротивление материалов» и «Специальные вопросы сопротивление материалов».

Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Маяцкая И.А.,

д.т.н., профессор кафедры «Сопротивление материалов» Языев Б.М.,

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Языев С.Б.,

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Чепурненко А.С.

Оглавление

1. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

При изучении прочности конструкций различают два вида нагрузок: статические и динамические.

Статической называется такая нагрузка, действие которой при приложении к конструкции постепенно возрастает от нуля до конечного значения, вызывая медленное нарастание деформаций.

К динамическим относят нагрузки, вызывающие заметное ускорение массы частиц элемента конструкции в процессе деформирования или движения всего элемента с ускорением.

До сих пор мы изучали действие на элементы сооружений статических нагрузок, которые изменяют свою величину настолько медленно от нуля до конечных значений, что ускорения, получаемые при этом элементами сооружения, пренебрежимо малы.

Действие динамических нагрузок сопровождается колебаниями сооружений и их отдельных элементов.

Напряжения, возникающие при колебаниях деталей, могут во много раз превосходить по своей величине напряжения от действия статических нагрузок.

Расчет деталей сооружений на динамическую нагрузку более сложен, чем расчет на статическую нагрузку. Трудность заключается, с одной стороны, в более сложных методах определения внутренних усилий и напряжений, возникающих от действия динамической нагрузки, и, с другой — в более сложных методах определения механических свойств материалов при динамической нагрузке.

Например, при действии ударной нагрузки, то есть нагрузки чрезвычайно малой продолжительности, многие материалы, которые при статическом действии нагрузок оказывались пластичными, работают как хрупкие; при действии многократно повторяющейся переменной нагрузки прочность материалов резко снижается.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на известном из теоретической механики принципе Д'Аламбера. Согласно этому принципу, всякое движущееся тело может рассматриваться как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение и направленную в сторону, противоположную ускорению.

Поэтому в тех случаях, когда известны силы инерции, без всяких ограничений можно применять метод сечений и для определения внутренних усилий использовать уравнения равновесия.

В тех же случаях, когда определение сил инерции затруднительно, так, например, при ударе, для определения динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАВНОУСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА

Во многих случаях ускорения, с которыми перемещаются детали машин, известны. Динамические напряжения в этих случаях вычисляются без затруднений.

Рассмотрим случай подъема груза весом ***G*** вверх с ускорением ***a*** (рис. 1).

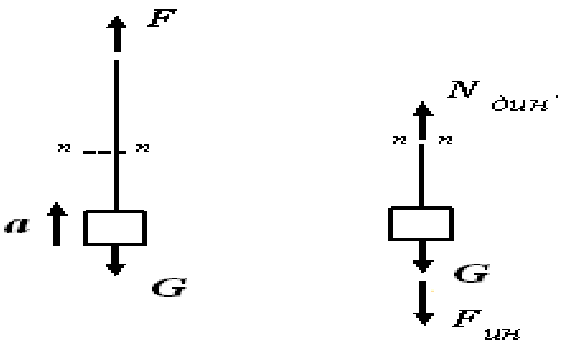


Рис. 1

Определим напряжение в канате, пренебрегая его весом. Прикладываем к грузу силу инерции, равную

$$m \cdot a = G \cdot a / g$$

и направленную вниз.

Применим метод сечений. Делаем разрез ***n - n*** и отбрасываем верхнюю часть каната. Усилие в канате обозначаем $\boldsymbol{N}_{дин}$.

Так как напряжения при центральном растяжении равномерно распределены по сечению, то можем принять, что

$$N_{дин} = \sigma_{дин} \cdot A,$$

где

$\sigma_{дин}$ – искомое динамическое напряжение.

Проектируя все силы, в том числе и силы инерции, на вертикальную ось, получаем

$$\sigma_д A - G \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right) = 0,$$

откуда

$$\sigma_д = \frac{G}{A}\left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_{ст} K_{дин}$$

где

$\sigma_{ст} = \dfrac{G}{A}$ – напряжение при статическом действии груза;

$K_{дин} = 1 + \dfrac{a}{g}$ – динамический коэффициент.

Таким образом, динамические напряжения могут быть выражены через статические напряжения и динамический коэффициент. Это особенно удобно, так как величину динамического коэффициента часто приходится определять опытным путем.

