



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

**Учебно-методическое пособие**  
по выполнению расчетно-графической  
работы и проведению практических  
занятий на тему

**«Расчет балок и плоских рам  
на жесткость»**

Авторы  
Еремин В. Д.

Ростов-на-Дону, 2020

## Аннотация

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические положения, примеры решения типовых задач, материал для самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графической работы на тему «Расчет балок и плоских рам на жесткость» по дисциплинам сопротивление материалов, специальные вопросы сопротивления материалов, механика, теоретическая механика для архитекторов, строительная механика для архитекторов.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

## Авторы

к.т.н., профессор кафедры «Сопротивление материалов» Еремин В.Д.



## Оглавление

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>5</b>
1.1. Перемещения при плоском изгибе. Основные понятия и определения .....	5
1.2. Определение перемещений в балках методом начальных параметров .....	8
1.3. Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора с использованием правила Верещагина .....	11
1.4. Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов с использованием дифференциальных зависимостей между $Q$ , $M$ , $\varphi$ и $w$ .....	14
1.5. Расчет балок на жесткость. Проверка выполнения условия жесткости балки .....	15
1.6. Раскрытие статической неопределимости балок и рам .....	16
1.7. План решения статически неопределимых задач .....	18
<b>ТЕМА 2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ НА ЖЕСТКОСТЬ .....</b>	<b>18</b>
2.1. Задача № 1. Расчет на жесткость статически определимой балки методом начальных параметров .....	19
2.2. Задача № 2. Определение перемещений в статически определимой балке методом Мора с использованием правила Верещагина .....	39
2.3. Задача № 3. Определение перемещений в статически определимой плоской раме методом Мора с использованием правила Верещагина .....	62
2.4. Задача 4. Расчет на жесткость статически неопределимой балки методом начальных параметров .....	93
<b>Контрольные вопросы к расчетно-графической работе на тему «Расчет балок и плоских рам на жесткость» .....</b>	<b>109</b>
<b>Рекомендуемая литература .....</b>	<b>111</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке инженеров любой специальности.

Сопротивление материалов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами технических направлений подготовки (специальностей).

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи. Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями. Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этих дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить обучающихся пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Учебно-методическое пособие содержит материал для изучения студентами одной из сложных тем следующих учебных дисциплин кафедры:

- сопротивление материалов;
- техническая механика;
- специальные вопросы сопротивления материалов;
- архитектурно-строительная механика;
- теоретическая и прикладная механика.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, для закрепления читаемого курса лекций, для подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся, при самостоятельном выполнении домашних, контрольных и расчетно-графических работ.

## **РАСЧЕТ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ НА ЖЕСТКОСТЬ**

### **ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

#### **1.1. Перемещения при плоском изгибе. Основные понятия и определения**

В предыдущем разделе были рассмотрены вопросы, относящиеся к расчету балок на прочность. Однако в большом количестве случаев практического расчета стержневых и рамных систем, работающих на изгиб, необходимо также производить их расчет на жесткость.

Под расчетом на жесткость понимается оценка упругой податливости плоских стержневых систем под действием нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать допустимых величин.

Для выполнения таких расчетов необходимо научиться вычислять перемещения поперечных сечений плоских стержневых систем под действием любой внешней нагрузки. Кроме этого, перемещения приходится определять и при расчете статически неопределимых конструкций.

Под действием внешних нагрузок балка деформируется и ее ось искривляется.

Определение. Плоская кривая, форму которой принимает ось балки при изгибе, называется изогнутой осью, или упругой

линией.

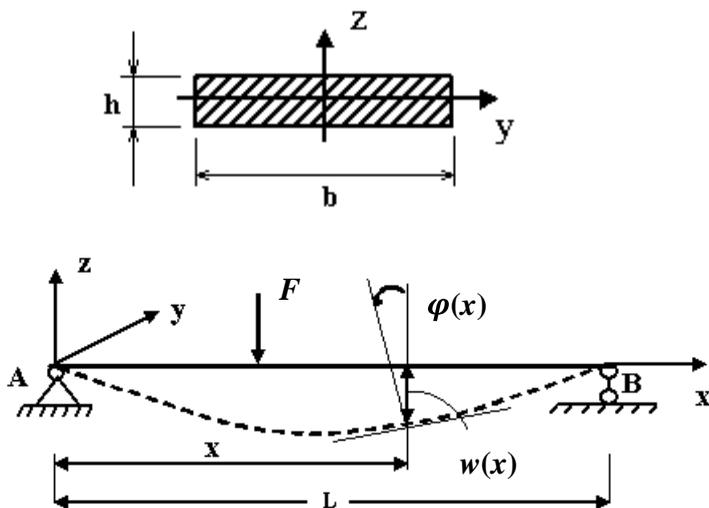
При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей. Допущение о малости перемещения позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной (геометрической) оси недеформируемого бруса.

**Определение.** Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному геометрической оси балки, называется прогибом балки в данном сечении и обозначается буквой  $w$ .

**Определение.** Наибольший прогиб называется стрелой прогиба и обозначается буквой  $f$ .

**Определение.** Угол  $\varphi$ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Таким образом, при изгибе балок точки ее геометрической оси ( $x$ ) получают поперечные перемещения или прогибы ( $w$ ), а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей ( $y$ ) на угол  $\varphi$  (рис. 1.1).



**Рис. 1.1. Деформация балки при изгибе**

Прогибы ( $w$ ) и углы поворота ( $\varphi$ ) часто называют линейными и угловыми перемещениями соответственно.

Правила знаков. Прогиб ( $w$ ) считается положительным, если он происходит вверх – в сторону положительной оси ординат  $z$ . Угол поворота ( $\varphi$ ) считается положительным, если поперечное сечение поворачивается против хода часовой стрелки, если ось абсцисс  $x$  направлена слева направо.

На рис. 1.1  $w(x) < 0$ , а  $\varphi(x) > 0$ .

Прогибы балок измеряются в единицах длины (сантиметрах или миллиметрах), а углы поворота – в градусах или радианах.

Здесь и далее начало отсчета для координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  выбирается на левом конце балки.

Теория деформации балок, изучаемая в курсе сопротивления материалов, основывается на следующих предположениях (гипотезах):

1. Материал балки подчиняется закону Гука ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ), то есть напряжения в балке не выходят за предел пропорциональности.

2. Размеры поперечных сечений балки невелики по сравнению с ее длиной.

3. Прогибы балки ( $w$ ) малы по сравнению с ее длиной  $L$  /расстоянием между опорами балки/, то есть отношение наибольшего прогиба  $f$  к длине пролета  $L$  балки устанавливается в следующих пределах

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000},$$

где

$L$  – длина пролета балки (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

4. Углы поворота поперечных сечений ( $\varphi$ ) не превышают  $1^\circ$   
 $|\varphi_{\max}| \leq 1^\circ = 0,0175$  рад.

В этом случае для определения прогибов  $w$  можно использовать приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$w''(x) = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_y}, \quad (1.1)$$

где

$M(x)$  – выражение изгибающего момента, действующего в поперечном сечении балки на расстоянии  $x$  (на рассматриваемом участке балки);

$E$  – модуль упругости первого рода /модуль Юнга/;

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения балки.

**Определение.** Величина  $E \cdot I_y$ , характеризующая сопротивление балки изменению ее первоначальной формы, называется жесткостью балки при изгибе.

Углы поворота поперечных сечений  $\varphi$  можно принимать равными первой производной от прогиба  $w$ . Известно, что

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x),$$

поэтому, в связи с малостью деформаций балок, можно считать, что

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi,$$

то есть можно записать

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x) \approx \varphi(x) \quad (1.2)$$

Для расчета балок на жесткость (определение перемещений в плоских стержневых системах) в курсе сопротивления материалов обычно изучают метод начальных параметров и метод Мора (интеграл Мора) с использованием правила Верещагина (правила «перемножения» эпюр).

Метод начальных параметров удобно применять в том случае, когда необходимо определить перемещения в нескольких сечениях балки. Основным недостатком этого метода является то, что его можно применять только для расчета балок.

Метод Мора, в отличие от метода начальных параметров, является универсальным. Его можно применять для определения перемещений любых объектов – балок, плоских и пространственных рам, арок и др.

## 1.2. Определение перемещений в балках методом начальных параметров

При определении перемещений балки методом начальных параметров (МНП), записывается универсальное уравнение прогибов, которое дает возможность определять прогиб в произвольном сечении балки при любой внешней нагрузке.

Универсальное уравнение прогибов имеет следующий вид

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_y} \cdot \left[ \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{F_0 x^3}{6} + \sum \frac{M_i (x-a_i)^2}{2} + \sum \frac{F_j (x-b_j)^3}{6} + \sum \frac{q_k (x-c_k)^4}{24} \right] \quad (1.3)$$

где

$w(x)$  – величина прогиба в произвольном сечении балки на расстоянии  $x$  от начала отсчета;

$w_0, \varphi_0$  – прогиб и угол поворота поперечного сечения в

начале системы координат (кинематические начальные параметры);

$M_0, F_0$  – сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат (статические начальные параметры);

$M_i$  – сосредоточенный момент на расстоянии  $a_i > 0$  от начала координат;

$F_j$  – сосредоточенная сила на расстоянии  $b_j > 0$  от начала координат;

$q_k$  – интенсивность распределенной нагрузки, которая начинается на расстоянии  $c_k \geq 0$  от начала координат;

$EI_y$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Соответственно, формула для вычисления углов поворота произвольных поперечных сечений балки определяется простым дифференцированием уравнения (1.3), так как

$$\varphi(x) \approx w'(x).$$

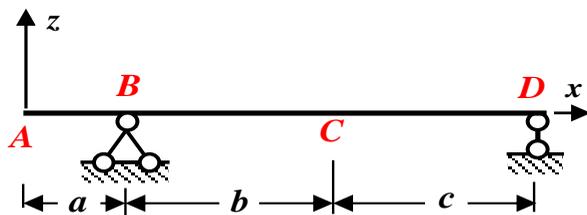
Статические начальные параметры  $M_0$  и  $F_0$  (сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат) могут быть известны (внешняя нагрузка) или должны быть определены из условий статики (опорные реакции).

Неизвестные кинематические начальные параметры  $w_0$  и  $\varphi_0$  определяются из условий закрепления балки (кинематические граничные условия).

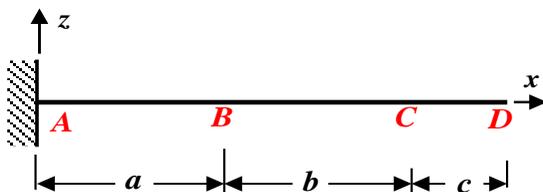
Кинематические граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и составляют относительно прогибов и углов поворота.

Так, например, для шарнирно опертой балки (рис. 1.2) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах

$$w_B = 0 \text{ и } w_D = 0;$$



**Рис. 1.2. Шарнирно опертая балка**



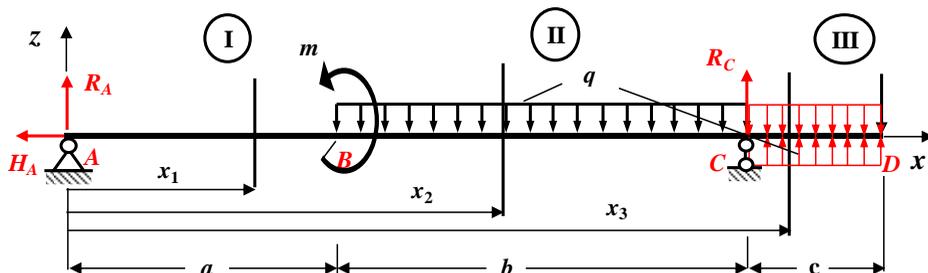
**Рис. 1.3. Жестко защемленная балка**

для жестко защемленной балки (рис. 1.3) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке

$$w_A = 0 \text{ и } \varphi_A = 0.$$

Таким образом, для определения прогибов и углов поворота в произвольных поперечных сечениях балок методом начальных параметров достаточно лишь знаний величин прогиба  $w_0$  и угла поворота  $\varphi_0$  в начале системы координат, то есть так называемых кинематических начальных параметров. Поэтому данный метод называется *методом начальных параметров*.

Применение метода начальных параметров требует непрерывного выполнения следующих требований Клебша (рис. 1.4):

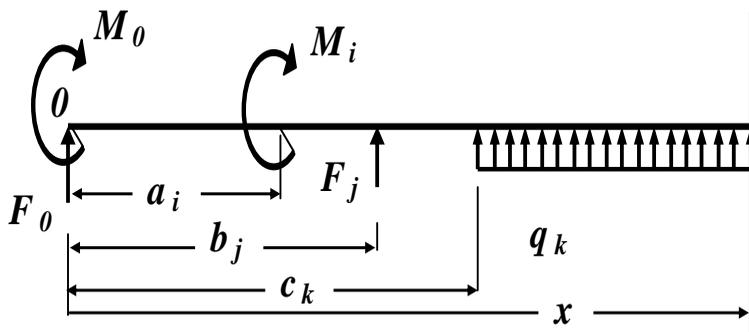


**Рис. 1.4. Требования Клебша**

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси  $z$  ( $w$ ) – вверх.
2. При действии распределенной нагрузки, не доходящей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого концевого сечения, одновременно уравновесивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано пунктиром на рис. 1.4.

Нагрузки ( $M_0, F_0, M_i, F_j, q_k$ ) считаются положительными, если они направлены так, как показано на рис. 1.5, и отрицатель-

ными – в противном случае



**Рис. 1.5. Правила знаков метода начальных параметров**

### 1.3. Определение перемещений в плоских стержневых системах методом Мора с использованием правила Верещагина

Любое сооружение под действием внешних факторов деформируется, изменяя свою первоначальную форму, и принимает форму равновесия, при котором влияние внешних воздействий уравновешивается внутренними силами сопротивления. При этом перемещение  $\Delta_{kP}$  (прогиб или угол поворота произвольного сечения балки или рамы) по заданному направлению  $k$  –  $k$  от внешней нагрузки может быть вычислено по универсальной формуле Мора, которая для балок и плоских рам имеет вид

$$\Delta_{kP} = \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \frac{M_P(x) \overline{M}_k(x)}{EJ_y} dx. \quad (1.4)$$

Следовательно, для отыскания перемещений  $\Delta_{kP}$  любого сечения балки необходимо найти выражение для изгибающего момента  $M_P(x)$  от заданной внешней нагрузки и момента  $\overline{M}_k(x)$  от соответствующей единичной нагрузки, приложенной в сечении, где требуется найти перемещение  $\Delta_{kP}$ .

Если в формуле под  $\Delta_{kP}$  подразумевается прогиб, то момент  $\overline{M}_k(x)$  необходимо вычислять от сосредоточенной единичной безразмерной силы, приложенной в той точке, где отыскивается прогиб. При вычислении же угла поворота в качестве единичной нагрузки прикладывается безразмерная пара сил с моментом равным единице. Если при вычислении изгибающих моментов придется делить балку (раму) на участки, то и интеграл в фор-

муле для перемещений (1.4) распадается на сумму интегралов.

Вычисление интеграла Мора удобно производить по правилу Верещагина (правилу «перемножения» эпюр). Определение перемещений (прогибов или углов поворота произвольного сечения балки или рамы) с помощью этого правила производится в следующем порядке (рис. 1.6):

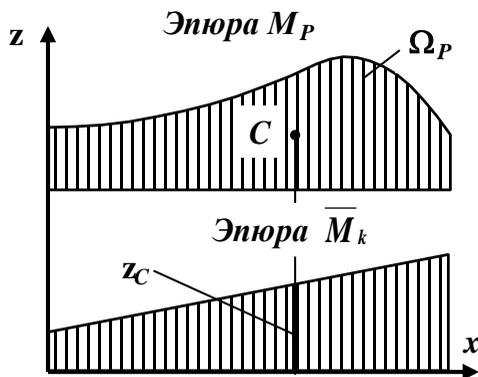


Рис. 1.6. Правило Верещагина

1. Строится эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки — эпюра  $M_P$  (грузовая эпюра).
2. Выбирается вспомогательное единичное состояние системы. Для этого к балке или раме, освобожденной от заданной нагрузки, по направлению искомого перемещения прикладывается **безразмерная единичная сила**: при определении линейного перемещения — **безразмерная сосредоточенная сила**, а при определении угла поворота — **безразмерный сосредоточенный единичный момент**.
3. Строится эпюра изгибающих моментов от действия этой **безразмерной единичной силы** — эпюра  $\bar{M}_k$ .
4. Ось балки (рамы) разбивается на участки таким образом, чтобы в пределах участка эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_k$  не имели бы особенностей (переломов и скачков).
5. На каждом участке балки (рамы) для вычисления интеграла Мора по правилу Верещагина (правилу «перемножения» эпюр) необходимо площадь одной эпюры (обычно грузовой эпюры  $M_P$ , так как, если есть криволинейная эпюра, то обязательно

ее площадь) умножить на ординату другой эпюры, расположенную под центром тяжести первой, и разделить на жесткость балки (рамы), то есть

$$\int_0^{l_i} \frac{M_p(x) \overline{M}_k(x)}{EJ_y} dx = \frac{1}{EJ_y} \Omega_p z_c, \quad (1.5)$$

где

$\Omega_p$  – площадь грузовой эпюры  $M_p$  на рассматриваемом участке балки (рамы), знак которой определяется знаком соответствующей эпюры  $M_p$ ;

$z_c$  – ордината в линейной эпюре  $\overline{M}_k$  под центром тяжести эпюры  $M_p$  на рассматриваемом участке балки (рамы), знак которой определяется знаком соответствующей эпюры  $\overline{M}_k$  (рис. 1.6);

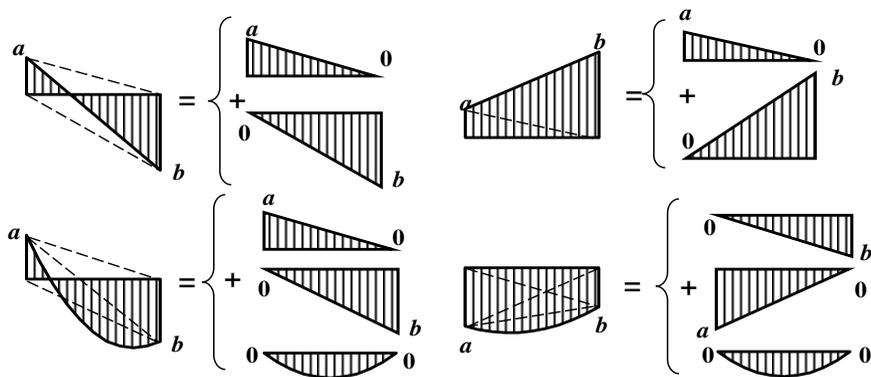
$EJ_y$  – жесткость поперечного сечения балки (рамы) на рассматриваемом участке.

Правило знаков. Результат «перемножения» эпюр на рассматриваемом участке балки (рамы) является положительным, если эпюры  $M_p$  и  $\overline{M}_k$  одного знака, и отрицательным, если эпюры  $M_p$  и  $\overline{M}_k$  разных знаков.

Если  $\Delta_{kp}$  положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно – то противоположно этому направлению.

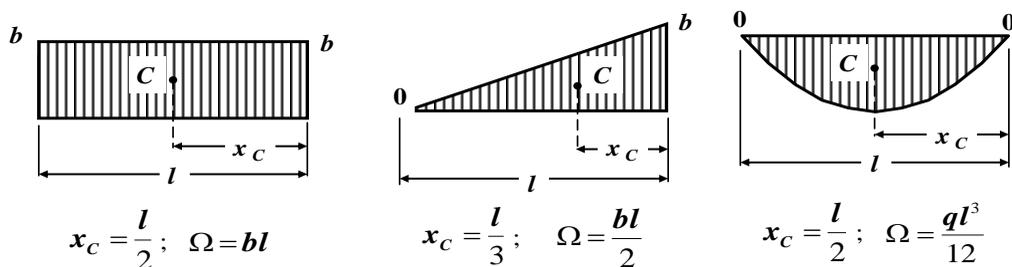
На первый взгляд, описанный графоаналитический способ вычисления интегралов Мора не даёт упрощений, так как всё равно приходится вычислять площадь  $\Omega_p$  криволинейных эпюр.

Однако, встречающиеся на практике эпюры могут быть разбиты на ряд простых фигур (прямоугольник, треугольник, симметричную квадратичную параболу), у которых известны площадь и положение центра тяжести. Примеры разбиения эпюр приведены на рис. 1.7.



**Рис. 1.7. Разбиение сложных эпюр на простые эпюры**

На рис. 1.8 приведены сведения о координатах центра тяжести и площадях простейших эпюр – прямоугольник, треугольник и симметричная квадратичная парабола.



**Рис. 1.8. Координаты центров тяжести эпюр и их площади**

#### 1.4. Проверка правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов с использованием дифференциальных зависимостей между $Q$ , $M$ , $\varphi$ и $w$

Из теории изгиба балок известно, что величины  $Q$ ,  $M$ ,  $\varphi$  и  $w$  связаны между собой дифференциальными зависимостями

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_y}; \quad \frac{dw}{dx} = \varphi(x); \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EI_y}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{EI_y} \quad (1.6)$$

На основании этих зависимостей строятся правила контроля и построения эпюр углов поворота и прогибов:

1. Если изгибающий момент на каком-то участке балки по-

ложительный

( $M > 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз.

2. Если изгибающий момент на каком-то участке балки отрицательный

( $M < 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

3. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ( $M = 0$ ) (при смене знака) или имеет «скачок» (при смене знака), то на эпюре прогибов в этом сечении наблюдаем точку перегиба (т.п.).

4. Если угол поворота в каком-то сечении балки равен нулю ( $\varphi = 0$ ) (при смене знака), то на эпюре прогибов этом сечении наблюдаем точку экстремума (т.э.).

5. Если поперечная сила на каком-то участке балки положительная ( $Q > 0$ ), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз. Если поперечная сила на каком-то участке балки отрицательная ( $Q < 0$ ), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.

6. Если поперечная сила в каком-то сечении балки равна нулю ( $Q = 0$ ) (при смене знака) или имеет «скачок» (при смене знака), то на эпюре углов поворота в этом сечении балки наблюдаем точку перегиба (т.п.).

7. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ( $M = 0$ ) (при смене знака) или имеет «скачок» (при смене знака), то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку экстремума (т.э.).

8. Если на эпюре изгибающих моментов в каком-то сечении балки наблюдается «скачок», то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку излома (т.и.).

### 1.5. Расчет балок на жесткость. Проверка выполнения условия жесткости балки

Определение. Сечение, в котором перемещение (прогиб балки) принимает максимальное по абсолютной величине значение, называется опасным сечением балки из условия жесткости.

Условие жесткости при изгибе имеет вид

$$f \leq [f]. \quad (1.7)$$

Здесь

$f$  – стрела прогиба (максимальное по абсолютной величине

значение прогиба);

$[f]$  – величина допускаемого прогиба.

Для проверки выполнения условия жесткости балки из эюры прогибов определяется в опасном сечении балки максимальное по абсолютной величине значение прогиба  $|w_{max}| = f$ , которое подставляется в условие (1.7).

Величина допускаемого прогиба  $[f]$  для реальных сооружений приведена в СНиПах и может изменяться в довольно широком диапазоне

$$[f] = \frac{L}{100} \div \frac{L}{1000},$$

где

$L$  – длина пролета (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

Обычно условие жесткости балки (1.7) выполняется.

*В противном случае, из условия жесткости  $f \leq [f]$  необходимо определить величину  $I_y^{треб}$  и подобрать новые размеры поперечного сечения балки.*

*Чтобы одновременно выполнялись условие прочности и условие жесткости, необходимо окончательно выбрать большее сечение.*

## 1.6. Раскрытие статической неопределимости балок и рам

В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей (число опорных реакций) больше числа уравнений равновесия (статики). В этих системах, используя только уравнения равновесия, невозможно определить ни реакции опор, ни внутренние усилия, возникающие в элементах конструкций. Такие системы называются статически неопределимыми.

Определение. Статически неопределимые системы – это упругие стержневые системы, у которых число неизвестных опорных реакций превышает число независимых уравнений равновесия (уравнений статики), возможных для этой системы.

Определение. Степень статической определимости (неопределимости) простых стержневых систем обычно определяется как разность между количеством неизвестных опорных реакций и количеством уравнений равновесия (уравнений статики), которые можно составить для данной системы.

Определение. Степень статической определимости (неопределимости) сложных стержневых систем определяется

числом «лишних» связей по формуле

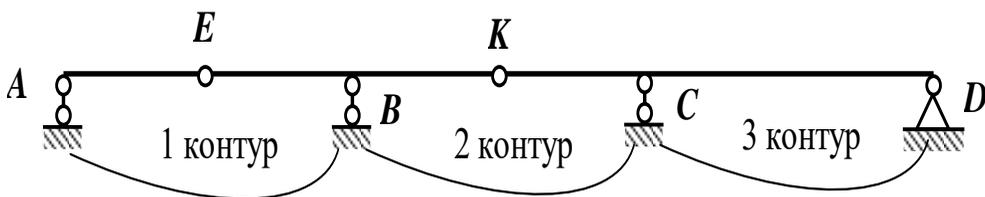
$$S = 3\kappa - \psi,$$

где

$\kappa$  – число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений;

$\psi$  – число одиночных шарниров.

Так, для шарнирно – неподвижной опоры (опора **D** на рис. 1.9) число одиночных шарниров равно **1**, для шарнирно – подвижной опоры (например, опора **A** на рис. 1.9) число одиночных шарниров – **2**.



**Рис. 1.9. Статически определимая многопролетная балка**

Для сложного шарнира () число одиночных шарниров определяется по формуле

$$\psi = c - 1,$$

где

$c$  – число стержней, подходящих к шарниру.

На рис.1.9 шарниры **E** и **K** – одиночные, так как к каждому из них подходит по два стержня.

Если  $S = 0$ , то задача статически определимая. При  $S > 0$  задача статически неопределимая, а при  $S < 0$  – геометрически изменяемая.

Так на рис. 1.9 балка имеет три замкнутых контура ( $\kappa = 3$ ) и девять одиночных шарниров ( $\psi = 9$ ), поэтому  $S = 3\kappa - \psi = 3 \cdot 3 - 9 = 0$ , следовательно, эта балка статически определимая.

Для определения всех неизвестных опорных реакций статически неопределимой системы составляют дополнительные уравнения, выражающие условия ее закрепления на опорах. Их условно называют *уравнениями перемещений* или *уравнениями совместности деформаций*.

Количество дополнительных уравнений перемещений, необходимых для раскрытия статической неопределимости, должно

быть равно степени статической неопределимости системы.

Совместное решение уравнений равновесия и уравнений перемещений позволяет определить все неизвестные опорные реакции. Этот этап решения задачи называется раскрытием статической неопределимости системы.

Определение. Раскрыть статическую неопределимость системы – это значит определить численные значения всех опорных реакций.

### 1.7. План решения статически неопределимых задач

Статически неопределимые конструкции рассчитываются, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи. При этом придерживаются следующего порядка:

1. *Статическая сторона задачи.* Определяется степень статической неопределимости системы. Составляются уравнения равновесия, содержащие неизвестные опорные реакции системы.

2. *Геометрическая сторона задачи.* Рассматриваются кинематические граничные условия (условия на опорах), отражающие характер закрепления (опирания) системы, и записываются уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений).

3. *Физическая сторона задачи.* На основании закона Гука (уравнения метода начальных параметров, которое получено на основе закона Гука) уравнения совместности деформаций (уравнения перемещений) выражаются через неизвестные опорные реакции.

4. *Синтез уравнений.* Решая совместно систему уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи, определяются численные значения всех опорных реакций.

Существует много методов раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем.

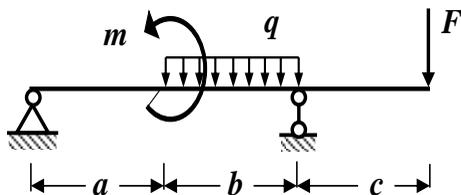
Для балок постоянного поперечного сечения, нагруженных всеми возможными типами нагрузок на произвольном количестве участков, раскрытие статической неопределимости и определение прогибов целесообразно производить, применяя универсальное уравнение метода начальных параметров.

## ТЕМА 2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ НА ЖЕСТКОСТЬ

## 2.1. Задача № 1. Расчет на жесткость статически определимой балки методом начальных параметров

### Задача.

Для заданной схемы статически определимой стальной балки на двух опорах (рис. 1.10) требуется:



**Исходные данные:**  
 $a = 2 \text{ м}; b = 3 \text{ м}; c = 1 \text{ м};$   
 $q = 15 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$   $m = 20 \text{ кНм};$   
 $F = 30 \text{ кН}.$

**Рис. 1.10. Схема балки**

1. Определить опорные реакции.
  2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
  3. Из условия прочности по методу допускаемых напряжений подобрать сечение балки из двутавра или двух швеллеров, приняв допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .
  4. Проверить прочность выбранного сечения балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.
  5. Проверить прочность выбранного сечения балки по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений, приняв допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 0,6[\sigma]$ .
  6. Найти значение жесткости поперечного сечения ( $EJ_y$ ).
  7. Вычислить, пользуясь методом начальных параметров, численные значения углов поворота поперечных сечений и прогибов оси в характерных точках участков балки. Построить их эпюры.
  8. Проверить правильность построения эпюр, используя дифференциальные зависимости между  $Q$ ,  $M$ ,  $\varphi$  и  $w$ .
  9. Для выбранного в пункте 3 типа сечения (двутавр или два швеллера) из условия жесткости подобрать номер прокатного профиля, приняв величину допускаемого прогиба  $[f] = \frac{L}{400}$ ,
- где  $L$  – длина пролета балки.
10. Сравнить результаты, полученные в п. 3 и п. 9.

## Решение

### Определение опорных реакций

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Для определения опорных реакций для балки, изображенной на рис. 1.11, составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

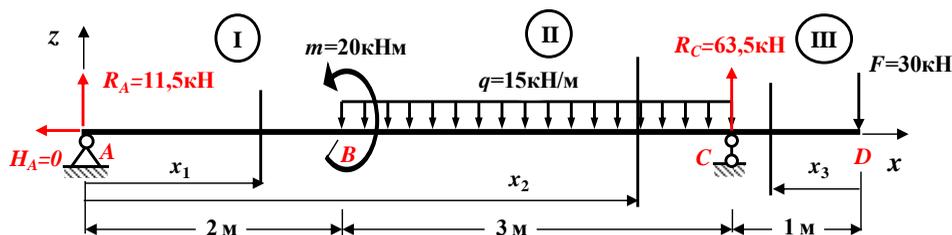


Рис. 1.11. Расчетная схема балки

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: -H_A = 0, \rightarrow H_A = 0.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\sum M_A = 0: m - q \cdot 3(2 + 1,5) + R_C \cdot 5 - F \cdot 6 = 0;$$

$$20 - 15 \cdot 3 \cdot 3,5 + R_C \cdot 5 - 30 \cdot 6 = 0;$$

$$20 - 157,5 + R_C \cdot 5 - 180 = 0;$$

$$-317,5 + R_C \cdot 5 = 0; \quad R_C = \frac{317,5}{5} = +63,5 \text{ кН}; \quad \rightarrow R_C = +$$

**63,5 кН.**

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $C$  равна нулю

$$\sum M_C = 0: -R_A \cdot 5 + m + q \cdot 3 \cdot 1,5 - F \cdot 1 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 + 20 + 15 \cdot 4,5 - 30 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 + 20 + 67,5 - 30 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 + 57,5 = 0; \quad R_A = \frac{57,5}{5} = +11,5 \text{ кН}; \quad \rightarrow R_A = +$$

**11,5 кН.**

Проверяем правильность вычисления опорных реакций

(сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна  $0$ )

$$\sum F_z = +R_A - q \cdot 3 + R_C - F = 11,5 - 15 \cdot 3 + 63,5 - 30 = 75 - 75 = 0 (\pm 5 \%).$$

### Построение эпюр поперечной силы $Q$ и изгибающего момента $M$

Расчетная схема балки имеет три участка ( $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.11).

**I участок  $AB$ :**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$ ; (начало отсчета на левом конце балки);

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = R_A = +11,5 \text{ кН};$$

Поперечная сила  $Q$  на участке  $AB$  является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$Q(0) = +R_A = +11,5 \text{ кН}$  (значение на левой границе участка);

$Q(2\text{м}) = +R_A = +11,5 \text{ кН}$  (значение на правой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1 = 11,5 \cdot x_1.$$

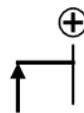
Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$M(0) = 0 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка);

$M(2\text{м}) = 11,5 \cdot 2 = 23 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

**II участок  $BC$ :**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м}$ ; (начало отсчета на левом конце балки);

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом



участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определенным внутренним силовым фактором и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = R_A - q \cdot (x_2 - 2) = 11,5 - 15 \cdot (x_2 - 2) = 41,5 - 15 \cdot$$

$x_2$ .

Поперечная сила  $Q$  на участке  $AB$  является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$Q(2\text{м}) = 41,5 - 30 = + 11,5$  кН (значение на левой границе участка);

$Q(5\text{м}) = 41,5 - 15 \cdot 5 = 41,5 - 75 = - 33,5$  кН (значение на правой границе участка).

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату, при которой она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение):

$$Q(x_0) = 41,5 - 15 \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{41,5}{15} = 2,77 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad x_0 =$$

**2,77 м.**

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = R_A x_2 - m - q(x_2 - 2) \frac{(x_2 - 2)}{2} = 11,5 x_2 - 20 - 15 \frac{(x_2 - 2)^2}{2} =$$

$$= -20 + 11,5 x_2 - 7,5(x_2 - 2)^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является квадратичной функцией координаты  $x_2$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 2,77$  м.

$M(2\text{м}) = -20 + 11,5 \cdot 2 - 7,5(2 - 2)^2 = -20 + 23 = 3$  кНм (значение на левой границе участка);

$M_{\text{экстр}} = M(2,77\text{ м}) = -20 + 11,5 \cdot 2,77 - 7,5(2,77 - 2)^2 = 7,408 \text{ кНм} = 7,41 \text{ кНм}$  (значение в сечении балки с координатой  $x_0 = 2,77 \text{ м}$ );

$M(5\text{ м}) = -20 + 11,5 \cdot 5 - 7,5(5 - 2)^2 = -30 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

**III участок DC:**  $0 \leq x_3 \leq 1\text{ м}$ ; (начало отсчета на правом конце балки);

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_3) = +F = +30 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$Q(0) = +F = +30 \text{ кН}$  (значение на правой границе участка);

$Q(1\text{ м}) = +F = +30 \text{ кН}$  (значение на левой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_3) = -F x_3 = -30 \cdot x_3.$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_3$ .

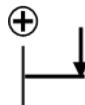
Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка.

$M(0) = 0 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка);

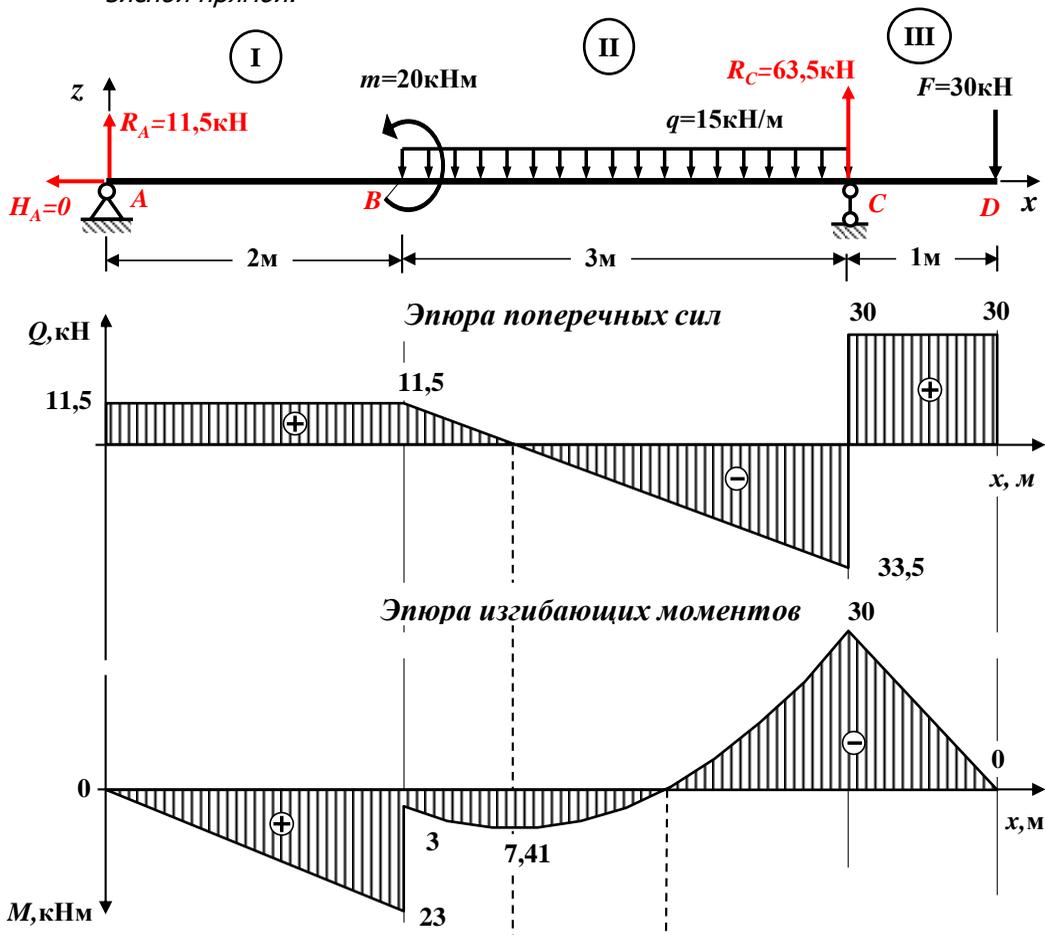
$M(1\text{ м}) = -30 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка).

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1. 12.

*В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, то есть положитель-*



ные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.



**Рис. 1.12. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов**

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок»

равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз – имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{Экстр}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя равномерно – распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя равномерно – распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### **Подбор сечения стальной балки из прокатного профиля по методу допускаемых напряжений**

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле

$\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение, проходящее через опору **C**, рис. 1.12)

$$M_{\max} = 30 \text{ кНм} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Из условия прочности определяем величину требуемого момента сопротивления

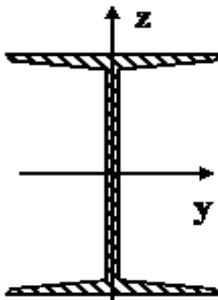
$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{160 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 1,875 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 \text{ см}^3 = 187,5 \text{ см}^3$$

Следовательно,  $W_y^{\text{треб}} \approx 188 \text{ см}^3$

### а). Подбор поперечного сечения балки из стального прокатного двутавра

Размеры поперечного сечения балки подбираются из условия

$$W_y \approx W_y^{\text{треб}}.$$



По сортаменту стального прокатного двутавра ближайшим к  $W_y^{треб} = 188 \text{ см}^3$  является значение момента сопротивления  $W_y = 184 \text{ см}^3$ , которое соответствует двутавру № 20.

Следовательно, фактический момент сопротивления для двутавра № 20 равен

$$W_y^{факт} = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

### Проверка прочности подобранного сечения балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y^{факт}} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 163 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Полученный результат показывает, что балка перегружена. Определяем величину перегрузки

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{max}}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{|160 - 163|}{160} \cdot 100 \% = 1,88 \% < 5 \%.$$

Величина перегрузки не превышает 5 %, что допустимо при расчете по методу допускаемых напряжений.

### б). Подбор поперечного сечения балки из двух стальных прокатных швеллеров

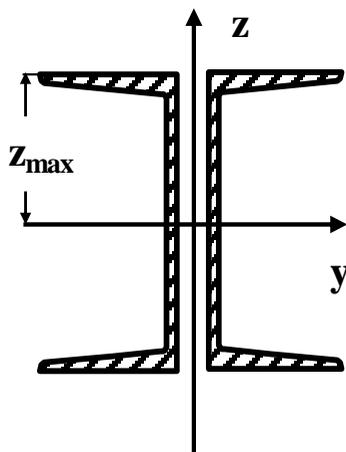
Требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки, состоящего из двух швеллеров, равен

$$W_y^{треб} = 188 \text{ см}^3.$$

Момент сопротивления одного швеллера должен удовлетворять условию

$$W_y^{шв} = \frac{W_y^{треб}}{2} \geq \frac{188 \text{ см}^3}{2} = 94 \text{ см}^3.$$

Здесь индексом "шв" обозначается момент сопротивления одного швеллера.



По сортаменту для стального прокатного швеллера ближайшим к  $W_y^{шв} = 94 \text{ см}^3$  является значение момента сопротивления  $W_y^{шв} = 93,4 \text{ см}^3$ , которое соответствует швеллеру № 16.

Следовательно, фактический момент сопротивления для поперечного сечения балки, состоящего из двух стальных прокатных швеллеров № 16, равен

$$W_y^{\text{факт}} = 2W_y^{\text{шв}} = 2 \cdot 93,4 \text{ см}^3 = 186,8 \text{ см}^3 = 187 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверяем выполнение условия прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_y^{\text{факт}}} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{187 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 160,4 \text{ МПа} \approx 160 \text{ МПа} =$$

$$= [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по методу допускаемых нормальных напряжений выполняется.

Проверяем выполнение условия экономичности (для прокатных элементов  $\varepsilon \leq 10 \%$ )

$$\varepsilon = \frac{[\sigma] - \sigma_{\text{max}}}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{160 - 160}{160} \cdot 100 \% = 0 \% (< 10 \%)$$

Условие экономичности выполняется.

Анализируя результаты подбора двух вариантов поперечного сечения балки, принимаем балку с поперечным сечением из двух стальных прокатных швеллеров, так как сечение балки из двутавра ( $\sigma_{\text{max}} = 163 \text{ МПа}$ ) перегружено больше, чем сечение

балки из двух швеллеров ( $\sigma_{max} = 160 \text{ МПа}$ ).

### Проверка прочности подобранного сечения балки по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений

Касательные напряжения ( $\tau$ ) в произвольной точке поперечного сечения балки определяются по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{Q S_y^{отс}}{b(z) J_y},$$

где

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_y^{отс}$  – абсолютное значение статического момента отсеченной части поперечного сечения балки;

$b(z)$  – толщина поперечного сечения балки на уровне точки поперечного сечения, в которой определяются касательные напряжения;

$J_y$  – главный момент инерции поперечного сечения балки.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_y^{отс}}{b(z) \cdot J_y} \leq [\tau],$$

где

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Для балок с поперечным сечением из прокатных стальных элементов

$$[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma] = 0,6 \cdot 160 \text{ МПа} = 96 \text{ МПа}.$$

В нашем примере опасным сечением по касательным напряжениям является сечение **C** (рис. 1.12), где

$$Q_{max} = Q_c = 33,5 \text{ кН}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в опасном сечении балки ( $Q = Q_{max}$ ), в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральном слое (на оси  $y$ ), поэтому  $b(z) = 2 \cdot d^{шв}$  – для поперечного сечения балки из двух швеллеров.

Отсеченная часть фигуры – верхняя половина поперечного

сечения, поэтому  $S_y^{\text{отс}} = 2S_y^{1/2}$  – для поперечного сечения балки из двух швеллеров.

Здесь

$S_y^{1/2}$  – статический момент половины сечения. (Для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте).

Из сортамента прокатной стали для швеллера № 16 выпишем следующие значения:

$$d = d^{\text{шв}} = 0,5 \text{ см}; \quad J_y^{\text{шв}} = 747 \text{ см}^4; \quad S_y^{\text{шв}} = 54,1 \text{ см}^3.$$

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} 2S_y^{1/2}}{2d 2J_y} = \frac{33,5 \text{ кН} \cdot 2 \cdot 54,1 \text{ см}^3}{2 \cdot 0,5 \text{ см} \cdot 2 \cdot 747 \text{ см}^4} = 2,43 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 2,43 \cdot 10$$

$$\text{МПа} = 24,3 \text{ МПа} < 96 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности по касательным напряжениям для двух швеллеров № 16 выполняется.*

*В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.*

*Принимаем окончательно балку с поперечным сечением из двух стальных прокатных швеллеров № 16.*

### **Определение жесткости поперечного сечения балки ( $EJ_y$ ) при изгибе**

Модуль упругости первого рода для стали (модуль Юнга) равен

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Момент инерции поперечного сечения балки из двух стальных прокатных швеллеров № 16 равен

$$J_y = 2 \cdot 747 \text{ см}^4 = 1494 \text{ см}^4 = 1494 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

поэтому

$$EJ_y = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{М}^2} \cdot 1494 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 2988 \text{ кНм}^2.$$

### Вычисление методом начальных параметров численных значений углов поворота поперечных сечений и прогибов оси в характерных сечениях участков балки

Для определения перемещений балки используем универсальное уравнение метода начальных параметров (МНП), которое имеет следующий вид

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{1}{EI_y} \left[ \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{F_0 x^3}{6} + \sum \frac{M_i (x-a_i)^2}{2} + \sum \frac{F_j (x-b_j)^3}{6} + \sum \frac{q_k (x-c_k)^4}{24} \right],$$

где

$w(x)$  – величина прогиба в произвольном сечении балки на расстоянии  $x$  от начала отсчета;

$w_0, \varphi_0$  – прогиб и угол поворота поперечного сечения в начале координат (кинематические начальные параметры);

$M_0, F_0$  – сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале координат (статические начальные параметры);

$M_i$  – сосредоточенный момент на расстоянии  $a_i > 0$  от начала координат;

$F_j$  – сосредоточенная сила на расстоянии  $b_j > 0$  от начала координат;

$q_k$  – интенсивность распределенной нагрузки, которая начинается на

расстоянии  $c_k \geq 0$  от начала координат;

$EI_y$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

#### Определение неизвестных начальных параметров

Неизвестные кинематические начальные параметры  $w_0$  и  $\varphi_0$  определяются из граничных условий (условий закрепления балки).

В нашей задаче балка закреплена на шарнирных опорах **A** и **C** (рис. 1.11), то есть граничные условия принимают вид

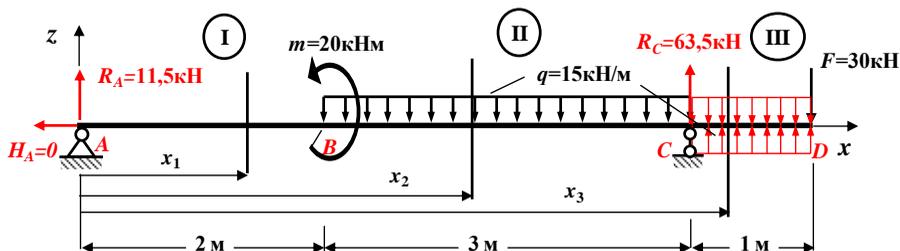
$$w_A = w(0) = 0 \text{ и } w_C = w(5) = 0.$$

Начальные параметры (начало отсчета на опоре **A**) будут равны

$$w_0 = w_A = 0; \quad \varphi_0 = \varphi_A = ?; \quad M_0 = M_A = 0 \text{ кНм}; \quad F_0 = +R_A = +11,5 \text{ кН}.$$

Так как распределенная нагрузка не доходит до правого

конца балки, то ее необходимо продолжить до правого концевого сечения, одновременно уравнивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано пунктиром на рис.1.13 (требование Клебша).



**Рис. 1.13. Выполнение требования Клебша**

Уравнение метода начальных параметров для определения прогибов для нашей задачи имеет следующий вид

**I участок АВ:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$ ; **II участок ВС:**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м}$ ;

**III участок CD:**  $5\text{м} \leq x_3 \leq 6\text{м}$

$$w(x) = \varphi_0 \cdot x + \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{R_A x^3}{6} \Big|_I - \frac{m(x-2)^2}{2} - \frac{q(x-2)^4}{24} \Big|_{II} + \frac{R_B(x-5)^3}{6} + \frac{q(x-5)^4}{24} \Big|_{III} \right]$$

Смысл разделения этого уравнения вертикальными линиями заключается в следующем: для определения прогибов на **I** участке используются слагаемые до первой вертикальной линии (в нашем примере их два), на **II** участке – до второй вертикальной линии (в нашем примере их четыре), а на **III** участке – все слагаемые.