Следовательно,

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot K_{дин}.$$

Величина $K_{дин}$ показывает, во сколько раз динамическая деформация больше статической. Эта величина называется динамическим коэффициентом удара или коэффициентом динамичности при ударе.

Пример 1. Груз поднимается с помощью лебедки, установленной посередине балки с пролетом ***l*** (рис. 2).

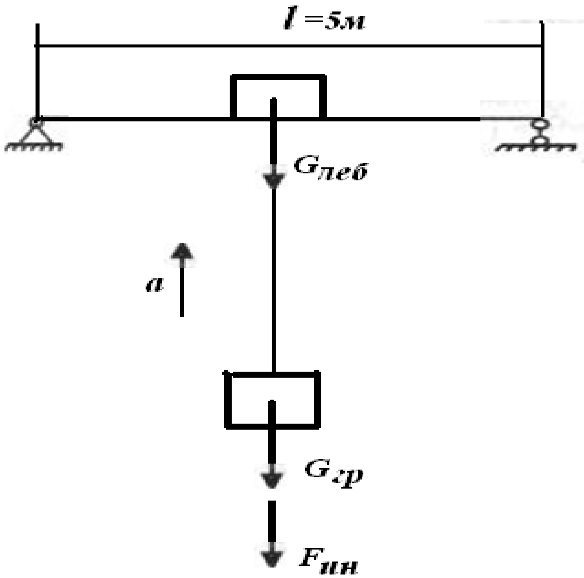


Рис. 2.

При подъеме, в период разгона лебедки, груз испытывает ускорение *а = =4м/с²*. Вес лебедки $G_{леб} = 0{,}4 кН$, вес груза $G_{гр} = 6 кН$. Площадь поперечного сечения троса равно $A_{тр}$ = *4см²*. Балка изготовлена из двутавра № 3, длина пролета балки *l = 5м,* момент сопротивления поперечного сечения балки в виде двутавра № 30 равен $W_y = 472 см^3$.

Проверить прочность троса и прочность балки, приняв допускаемое нормальное напряжение для троса на растяжение – $[\sigma]$ *= 200МПа, а* допускаемое нормальное напряжение для балки – $[\sigma]$ *= 160МПа.*

Решение

Сила инерции равна

$$F_{ин} = ma = \frac{G}{g}a \quad .$$

Прочность троса определяется из условия прочности при центральном растяжении

$$\sigma_{дин} \le [\sigma] = 200 МПа$$

Используя принцип Д'Аламбера, найдем величину продольной силы, возникающую в тросе (рис. 3)

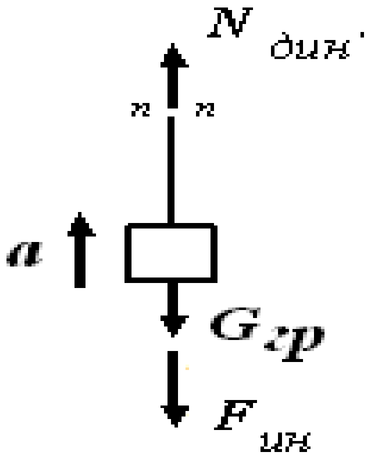


Рис. 3.

$$N_{дин} = G_{гр} + F_{ин} = (1 + \frac{a}{g})G_{гр} = (1 + \frac{4}{9,8}) \cdot 6 = 8,44кН$$

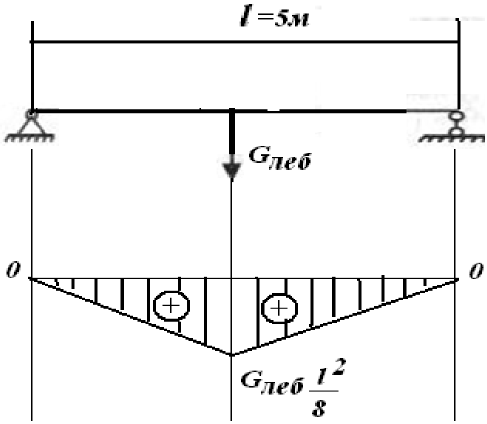
Динамическое напряжение в тросе определяется по формуле

$$\sigma_{дин} = \frac{N_{дин}}{A} = \frac{8,44кН}{4см^2} = 2,11кН/см^2 = 21,1МПа$$

$$\leq [\sigma] = 200МПа.$$

Условие прочности в тросе выполняется.

Наибольший изгибающий момент в опасном сечении балки складывается из статического воздействия веса лебедки и динамического воздействия веса движущегося груза (рис. 4).



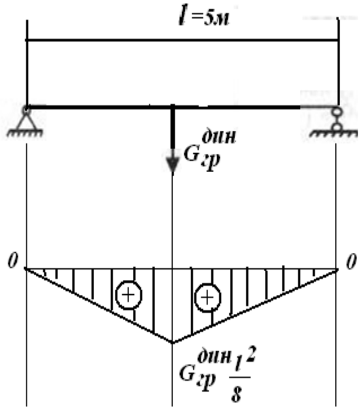


Рис. 4.

Принимаем

$$G_{гр.дин} = K_{дин} \cdot G_{гр}; \qquad K_{дин} = 1 + \frac{a}{g}.$$

Тогда

$$M^{\max}{}_{дин} = \frac{G_{леб} \cdot l^2}{8} + \frac{G_{гр.дин} \cdot l^2}{8} = \frac{G_{леб} \cdot l^2}{8} + (1 + \frac{a}{g})\frac{G_{гр} \cdot l^2}{8} = \frac{0{,}4 \cdot 5^2}{8} + (1 + \frac{4}{9{,}8})\frac{6 \cdot 5^2}{8} = 27{,}65 кНм$$

Динамическое напряжение в балке определяется по формуле

$$\sigma_{дин} = \frac{M^{\max}{}_{дин}}{W_y} = \frac{27{,}65 \cdot 10^3 Нм}{472 \cdot 10^{-6} м^3} = 58{,}6 \cdot 10^6 \frac{Н}{м^2} = 58{,}6 МПа \le [\sigma] = 160 МПа$$

Условие прочности в балке выполняется.

3. НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ РАВНОУСКОРЕННОМ ПОДЪЕМЕ ГРУЗА

Пусть груз поднимается с постоянным ускорением. Тело имеет переменное сечение (рис. 5).

В этом случае нормальное напряжение определяется по формуле

$$\sigma = \left(1 + \frac{a}{g}\right)\left(\frac{G}{A} + \frac{\gamma}{A}\int_0^z A dz\right)$$

где

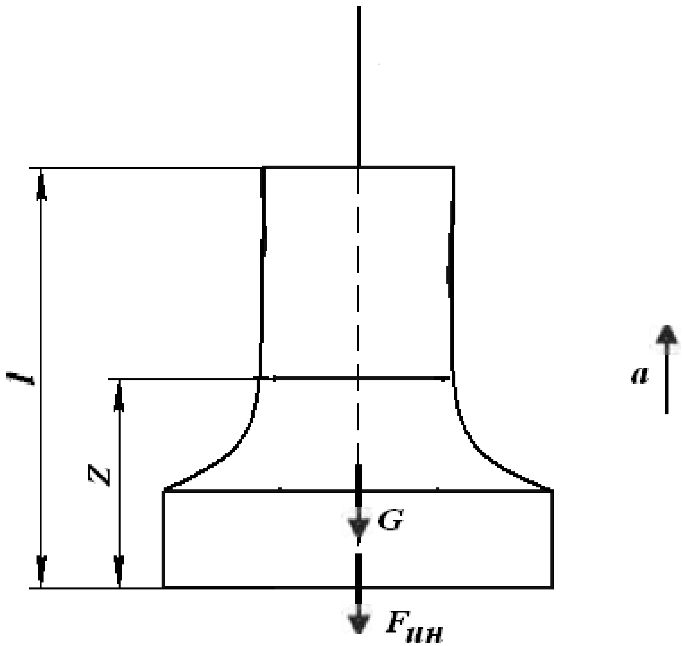


Рис.5.

σ – нормальное напряжение в исследуемом поперечном сечении стержня
на расстоянии ***z*** от нижнего конца;

A – площадь исследуемого поперечного сечения;

l – длина стержня;

G – величина поднимаемого груза;

а – ускорение груза;

g –ускорение силы тяжести;

γ – вес единицы объема материала стержня.