Для получения уравнения метода начальных параметров для определения углов поворота поперечных сечений необходимо продифференцировать полученное выражение для определения прогибов, причем дифференцирование производится без раскрытия скобок. В результате получаем

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{R_A x^2}{2} \Big|_I - m(x-2) - \frac{q(x-2)^3}{6} \Big|_{II} + \frac{R_B(x-5)^2}{2} + \frac{q(x-5)^3}{6} \Big|_{III} \right]$$

Определяем неизвестный начальный параметр - угол поворота

**$\varphi_0$ .**

Используя граничное условие  $w_c = w(5) = 0$ , то есть равенство нулю прогиба на опоре **C**, и выражение для определения прогибов, получаем уравнение для определения начального угла поворота

$$\begin{aligned}
 w_c = w(5m) &= \varphi_0 \cdot 5m \\
 + \frac{1}{EJ_y} &\left[ \frac{R_A (5m)^3}{6} - \frac{m(5m - 2m)^2}{2} - \frac{q(5m - 2m)^4}{24} \right] = 0; \\
 \varphi_0 \cdot 5m + \frac{1}{EJ_y} &\left[ \frac{11,5 \text{кН} \cdot (5m)^3}{6} - \frac{20 \text{кНм}(3m)^2}{2} - \frac{15 \text{кН/м}(3m)^4}{24} \right] = 0; \\
 \varphi_0 \cdot 5m + \frac{1}{EJ_y} &[98,958 \text{кНм}^3] = 0; \rightarrow \varphi_0 = - \\
 \frac{1}{EJ_y} \frac{98,958 \text{кНм}^3}{5m} &= - \frac{19,8 \text{кНм}^2}{EJ_y}.
 \end{aligned}$$

После определения численного значения  $\varphi_0$  необходимо сделать проверку, подставив полученное значение начального угла поворота  $\varphi_0$  в исходное уравнение для определения начального угла поворота и убедиться, что прогиб на опоре **C** равен нулю /  $w_c = w(5m) = 0$ /

$$\frac{1 \text{кНм}^3}{EJ_y} \left[ -19,8 \cdot 5 + \frac{11,5 \cdot 5^3}{6} - \frac{20 \cdot 3^2}{2} - \frac{15 \cdot 3^4}{24} \right] = \frac{[239,6 - 239,6] \text{кНм}^3}{EJ_y} = 0$$

*В нашей задаче эта проверка выполняется, следовательно, численное значение угла поворота  $\varphi_0$  определено правильно.*

### **Вычисление численных значений углов поворота поперечных сечений и прогибов оси балки в характерных точках**

Подставляя численные значения  $\varphi_0$ ,  $R_A$ ,  $q$ ,  $m$  и  $R_B$  в уравнения метода начальных параметров для определения прогибов и углов поворота поперечных сечений для нашей задачи, получаем окончательные выражения для углов поворота поперечных сечений и прогибов для заданной балки

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 2m$ ; **II участок BC:**  $2m \leq x_2 \leq 5m$ ;  
**III участок CD:**  $5m \leq x_3 \leq 6m$

$$\varphi(x) = \frac{1\text{кНм}^2}{EJ_y} \left[ -19,8 + \frac{11,5x^2}{2} \Big|_I - 20(x-2) - \frac{15(x-2)^3}{6} \Big|_{II} + \frac{63,5(x-5)^2}{2} + \frac{15(x-5)^3}{6} \Big|_{III} \right];$$

$$w(x) = \frac{1\text{кНм}^3}{EJ_y} \left[ -19,8x + \frac{11,5x^3}{6} \Big|_I - \frac{20(x-2)^2}{2} - \frac{15(x-2)^4}{24} \Big|_{II} + \frac{63,5(x-5)^3}{6} + \frac{15(x-5)^4}{24} \Big|_{III} \right].$$

а). Определение численных значений углов поворота поперечных сечений балки в характерных точках участков

**I участок АВ:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м};$

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{-19,8\text{кНм}^2}{EJ_y} = \frac{-19,8\text{кНм}^2}{2988\text{кНм}^2} = -6,62 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi(2\text{м}) = \frac{1\text{кНм}^2}{EJ_y} \left( -19,8 + \frac{11,5 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{3,2\text{кНм}^2}{EJ_y} = \frac{3,2\text{кНм}^2}{2988\text{кНм}^2} = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

**II участок ВС:**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м};$

$$\varphi(2\text{м}) = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi(2,77\text{м}) = \frac{1\text{кНм}^2}{EJ_y} \left( -19,8 + \frac{11,5 \cdot 2,77^2}{2} - 20(2,77 - 2) - \frac{15(2,77 - 2)^3}{6} \right) = \frac{7,78\text{кНм}^2}{EJ_y} = \frac{7,78\text{кНм}^2}{2988\text{кНм}^2} = 2,60 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi(5\text{м}) = \frac{1\text{кНм}^2}{EJ_y} \left[ -19,8 + \frac{11,5 \cdot 5^2}{2} - 20(5 - 2) - \frac{15(5-2)^3}{6} \right] = \frac{-3,55\text{кНм}^2}{2988\text{кНм}^2} = -1,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

**III участок CD:**  $5\text{м} \leq x_3 \leq 6\text{м}$

$$\varphi(5\text{м}) = -1,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi(6) = \frac{1\text{кНм}^2}{EJ_y} \left( -19,8 + \frac{11,5 \cdot 6^2}{2} - 20(6 - 2) - \frac{15(6 - 2)^3}{6} + \frac{63,5(6 - 5)^2}{2} \right)$$

$$+ \frac{15(6-5)^3}{6} \Big) = \frac{-18,55 \text{кНм}^2}{EJ_y} = \frac{-18,55 \text{кНм}^2}{2988 \text{кНм}^2} = -6,21 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

б). *Определение численных значений прогибов на границах участков балки*

**I участок АВ:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м};$

$$w(0) = 0;$$

$$w(2\text{м}) =$$

$$\frac{1 \text{кНм}^3}{EJ_y} \left( -19,8 \cdot 2 + \frac{11,5 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{-24,27 \text{кНм}^3}{2988 \text{кНм}^2} = -8,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

**II участок ВС:**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м};$

$$w(2\text{м}) = -8,12 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$w(5\text{м}) = 0; \text{ (Опора C).}$$

**III участок CD:**  $5\text{м} \leq x_3 \leq 6\text{м};$

$$w(5\text{м}) = 0; \text{ (Опора C);}$$

$$w(6\text{м}) = \frac{1 \text{кНм}^3}{EJ_y} \left( -19,8 \cdot 6 + \frac{11,5 \cdot 6^3}{6} - \frac{20(6-2)^2}{2} - \frac{15(6-2)^4}{24} + \right. \\ \left. + \frac{63,5(6-5)^3}{6} + \frac{15(6-5)^4}{24} \right) = \frac{-13,59 \text{кНм}^3}{EJ_y} = \frac{-13,59 \text{кНм}^3}{2988 \text{кНм}^2} = -4,55 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

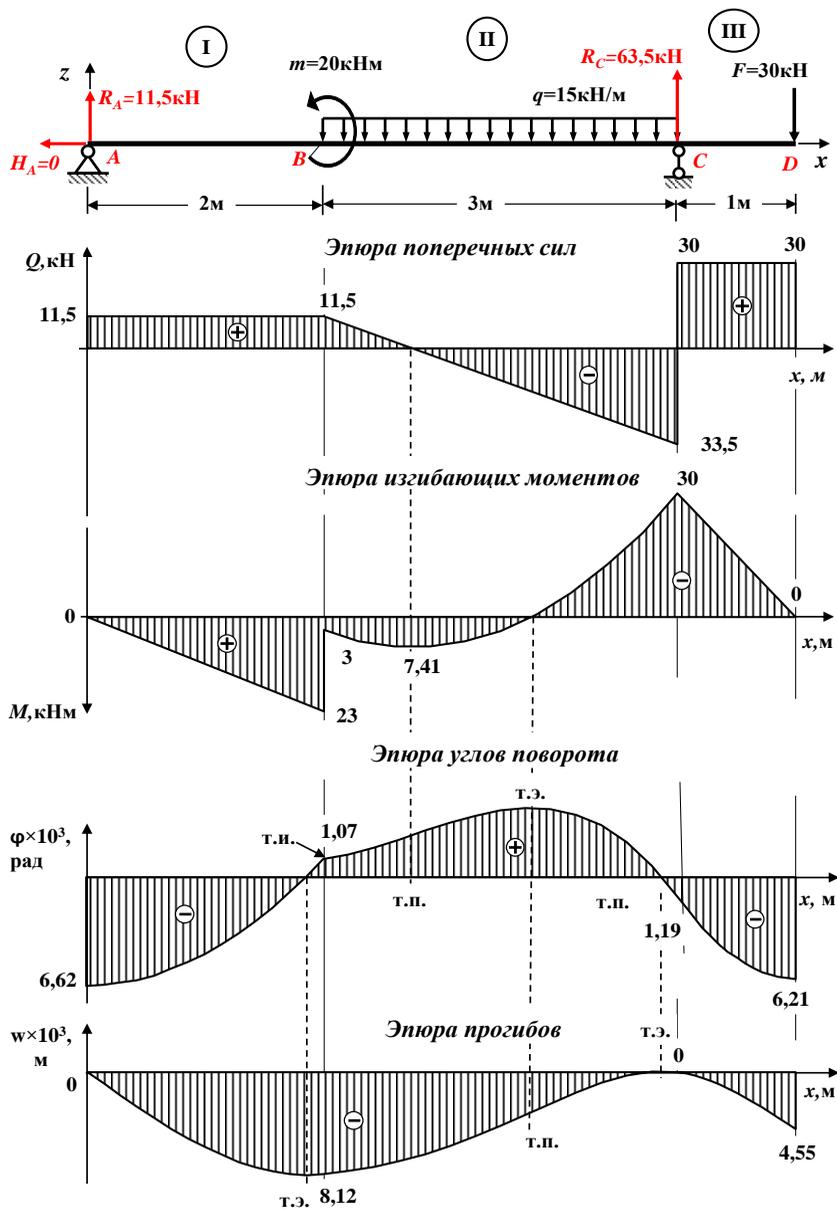
### Построение эпюр углов поворота поперечных сечений и прогибов

Используя полученные численные значения  $\varphi$  и  $w$ , строим в масштабе эпюры углов поворота поперечных сечений и прогибов (изогнутую ось балки) с указанием точек перегиба (т.п.), точек экстремума (т.э.), точек излома (т.и.), как показано на рис. 1.14.

### Проверка правильности построенных эпюр с использованием дифференциальных зависимостей между $Q$ , $M$ , $\varphi$ и $w$

Из теории изгиба балок известно, что величины  $Q$ ,  $M$ ,  $\varphi$  и  $w$  связаны между собой дифференциальными зависимостями

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_y}; \quad \frac{dw}{dx} = \varphi(x); \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EI_y}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{EI_y}$$



**Рис. 1.14. Эпюры  $Q$ ,  $M_{изг}$ ,  $\varphi$  и  $w$**

На основании этих зависимостей производятся проверки правильности построенных эпюр углов поворота и прогибов:

1. Если изгибающий момент на каком-то участке балки положительный ( $M > 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз.
2. Если изгибающий момент на каком-то участке балки отрицательный ( $M < 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.
3. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ( $M = 0$ ) (при смене знака) или имеет скачок (при смене знака), то на эпюре прогибов в этом сечении наблюдаем точку перегиба (т.п.).
4. Если угол поворота в каком-то сечении балки равен нулю  $\varphi = 0$ , то на эпюре прогибов этом сечении наблюдаем точку экстремума (т.э.).
5. Если поперечная сила на каком-то участке балки положительная ( $Q > 0$ ), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз;
6. Если поперечная сила на каком-то участке балки отрицательная ( $Q < 0$ ), то эпюра углов поворота на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.
7. Если поперечная сила в каком-то сечении балки равна нулю ( $Q = 0$ ) (при смене знака) или имеет скачок (при смене знака), то на эпюре углов поворота в этом сечении балки наблюдаем точку перегиба (т.п.).
8. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ( $M = 0$ ) (при смене знака) или имеет скачок (при смене знака), то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку экстремума (т.э.).
9. Если на эпюре изгибающих моментов в каком-то сечении балки наблюдается скачок, то на эпюре углов поворота в этом сечении наблюдаем точку излома (т.и.).

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры углов поворота и прогибов построены правильно.*

### **Подбор сечения стальной балки из прокатного профиля из условия жесткости**

*Наибольший прогиб балки называется стрелой прогиба и обозначается буквой  $f$ .*

Условие жесткости при изгибе имеет вид

$$f \leq [f].$$

Здесь

$[f]$  – величина допускаемого прогиба.

Для ранее выбранного типа сечения из условия прочности (два швеллера) определяем номер прокатного профиля из условия жесткости, приняв допускаемый прогиб

$$[f] = \frac{L}{400},$$

где

$L$  – длина пролета балки (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

По эпюре прогибов приближенно определяем максимальное по абсолютной величине значение прогиба  $|w_{\max}| = f$  (сечение  $B$ , рис. 1.14)

$$f = |w_{\max}| \approx 8,12 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx \frac{24,3 \text{ кНм}^3}{EI_y}$$

Величина допускаемого прогиба равна

$$[f] = \frac{5 \text{ м}}{400} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

где длина пролета  $L = 5 \text{ м}$ .

Из условия жесткости

$$f = |w_{\max}| \leq [f]$$

определяем требуемый момент инерции

$$I_y^{\text{треб}} \geq \frac{24,3 \text{ кНм}^3}{E[f]} \geq \frac{24,3 \text{ кНм}^3}{2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \geq 972 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \geq 972 \text{ см}^4.$$

Для сечения, состоящего из двух швеллеров,

$$J_y^{\text{треб}} = 2 J_y^{\text{шв}}, \text{ поэтому}$$

$$I_y^{\text{шв}} \geq \frac{972 \text{ см}^4}{2} \geq 486 \text{ см}^4.$$

По сортаменту для стального прокатного швеллера ближайшим к  $J_y^{\text{шв}} = 486 \text{ см}^4$  является значение момента инерции

$$J_y^{\text{шв}} = 491 \text{ см}^4, \text{ которое соответствует швеллеру № 14.}$$

Следовательно, фактический момент инерции для поперечного сечения балки, состоящего из **двух швеллеров № 14**, равен

$$I_y^{\text{факт}} = 2 \cdot I_y^{\text{шв}} = 2 \cdot 491 \text{ см}^4 = 982 \text{ см}^4$$

Однако в этом случае конструкция будет непригодна к нормальной эксплуатации из-за появления в ней недопустимо больших нормальных напряжений, так как из условия прочности балки

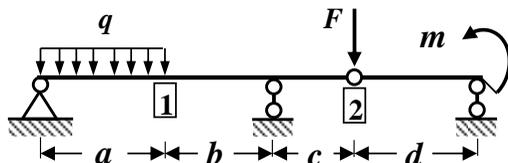
было подобрано большее сечение, состоящее **из двух швеллеров № 16**.

Поэтому, чтобы одновременно выполнялись условие прочности и условие жесткости, необходимо окончательно выбрать большее сечение, то есть сечение, состоящее из двух швеллеров № 16, которое подобрано из условия прочности балки.

## 2.2. Задача № 2. Определение перемещений в статически определимой балке методом Мора с использованием правила Верещагина

### Задача.

Для заданной схемы балки (рис. 1.15) требуется:



**Исходные данные:**

$a = 4 \text{ м}; b = 4 \text{ м}; c = 2 \text{ м}; d = 4 \text{ м};$   
 $m = 9 \text{ кНм}; F = 4 \text{ кН}; q = 2 \text{ кН/м}.$

**Рис. 1.15. Схема балки**

1. Выполнить кинематический анализ системы.
2. Построить поэтажную схему.
3. Построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ .

4. Определить перемещение (прогиб) в сечении **1** ( $w_1$ ) и угол поворота в сечении **2** ( $\varphi_2$ ) методом Мора с использованием правила Верещагина, приняв

$EI_y = \text{const}.$

**Решение**

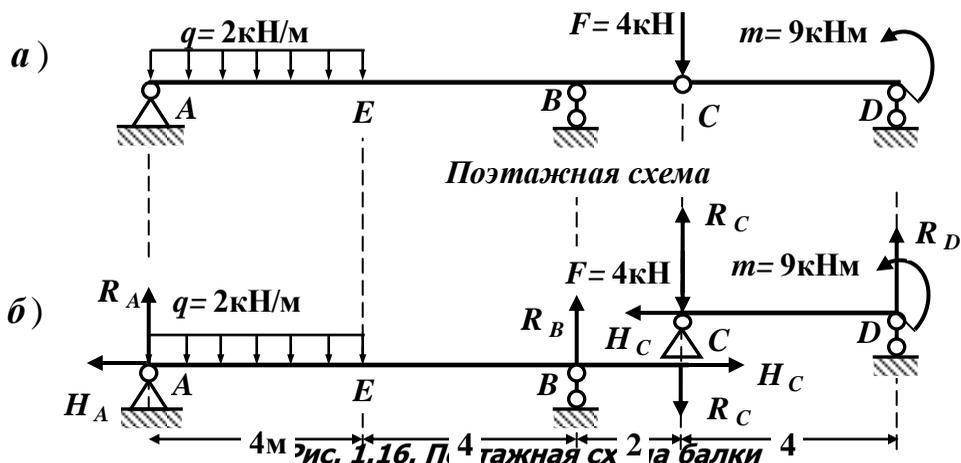
### Построение поэтажной схемы

Расчет заданной балки с промежуточным шарниром проведем с помощью метода построения «поэтажной» схемы. В этом случае расчет начинается с составления «поэтажной» схемы балки с промежуточным шарниром (рис. 1.16).

Для этого разрежем заданную балку по промежуточному шарниру **C** и выделим основную балку **ABC**, так как она имеет три кинематические связи, и подвесную балку **CD** (рис. 1.16).

Расчет балок производят отдельно, начиная с самых верхних подвесных и последовательно переходя к ниже лежа-

щим балкам. При расчете ниже лежащих



балок, кроме заданных внешних нагрузок, к ним должны быть приложены реакции взаимодействия с выше лежащими подвесными балками.

### Определение опорных реакций и построение эпюр $Q$ и $M$ для подвесной балки $CD$

Согласно поэтажной схеме многопролетной балки, построение эпюр начинается с подвесной балки  $CD$  от заданной внешней нагрузки (рис. 1.17).

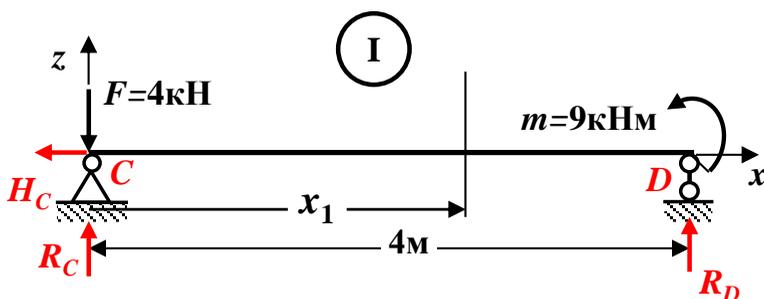


Рис. 1.17. Расчетная схема подвесной балки  $CD$

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

### Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций подвесной балки (рис. 1.17) составляем

три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: -H_C = 0; \rightarrow H_C = 0.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $C$  равна нулю

$$\sum M_C = 0: R_D \cdot 4 + m = 0; \rightarrow R_D \cdot 4 + 9 = 0.$$

Следовательно,

$$R_D = -\frac{9}{4} = -2,25 \text{ кН}; \rightarrow R_D = -2,25 \text{ кН}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $D$  равна нулю

$$\sum M_D = 0: -R_C \cdot 4 + F \cdot 4 + m = 0; \rightarrow -R_C \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 9 = 0;$$

$$-R_C \cdot 4 + 25 = 0.$$

Следовательно,

$$R_C = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ кН}; \rightarrow R_C = 6,25 \text{ кН}.$$

*Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)*

$$\sum F_z = R_C - F + R_D = 6,25 - 4 + (-2,25) = 6,25 - 6,25 = 0 (\pm 5 \%).$$

### Построение эпюр $Q$ и $M$

Расчетная схема подвесной балки имеет один участок  $CD$  (рис. 1.17).

**I участок  $CD$ :**  $0 \leq x_1 \leq 4\text{м}$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = +R_C - F = +6,25 - 4 = +2,25 \text{ кН}.$$



Поперечная сила  $Q$  на участке  $CD$  является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = +2,25 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

$$Q(2\text{м}) = +2,25 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = +R_c \cdot x_1 - F \cdot x_1.$$

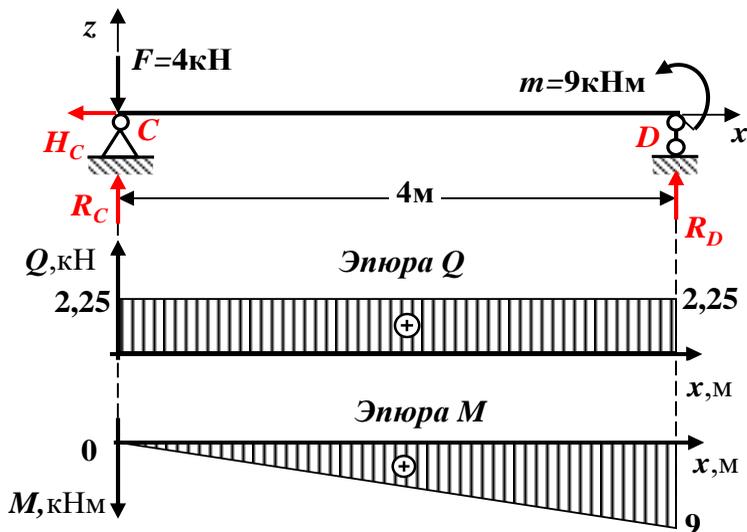
Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$$M(0) = 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка);}$$

$M(4\text{м}) = 6,25 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = +9 \text{ кНм (значение на правой границе участка).}$

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях подвесной балки  $CD$  строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.18.



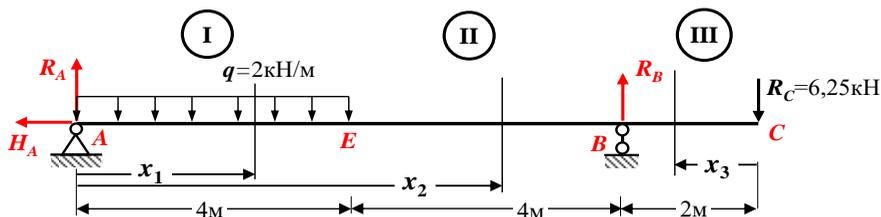
**Рис. 1.18. Эпюры поперечных сил и изгибающих мо-**

**МЕНТОВ**  
**подвесной балки CD**

**Определение опорных реакций и построение эпюр  $Q$  и  $M$  для основной балки ABC**

**Определение опорных реакций**

Основная балка **ABC**, кроме заданных внешних нагрузок, нагружается силой, равной реакции  **$R_C$**  в опоре **C** подвесной балки **CD**, и противоположно направленной (рис. 1.19).



**Рис. 1.19. Расчетная схема основной балки ABC**

Для определения опорных реакций составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

- Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю



$$\Sigma F_x = 0: -H_A = 0, \text{ след., } H_A = 0.$$

- Сумма моментов всех сил относительно опоры **A** равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: -q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 8 - R_C \cdot 10 = 0;$$

$$-2 \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 8 - 6,25 \cdot 10 = 0; \quad R_B \cdot 8 - 78,5 = 0.$$

$$R_B = + \frac{78,5}{8} = 9,8125 \text{ кН} = + 9,81 \text{ кН}; \quad \rightarrow \quad R_B = + 9,81 \text{ кН}.$$

- Сумма моментов всех сил относительно опоры **B** равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: -R_A \cdot 8 + q \cdot 4 \cdot 6 - R_C \cdot 2 = 0;$$

$$-R_A \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 6 - 6,25 \cdot 2 = 0; \quad \rightarrow \quad -R_A \cdot 8 + 35,5 = 0.$$

$$R_A = + \frac{35,5}{8} = 4,4375 \text{ кН} = + 4,44 \text{ кН}; \quad \rightarrow \quad R_A = + 4,44 \text{ кН}.$$

*Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)*

$$\Sigma F_z = R_A - q \cdot 4 + R_B - R_C = 4,44 - 2 \cdot 4 + 9,81 - 6,25 = 14,3 - 14,3 = 0 \leq (\pm 5 \%).$$

### Построение эпюр $Q$ и $M$

Расчетная схема основной балки имеет три участка ( $AE$ ,  $BE$  и  $BC$ , рис. 1.19).

**I участок  $AE$ :**  $0 \leq x_1 \leq 4\text{ м}$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = +R_A - q \cdot x_1 = +4,44 - 2 \cdot x_1.$$

Поперечная сила  $Q$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение поперечной силы на границах участка

$$Q(0) = +4,44 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$Q(4\text{ м}) = +4,44\text{ кН} - 2 \text{ кН/м} \cdot 4\text{ м} = -3,56 \text{ кН}$  (значение на правой границе участка).

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения, в котором  $Q$  обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение):

$$Q(x_0) = 4,44 - 2 \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = 4,44/2 = 2,22 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 2,22 \text{ м.}}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

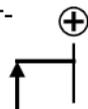
Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = +R_A \cdot x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2} = +4,44 \cdot x_1 - 1 \cdot x_1^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 2,22 \text{ м}$ .

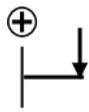
$M(0) = +4,44\text{ кН} \cdot 0 - 1 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = 0 \text{ кНм}$  (значение на левой границе);



$M_{\text{экстр}} = M(2,22\text{ м}) = + 4,44 \text{ кН} \cdot (2,22 \text{ м}) - 1 \text{ кН/м} \cdot (2,22 \text{ м})^2 = +4,93 \text{ кНм}$  (значение в сечении  $x_0 = 2,22 \text{ м}$ );

$M(4\text{ м}) = + 4,44 \text{ кН} \cdot (4 \text{ м}) - 1 \text{ кН/м} \cdot (4 \text{ м})^2 = +1,75 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

**II участок ВЕ:  $0 \leq x_2 \leq 4\text{ м}$**  (начало отсчета на правой границе участка).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением  внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = +R_C - R_B = 6,25 - 9,81 = -3,56 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$Q(0) = -3,56 \text{ кН}$  (значение на правой границе участка);

$Q(4\text{ м}) = -3,56 \text{ кН}$  (значение на левой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков. 

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = +R_B \cdot x_2 - R_C \cdot (x_2 + 2) = +9,81 \cdot x_1 - 6,25 \cdot (x_2 + 2).$$

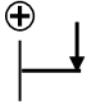
Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_2$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$M(0) = +9,81\text{ кН} \cdot 0 - 6,25\text{ кН} \cdot (0 + 2) = -12,5 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка);

$M(4\text{ м}) = +4,44\text{ кН} \cdot (4\text{ м}) - 1\text{ кН/м} \cdot (4\text{ м})^2 = +1,75 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка).

**III участок СВ:  $0 \leq x_2 \leq 2$**  (начало отсчета на правой границе участка).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков. 

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_3) = + R_c = + 6,25 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = + 6,25 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

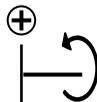
$$Q(4\text{м}) = + 6,25 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_3) = - R_c \cdot x_3 = - 6,25 \cdot x_3.$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_3$ .

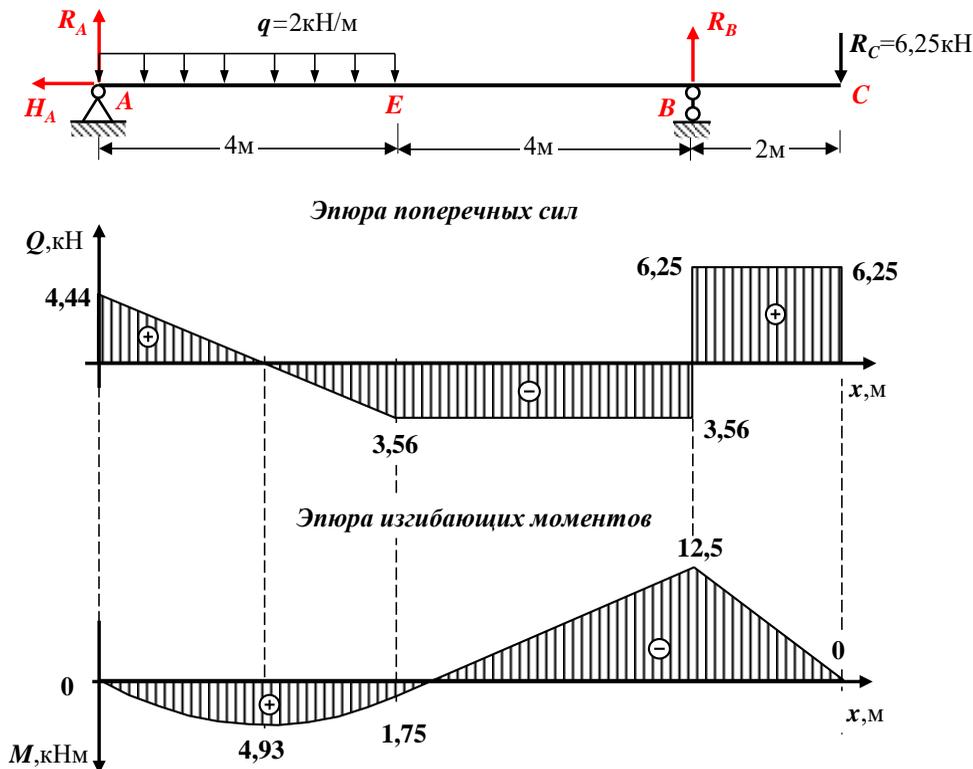


Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка.