Для стержня постоянного поперечного сечения *(*A = const) наибольшие нормальные напряжения в верхнем сечении определяются по формуле

$$\sigma = \left(1 + \frac{a}{g}\right)\left(\frac{G}{A} + \gamma l\right) = K_{дин}\sigma_{ст}$$

где

$\sigma_{cm} = \dfrac{G}{A} + \gamma l$ – напряжение в опасном сечении при статическом действии силы;

$K_{дин} = \left(1 + \dfrac{a}{g}\right)$ – коэффициент динамичности.

4. НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОМ КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ, ВРАЩАЮЩЕМСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Случай 1. Пусть кольцо вращается в своей плоскости относительно оси, проходящей через центр кольца (рис. 6).

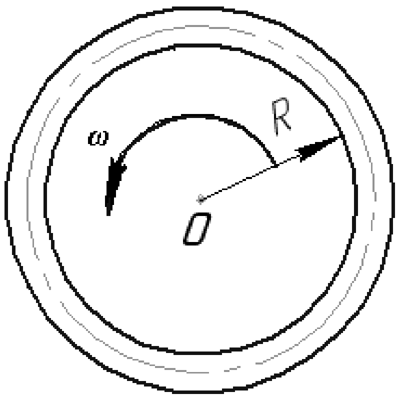


Рис. 6

Нормальное напряжение в поперечном сечении кольца

$$\sigma = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{g}$$

В таблице приведены напряжения в стальном кольце (вес единицы объема материала γ = 7,86 *г/см³)* при различных окружных скоростях вращения

Таблица

v, м/сек *v = ω·R*	30	60	90	120	150	180	240	300
σ, *МПа*	7,5	30	66,5	120	185	265	475	750

Случай 2. Пусть кольцо вращается относительно оси, совпадающей с диаметром (рис. 7).

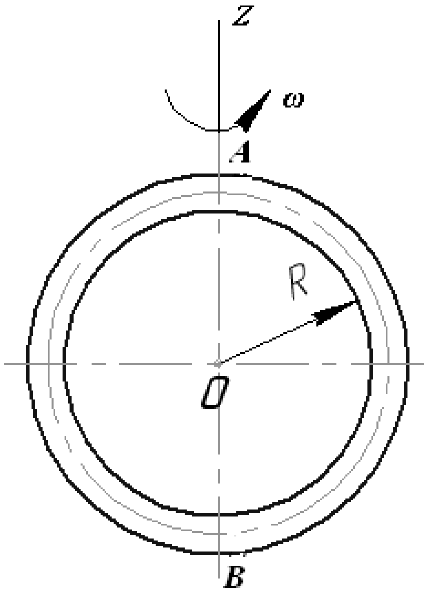


Рис. 7.

В этом случае продольная сила и изгибающий момент будут одновременно наибольшими в сечениях *A* и *B.* Их численные значения будут равны

$$N_{\max} = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{g} A; \qquad M_{\max} = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{4g} A$$

Наибольшие нормальные напряжения в этих сечениях

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} + \frac{M_{\max}}{W_y}$$

5. ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИИ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

К ударным нагрузкам относят силы взаимодействия между соударяющимися телами, вызванные изменением скоростей точек этих тел за очень малый промежуток времени с момента их соприкосновения.

За это время сила удара достигает большого значения, причем она не остается постоянной. Различают две фазы: нарастание силы удара от нуля, в момент соприкосновения соударяющихся тел, до максимального значения и последующее снижение ее до нуля.

При изучении явления удара принимаем следующие ограничения и допущения:

1. В ударяемой конструкции возникают напряжения, не превосходящие предела пропорциональности, то есть закон Гука при ударе сохраняет свою силу.

2. Удар является неупругим, то есть после удара тела не отделяются друг от друга.

3. Ударяющее тело является абсолютно жестким, то есть не деформируется.

4. Сопротивлением движению пренебрегаем.

5. Масса ударяемой конструкции мала по сравнению с массой ударяющего тела и в расчет не принимается.

Рассмотрим случай продольного удара груза по неподвижному телу. Пусть груз весом *G* падает с высоты *h* на неподвижный стержень (рис. 8).