$M(0) = - 6,25\text{кН} \cdot 0 = 0 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка);

$M(2\text{м}) = - 6,25\text{кН} \cdot 2\text{м} = -12,5 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка).

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях основной балки  $ABC$  строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.20.

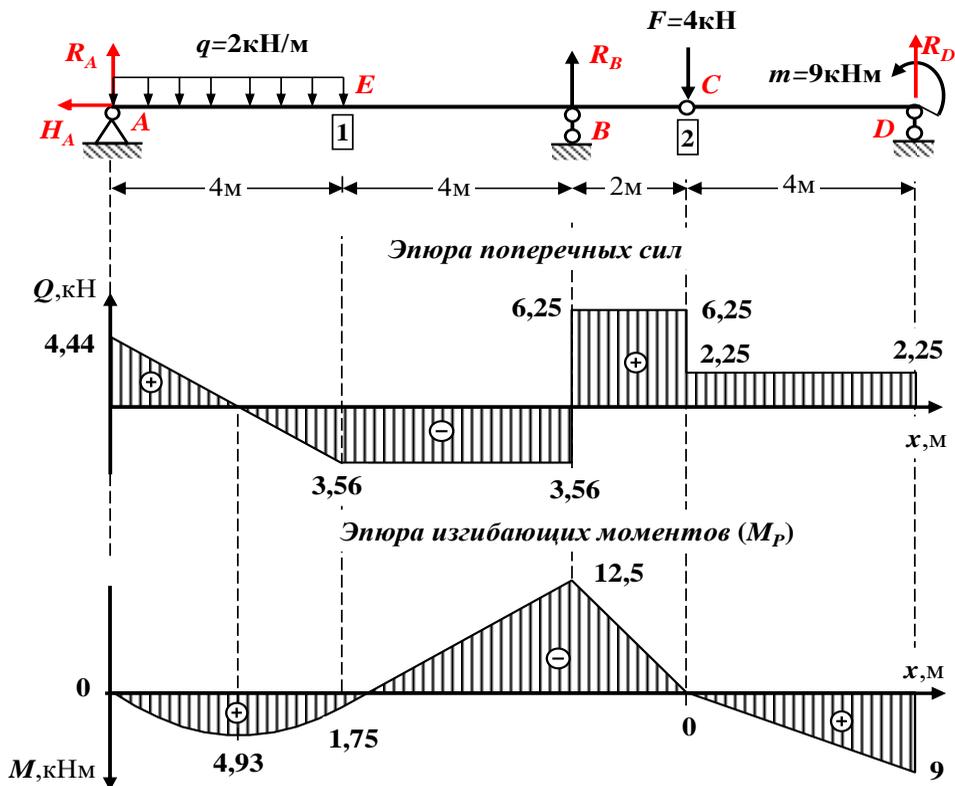


**Рис. 1.20. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для основной балки ABC**

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, то есть положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

Построенные в отдельности эпюры для двух балок (основной и подвесной) объединяются в эпюры внутренних силовых факторов для всей заданной балки с промежуточным шарниром.

Окончательный вид эпюр  $Q$  и  $M$  для заданной балки с промежуточным шарниром показан на рис. 1.21.



**Рис. 1.21. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (грузовая эпюра  $M_p$ ) для заданной балки с промежуточным шарниром**

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз – имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях

балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок»

равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = \mathit{const}$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{\mathit{Экстр}}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка

интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = \mathit{const}$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### Определение прогиба балки в сечении 1 методом Мора с использованием правила Верещагина

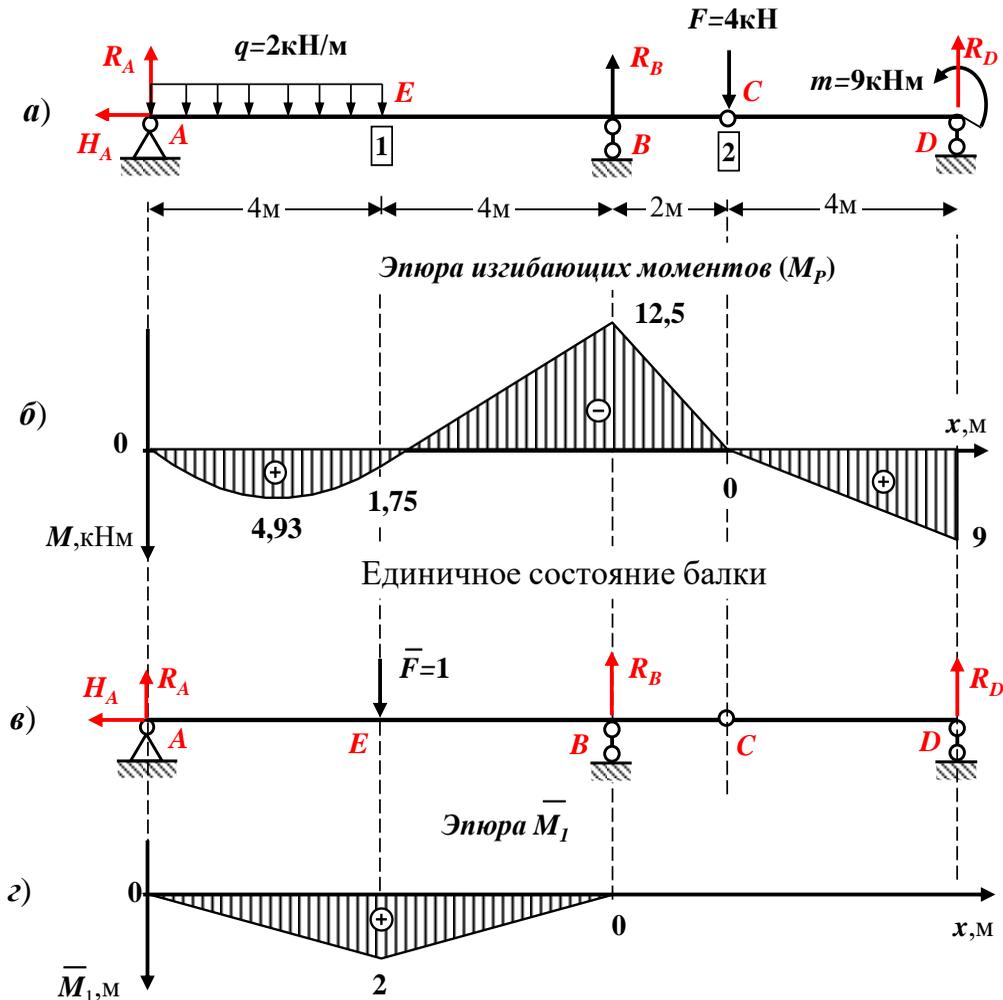
Для определения прогиба балки в сечении **1** (сечение  $E$ ), выбираем единичное состояние балки, то есть освобождаем ее от заданной внешней нагрузки и прикладываем в сечении **1** безраз-

мерную

сосредоточенную

силу

$\bar{F} = 1$ , направленную вертикально вниз – по направлению искомого перемещения  $w_1$  (рис 1.22, в).



**Рис. 1.22. Эпюра изгибающих моментов (грузовая эпюра  $M_p$ ), единичное состояние балки, эпюра  $\bar{M}_1$  от единичного силового фактора  $\bar{F} = 1$**

### Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций применим *метод моментной точки*.

В этом случае необходимо записать три уравнения равновесия для всей балки и к ним добавить уравнение, отражающее, что сумма моментов всех сил, лежащих по одну сторону от промежуточного шарнира, относительно шарнира **C** равна нулю (рис. 1.22, в).

Составляем три уравнения равновесия (статики) для всей балки с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на ось **x** равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow \mathbf{H}_A = 0. \quad (1)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры **A** равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: + R_D \cdot 14M - \overline{F} \cdot 4M + R_B \cdot 8M = 0. \quad (2)$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры **B** равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: + R_D \cdot 6M - R_A \cdot 8M + \overline{F} \cdot 4M = 0. \quad (3)$$

4. Сумма моментов всех сил, лежащих по правую сторону от промежуточного шарнира, относительно шарнира **C** равна нулю

$$\Sigma M_C^{\text{справа}} = 0: R_D \cdot 4M = 0; \rightarrow R_D = 0. \quad (4)$$

Подставляя  $R_D = 0$  в уравнения **2** и **3**, определяем численные значения опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ , которые, в данном случае, будут безразмерными,

$$R_A = \frac{\overline{F} \cdot 4}{8} = \frac{1 \cdot 4}{8} = 0,5; \rightarrow R_A = +0,5.$$

$$R_B = \frac{\overline{F} \cdot 4}{8} = \frac{1 \cdot 4}{8} = 0,5. \rightarrow R_B = +0,5.$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось **z** должна быть равна 0)

$$\Sigma F_z = R_A - \overline{F} + R_B + R_D = +0,5 - 1 + 0,5 + 0 = 0 (\pm 5 \%).$$

### Построение эпюры $\overline{M}_1$ от безразмерного единичного силового фактора $\overline{F} = 1$

Расчетная схема балки имеет четыре участка (**AE**, **BE**, **BC** и **CD**, рис. 1.22,в).

**I участок AE:**  $0 \leq x_1 \leq 4\text{м}$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину изгибающего момента **M** на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков. 

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = +R_A \cdot x_1 = +0,5 \cdot x_1.$$

Изгибающий момент **M** на этом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка.

$M(0) = +0,5 \cdot 0\text{м} = 0\text{ м}$  (значение на левой границе участка);

$M(4\text{м}) = +0,5 \cdot 4\text{м} = +2,0\text{ м}$  (значение на правой границе участка).

**II участок BE:**  $4 \leq x_1 \leq 8$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину изгибающего момента **M** на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков. 

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = +R_A \cdot x_2 - \overline{F} \cdot (x_2 - 4) = +0,5 \cdot x_2 - 1 \cdot (x_2 - 4).$$

Изгибающий момент **M** на этом участке является линейной функцией координаты  $x_2$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка.

$M(4\text{м}) = +0,5 \cdot 4\text{м} = +2,0\text{ м}$  (значение на левой границе участка);

$M(8\text{м}) = +0,5 \cdot 8\text{м} - 1 \cdot (8 - 4) = 0\text{ м}$  (значение на правой границе участка).

Значения изгибающих моментов на участках **BC** и **CD** равны нулю, так как  $R_D = 0$ .

По полученным численным значениям  $M$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюру  $\overline{M}_1$  от единичного воздействия  $\overline{F} = 1$  (рис. 1.22, *г*) и производим все проверки правильности построенной эпюры.

*Обращаем внимание на тот факт, что все ординаты эпюры  $\overline{M}_1$ , в данном случае, имеют размерность – м.*

### Определение прогиба балки ( $w_1$ ) в сечении 1

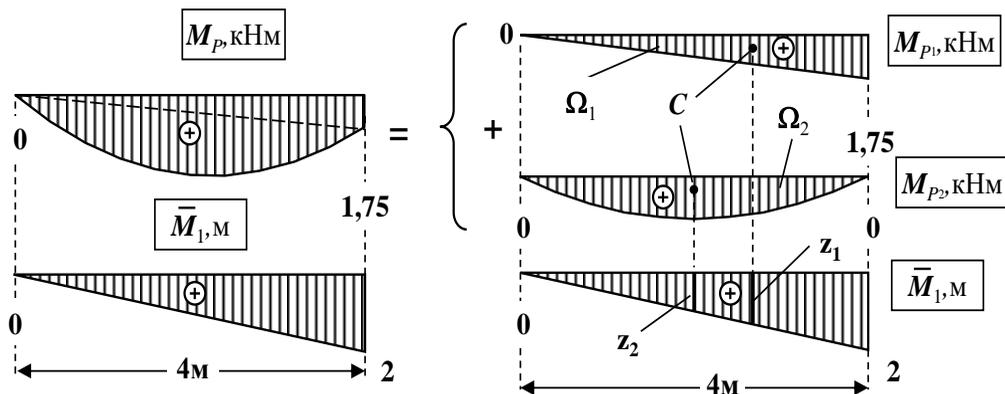
Прогиб балки в сечении 1 ( $w_1$ ) вычислим с помощью интеграла Мора

$$\Delta_{IP} = \int_{AE} \frac{M_P(x)\overline{M}_1(x)}{EJ_y} dx + \int_{BE} \frac{M_P(x)\overline{M}_1(x)}{EJ_y} dx = \Delta_{IP}^{AE} + \Delta_{IP}^{BE}$$

$w_1 =$

*Результат «перемножения» эпюр является положительным, если эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_1$  одного знака, и отрицательным, если эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_1$  разных знаков.*

Эпюру от заданной внешней нагрузки  $M_P$  на участке  $AE$  разбиваем на две простейшие эпюры – треугольник и симметричную параболу (рис. 1.23).



**Рис. 1.23. Разбиение сложной эпюры на простые эпюры на участке AE.  
Перемножение эпюр**

Площади этих эпюр  $M_P$  равны

$$\Omega_1 = + \frac{1,75 \cdot 4}{2} = +3,5 \text{ кНм}^2; \quad \Omega_2 = + \frac{q l^3}{12} = + \frac{2 \cdot 4^3}{12} = + 10,67 \approx + 10,7 \text{ кНм}^2.$$

Ординаты в эпюре  $\bar{M}_1$  под центрами тяжести простых эпюр  $M_P$  соответственно равны (рис. 1.23)

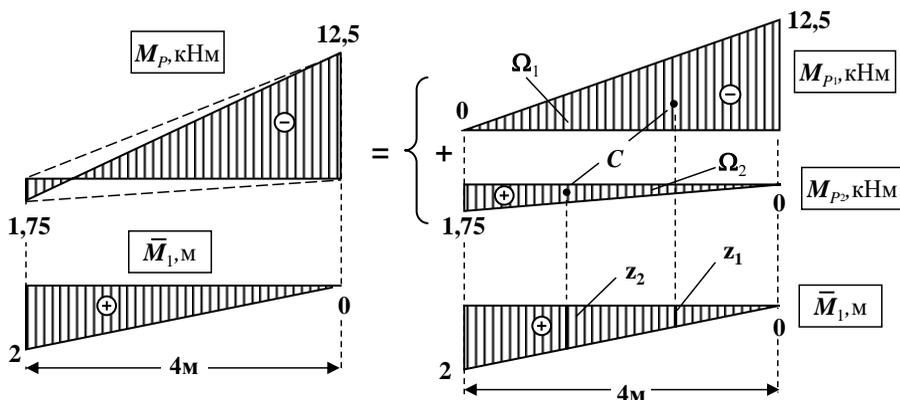
$$z_1 = + \frac{2}{3} \cdot 2 = + 1,33 \text{ м}; \quad z_2 = + \frac{1}{2} \cdot 2 = + 1 \text{ м}.$$

Поэтому

$$\Delta_{1P}^{AE} = \frac{(\Omega_1 z_1 + \Omega_2 z_2)}{EI_y} = \frac{(+3,5)(+1,33) + (+10,7)(+1)}{EI_y} \approx + \frac{15,3 \text{ кНм}^3}{EI_y} (\text{м}),$$

где жесткость  $EI_y$  имеет размерность – кНм<sup>2</sup>.

Эпюру  $M_P$  на участке  $BE$  разбиваем на два треугольника (рис. 1.24).



**Рис. 1.24. Разбиение сложной эпюры на простые эпюры на участке  $BE$ . Перемножение эпюр**

Площади этих эпюр  $M_P$  равны

$$\Omega_1 = - \frac{12,5 \cdot 4}{2} = - 25 \text{ кНм}^2; \quad \Omega_2 = + \frac{1,75 \cdot 4}{2} = +3,5 \text{ кНм}^2.$$

Ординаты в эпюре  $\bar{M}_1$  под центрами тяжести простых эпюр  $M_P$  соответственно равны (рис. 1.24)

$$z_1 = + \frac{1}{3} \cdot 2 = + 0,667 \text{ м}; \quad z_2 = + \frac{2}{3} \cdot 2 = + 1,33 \text{ м}.$$

Поэтому

$$\Delta_{1P}^{BE} = \frac{(\Omega_1 z_1 + \Omega_2 z_2)}{EI_y} = \frac{(- 25)(+0,667) + (+3,5)(+1,33)}{EI_y} \approx - \frac{12,0 \text{ кНм}^3}{EI_y} (\text{м}),$$

где жесткость  $EI_y$  имеет размерность – кНм<sup>2</sup>.

Таким образом, прогиб  $w_1$  в сечении **1** будет равен

$$w_1 = \Delta_{1P} = \Delta_{1P}^{AE} + \Delta_{1P}^{BE} = + \frac{15,3 \text{ кНм}^3}{EI_y} - \frac{12,0 \text{ кНм}^3}{EI_y} = + \frac{3,33 \text{ кНм}^3}{EI_y} \text{ (м)},$$

где жесткость  $EI_y$  имеет размерность – кНм<sup>2</sup>.

*Положительное значение прогиба показывает, что балка в сечении **1** перемещается вниз в направлении единичной силы  $\overline{F} = 1$  (рис. 1.22, в).*

### Определение угла поворота балки в сечении **2** методом Мора с использованием правила Верещагина

Сечение **2** (сечение **C**), совпадает с шарниром, поэтому будем определять *взаимный угол поворота* примыкающих к шарниру сечений.

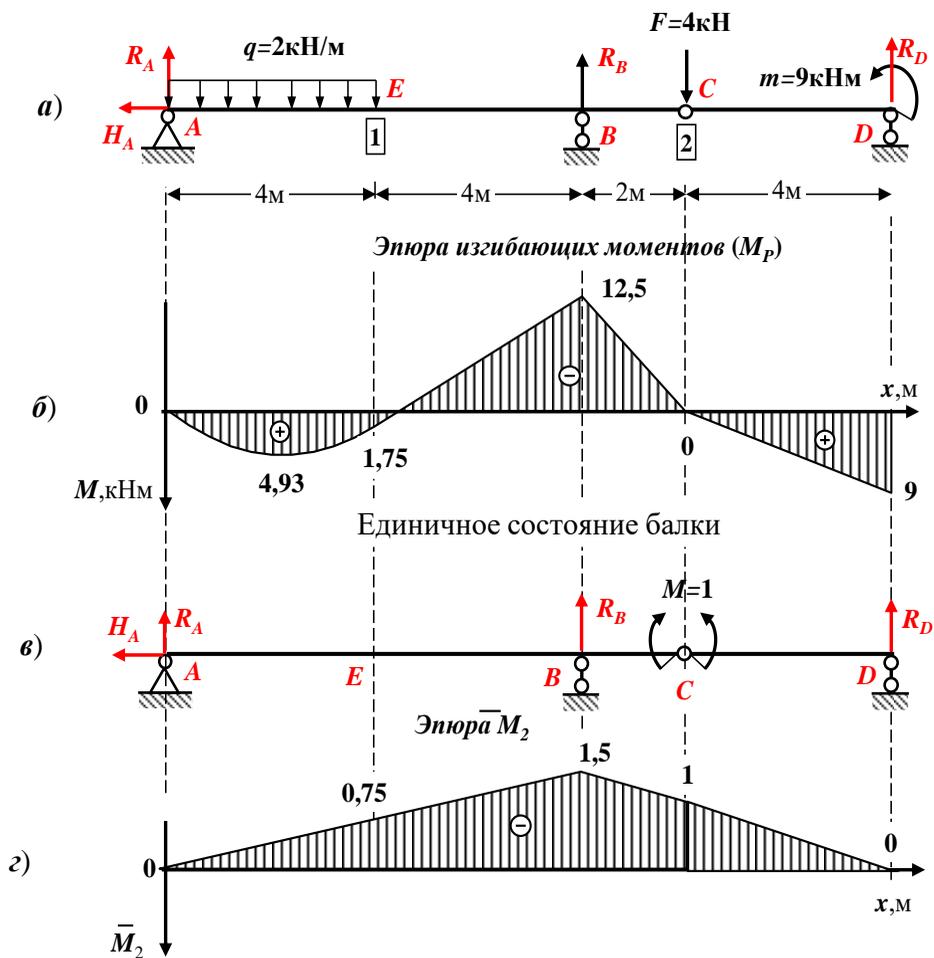
Для определения угла поворота балки в сечении **2**, выбираем единичное состояние балки, то есть, освобождаем ее от заданной внешней нагрузки и прикладываем в сечении **2** (сечение **C**) безразмерные единичные сосредоточенные моменты ( $\overline{M} = 1$ ) слева и справа от шарнира, как показано на рис. 1.25, в.

**Построение эпюры  $\overline{M}_2$  от безразмерного единичного силового фактора  $\overline{M} = 1$**

### Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций применим *метод моментной точки*.

В этом случае необходимо записать три уравнения равновесия для всей балки и к ним добавить уравнение, отражающее, что сумма моментов всех сил, лежащих по одну сторону от промежуточного шарнира, относительно шарнира **C** равна нулю (рис. 1.25, в).



**Рис. 1.25. Эпюра изгибающих моментов (грузовая эпюра  $M_p$ ), единичное состояние балки, эпюра  $\bar{M}_2$  от единичного силового фактора  $\bar{M} = 1$**

Составляем три уравнения равновесия (статики) для всей балки с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: \rightarrow H_A = 0. \quad (1)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна



нулю

$$\Sigma M_A = 0: + R_B \cdot 8M + R_D \cdot 14M = 0. \quad (2)$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры **B** равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: - R_A \cdot 8M + R_D \cdot 6M = 0. \quad (3)$$

4. Сумма моментов всех сил, лежащих по правую сторону от промежуточного шарнира, относительно шарнира **C** равна нулю

$$\Sigma M_C^{\text{справа}} = 0: R_D \cdot 4M + \overline{M} = 0;$$

$$R_D = -\frac{\overline{M}}{4M} = -\frac{1}{4M} = -0,25 \frac{1}{M}; \rightarrow R_D = -0,25 \frac{1}{M}. \quad (4)$$

Подставляя  $R_D = -0,25$  в уравнения **2** и **3**, определяем численные значения опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ , которые, в данном случае, имеют размерность  $-\frac{1}{M}$

$$R_A = \frac{R_D \cdot 6}{8} = -\frac{1 \cdot 6}{8 \cdot 4} = -\frac{3}{16} = -0,188 \frac{1}{M}; \rightarrow R_A = -0,188 \frac{1}{M};$$

$$R_B = -\frac{R_D \cdot 14}{8} = \frac{1 \cdot 14}{4 \cdot 8} = \frac{7}{16} = +0,438 \frac{1}{M}; \rightarrow R_B = +0,438 \frac{1}{M}.$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось **z** должна быть равна **0**)

$$\Sigma F_z = R_A + R_B + R_D = -0,188 \frac{1}{M} + 0,438 \frac{1}{M} - 0,25 \frac{1}{M} = 0 (\pm 5 \%).$$

**Построение эпюры  $\overline{M}_2$  от безразмерного единичного силового фактора  $\overline{M} = 1$**

Расчетная схема балки имеет три участка (**AB**, **BC** и **CD**, рис. 1.25, в).

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 8M$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину изгибающего момента **M** на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента  $M(x_1) = + R_A \cdot x_1 = -0,188 \cdot x_1.$



Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах и в середине участка

$M(0) = -0,188 \frac{1}{H} \cdot 0 \text{ м} = 0$  (значение на левой границе участка);

$M(4\text{м}) = -0,188 \frac{1}{H} \cdot 4 \text{ м} = -0,75$  (значение в середине участка).

$M(8\text{м}) = -0,188 \frac{1}{H} \cdot 8 \text{ м} = -1,50$  (значение на правой границе участка).

**II участок BC:**  $8\text{ м} \leq x_2 \leq 10\text{ м}$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков. 

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = +R_A \cdot x_2 + R_B \cdot (x_2 - 8) = -0,188 \cdot x_2 + 0,438 \cdot (x_2 - 8).$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_2$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$M(8\text{ м}) = -0,188 \frac{1}{H} \cdot 8\text{ м} + 0,438 \cdot (8\text{ м} - 8\text{ м}) = -1,50$  (значение на левой границе участка);

$M(10\text{ м}) = -0,188 \frac{1}{H} \cdot 10\text{ м} + 0,438 \cdot (10\text{ м} - 8\text{ м}) = -1,00$  (значение на правой границе участка).

**III участок DC:**  $0 \leq x_3 \leq 4\text{ м}$  (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_3) = +R_D \cdot x_3 = -0,25 \cdot x_3.$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_3$ . 

Для построения его графика определяем значение изгиба-

ющего момента на границах и в середине участка

$M(0) = -0,25 \frac{1}{x} \cdot 0 \text{ м} = 0$  (значение на правой границе участка);

$M(4 \text{ м}) = -0,25 \frac{1}{x} \cdot 4 \text{ м} = -1,0$  (значение на левой границе участка).

По полученным численным значениям  $M$  в характерных сечениях балки строим эпюру  $\overline{M}_2$  от единичного воздействия  $\overline{M} = 1$  (рис. 1.25, г) и производим все проверки правильности построенной эпюры.

Обращаем внимание на тот факт, что все ординаты эпюры  $\overline{M}_2$ , в данном случае, **безразмерные**.

### Определение взаимного угла поворота $\Delta\varphi_2$ в сечении 2

Взаимный угол поворота  $\Delta\varphi_2$  в сечении 2 вычислим с помощью интеграла Мора

$$\Delta\varphi_2 = \Delta_{2P} = \int_{AE} + \int_{BE} + \int_{BC} + \int_{CD} \frac{M_P(x) \overline{M}_2(x)}{EJ_y} dx = \Delta_{2P}^{AE} + \Delta_{2P}^{BE} + \Delta_{2P}^{BC} + \Delta_{2P}^{CD}.$$

Результат «перемножения» эпюр является положительным, если эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_2$  одного знака, и отрицательным, если эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_2$  разных знаков.