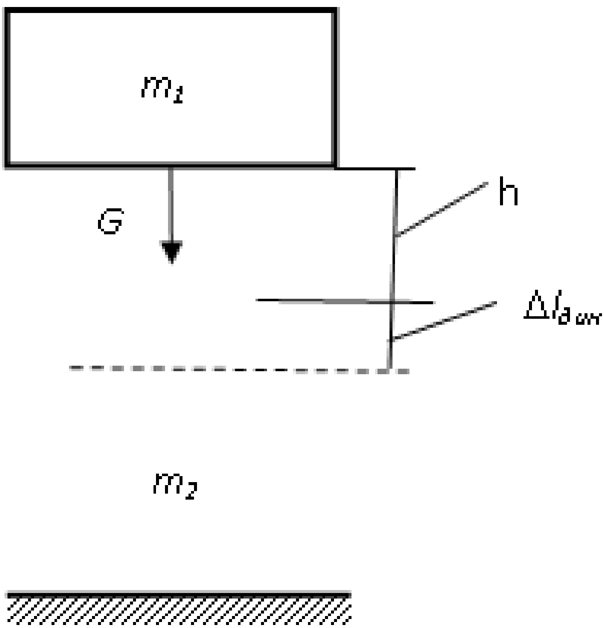


Рис. 8

Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения

$$v = \sqrt{2gh}$$

Эта скорость за очень короткий промежуток времени удара, исчисляемый тысячными или сотыми долями секунды, упадет до нуля.

Благодаря большой величине ускорения (замедления) возникает значительная сила инерции, величиной которой и определяется действие удара.

Однако теоретически трудно установить закон изменения скорости, а, следовательно, и величину силы инерции. Здесь применяется другой путь, основанный на законе сохранения энергии при следующих допущениях:

1. Напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности, так что закон Гука при ударе сохраняет свою силу.
2. Тела после удара не отделяются друг от друга.
3. Масса неподвижного стержня считается малой по сравнению с массой ударяющего тела, поэтому в расчет не принимается.
4. Потерей части энергии, перешедшей в теплоту и в энергию колебательного движения соударяющихся тел, пренебрегаем.

Приравняем работу падающего груза потенциальной энергии деформации стержня.

Работа, совершаемая весом падающего груза,

$$W = G(h + \Delta l_{дин}),$$

где

$\Delta l_{дин}$ – перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Потенциальная энергия деформации при сжатии равна

$$U = \Delta l_{дин}^2 \frac{EA}{2l}.$$

Из этих двух уравнений получаем

$$G(h + \Delta l_{дин}) = \Delta l_{дин}^2 \cdot \frac{EA}{2l},$$

или

$$\Delta l_{дин}^2 EA - 2Gl\Delta l_{дин} - 2Ghl = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на *EA,* получим

$$\Delta l_{дин}^{2} - 2\frac{Gl}{EA}\Delta l_{дин} - 2\frac{Gl}{EA}h = 0.$$

Но

$Gl / EA = \Delta l_{ст}$ – укорочение стержня от статически приложенной нагрузки G.

Тогда

$$\Delta l_{дин}^{2} - 2\Delta l_{ст}\Delta l_{дин} - 2\Delta l_{ст}h = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно $\Delta l_{дин}$, получим

$$\Delta l_{дин} = \Delta l_{ст} \pm \sqrt{\Delta l_{ст}^{2} + 2h\Delta l_{ст}}.$$

Оставляя знак плюс, (решение со знаком минус перед радикалом противоречит физическому смыслу задачи), получаем окончательно

$$\Delta l_{дин} = \Delta l_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}}\right) = \Delta l_{ст}K_{дин},$$

где

$K_{дин}$ – динамический коэффициент.

Разделив обе части последнего уравнения на длину стержня и умножив на модуль упругости E, перейдем, на основании закона Гука, от деформаций к напряжениям

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}}\right) = \sigma_{ст}K_{дин}.$$

Из этих формул видно, что величины динамического напряжения и перемещения зависят от величины статической деформации ударяемого тела.

Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамические напряжения. Вот почему для смягчения удара применяют прокладки (резиновые, пружинные), дающие большие деформации.

При сжимающем ударе, во избежание продольного изгиба динамические напряжения не должны превосходить критических напряжений.

Аналогичный вид имеют формулы и для случая поперечного (изгибающего) удара, только в том случае вместо $\Delta l_{ст}$ следует принимать статический прогиб балки в месте удара – $z_{ст}$, а вместо $\Delta l_{дин}$ динамический прогиб – $z_{дин}$.