Эпюру от заданной внешней нагрузки  $M_P$  на участке  $AE$  разбиваем на две простейшие эпюры – треугольник и симметричную параболу (рис. 1.26).

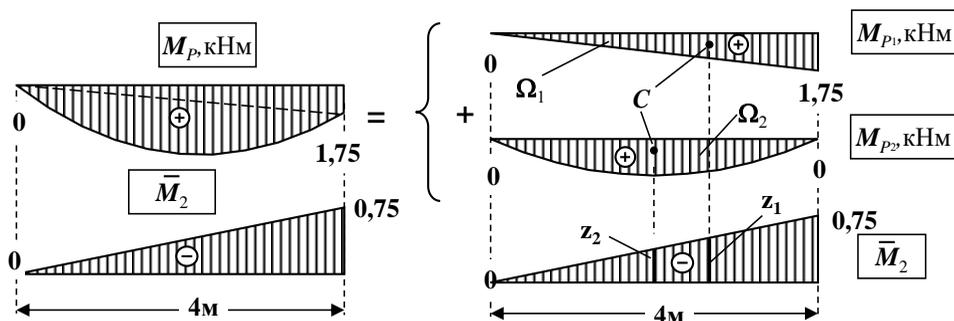


Рис. 1.26. Разбиение сложной эпюры на простые эпюры на участке  $AE$ . Перемножение эпюр

Площади этих эпюр  $M_P$  равны

$$\Omega_1 = + \frac{1,75 \cdot 4}{2} = +3,5 \text{ кНм}^2; \quad \Omega_2 = + \frac{q l^3}{12} = + \frac{2 \cdot 4^3}{12} = + 10,67 \approx + 10,7 \text{ кНм}^2.$$

Ординаты в эпюре  $\bar{M}_2$  под центрами тяжести простых эпюр  $M_P$  соответственно равны (рис. 1.26)

$$z_1 = -\frac{2}{3} \cdot 0,75 = -0,5; \quad z_2 = -\frac{1}{2} \cdot 0,75 = -0,375.$$

Поэтому

$$\Delta_{2P}^{AB} = \frac{(\Omega_1 z_1 + \Omega_2 z_2)}{EI_y} = \frac{(+3,5)(-0,5) + (+10,7)(-0,375)}{EI_y} \approx - \frac{5,75 \text{ кНм}^2}{EI_y} \text{ (рад.)},$$

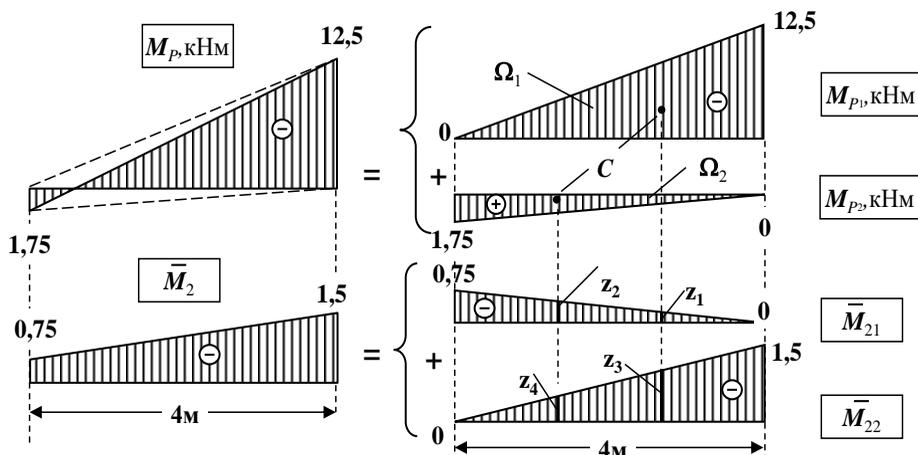
где жесткость  $EI_y$  имеет размерность – кНм<sup>2</sup>.

Эпюру от заданной внешней нагрузки  $M_P$  на участке  $BE$  разбиваем на две простейшие эпюры – два треугольника, а эпюру от единичного момента  $\bar{M}_2$  также на два треугольника (рис. 1.27).

Площади этих эпюр  $M_P$  равны

$$\Omega_1 = - \frac{12,5 \cdot 4}{2} = -25 \text{ кНм}^2; \quad \Omega_2 = + \frac{1,75 \cdot 4}{2} = + 3,5 \text{ кНм}^2.$$

Ординаты в эпюрах  $\bar{M}_{21}$  и  $\bar{M}_{22}$  под центрами тяжести простых эпюр  $M_P$  соответственно равны (рис. 1.27)



**Рис. 1.27. Разбиение сложных эпюр на простые эпюры на участке  $BE$ .**

**Перемножение эпюр**

$$z_1 = -\frac{1}{3} \cdot 0,75 = -0,25; \quad z_3 = -\frac{2}{3} \cdot 1,5 = -1;$$

$$z_2 = -\frac{2}{3} \cdot 0,75 = -0,5; \quad z_4 = -\frac{1}{3} \cdot 1,5 = -0,5.$$

Поэтому

$$\Delta_{2P}^{BE} = \frac{\Omega_1(z_1+z_3) + \Omega_2(z_2+z_4)}{EI_y} =$$

$$= + \frac{(-25)(-0,25-1) + (+3,5)(-0,5-0,5)}{EI_y} \approx + \frac{27,8 \text{ кНм}^2}{EI_y} \text{ (рад.)},$$

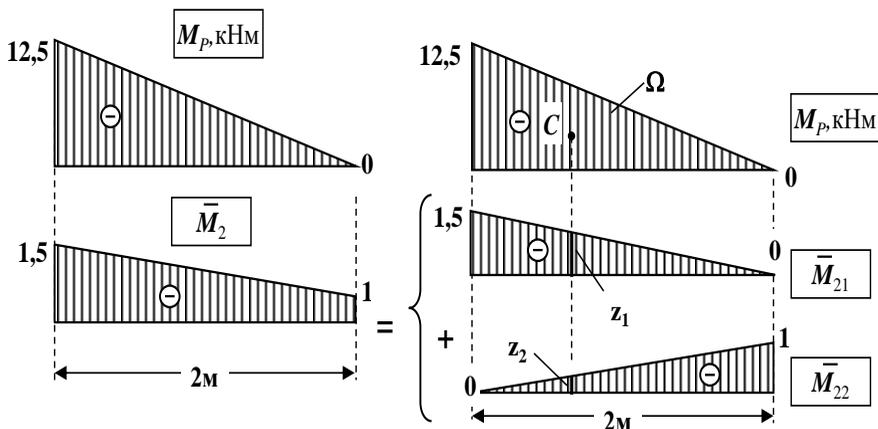
где жесткость  $EI_y$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

На участке **BC** эпюру от единичного момента разбиваем на два треугольника (рис. 1.28).

Площадь эпюры  $M_P$  равна

$$\Omega = - \frac{12,5 \cdot 2}{2} = -12,5 \text{ кНм}^2.$$

Ординаты в эпюрах  $\bar{M}_{21}$  и  $\bar{M}_{22}$  под центром тяжести эпюры  $M_P$  соответственно равны (рис. 1.28)



**Рис. 1.28. Разбиение сложной эпюры на простые эпюры.**

**Перемножение эпюр**

$$z_1 = - \frac{2}{3} \cdot 1,5 = -1; \quad z_2 = - \frac{1}{3} \cdot 1 = -0,333.$$

Поэтому

$$\Delta_{2P}^{BC} = \frac{\Omega(z_1+z_2)}{EI_y} = \frac{(-12,5)(-1-0,333)}{EI_y} \approx + \frac{16,7 \text{ кНм}^2}{EI_y} \text{ (рад.)},$$

где жесткость  $EI_y$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

На участке **CD** (рис. 1.25, б) площадь эпюры  $M_P$  равна

$$\Omega = + \frac{9 \cdot 4}{2} = +18 \text{ кНм}^2.$$

Ордината в эпюре  $\bar{M}_2$  (рис. 1.25, г) под центром тяжести эпюры  $M_P$  равна

$$z = - \frac{1}{3} \cdot 1 = -0,333.$$

Поэтому

$$\Delta_{2P}^{CD} = \frac{Q \cdot z}{EI_y} = \frac{(+18)(-0,333)}{EI_y} = -\frac{6 \text{ кНм}^2}{EI_y} \text{ (рад.)},$$

где жесткость  $EI_y$  имеет размерность – кНм<sup>2</sup>.

Взаимный угол поворота  $\Delta\varphi_2$  в сечении **2** (шарнир **C**) будет равен

$$\Delta\varphi_2 = \Delta_{2P} = \Delta_{2P}^{AE} + \Delta_{2P}^{BE} + \Delta_{2P}^{BC} + \Delta_{2P}^{CD} =$$

$$= -\frac{5,75 \text{ кНм}^2}{EI_y} + \frac{27,8 \text{ кНм}^2}{EI_y} + \frac{16,7 \text{ кНм}^2}{EI_y} - \frac{6 \text{ кНм}^2}{EI_y} = +\frac{32,7 \text{ кНм}^2}{EI_y} \text{ (рад.)},$$

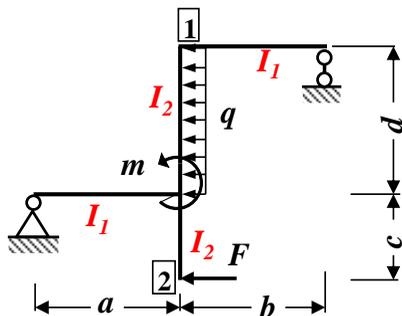
где жесткость  $EI_y$  имеет размерность – кНм<sup>2</sup>.

Положительное значение угла поворота показывает, что сечения слева и справа от шарнира **C** поворачиваются по направлению единичных моментов  $\overline{M} = 1$  (рис. 1.25, в).

### 2.3. Задача № 3. Определение перемещений в статически определимой плоской раме методом Мора с использованием правила Верещагина

#### Задача.

Для заданной схемы статически определимой рамы (рис.1.29) требуется:



#### Исходные данные:

$$a = 2 \text{ м}; \quad b = 2 \text{ м}; \quad c = 1 \text{ м};$$

$$d = 3 \text{ м}.$$

$$m = 10 \text{ кНм}; \quad F = 8 \text{ кН}; \quad q = 4 \text{ кН/м}.$$

Отношение моментов инерции

$$\frac{J_1}{J_2} = 3$$

Рис. 1.29. Схема рамы

1. Выполнить кинематический анализ системы.
2. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
3. Определить горизонтальное перемещение ( $v_1$ ) в сечении **1** и угол поворота ( $\varphi_2$ ) в сечении **2** с помощью интеграла Мора с использованием правила Верещагина.

## Решение

### Определение опорных реакций

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Для определения опорных реакций составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков (рис. 1.30):

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: -H_A - F - q \cdot 3 = 0; \quad -H_A - 8 - 4 \cdot 3 = 0;$$

$$H_A = -20 \text{ кН.}$$

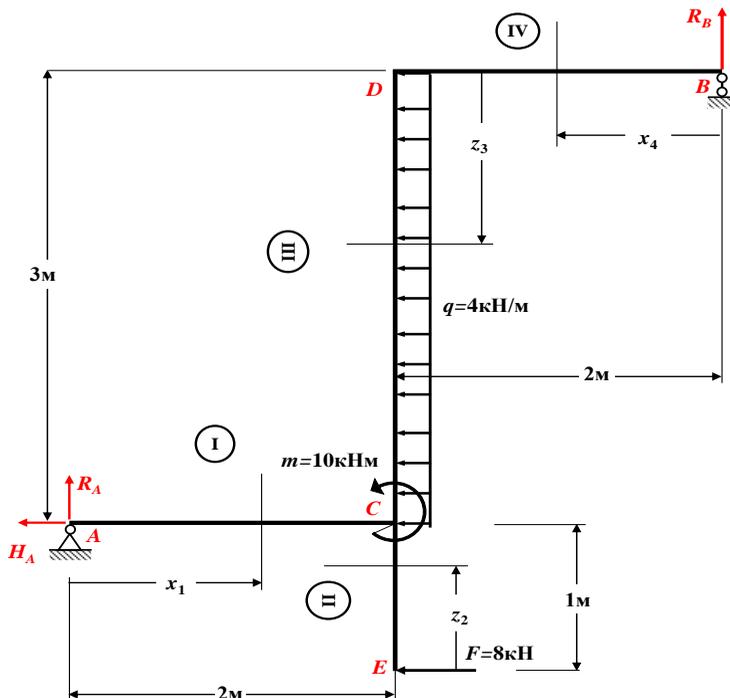


Рис. 1.30. Расчетная схема заданной рамы

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: -F \cdot 1 + m + q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 4 = 0;$$

$$-8 \cdot 1 + 10 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 4 = 0; \quad 20 + R_B \cdot 4 = 0;$$

$$R_B = \frac{-20}{4} = -5 \text{ кН} \rightarrow \mathbf{R_B = -5 \text{ кН.}}$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры **B** равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: -F \cdot 4 + m - N_A \cdot 3 - R_A \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; \\ -8 \cdot 4 + 10 - (-20) \cdot 3 - R_A \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; \quad 20 - R_A \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = \frac{20}{4} = +5 \text{ кН}; \rightarrow \mathbf{R_A = +5 \text{ кН.}}$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось **z** должна быть равна **0**)

$$\Sigma F_z = 0: \mathbf{R_A + R_B = +5 + (-5) = 0 (\pm 5 \%)}$$

### Построение эпюр продольных, поперечных сил и изгибающих моментов

При воздействии на раму внешних нагрузок в их поперечных сечениях возникают внутренние силовые факторы: продольная сила **N**, поперечная сила **Q** и изгибающий момент **M**.

Правила построения эпюр этих внутренних усилий в рамах такие же, как и в балках.

При определении внутренних силовых факторов в каждом элементе рамы (стойки и ригели) будем пользоваться следующими правилами знаков:

- изгибающий момент **M** считается положительным, если он вызывает растяжение *нижних* волокон рамы (для ригелей) и *правых* волокон рамы (для стоек);
- поперечная сила **Q** считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы (стойки и ригели) *по ходу* часовой стрелки;
- продольная сила **N** считается положительной, если она вызывает *растяжение* рассматриваемой части рамы (стойки и ригели).

В нашем примере (рис. 1.30) расчетная схема рамы имеет четыре участка (**AC**, **EC**, **DC** и **BD**).

**I участок AC:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

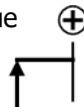
Проводим поперечное сечение в пределах первого рассматриваемого участка **AC**, которое разбивает раму на две части. Рас-

смотрим левую от проведенного сечения часть рамы (рис. 1.30), так как слева от сечения сил приложено меньше, чем справа.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси ригеля (рис. 1.30), с учетом правила знаков



$$Q(x_1) = + R_A = + 5 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$Q(0) = + R_A = + 5 \text{ кН}$ ; (значение на левой границе участка);

$Q(2\text{м}) = + R_A = + 5 \text{ кН}$  (значение на правой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.30), с учетом правила знаков

$$M(x_1) = + R_A \cdot x_1 = + 5 \text{ кН} \cdot x_1.$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$M(0) = + 5 \text{ кН} \cdot 0 = 0 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка);

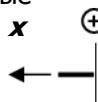
$M(2\text{м}) = + 5 \text{ кН} \cdot 2\text{м} = + 10 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

Определяем величину продольной силы  $N$  на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на геометрическую ось ригеля  $x$  (рис. 1.30), с учетом правила знаков

$$N(x_1) = + N_A = - 20 \text{ кН.}$$

Продольная сила  $N$  на первом участке является постоянной,



графиком такой функции служит прямая, параллельная геометрической оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = -20 \text{ кН}; \text{ (значение на левой границе участка);}$$

$$N(1\text{м}) = -20 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

**II участок ЕС:**  $0 \leq z_2 \leq 1\text{м}$  (начало отсчета на нижнем конце участка);

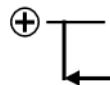
Проводим поперечное сечение в пределах второго рассматриваемого участка **ЕС**, которое разбивает раму на две части (рис. 1.30).

Рассматриваем нижнюю от проведенного сечения часть рамы, т.к. вверх от сечения сил приложено больше, чем вниз.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением этих внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные внизу от проведенного сечения, на ось  $x$ , перпендикулярную геометрической оси стойки (рис. 1.30), с учетом правила знаков



$$Q(z_2) = +F = +8 \text{ кН.}$$

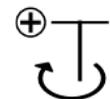
Поперечная сила  $Q$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка.

$$Q(0) = +8 \text{ кН (значение на нижней границе участка);}$$

$$Q(1\text{м}) = +8 \text{ кН (значение на верхней границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных внизу от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.30), с учетом правила знаков



$$M(z_2) = +F \cdot z_2 = +8 \text{ кН} \cdot z_2.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является линейной функцией координаты  $z_2$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$M(0) = +8\text{кН} \cdot 0 = 0 \text{ кНм}$  (значение на нижней границе участка);

$$M(1\text{м}) = +8\text{кН} \cdot 1\text{м} = 8 \text{ кНм (значение на верхней границе}$$

участка).

Определяем величину продольной силы  $N$  на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные внизу от проведенного сечения, на геометрическую ось стойки  $z$  (рис. 1.30), с учетом правила знаков. Внизу от сечения отсутствуют силы, действующие параллельно геометрической оси стойки, следовательно,

$$N(z_2) = 0.$$

Продольная сила  $N$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная геометрической оси стойки  $z$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = 0 \text{ кН (значение на нижней границе участка);}$$

$$N(1\text{м}) = 0 \text{ кН (значение на верхней границе участка).}$$

**III участок DC:**  $0 \leq z_3 \leq 3\text{м}$  (начало отсчета на верхней границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах третьего рассматриваемого участка  $DC$ , которое разбивает раму на две части. Рассматриваем верхнюю от проведенного сечения часть рамы (рис. 1.30), так как вверх от сечения сил приложено меньше, чем внизу.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением этих внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные вверх от проведенного сечения, на ось  $x$ , перпендикулярную геометрической оси стойки (рис. 1.30), с учетом правила знаков



$$Q(z_3) = -q \cdot z_3 = -4 \text{ кН/м} \cdot z_3.$$

Поперечная сила  $Q$  на третьем участке является линейной функцией координаты  $z_3$ . Для построения его графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

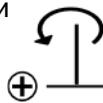
$$Q(0) = 0 \text{ кН (значение на верхней границе участка);}$$

$Q(3) = -4 \text{ кН/м} \cdot 3\text{м} = -12 \text{ кН}$  (значение на нижней границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных сверху от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.30), с учетом правила знаков

$$M(z_3) = + R_B \cdot 2m + q \cdot \frac{z_3^2}{2} = -5 \text{ кН} \cdot 2m + 4 \cdot \frac{z_3^2}{2}$$



Изгибающий момент  $M$  на третьем участке является квадратичной функцией координаты  $z_3$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

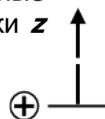
$M(0) = -5 \text{ кН} \cdot 2m + 4 \cdot \frac{0^2}{2} = -10 \text{ кНм}$  (значение на верхней границе участка);

$M(3m) = -5 \text{ кН} \cdot 2m + 4 \cdot \frac{3^2}{2} = +8 \text{ кНм}$  (значение на нижней границе участка).

Определяем величину продольной силы  $N$  на третьем участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные сверху от проведенного сечения, на геометрическую ось стойки  $z$  (рис. 1.30), с учетом правила знаков

$$N(z_3) = + R_B = -5 \text{ кН}$$



Продольная сила  $N$  на третьем участке рамы является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $z$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$N(0) = -5 \text{ кН}$  (значение на верхней границе участка);

$N(3m) = -5 \text{ кН}$  (значение на нижней границе участка).

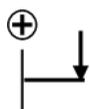
**IV участок BD:**  $0 \leq x_4 \leq 2m$  (начало отсчета на правой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах четвертого рассматриваемого участка  $BD$ , которое разбивает раму на две части. Рассматриваем правую от проведенного сечения часть рамы (рис. 1.30), так как справа от сечения сил приложено меньше, чем слева.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на четвертом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$  (рис. 1.30),



перпендикулярную геометрической оси ригеля, с учетом правила знаков

$$Q(x_4) = -R_B = -(-5\text{кН}) = +5\text{кН}.$$

Поперечная сила  $Q$  на четвертом участке рамы является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = +5\text{кН} \text{ (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(2\text{м}) = +5\text{кН} \text{ (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на четвертом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.30), с учетом правила знаков

$$M(x_4) = +R_B \cdot x_4 = -5\text{кН} \cdot x_4.$$

Изгибающий момент  $M$  на четвертом участке рамы является линейной функцией координаты  $x_4$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$M(0) = -5\text{кН} \cdot 0 = 0\text{кНм}$  (значение на правой границе участка);

$M(2\text{м}) = -5\text{кН} \cdot 2\text{м} = -10\text{кНм}$  (значение на левой границе участка).

Определяем величину продольной силы  $N$  на четвертом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на геометрическую ось ригеля  $x$  (рис. 1.30), с учетом правила знаков

$$N(x_4) = 0.$$

Продольная сила  $N$  на четвертом участке рамы является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = 0\text{кН} \text{ (значение на правой границе участка);}$$

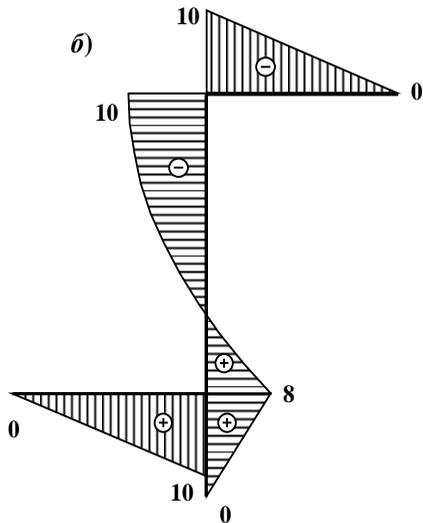
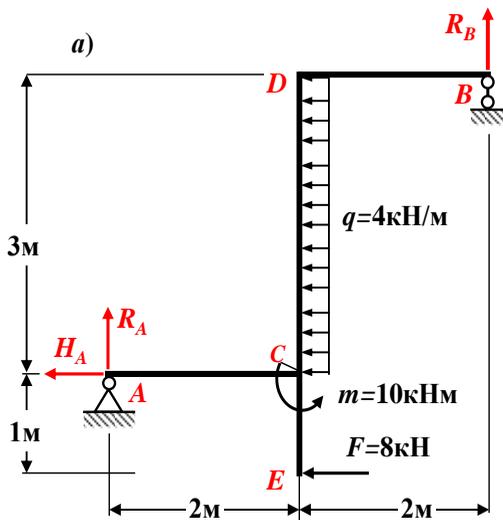
$$N(2\text{м}) = 0\text{кН} \text{ (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в характерных сечениях рамы строим в масштабе эпюру изгибающих моментов и эпюры поперечных и продольных сил (рис. 1.31, б, в, г).

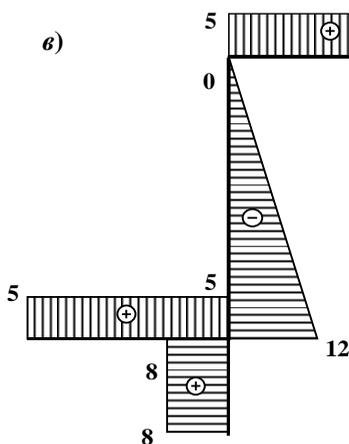
*В проектных строительных организациях эпюры изгибающих моментов строится на растянутом волокне, то есть положительные значения изгибающих моментов в раме откладываются вниз*



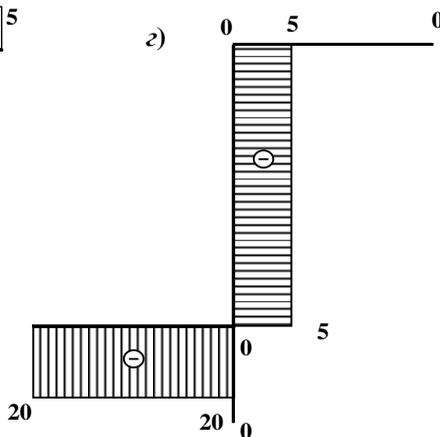
– от базисной прямой для ригеля и вправо – от базисной прямой для стойки.



Эпюра изгибающих моментов  
 $M_p$ , кНм



Эпюра поперечных сил  
 $Q$ , кН



Эпюра продольных сил  
 $N$ , кН

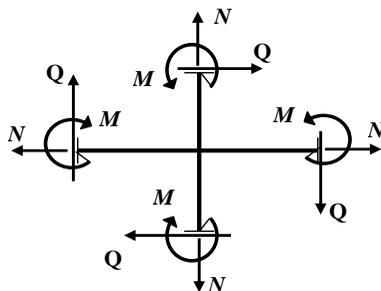
**Рис. 1.31. Эпюры изгибающих моментов (грузовая эпюра  $M_p$ ), поперечных и продольных сил в раме**

**Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов**

Построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в раме проверяются по правилам контроля для прямолинейных балок.

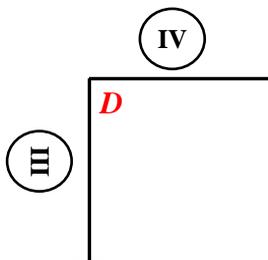
Кроме этого в раме необходимо проверить равновесие узлов. В нашей задаче – равновесие узла **C** и узла **D** (рис. 1.31, а). Эта проверка состоит в том, что вырезанный узел под действием приложенных к нему всех внешних сосредоточенных нагрузок (сосредоточенных сил и сосредоточенных моментов), а также внутренних силовых факторов (поперечные силы, продольные силы и изгибающие моменты) должен находиться в равновесии.

Положительные направления внутренних силовых факторов для узла в виде креста показаны на рис. 1.32.



**Рис. 1.32. Правило знаков**

- Вырежем узел **D** и проверим его равновесие. В узле **D** сходятся **III** и **IV** участки рамы (рис. 1.33).



**Рис. 1.33. Узел D**

В узле **D** внутренние силовые факторы принимают

следующие значения (рис. 1.31, б, в, г):

$$Q_D^{IV} = + 5 \text{ кН (при подходе к узлу справа);}$$

$$Q_D^{III} = 0 \text{ кН (при подходе к узлу снизу);}$$

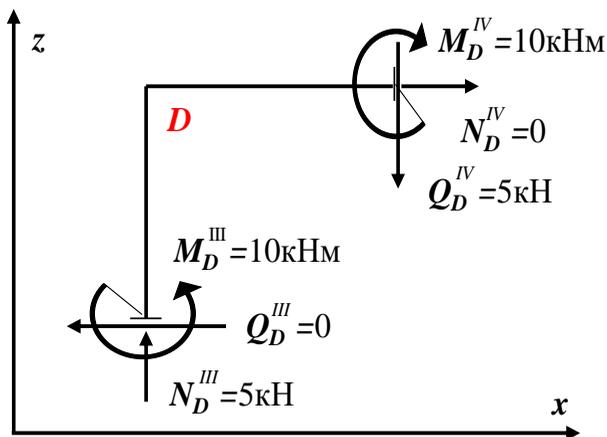
$$M_D^{IV} = - 10 \text{ кНм (при подходе к узлу справа);}$$

$$M_D^{III} = - 10 \text{ кНм (при подходе к узлу снизу);}$$

$$N_D^{IV} = 0 \text{ кН (при подходе к узлу справа);}$$

$$N_D^{III} = - 5 \text{ кН (при подходе к узлу снизу).}$$

С учетом правила знаков (рис. 1.32), показываем истинные направления внутренних усилий приложенных в окрестности узла **D** (рис. 1.34).



**Рис. 1.34. Проверка равновесия узла D**

Составляем три уравнения равновесия (статики):

$$\Sigma F_x = 0: \text{ так как } N_D^{IV} = 0 \text{ кН и } Q_D^{III} = 0 \text{ кН, то } \Sigma F_x = 0.$$

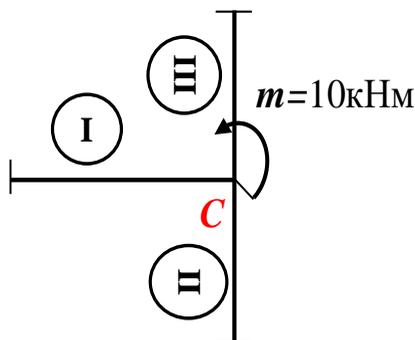
$$\Sigma F_z = 0: N_D^{III} - Q_D^{IV} = 5 \text{ кН} - 5 \text{ кН} = 0;$$

$$\Sigma M_D = 0: M_D^{III} - M_D^{IV} = 10 \text{ кНм} - 10 \text{ кНм} = 0.$$

Узел **D** под действием внутренних силовых факторов находится в равновесии.

- Вырежем узел **C** и проверим его равновесие.

В узле **C** сходятся **I**, **II** и **III** участки, а также приложен внешний сосредоточенный момент  $m = 10 \text{ кНм}$  (рис. 1.35)



**Рис. 1.35. Узел C**

В узле **C** внутренние силовые факторы принимают следующие значения (рис. 1.31, б, в, г):

$$Q_C^I = + 5 \text{ кН (при подходе к узлу слева);}$$

$$Q_C^{II} = + 8 \text{ кН (при подходе к узлу снизу);}$$

$$Q_C^{III} = - 12 \text{ кН (при подходе к узлу сверху);}$$

$$M_C^I = + 10 \text{ кНм (при подходе к узлу слева);}$$

$$M_C^{II} = + 8 \text{ кНм (при подходе к узлу снизу);}$$

$$M_C^{III} = + 8 \text{ кНм (при подходе к узлу сверху);}$$

$$N_C^I = - 20 \text{ кН (при подходе к узлу слева);}$$

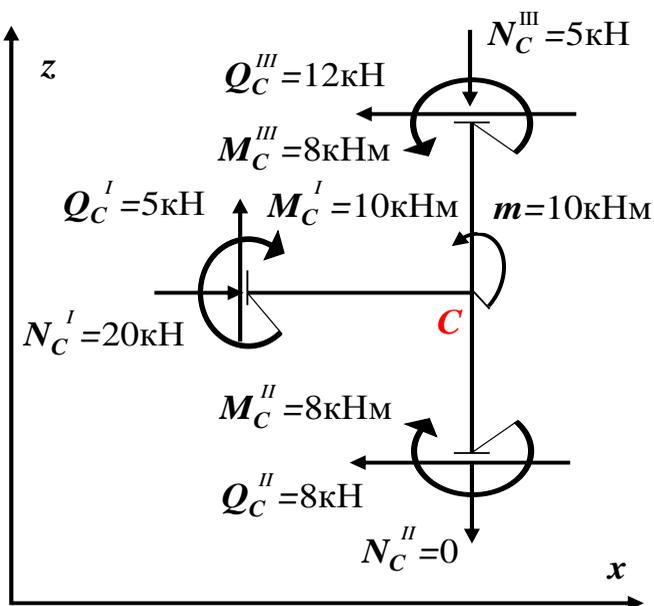
$$N_C^{II} = 0 \text{ кН (при подходе к узлу снизу);}$$

$$N_C^{III} = - 5 \text{ кН (при подходе к узлу сверху).}$$

С учетом правила знаков (рис. 1.32), показываем истинные направления внутренних усилий, приложенных в окрестности узла **C** (рис. 1.36).

Составляем три уравнения равновесия (статики):

$$\Sigma F_x = 0: N_C^I - Q_C^{II} - Q_C^{III} = 20 \text{ кН} - 8 \text{ кН} - 12 \text{ кН} = 0;$$



**Рис. 1.36. Проверка равновесия узла С**

$$\Sigma F_z = 0: Q_C^I - N_C^{II} - N_C^{III} = 5 \text{ кН} - 0 - 5 \text{ кН} = 0;$$

$$\Sigma M_k = 0: -M_C^I - M_C^{II} + M_C^{III} + m = -10 \text{ кНм} - 8 \text{ кНм} + 8 \text{ кНм} + 10 \text{ кНм} = 0.$$

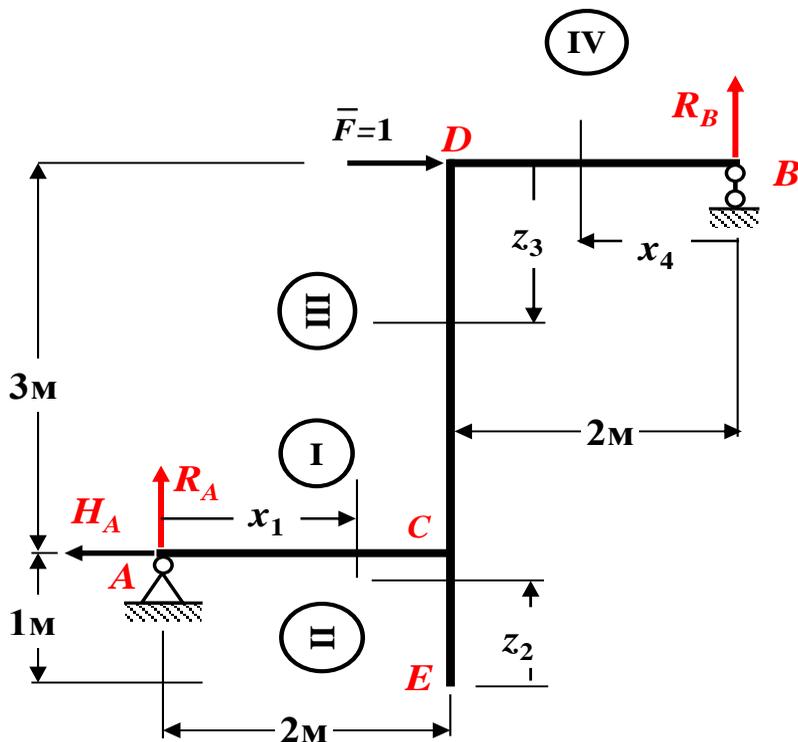
Узел **С** под действием внешнего сосредоточенного момента **m** и внутренних силовых факторов находится в равновесии.

В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.

### **Определение перемещений методом Мора с использованием правила Верещагина**

#### **Определение горизонтального перемещения рамы ( $v_1$ ) в сечении 1**

Для определения горизонтального перемещения рамы в сечении **1** (сечение **D**), выбираем единичное состояние рамы, то есть освобождаем ее от заданной внешней нагрузки и прикладываем в сечении **D** безразмерную сосредоточенную силу  $\bar{F} = 1$ , направленную горизонтально – по направлению искомого перемещения  $v_1$  (рис 1.37).



**Рис. 1.37. Единичное состояние рамы**

Построение эпюры  $\bar{M}_1$  от безразмерного единичного силового фактора  $\bar{F} = 1$

### Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков (рис. 1.37):

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: -H_A + \bar{F} = 0; \rightarrow H_A = 1.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: R_B \cdot 4 - \bar{F} \cdot 3 = 0; R_B = \frac{\bar{F} \cdot 3}{4} = \frac{3}{4} = 0,75; \rightarrow$$



$$R_B = + 0,75.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры **B** равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: -R_A \cdot 4 - H_A \cdot 3 = 0; R_A = \frac{H_A \cdot 3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4} = -0,75; \rightarrow R_A = - 0,75.$$

Обращаем внимание на тот факт, что полученные численные значения всех опорных реакций, в данном случае, **безразмерные**.

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось **z** должна быть равна **0**)

$$\Sigma F_z = 0: R_A + R_B = - 0,75 + 0,75 = 0 (\pm 5 \%).$$

### Построение эпюры изгибающих моментов $\bar{M}_1$ от безразмерного единичного силового фактора

$$\bar{F} = 1$$

В нашем примере (рис. 1.37) расчетная схема рамы имеет четыре участка (**AC**, **EC**, **DC** и **BD**).

**I участок AC:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента **M** на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.37) с учетом правила знаков

$$M(x_1) = + R_A \cdot x_1 = - 0,75 \cdot x_1.$$

Изгибающий момент **M** на первом участке является линейной функцией

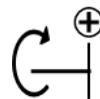
координаты **x<sub>1</sub>**. Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$M(0) = - 0,75 \cdot 0\text{ м} = 0\text{ м}$  (значение на левой границе участка);

$M(2\text{ м}) = - 0,75 \cdot 2\text{ м} = - 1,5\text{ м}$  (значение на правой границе участка).

**II участок EC:**  $0 \leq z_2 \leq 1\text{ м}$  (начало отсчета на нижнем конце участка);

Определяем величину изгибающего момента **M** на втором участке.



Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных внизу от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.37), с учетом правила знаков



$$M(z_2) = 0.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является постоянной величиной, графиком такой функции служит прямая, параллельная геометрической оси стойки  $z$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

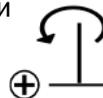
$$M(0) = 0 \text{ м (значение на нижней границе участка);}$$

$$M(1\text{м}) = 0 \text{ м (значение на верхней границе участка).}$$

**III участок DC:**  $0 \leq z_3 \leq 3$  (начало отсчета на верхней границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных сверху от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.37), с учетом правила знаков



$$M(z_3) = + R_B \cdot z_3 - \bar{F} \cdot z_3.$$

Изгибающий момент  $M$  на третьем участке рамы является линейной функцией координаты  $z_3$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$$M(0) = + 0,75 \cdot 2\text{м} - 1 \cdot 0\text{м} = + 1,5 \text{ м (значение на верхней границе участка);}$$

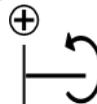
$$M(3\text{м}) = + 0,75 \cdot 2\text{м} - 1 \cdot 3\text{м} = - 1,5 \text{ м (значение на нижней границе участка).}$$

**IV участок BD:**  $0 \leq x_4 \leq 2$  (начало отсчета на правой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на четвертом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.37), с учетом правила знаков

$$M(x_4) = + R_B \cdot x_4 = + 0,75 \cdot x_4.$$

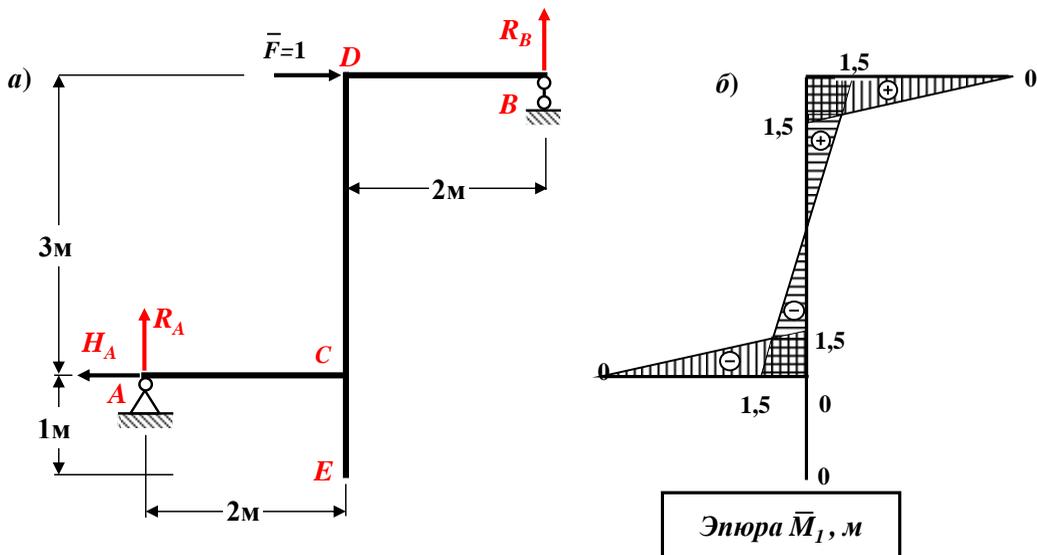


Изгибающий момент  $M$  на четвертом участке рамы является линейной функцией координаты  $x_4$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$M(0) = + 0,75 \cdot 0\text{м} = 0\text{ м}$  (значение на правой границе участка);

$M(2\text{м}) = + 0,75 \cdot 2\text{м} = + 1,5\text{ м}$  (значение на левой границе участка).

По полученным численным значениям  $M$  в характерных сечениях рамы строим в масштабе эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  от единичного силового фактора  $\bar{F} = 1$  (рис. 1.38, б).



**Рис. 1.38. Эпюра изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  от единичной сосредоточенной силы**

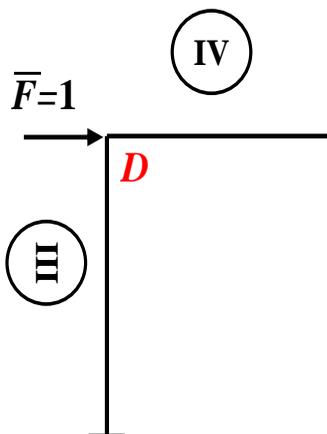
Обращаем внимание на тот факт, что все ординаты эпюры  $\bar{M}_1$ , в данном случае, имеют размерность единицы длины – м.

**Контроль (проверки) правильности построения эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_1$**

Проверяем равновесие узлов. В нашем примере – это равновесие узла **C** и узла **D** (рис. 1.38, а).

- Вырежем узел **D** и проверим его равновесие.

В узле **D** сходятся **III** и **IV** участки рамы, а также приложена внешняя безразмерная сосредоточенная сила  $\bar{F} = 1$  (рис. 1.39).



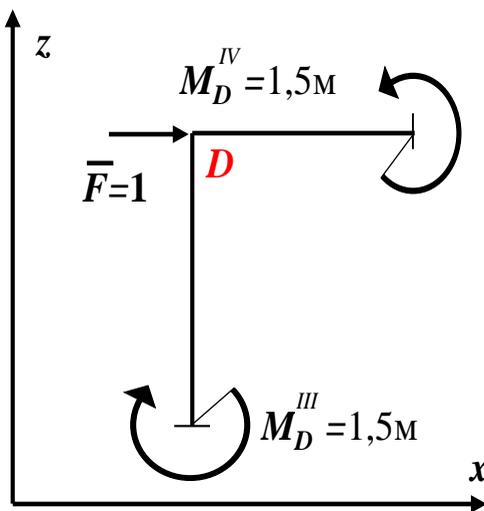
**Рис.1.39. Узел D**

В узле **D** изгибающие моменты принимают следующие значения (рис.1.38):

$$M_D^{IV} = + 1,5 \text{ м (при подходе к узлу справа);}$$

$$M_D^{III} = + 1,5 \text{ м (при подходе к узлу снизу).}$$

С учетом правила знаков (рис. 1.32), показываем истинные направления изгибающих моментов, приложенных в окрестности узла **D** (рис. 1.40).



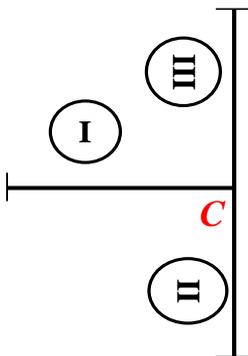
**Рис. 1.40. Проверка равновесия узла D**

Составляем уравнение равновесия (статики):

$$\Sigma M_D = 0: M_D^{IV} - M_D^{III} = 1,5 \text{ м} - 1,5 \text{ м} = 0.$$

Узел **D** под действием изгибающих моментов находится в равновесии.

- Вырежем узел **C** и проверим его равновесие. В узле **C** сходятся **I**, **II** и **III** участки (рис. 1.41).



**Рис. 1.41. Узел C**

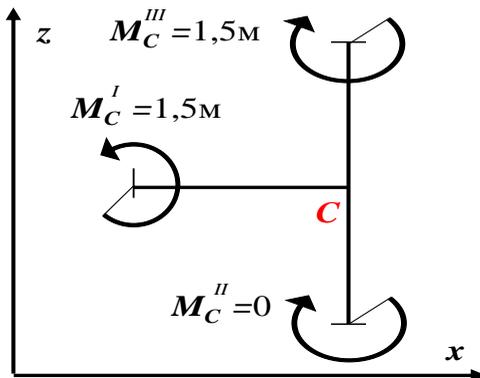
В узле **C** изгибающие моменты принимают следующие значения (рис.1.38):

$$M_C^I = -1,5 \text{ м (при подходе к узлу слева);}$$

$$M_C^{II} = 0 \text{ м (при подходе к узлу снизу);}$$

$$M_C^{III} = -1,5 \text{ м (при подходе к узлу сверху).}$$

С учетом правила знаков (рис. 1.32), показываем истинные направления изгибающих моментов, приложенных в окрестности узла **C** (рис. 1.42).



**Рис. 1.42. Проверка равновесия узла C**

Составляем уравнение равновесия (статики):

$$\Sigma M_K = 0: +M_C^I - M_C^{III} = +1,5 \text{ м} - 1,5 \text{ м} = 0.$$

Узел **C** под действием изгибающих моментов находится в равновесии.

В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, эпюра изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  построена правильно.

### Определение горизонтального перемещения рамы ( $v_1$ ) в сечении 1

Горизонтальное перемещение рамы ( $v_1$ ) в сечении **1** вычислим по формуле Мора

$$\Delta_{IP} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{BD} \frac{M_P(x) \bar{M}_1(x)}{EJ_y} dx = \Delta_{IP}^{AC} + \Delta_{IP}^{CD} + \Delta_{IP}^{BD} + \Delta_{IP}^{EC}.$$

Так как на участке **EC** (рис. 1.36, б) изгибающие моменты  $\bar{M}_1$  равны нулю, то  $\Delta_{IP}^{EC} = 0$ .

Правило знаков. Результат «перемножения» эпюр является положительным, если эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_1$  одного знака, и отрицательным, если эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_1$  разных знаков.

На участке **AC** (рис. 1.43) площадь эпюры  $M_P$  равна  $\Omega = + \frac{10 \cdot 2}{2} = + 10 \text{ кНм}^2$ .

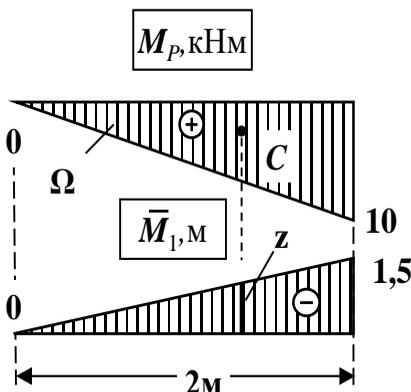


Рис. 1.43. Перемножение эпюр на участке AC

На участке **AC** (рис. 1.43) ордината в эпюре  $\bar{M}_1$  под центром тяжести эпюры  $M_P$  равна

$$z = - \frac{2}{3} 1,5 = - 1 \text{ м}.$$

Поэтому

$$\Delta_{1P}^{AC} = \frac{\Omega \cdot z}{EI_1} = \frac{(+10)(-1)}{EI_1} = -\frac{10 \text{ кНм}^3}{EI_1} (\text{м}),$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

На участке  $BD$  (рис. 1.44) площадь эпюры  $M_P$  равна  $\Omega = -\frac{10 \cdot 2}{2} = -10 \text{ кНм}^2$ .

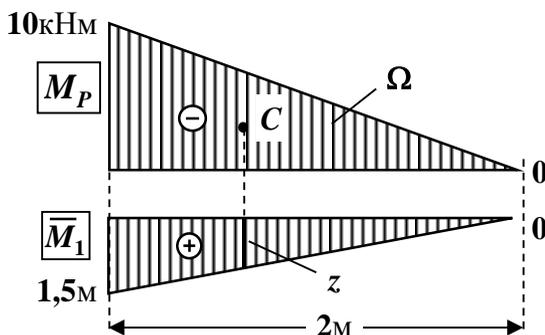


Рис. 1.44. Перемножение эпюр на участке  $BD$

На участке  $BD$  (рис. 1.44) ордината в эпюре  $\bar{M}_1$  под центром тяжести эпюры  $M_P$  равна

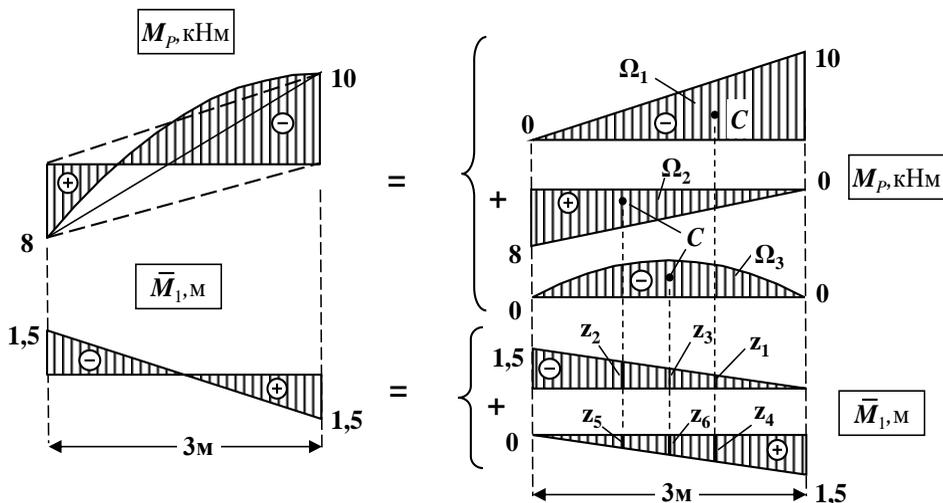
$$z = +\frac{2}{3} \cdot 1,5 = +1 \text{ м.}$$

Поэтому

$$\Delta_{1P}^{BD} = \frac{\Omega \cdot z}{EI_1} = \frac{(-10)(+1)}{EI_1} = -\frac{10 \text{ кНм}^3}{EI_1} (\text{м}),$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

Эпюру от заданной нагрузки  $M_P$  на участке  $CD$  (рис. 1.30, б), которую развернем по ходу часовой стрелки, разбиваем на два треугольника и симметричную параболу, а эпюру  $\bar{M}_1$  (рис. 1.38, б) – на два треугольника (рис. 1.45).



**Рис. 1.45. Разбиение сложных эпюр на участке CD на простые эпюры.**

### Перемножение эпюр на участке CD

Площади этих простых эпюр  $M_p$  равны

$$\Omega_1 = -\frac{10 \cdot 3}{2} = -15 \text{ кНм}^2; \quad \Omega_2 = +\frac{8 \cdot 3}{2} = +12 \text{ кНм}^2;$$

$$\Omega_3 = -\frac{q l^3}{12} = -\frac{4 \cdot 3^3}{12} = -9 \text{ кНм}^2.$$

Ординаты в эпюре  $\bar{M}_1$  под центрами тяжести простых эпюр  $M_p$  соответственно равны (рис. 1.45)

$$z_1 = -\frac{1}{3} \cdot 1,5 = -0,5 \text{ м}; \quad z_4 = +\frac{2}{3} \cdot 1,5 = +1 \text{ м}; \quad z_2 = -\frac{2}{3} \cdot 1,5 = -1 \text{ м};$$

$$z_5 = +\frac{1}{3} \cdot 1,5 = +0,5 \text{ м}; \quad z_3 = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 = -0,75 \text{ м}; \quad z_6 = +\frac{1}{2} \cdot 1,5 = +0,75 \text{ м}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_{1P}^{CD} &= \frac{\Omega_1(z_1+z_4) + \Omega_2(z_2+z_5) + \Omega_3(z_3+z_6)}{EI_2} = \\ &= +\frac{(-15)(-0,5+1) + (+12)(-1+0,5) + (-9)(-0,75+0,75)}{EI_2} = -\frac{13,5 \text{ кНм}^3}{EI_2} = \\ &= -\frac{3 \cdot 13,5 \text{ кНм}^3}{EI_1} = -\frac{40,5 \text{ кНм}^3}{EI_1} (\text{м}), \end{aligned}$$

так как

$$I_2 = I_1 / 3,$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

Таким образом, горизонтальное перемещение рамы  $v_1$  в се-

чении **1** равно

$$v_1 = \Delta_{1P} = \Delta_{1P}^{AC} + \Delta_{1P}^{BD} + \Delta_{1P}^{CD} = -\frac{10 \text{ кНм}^3}{EI_1} - \frac{10 \text{ кНм}^3}{EI_1} - \frac{40,5 \text{ кНм}^3}{EI_1} = -\frac{60,5 \text{ кНм}^3}{EI_1} \text{ (м)},$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

Отрицательное значение перемещения  $v_1$  в сечении **1** показывает, что рама в сечении **1** перемещается в направлении, противоположном направлению единичной силы  $\bar{F} = 1$  (рис. 1.38, а).