Если $h = 0$, то есть имеет место внезапное приложение нагрузки, то получим

$$\Delta l_{дин} = 2\Delta l_{ст}; \qquad \sigma_{дин} = 2\,\sigma_{ст}.$$

Следовательно, при внезапном приложении нагрузки деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки.

Если высота падения *h* значительно больше статической деформации $\Delta l_{ст}$, то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу

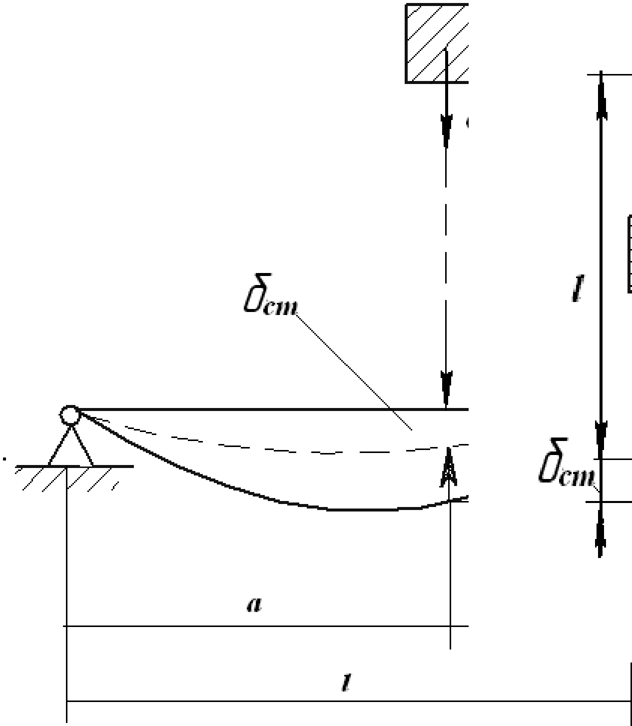
$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{ст}}}$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГИБАЮЩЕМ, РАСТЯГИВАЮЩЕМ И КРУТЯЩЕМ УДАРАХ

Определение напряжений и деформаций при ударе производится на основании закона сохранения энергии.

Пусть груз *P* без начальной скорости падает на упругую конструкцию с высоты *h.*

На рис. 9 и 10 показаны примеры изгибающего и растягивающего ударов.



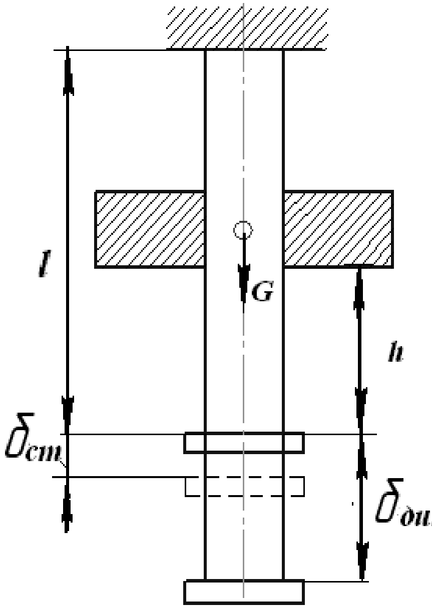


Рис. 9 Рис. 10

Если пренебречь сопротивлением воздуха, скорость падения груза можно определить по формуле

$$\upsilon = \sqrt{2gh}\,.$$

Отсюда следует, что

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g}\,.$$

Таким образом, всякий удар со скоростью *v* можно привести к свободному падению с условной высоты *h.*

Наибольшая динамическая деформация при ударе в точке падения груза $\delta_{дин}$ определяется по формуле

$$\delta_{дин} = \delta_{ст}\left(1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}}\right) = \delta_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\upsilon^2}{g\delta_{ст}}}\right)$$

где

$\delta_{ст}$ –статическая дефор- мация в той же точке от силы

P.

Таким образом, динамический коэффициент при ударе равен

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}}$$

Так как согласно закону Гука напряжения, пропорциональны деформациям,

то

$$\sigma_{дин} = K_{дин}\sigma_{ст}$$

где

$\sigma_{ст}$ – статическое напряжение.

Величина напряжений при ударе зависит от величины деформации, то есть от жесткости тела, по которому наносится удар.

С уменьшением жесткости ударяемого тела напряжения в нем уменьшаются. Поэтому для смягчения удара применяют резиновые и пружинные прокладки.

При мгновенном приложении нагрузки без удара (h = 0) получим

$$K_{дин} = 2; \qquad \delta_{дин} = 2\,\delta_{ст}; \qquad \sigma_{дин} = 2\sigma_{ст}$$

Если высота падения груза h весьма велика по сравнению с $\delta_{ст}$, то величина динамического коэффициента определяется по приближенной формуле

$$K_{дин} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{g\delta_{ст}}}.$$

Крутящий удар наблюдается при резком снижении угловой скорости вала с маховиком путем торможения конца вала (рис. 11).

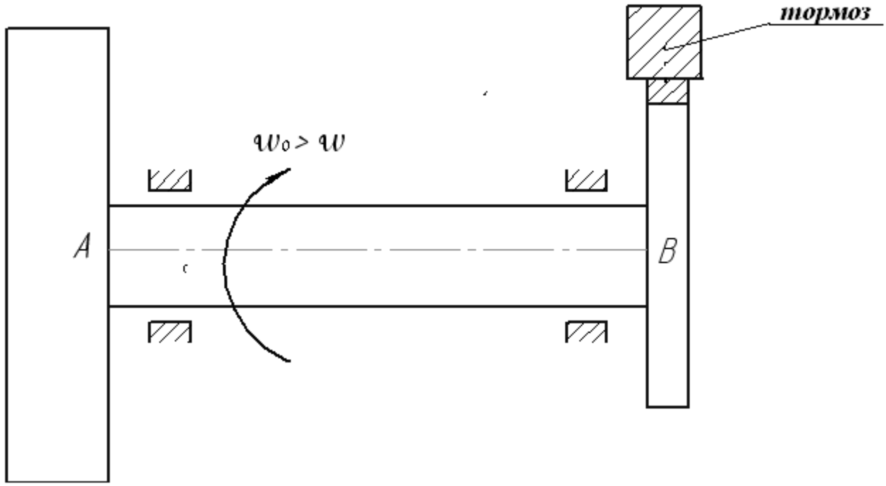


Рис.11.

Динамический угол закручивания вала при этом равен

$$\varphi_{дин} == \sqrt{\frac{J_M l}{GJ_P}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)},$$

где

J_M – момент инерции массы маховика;

Jp – момент инерции сечения вала;

ω_0, ω – угловые скорости вращения вала до и после торможения.

Динамический крутящий момент определяется по формуле

$$M_{дин} == \frac{GJ_p}{l}\varphi_Д$$

Соответствующее ему максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{дин} = \frac{M_{дин}}{W_p}.$$

7. УЧЕТ МАССЫ КОНСТРУКЦИИ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ УДАР

Если масса ударяемой конструкции сравнима с массой ударяющего тела, то ею пренебречь нельзя, и в этом случае в приведенных ранее формулах вза- мен статической деформации

δ_{cm} подставляют

$$\delta_{cm}\left(1+\frac{kQ}{P}\right)$$

где

Q – полный вес конструкции;

P – вес ударяющего тела;

k – коэффициент приведения.

При растягивающем ударе

$$k=\frac{1}{3},$$

а при изгибающем ударе в середину пролета простой балки

$$k=\frac{17}{35}.$$

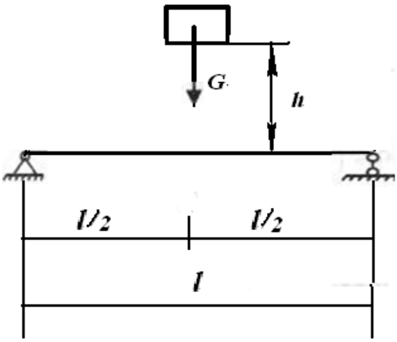
С учетом массы конструкции динамический коэффициент определяется по формуле

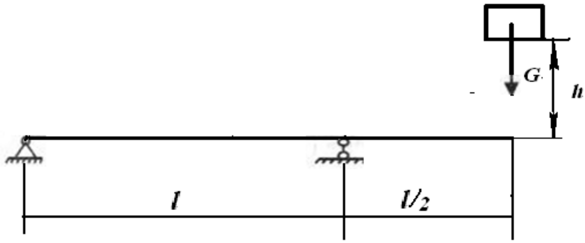
$$K_{дин}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{cm}\left(1+\frac{kQ}{P}\right)}}$$

Учет собственной массы ударяемой конструкции приводит к уменьшению величины динамического коэффициента, то есть к снижению эффекта удара.