### Определение угла поворота рамы в сечении **2**

Для определения угла поворота  $\varphi_2$  в сечении **2** (сечение **E**), выбираем единичное состояние рамы, то есть освобождаем ее от заданной внешней нагрузки и прикладываем в сечении **E** безразмерный единичный сосредоточенный момент  $\bar{M} = 1$ , направленный по ходу часовой стрелки (рис. 1.46).

**Построение эпюры  $\bar{M}_2$  от безразмерного единичного силового фактора  $\bar{M} = 1$**

### Определение опорных реакций

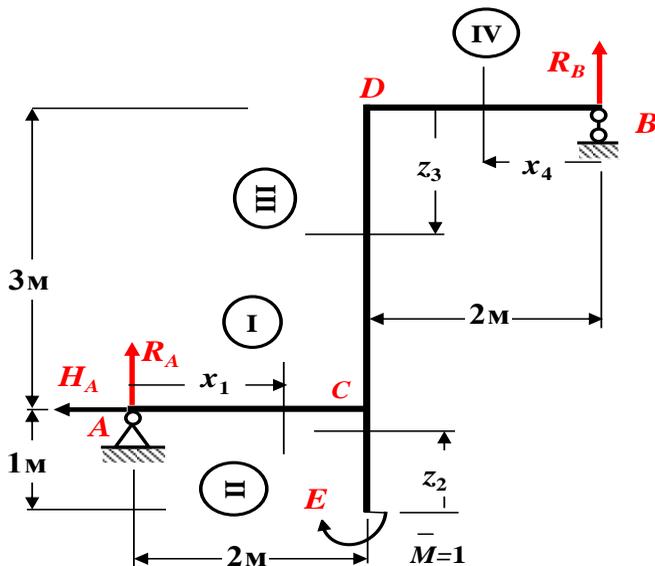


Рис. 1.46. Единичное состояние рамы

Составляем три уравнения равновесия (статики) для всей рамы с учетом правила знаков (рис. 1.46):

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: -H_A = 0; \rightarrow \mathbf{H}_A = 0.$$



2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: R_B \cdot 4 - \overline{M} = 0; R_B = \frac{\overline{M}}{4} = \frac{1}{4} = +0,25 \frac{1}{H};$$

$$\rightarrow \mathbf{R}_B = +0,25 \frac{1}{H}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $B$  равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: -R_A \cdot 4 - \overline{M} = 0; R_A = -\frac{\overline{M}}{4} = -\frac{1}{4} = -0,25 \frac{1}{H};$$

$$\rightarrow \mathbf{R}_A = -0,25 \frac{1}{H}.$$

Обращаем внимание на тот факт, что численные значения опорных

реакций  $R_A$  и  $R_B$ , в данном случае, имеют размерность  $-\frac{1}{H}$ .

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна  $0$ )

$$\Sigma F_z = 0: R_A + R_B = -0,25 + 0,25 = 0 (\pm 5 \%).$$

**Построение эпюры изгибающих моментов  $\overline{M}_2$**

**от единичного силового фактора  $\overline{M} = 1$**

В нашем примере (рис. 1.46) расчетная схема рамы имеет четыре участка ( $AC$ ,  $EC$ ,  $DC$  и  $BD$ ).

**I участок  $AC$ :**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.46), с учетом правила знаков

$$\mathbf{M}(x_1) = +R_A \cdot x_1 = -0,25 \cdot x_1.$$



Изгибающий момент  $M$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

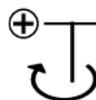
$M(0) = -0,25 \frac{1}{H} \cdot 0m = 0$  (значение на левой границе участка);

$M(2m) = -0,5 \frac{1}{H} \cdot 2m = -0,5$  (значение на правой границе участка).

**II участок ЕС:**  $0 \leq z_2 \leq 1$  (начало отсчета на нижнем конце участка);

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных внизу от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.46), с учетом правила знаков



$$M(z_2) = + \overline{M} = + 1.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является постоянной величиной, графиком такой функции служит прямая, параллельная геометрической оси стойки  $z$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

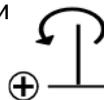
$$M(0) = + 1 \text{ (значение на нижней границе участка);}$$

$$M(1m) = + 1 \text{ (значение на верхней границе участка).}$$

**III участок DC:**  $0 \leq z_3 \leq 3m$  (начало отсчета на верхней границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных сверху от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.46), с учетом правила знаков



$$M(z_3) = + R_B \cdot 2m = + 0,25 \frac{1}{H} \cdot 2m = + 0,5.$$

Изгибающий момент  $M$  на третьем участке рамы является постоянной величиной, графиком такой функции служит прямая, параллельная геометрической оси стойки  $z$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = + 0,5 \text{ (значение на верхней границе участка);}$$

$$M(3m) = + 0,5 \text{ (значение на нижней границе участка).}$$

**IV участок BD:**  $0 \leq x_4 \leq 2m$  (начало отсчета на правой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на четвертом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения

(рис. 1.46), с учетом правила знаков

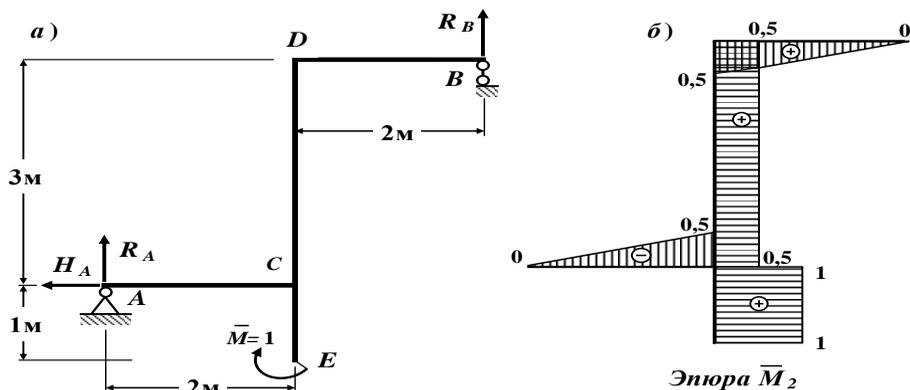
$$M(x_4) = + R_B \cdot x_4 = + 0,25 \cdot x_4.$$

Изгибающий момент  $M$  на четвертом участке рамы является линейной функцией координаты  $x_4$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$M(0) = + 0,25 \frac{1}{m} \cdot 0m = 0$  (значение на правой границе участка);

$M(2m) = + 0,25 \frac{1}{m} \cdot 2m = + 0,5$  (значение на левой границе участка).

По полученным численным значениям  $M$  в характерных сечениях рамы строим в масштабе эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_2$  от единичного силового фактора  $\bar{M} = 1$  (рис. 1.47).



**Рис. 1.47. Эпюра изгибающих моментов  $\bar{M}_2$  от единичного сосредоточенного момента  $\bar{M} = 1$**

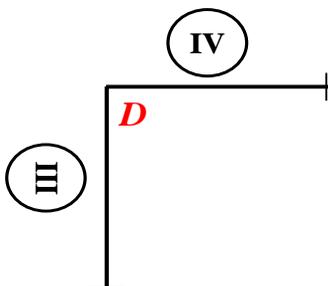
Обращаем внимание на тот факт, что все ординаты эпюры  $\bar{M}_2$ , в данном случае, **безразмерные**.

### Контроль (проверки) правильности построения эпюры изгибающих моментов $\bar{M}_2$

Проверяем равновесие узлов. В нашем примере – это равновесие узла **С** и узла **Д** (рис. 1.47, а).

- Вырежем узел **Д** и проверим его равновесие.

В узле **D** сходятся **III** и **IV** участки рамы (рис. 1.48).



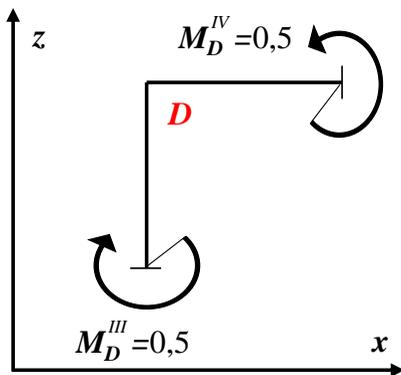
**Рис. 1.48. Узел D**

В узле **D** изгибающие моменты принимают следующие значения (рис. 1.47, б):

$$M_D^{IV} = + 0,5 \text{ (при подходе к узлу справа);}$$

$$M_D^{III} = + 0,5 \text{ (при подходе к узлу снизу).}$$

С учетом правила знаков (рис. 1.32), показываем истинные направления изгибающих моментов, приложенных в окрестности узла **D** (рис. 1.49).



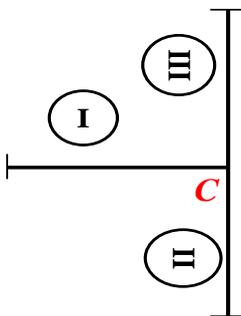
**Рис. 1.49. Проверка равновесия узла D**

Составляем уравнение равновесия (статики):

$$\Sigma M_D = 0: M_D^{IV} - M_D^{III} = 1,5 - 1,5 = 0.$$

Узел **D** под действием изгибающих моментов находится в равновесии.

- Вырежем узел **C** и проверим его равновесие. В узле **C** сходятся **I**, **II** и **III** участки (рис. 1.50)



**Рис. 1.50. Узел C**

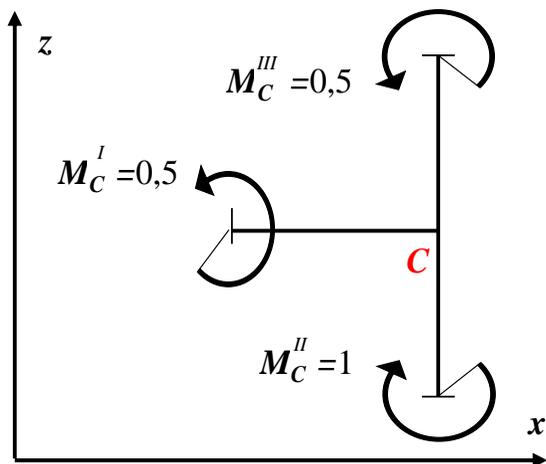
В узле **C** изгибающие моменты принимают следующие значения (рис. 1.47, б):

$$M_C^I = -0,5 \text{ (при подходе к узлу слева);}$$

$$M_C^{II} = +1 \text{ (при подходе к узлу снизу);}$$

$$M_C^{III} = +0,5 \text{ (при подходе к узлу сверху).}$$

С учетом правила знаков (рис. 1.32), показываем истинные направления изгибающих моментов, приложенных в окрестности узла **C** (рис. 1.51).



**Рис. 1.51. Проверка равновесия узла C**

Составляем уравнение равновесия (статики):

$$\Sigma M_c = 0: + M_C^I - M_C^{II} + M_C^{III} = +0,5 - 1,0 + 0,5 = 0.$$

*Узел C под действием изгибающих моментов находится в равновесии.*

В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно,

эпюра изгибающих моментов  $\overline{M}_2$  построена правильно.

### Определение угла поворота $\varphi_2$ в сечении 2

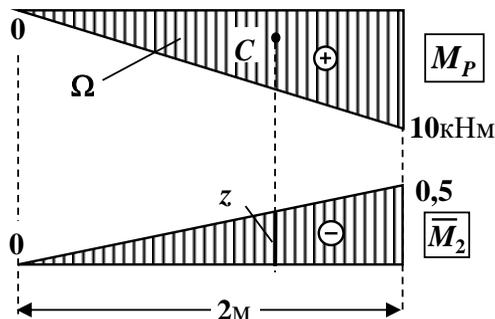
Угол поворота  $\varphi_2$  в сечении 2 (сечение E) вычислим с помощью интеграла Мора

$$\varphi_2 = \Delta_{2P} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{CE} + \int_{BD} \frac{M_P(x) \overline{M}_2(x)}{EJ_y} dx = \Delta_{2P}^{AC} + \Delta_{2P}^{CD} + \Delta_{2P}^{CE} + \Delta_{2P}^{BD}.$$

Правило знаков. Результат «перемножения» эпюр является положительным, если эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_2$  одного знака, и отрицательным, если эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_2$  разных знаков.

На участке **AC** (рис. 1.52) площадь эпюры  $M_P$  равна

$$\Omega_1 = + \frac{10 \cdot 2}{2} = + 10 \text{ кНм}^2.$$



**Рис. 1.52.** Перемножение эпюр на участке AC

На участке **AC** (рис. 1.52) ордината в эпюре  $\overline{M}_2$  под центром тяжести эпюры  $M_P$  равна

$$z = - \frac{2}{3} \cdot 0,5 = - 0,333.$$

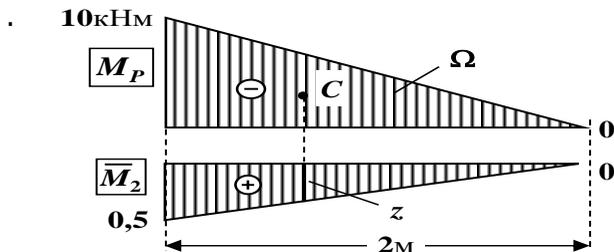
Поэтому

$$\Delta_{2P}^{AC} = \frac{\Omega \cdot z}{EI_1} = \frac{(+10)(-0,333)}{EI_1} = - \frac{3,33 \text{ кНм}^2}{EI_1} \text{ (рад.)},$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

На участке **BD** (рис. 1.53) площадь эпюры  $M_P$  равна

$$\Omega = - \frac{10 \cdot 2}{2} = - 10 \text{ кНм}^2$$



**Рис. 1.53. Перемножение эпюр на участке BD**

На участке **BD** (рис. 1.53) ордината в эпюре  $\bar{M}_2$  под центром тяжести эпюры  $M_P$  равна

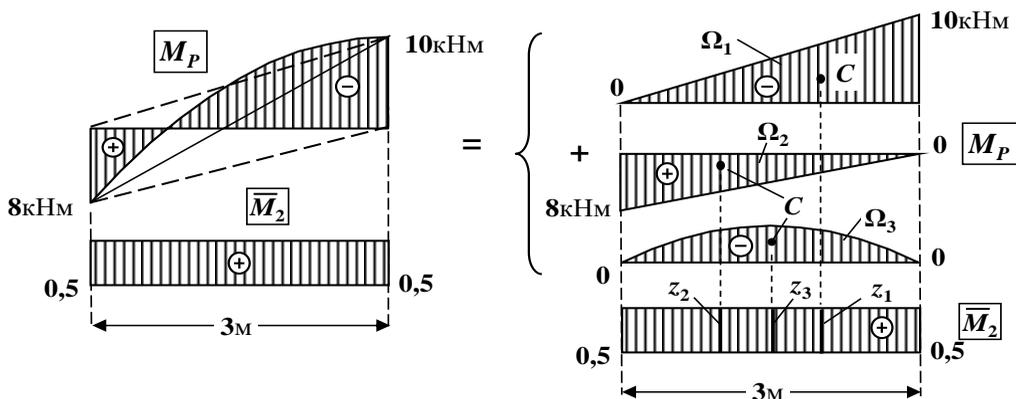
$$z = + \frac{2}{3} 0,5 = + 0,333.$$

Поэтому

$$\Delta_{2P}^{BD} = \frac{Q \cdot z}{EI_1} = \frac{(-10)(+0,333)}{EI_1} = - \frac{3,33 \text{ кНм}^2}{EI_1} \text{ (рад.)},$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

Эпюру от заданной нагрузки  $M_P$  на участке **CD**, который развернем по ходу часовой стрелки, разобьем на два треугольника и симметричную параболу (рис. 1.54).



**Рис. 1.54. Разбиение сложной эпюры  $M_P$  на участке CD на простые эпюры.**

**Перемножение эпюр на участке CD**

Площади этих простых эпюр  $M_P$  равны

$$\Omega_1 = - \frac{10 \cdot 3}{2} = - 15 \text{ кНм}^2; \quad \Omega_2 = + \frac{8 \cdot 3}{2} = + 12 \text{ кНм}^2;$$

$$\Omega_3 = - \frac{ql^3}{12} = - \frac{4 \cdot 3^3}{12} = - 9 \text{ кНм}^2.$$

На участке **CD** (рис. 1.54) ординаты в эюре  $\bar{M}_2$  под центрами тяжести простых эюр  $M_p$  равны

$$z_1 = z_2 = z_3 = z = + 0,5.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_{2P}^{CD} &= \frac{(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3)z}{EI_2} = \frac{(-15 + 12 - 9)(+ 0,5)}{EI_2} = - \frac{6 \text{ кНм}^2}{EI_2} = \\ &= - \frac{3 \cdot 6 \text{ кНм}^2}{EI_1} = - \frac{18 \text{ кНм}^2}{EI_1} \text{ (рад.)}, \end{aligned}$$

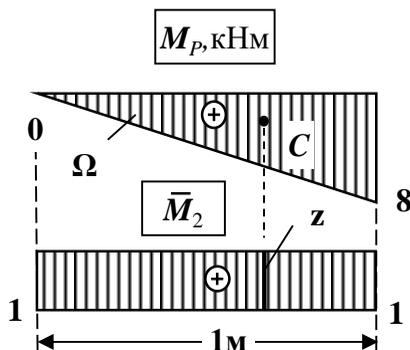
так как

$$I_2 = I_1 / 3.$$

Где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

На участке **CE** (рис. 1.55), который развернем по ходу часовой стрелки, площадь эюры  $M_p$  равна

$$\Omega = + \frac{8 \cdot 1}{2} = + 4 \text{ кНм}^2.$$



**Рис. 1.55. Перемножение эюр на участке CE**

На участке **CE** (рис. 1.55) ордината в эюре  $\bar{M}_2$  под центром тяжести эюры  $M_p$  равна

$$z = + 1.$$

Поэтому

$$\Delta_{2P}^{CE} = \frac{\Omega \cdot z}{EI_2} = \frac{(+ 4)(+ 1)}{EI_2} = + \frac{4 \text{ кНм}^2}{EI_2} = + \frac{3 \cdot 4 \text{ кНм}^2}{EI_1} = + \frac{12 \text{ кНм}^2}{EI_1} \text{ (рад.)},$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ , а  $I_2 = I_1 / 3$ .

Таким образом, угол поворота рамы  $\varphi_2$  в сечении **2** (сечение **E**) равен

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \Delta_{2P} &= \Delta_{2P}^{AC} + \Delta_{2P}^{BD} + \Delta_{2P}^{CD} + \Delta_{2P}^{CE} = \\ &= - \frac{3,33 \text{ кНм}^2}{EI_1} - \frac{3,33 \text{ кНм}^2}{EI_1} - \frac{18 \text{ кНм}^2}{EI_1} + \frac{12 \text{ кНм}^2}{EI_1} = - \frac{12,7 \text{ кНм}^2}{EI_1} \text{ (рад.)}, \end{aligned}$$

где жесткость  $EI_1$  имеет размерность –  $\text{кНм}^2$ .

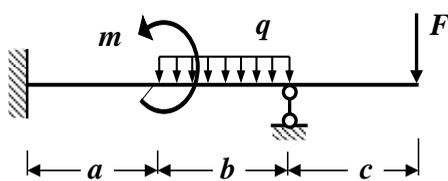
Отрицательное значение угла поворота рамы  $\varphi_2$  в сече-

нии **2** показывает, что сечение **E** поворачивается против хода часовой стрелки, то есть в направлении, противоположном направлению единичного момента  $\overline{M} = 1$  (рис. 1.46).

## 2.4. Задача 4. Расчет на жесткость статически неопределимой балки методом начальных параметров

### Задача.

Для заданной схемы статически неопределимой балки (рис. 1.56) требуется:



**Рис. 1.56. Схема балки**

### **Исходные данные:**

$$a = 2 \text{ м}; \quad b = 3 \text{ м}; \quad c = 1 \text{ м};$$

$$q = 15 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; \quad m = 20$$

$$\text{кНм};$$

$$F = 30 \text{ кН}.$$

1. Раскрыть статическую неопределимость балки (определить опорные реакции) методом начальных параметров.

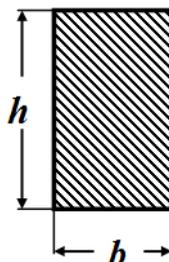
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

3. Из условия прочности по методу допускаемых нормальных напряжений подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения (рис. 1.57) деревянной балки при заданных соотношениях  $\beta = h/b$ . Принять допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$ .

4. Проверить прочность выбранного сечения балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.

5. Проверить прочность выбранного сечения балки по касательным напряжениям, приняв  $[\tau] = 2 \text{ МПа}$ .

6. Вычислить, пользуясь методом начальных параметров, численные значения прогибов оси в характерных точках участков



**Рис. 1.57**

балки и построить эпюру прогибов (изогнутую ось балки).

7. Определить величину максимального прогиба и проверить выполнение условия жесткости балки, приняв допустимый прогиб  $[f] = \frac{L}{150}$ , где  $L$  – длина пролета (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

### Решение

#### Определение опорных реакций

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Заменяем действие опор **A** и **C** опорными реакциями  $H_A$ ,  $R_A$ ,  $M_A$  и  $R_C$  (рис. 1.58).

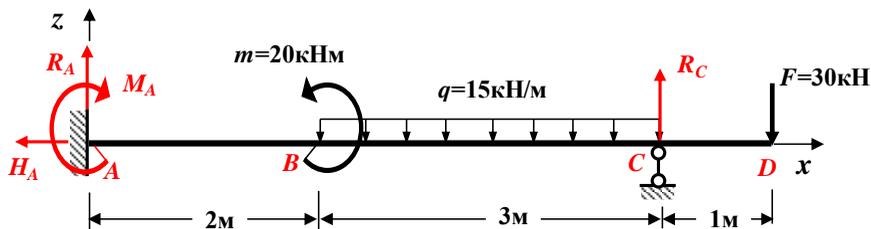


Рис. 1.58. Расчетная схема заданной балки

В нашей задаче число неизвестных опорных реакций – четыре ( $H_A$ ,  $R_A$ ,  $M_A$  и  $R_C$ ), а число независимых уравнений равновесия (уравнений статики) – три, следовательно, балка 1 раз ( $n = 4 - 3 = 1$ ) статически неопределимая.

а). Статическая сторона задачи

Для определения опорных реакций для балки, изображенной на рис. 1.58, составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: -H_A = 0; \rightarrow H_A = 0.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры **A** равна нулю

$$\sum M_A = 0: -M_A + m - q \cdot 3 \cdot (2 + 1,5) + R_C \cdot 5 - F \cdot 6 = 0;$$

$$-M_A + 20 - 15 \cdot 3 \cdot 3,5 + R_C \cdot 5 - 30 \cdot 6 = 0;$$

$$-M_A + R_C \cdot 5 = 317. \quad (2)$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры **C** равна нулю



$$\Sigma M_C = 0: -M_A - R_A \cdot 5 + m + q \cdot 3 \cdot 1,5 - F \cdot 1 = 0;$$

$$-M_A - R_A \cdot 5 + 20 + 15 \cdot 4,5 - 30 = 0;$$

$$M_A + R_A \cdot 5 = 57,5. \quad (3)$$

Получили *два* независимых уравнения статики (2) и (3), в которые вошли *три* неизвестные опорные реакции ( $R_A$ ,  $M_A$  и  $R_C$ ).

*б). Геометрическая сторона задачи*

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим кинематические граничные условия балки (условия на опорах).

В нашей задаче балка закреплена на опорах **A** (*жесткая заделка*) и **C** (*шарнирно-подвижная опора*), то есть кинематические граничные условия принимают вид

$$v_A = v(0) = 0; \quad \varphi_A = \varphi(0) = 0 \quad \text{и} \quad v_C = v(5) = 0.$$

Для составления дополнительного уравнения воспользуемся условием

$$v_C = v(5) = 0, \quad (4)$$

а первые два условия оставим для определения численных значений начальных параметров.

*в). Физическая сторона задачи*

Мы получили дополнительное уравнение (4), записанное в «скрытой» форме. Развернем это уравнение при помощи *универсального уравнения метода начальных параметров*, которое получено на основе закона Гука.