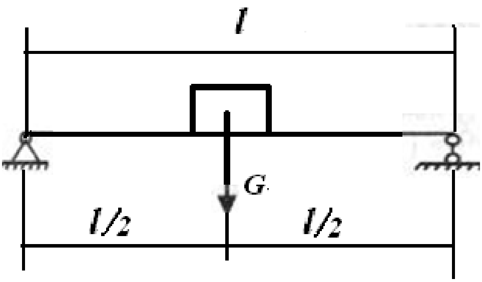
8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

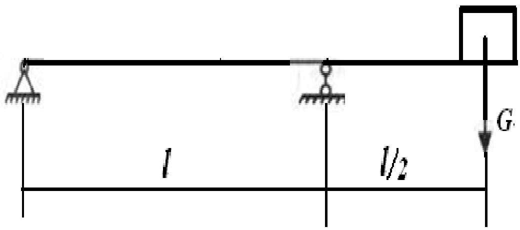
1. Какие нагрузки называются статическими, а какие динамическими?
2. Как определяется интенсивность погонной инерционной нагрузки?
3. Что называют ударом?
4. Что называют динамическим коэффициентом при ударе?
5. Что представляет собой внезапное действие нагрузки и чему равен динамический коэффициент при таком действии?
6. Как определяются напряжения и перемещения при ударе?
7. Какие виды динамических нагрузок вы знаете?
8. Для балки постоянной жесткости, на которую с высоты h падает груз G, определить динамический коэффициент?





9. Определить напряжения и максимальный прогиб, возникающие в балке при мгновенном приложении нагрузки *G*?



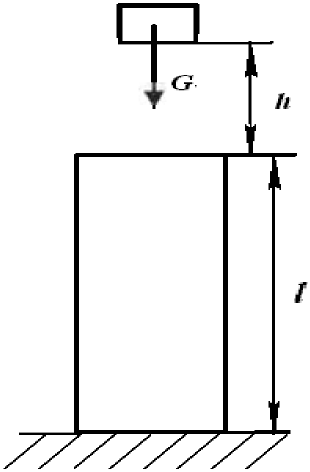


10. Почему запрещается при подъеме груза на лебедке делать резкие изменения скоростей?

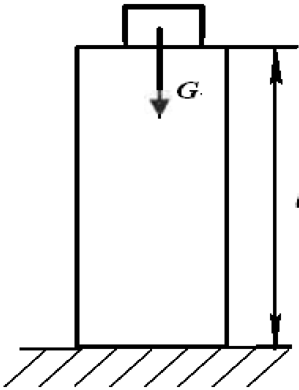
11. Почему внезапная остановка опускающегося на канате груза опасна для прочности каната?

12. Как влияет на динамические напряжения и перемещения масса системы, воспринимающей удар?

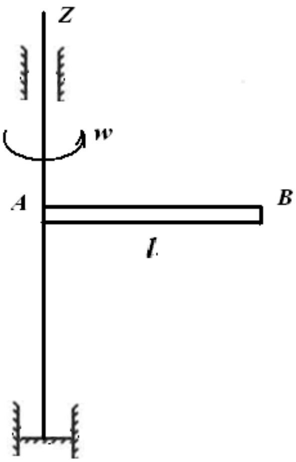
13. На стержень с высоты *h* падает груз G, определить динамический коэффициент, напряжения и наибольший прогиб



14. Определить динамический коэффициент, напряжения и наибольший прогиб, возникающие в стержне в случае мгновенного приложения нагрузки G.



15. Стержень *AB* длиной *l* равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси. Запишите условие прочности.



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1.Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа», 2009. – 560с.

2.Вольмир А.С., Григорьев Ю.П., Станкевич А.И.. Сопротивление материалов. М.: Дрофа, 2007. – 591с.

3.Дарков А.В. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа», 2007. – 632 с.

4.Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Скуратов С.В. Краткий курс сопротивления материалов. – Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т, 2013. – 187 с.

5.Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. И.Э. Баумана, 2005. – 592с.