Начальные параметры (начало отсчета на опоре **A**) будут равны

$$v_0 = v_A = 0; \quad \varphi_0 = \varphi_A = 0; \quad M_0 = +M_A; \quad F_0 = +R_A.$$

Уравнение метода начальных параметров для прогиба для нашей балки имеет следующий вид:

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м};$  **II участок BC:**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м};$

**III участок CD:**  $5\text{м} \leq x_3 \leq 6\text{м}$

$w(x) =$

$$\frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6} \Big|_I - \frac{m(x-2)^2}{2} - \frac{q(x-2)^4}{24} \Big|_{II} + \frac{R_C(x-5)^3}{6} + \frac{q(x-5)^4}{24} \Big|_{III} \right]$$

(5)

Используя граничное условие (4) (прогиб на опоре **C** равен нулю) и выражение (5), получаем развернутое дополнительное уравнение (уравнение деформаций) для определения опорных реакций

$$w_c = w(5) = \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{M_A \cdot 5^2}{2} + \frac{R_A \cdot 5^3}{6} - \frac{m(5-2)^2}{2} - \frac{q(5-2)^4}{24} \right] = 0.$$

Подставляя в полученное уравнение численные значения  $m$  и  $q$ , получаем

$$\frac{M_A \cdot 5^2}{2} + \frac{R_A \cdot 5^3}{6} - \frac{20(3)^2}{2} - \frac{15(3)^4}{24} = 0$$

или

$$3 \cdot M_A + 5 \cdot R_A = 33,8. \quad (6)$$

г). Синтез уравнений

Решая систему трех уравнений (2), (3) и (6) относительно трех неизвестных опорных реакций ( $R_A$ ,  $M_A$  и  $R_C$ ), определим все неизвестные опорные реакции балки

$$\begin{cases} -M_A + 5R_C = 317; \\ M_A + 5R_A = 57,5 \\ 3M_A + 5R_A = 33,8. \end{cases} \quad (7)$$

Вычитая из третьего уравнения системы (7) второе, определяем  $M_A$

$$M_A = \frac{(33,8 - 57,5)}{2} = -11,85 \text{ кНм} = -11,9 \text{ кНм}; \quad \rightarrow M_A = -$$

**11,9 кНм.**

Из второго уравнения системы (7) находим  $R_A$

$$R_A = \frac{57,5 - M_A}{5} = \frac{57,5 - (-11,9)}{5} = 13,88 \text{ кН} = +13,9 \text{ кН};$$

$\rightarrow R_A = +13,9 \text{ кН.}$

Из первого уравнения системы (7) находим  $R_C$

$$R_C = \frac{317 + M_A}{5} = \frac{317 + (-11,9)}{5} = 61,12 \text{ кН} = +61,1 \text{ кН};$$

$\rightarrow R_C = +61,1 \text{ кН.}$

После определения численных значений опорных реакций необходимо сделать несколько проверок:

- Проверка правильности решения системы уравнений (7)

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_A + 5R_C - 317 = -(-11,9) + 5 \cdot 61,1 - 317 = 317 - 317 \approx 0; \quad (\pm 5 \%) \\ M_A + 5R_A - 57,5 = (-11,9) + 5 \cdot 13,9 - 57,5 = 57,6 - 57,5 = 0,1 \approx 0; \quad (\pm 5 \%) \\ 3M_A + 5R_A - 33,8 = 3 \cdot (-11,9) + 5 \cdot 13,9 - 33,8 = 33,8 - 33,8 = 0 \quad (\pm 5 \%) \end{array} \right.$$

• Статическая проверка (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна  $0$ )

$$\sum F_z = R_A - q \cdot 3 + R_C - F = 13,9 - 15 \cdot 3 + 61,1 - 30 = 75 - 75 = 0 \quad (\pm 5 \%).$$

• Кинематическая проверка (прогиб на опоре  $C$  должен быть равен нулю)

$$w_C = w(5) =$$

$$\frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{-11,9 \cdot 5^2}{2} + \frac{13,9 \cdot 5^3}{6} - \frac{20 \cdot (5-2)^2}{2} - \frac{15 \cdot (5-2)^4}{24} \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_y} [289,6 - 289,4] = \frac{0,2}{EJ_y} \approx 0 \quad (\pm 5 \%).$$

Проверки показывают, что опорные реакции найдены правильно.

После нахождения численных значений опорных реакций статически неопределимой балки (раскрытия ее статической неопределимости), методика ее дальнейшего расчета на прочность и жесткость ничем не отличается от методики расчета статически определимых балок.

### Построение эпюр поперечной силы $Q$ и изгибающего момента $M$

Расчетная схема балки имеет три участка ( $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.59).

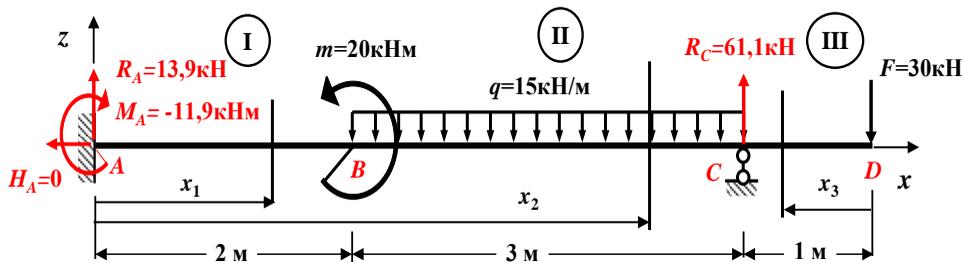


Рис. 1.59. Расчетная схема балки

**I участок АВ:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$ ; (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = +R_A = +13,9 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$Q(0) = +R_A = +13,9 \text{ кН}$ ; (значение на левой границе участка);

$Q(2\text{м}) = +R_A = +13,9 \text{ кН}$ ; (значение на правой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = M_A + R_A \cdot x_1 = -11,9 + 13,9 \cdot x_1;$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$M(0) = -11,9 \text{ кНм}$ ; (значение на левой границе участка);

$M(2\text{м}) = -11,9 + 13,9 \cdot 2 = +15,9 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

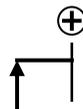
**II участок ВС:**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м}$ ; (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на этом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = R_A - q \cdot (x_2 - 2) = 13,9 - 15 \cdot (x_2 - 2) = 43,9 - 15 \cdot x_2;$$

Поперечная сила  $Q$  на этом участке является линейной функцией координаты  $x_2$ .



Для построения его графика определяем значение поперечной силы на границах участка

$Q(2\text{м}) = 43,9 - 30 = + 13,9 \text{ кН}$ ; (значение на левой границе участка);

$Q(5\text{м}) = 43,9 - 15 \cdot 5 = - 31,1 \text{ кН}$ ; (значение на правой границе участка).

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату, при которой она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = 43,9 - 15 \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{43,9}{15} = 2,93 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 2,93 \text{ м.}}$$

**2,93 м.**

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = M_A + R_A x_2 - m - q(x_2 - 2) \frac{(x_2 - 2)}{2} = -11,9 + 13,9 x_2 - 20 - 15 \frac{(x_2 - 2)^2}{2} = -31,9 + 13,9 \cdot x_2 - 7,5 \cdot (x_2 - 2)^2;$$

Изгибающий момент  $M$  на этом участке является квадратичной функцией координаты  $x_2$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 2,93 \text{ м}$

$M(2\text{м}) = - 31,9 + 13,9 \cdot 2 - 7,5 \cdot (2 - 2)^2 = + 4,1 \text{ кНм}$ ; (значение на левой границе участка);

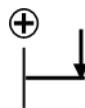
$M_{\text{экстр.}} = M(2,93\text{м}) = -31,9 + 13,9 \cdot 2,93 - 7,5 \cdot (2,93 - 2)^2 = + 2,34 \text{ кНм}$ ; (значение в сечении  $x_0 = 2,93 \text{ м}$ );

$M(5\text{м}) = - 31,9 + 13,9 \cdot 5 - 7,5 \cdot (5 - 2)^2 = - 29,9 \text{ кНм} \approx - 30 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

**III участок DC:**  $0 \leq x_3 \leq 1\text{м}$  (начало отсчета на правом конце).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис. 1. 59), с учетом правила



знаков

$$Q(x_3) = + F = + 30 \text{ кН};$$

Поперечная сила  $Q$  на третьем участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$Q(0) = + F = + 30 \text{ кН};$  (значение на правой границе участка);

$Q(1\text{м}) = + F = + 30 \text{ кН};$  (значение на левой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на этом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков 

$$M(x_3) = - F \cdot x_3 = - 30 \cdot x_3;$$

Изгибающий момент  $M$  на третьем участке является линейной функцией координаты  $x_3$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$M(0) = 0 \text{ кНм};$  (значение на правой границе участка);

$M(1\text{м}) = - 30 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка).

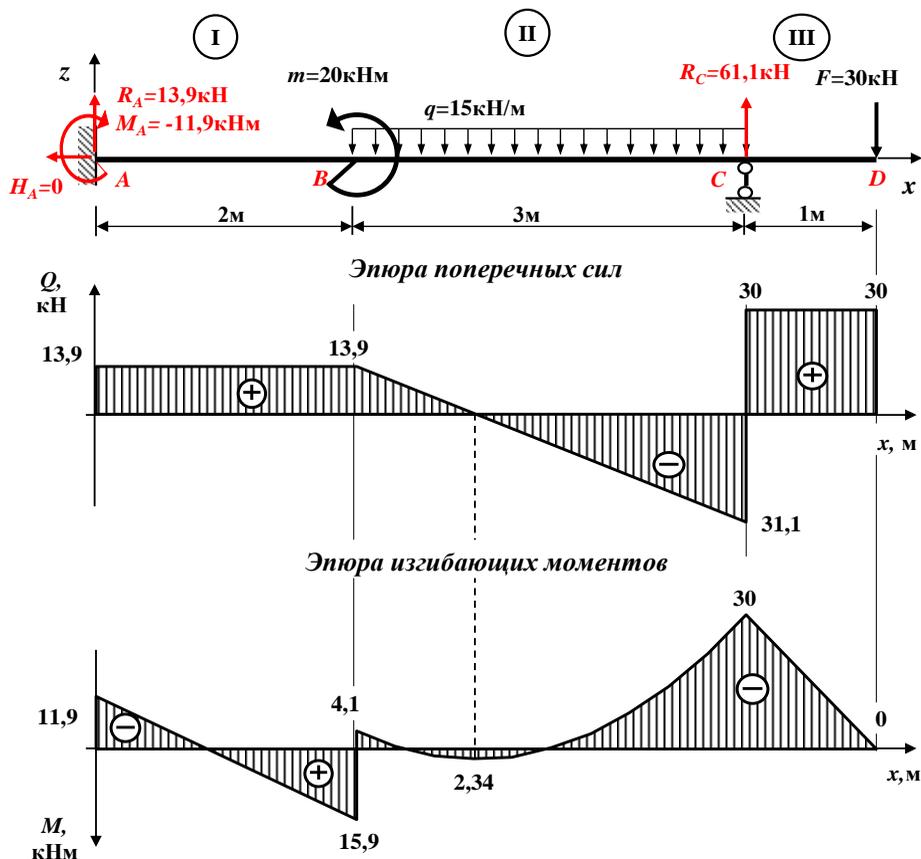
Используя полученные численные значения  $Q$  и  $M$ , строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 1.60).

*В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, то есть положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.*

### Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо.*

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз, имеется «скачок» вниз.



**Рис. 1.60. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$**

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих

моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = \text{const}$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{\text{экстр}}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).
- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.
- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = \text{const}$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### Подбор прямоугольного сечения деревянной балки по методу допускаемых напряжений

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле:

$\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;  
 $M_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение, проходящее через опору  $C$ , рис. 1.60)

$$M_{\max} = 30 \text{ кНм} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Из условия прочности определяем величину требуемого

момента сопротивления

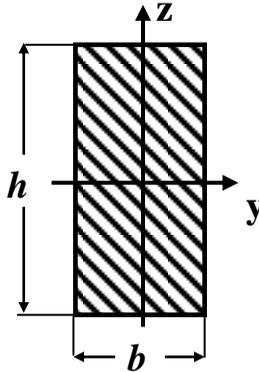
$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{12 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \text{ см}^3$$

$$= 2500 \text{ см}^3.$$

Размеры поперечного сечения балки подбираются из условия

$$W_y \approx W_y^{\text{треб}}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения (рис. 1.61) момент сопротивления вычисляется по формуле (см. справочные таблицы)



**Рис. 1.61.**

$$W_y = \frac{bh^2}{6}.$$

Используя заданное в условии задачи соотношение

$$\beta = h/b = 2,5,$$

выражаем момент сопротивления через один из размеров, например через **b**, то есть ( **$h = 2,5 \cdot b$** )

$$W_y = \frac{b \cdot (2,5b)^2}{6} = 1,04b^3$$

Приравнивая  $W_y = W_y^{\text{треб}}$ , получаем

$$1,04b^3 \geq 2500 \text{ см}^3$$

Из полученного соотношения определяем размер **b**

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2500 \text{ см}^3}{1,04}} = 13,39 \text{ см} \approx 13,4 \text{ см.}$$

Размеры сечений деревянных элементов, согласно требованиям технологии, округляются до размера, кратного 0,5 см.

Принимаем  **$b = 13,5 \text{ см}$** . Тогда  $h = 2,5 \cdot b = 2,5 \cdot 13,5 \text{ см} \approx 33,8 \text{ см}$ . Принимаем

**$h = 34,0 \text{ см}$** .

С учетом технологических требований принимаем балку прямоугольного поперечного сечения размером  **$b \times h = 13,5 \times 34,0 \text{ см}$** .

### Проверка прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

С этой целью определяем фактический момент сопротивления

$$W_y^{\text{факт}} = \frac{b h^2}{6} = \frac{13,5 \text{ см} (34,0 \text{ см})^2}{6} = 2600 \text{ см}^3 = 2600 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Вычисляем максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y^{\text{факт}}} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{2600 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 11,5 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 11,5 \text{ МПа} < [\sigma] =$$

12 МПа.

Условие прочности по методу допускаемых нормальных напряжений выполняется.

Проверяем выполнение условия экономичности

$$\varepsilon = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{12 - 11,5}{12} \cdot 100 \% = 4,17 \% < 5 \%$$

Условие экономичности выполняется.

Условия прочности и экономичности выполняются, принимаем окончательно балку прямоугольного поперечного сечения  **$b \times h = 13,5 \times 34,0 \text{ см}$** .

### Проверка прочности подобранного сечения балки по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений

Максимальные касательные напряжения возникают в *опасном* сечении балки в *опасных* точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (ось  $y$ ).

Для прямоугольного поперечного сечения балки максимальные касательные напряжения вычисляется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{\max}}{2 A},$$

где

$\tau_{\max}$  – максимальное касательное напряжение;

$Q_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = b \cdot h$  – площадь поперечного сечения балки.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений для прямоугольного сечения балки имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{\max}}{2 bh} \leq [\tau].$$

Здесь

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

В опасном сечении балки по касательным напряжениям

$Q_{\max} = 31,1 \text{ кН} = 31,1 \cdot 10^{-3} \text{ МН}$  (опасное сечение расположено на бесконечно малом расстоянии слева от сечения  $C$ , рис. 1.60).

При принятых размерах поперечного сечения балки  $b = 13,5 \text{ см}$  и  $h = 34,0 \text{ см}$

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot 31,1 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 13,5 \cdot 34,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 1,02 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 1,02 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа}.$$

Условие прочности и по касательным напряжениям выполняется.

В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.

### Вычисление численных значений прогибов оси в характерных сечениях участков балки

Подставляя численные значения  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $q$ ,  $m$  и  $R_C$  в уравнение метода начальных параметров для определения прогибов для нашей задачи (5), получаем окончательное выражение для прогибов оси балки:

**I участок АВ:**  $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$ ; **II участок ВС:**  $2 \text{ м} \leq x_2 \leq 5 \text{ м}$ ;

**III участок CD:**  $5\text{ м} \leq x_2 \leq 6\text{ м}$

$$w(x) = \frac{1\text{кНм}^3}{EJ_y} \cdot \left[ \frac{-11,9x^2}{2} + \frac{13,9x^3}{6} \Big|_I - \frac{20(x-2)^2}{2} - \frac{15(x-2)^4}{24} \Big|_{II} + \frac{61,1(x-5)^3}{6} + \frac{15(x-5)^4}{24} \Big|_{III} \right]. \quad (8)$$

**Определение жесткости поперечного сечения балки ( $E \cdot J_y$ ) при изгибе**

Модуль упругости для дерева (модуль Юнга) равен

$$E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^7 \text{ КПа} = 1 \cdot 10^7 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Момент инерции прямоугольного поперечного сечения балки размером

**$b \times h = 13,5 \times 34,0 \text{ см}$**  относительно главной оси  **$y$**  равен

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{13,5 \cdot 34,0^3}{12} \approx 44200 \text{ см}^4 \approx 44200 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Поэтому жесткость поперечного сечения балки ( $EJ_y$ ) при изгибе будет равна

$$EJ_y = 1 \cdot 10^7 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 44200 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 4420 \text{ кНм}^2.$$

**Определение численных значений прогибов в характерных точках участков балки**

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м};$

$$w(0) = w_A = 0 \text{ м};$$

$$w(2\text{ м}) = \frac{1\text{кНм}^3}{EJ_y} \left[ \frac{-11,9 \cdot 2^2}{2} + \frac{13,9 \cdot 2^3}{6} \right] = \frac{-5,3\text{кНм}^3}{EJ_y} = \frac{-5,3\text{кНм}^3}{4420\text{кНм}^2} = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

**II участок BC:**  $2\text{ м} \leq x_2 \leq 5\text{ м};$

$$w(2\text{ м}) = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$w(5\text{ м}) = w_C = 0 \text{ м}.$$

Определяем значения прогиба посередине участка балки ( $x = 3, 5\text{ м}$ )

$$w(3,5\text{м}) = \frac{1\text{кНм}^3}{EJ_y} \cdot \left[ \frac{-11,9 \cdot 3,5^2}{2} + \frac{13,9 \cdot 3,5^3}{6} - \frac{20 \cdot (3,5-2)^2}{2} - \frac{15 \cdot (3,5-2)^4}{24} \right] =$$

$$+ \frac{0,74\text{кНм}^3}{EJ_y} = + \frac{0,74\text{кНм}^3}{4420\text{кНм}^2} = + 0,167 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

**III участок CD:**  $5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}$

$$w(5\text{м}) = w_C = 0 \text{ м.}$$

$$w(6\text{м}) = \frac{1\text{кНм}^3}{EJ_y} \cdot \left[ \frac{-11,9 \cdot 6^2}{2} + \frac{13,9 \cdot 6^3}{6} - \frac{20 \cdot (6-2)^2}{2} - \frac{15 \cdot (6-2)^4}{24} + \frac{61,1 \cdot (6-5)^2}{6} + \frac{15 \cdot (6-5)^4}{24} \right] = = \frac{-23\text{кНм}^3}{EJ_y}$$

$$= \frac{-23\text{кНм}^3}{4420\text{кНм}^2} = - 5,20 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

### Построение эпюры прогибов (изогнутой оси балки)

Используя правила проверки правильности построения эпюр  $M$  и  $w$ , а также полученные численные значения прогибов в характерных точках участков, строим в масштабе эпюру прогибов, т.е. показываем характер изогнутой оси балки с указанием точек перегиба (т.п.), рис. 1.62.

### Правила проверки правильности построения эпюр $Q$ , $M$ , $\varphi$ и $w$

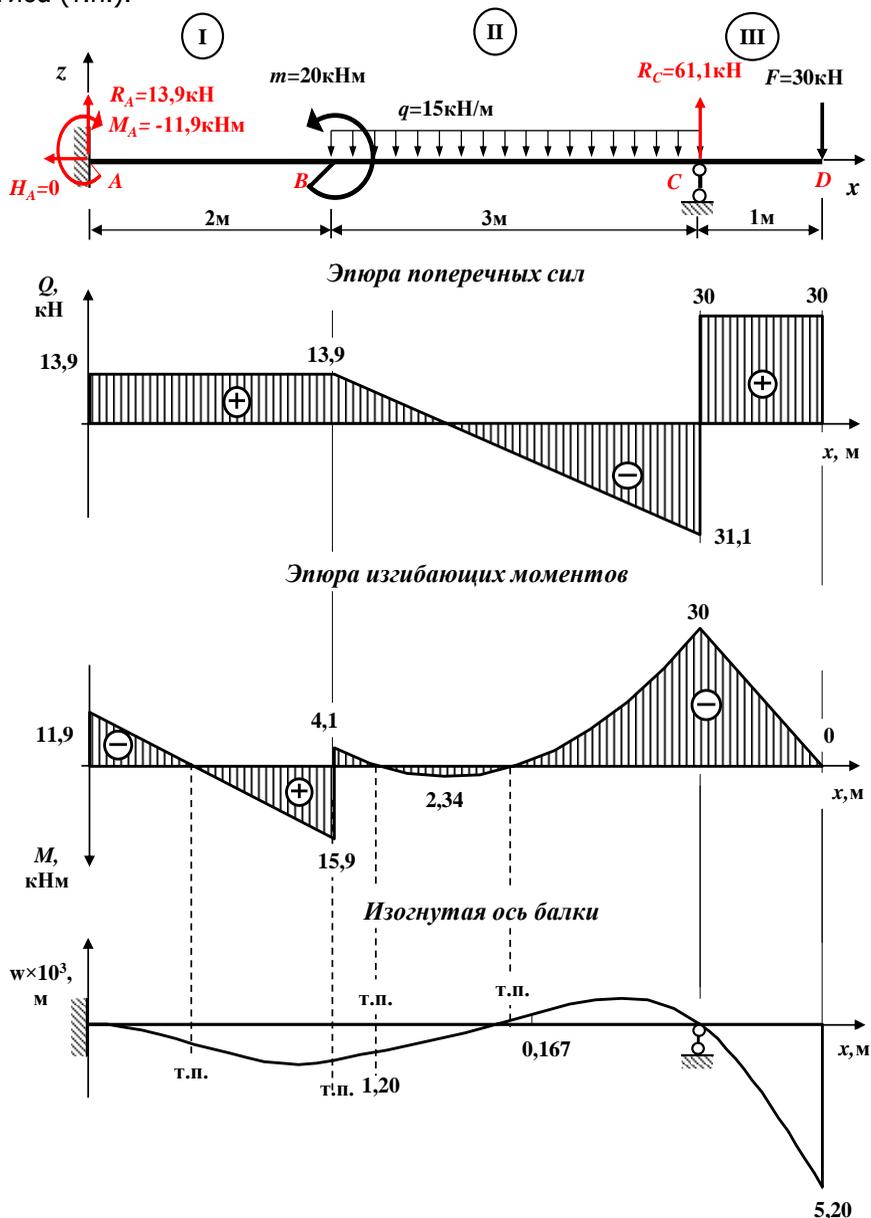
Из теории изгиба балок известно, что величины  $M$  и  $w$  связаны между собой дифференциальной зависимостью

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_y}.$$

На основании этой зависимости производятся проверки правильности построенной эпюры прогибов (изогнутой оси балки):

1. Если изгибающий момент на каком-то участке балки положительный ( $M > 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вниз.
2. Если изгибающий момент на каком-то участке балки отрицательный ( $M < 0$ ), то эпюра прогибов на этом участке представляет собой кривую, выпуклую вверх.
3. Если изгибающий момент в каком-то сечении балки равен нулю ( $M = 0$ ) (при смене знака) или имеет скачок (при смене зна-

ка), то на эпюре прогибов в этом сечении наблюдаем точку перегиба (т.п.).



**Рис. 1.62. Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и прогибов**

### Проверка выполнения условия жесткости балки

Наибольший прогиб балки называется стрелой прогиба и обозначается буквой  $f$ .

Условие жесткости балки при изгибе имеет вид

$$f \leq [f]$$

Здесь

$[f]$  – величина допускаемого прогиба.

По эпюре прогибов приближенно определяем максимальное по абсолютной величине значение прогиба  $w_{max}$  (сечение  $D$ , рис. 1.62)

$$|w_{max}| = f = 5,20 \cdot 10^{-3} \text{ м} = \frac{23,0 \text{ кНм}^2}{EI_y}$$

Величина допускаемого прогиба (по условию задачи)

$$[f] = \frac{L}{150},$$

где

$L$  – длина пролета балки (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

В нашей задаче максимальное по абсолютной величине значение прогиба возникает в сечении  $D$ , в конце консоли, следовательно,

$$L = 2c = 2 \cdot 1 \text{ м} = 2 \text{ м}.$$

Величина допускаемого прогиба для нашей задачи равна

$$[f] = \frac{L}{150} = \frac{2\text{м}}{150} = 0,0133 \text{ м} = 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Следовательно,

$$|w_{max}| = f = 5,20 \cdot 10^{-3} \text{ м} \leq [f] = 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Условие жесткости выполняется.

В противном случае, из условия жесткости  $f \leq [f]$  необходимо определить величину  $I_y^{треб}$  и подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «РАСЧЕТ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ НА ЖЕСТКОСТЬ»

1. Какой вид деформации называется чистым изгибом?
2. Какой вид деформации называется плоским поперечным изгибом?
3. Назовите гипотезы, которые принимаются для вывода формул нормальных напряжений при чистом плоском изгибе.
4. Как определяется опасное сечение по нормальным напряжениям?

5. Какая формула для определения нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения.

6. Как определяются опасные точки поперечного сечения по нормальным напряжениям?

7. Какие гипотезы используются при выводе формулы касательных напряжений при изгибе?

8. Напишите формулу Д.И. Журавского для определения касательных напряжений при изгибе.

9. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях балки прямоугольной формы?

10. Напишите условие прочности по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений при плоском изгибе.

11. Напишите условие прочности по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений при плоском изгибе.

12. Какие перемещения получают поперечные сечения балок при плоском изгибе?

13. Что называется упругой линией (изогнутой осью) балки?

14. Что называется прогибом балки?

15. Что называется углом поворота поперечного сечения балки?

16. Запишите дифференциальную зависимость между прогибом и углом поворота сечений балки.

17. Напишите приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

18. Что называется жесткостью балки?

19. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления прогибов по методу начальных параметров.

20. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления углов поворота сечений по методу начальных параметров.

21. Из каких условий определяются неизвестные начальные параметры балки?

22. Назовите основные правила контроля правильности построенных эпюр  $\varphi$  и  $w$ .

23. Дайте определение статически неопределимой системы?

24. Как устанавливается степень статической неопределимости балки?

25. План расчета статически неопределимой системы?

26. Какие основные преимущества статически

неопределимых балок перед статически определимыми?

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014.

2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011.

3. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011.

4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.

5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – СПб.: Лань, 2005.

6. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть I): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на-Дону: ИЦ ДГТУ, 2018.

7. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть II): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на-Дону: ИЦ ДГТУ, 2018.

8. Еремин В.Д., Стрельников Г.П. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Построение эпюр внутренних силовых факторов в балках и плоских рамах. – Ростов-на-Дону: ИЦ ДГТУ, 2019.

9. Копнов В.А., Кривошапка С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.