ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Практикум

по выполнению расчетно-графической работы и проведению практических занятий на тему «Расчет пластин на изгиб методом Бубнова-Галеркина» по дисциплине

«Теория расчета пластин и оболочек»

Авторы
Языев Б. М.,
Демченко Д. Б.,
Маяцкая И. А.,
Чепурненко А. С.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Практикум содержит основные теоретические положения, пример выполнения и контрольные вопросы к расчетно-графической работе на тему «Расчет пластин на изгиб методом Бубнова-Галеркина».

Практикум предназначен для студентов, изучающих курс «Теория расчета пластин и оболочек», всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01 – Строительство и специальности 08.05.01 – Строительство уникальных зданий и сооружений.

Авторы

д.т.н., профессор Язьев Б.М.,
к.т.н., доцент Демченко Д.Б.,
к.т.н., доцент Маяцкая И.А.,
к.т.н., доцент Чепурненко А.С.

Оглавление

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Введение

Пластинами называются тела цилиндрической или призматической формы, у которых один из размеров (толщина) мал по сравнению с двумя другими.

По очертанию основания пластины делятся на прямоугольные, круглые, эллиптические пластины и т.д.

Пластины в настоящее время нашли широкое применение в различных областях техники – строительстве, авиации, судостроении, машиностроении и т.д. Это объясняется тем, что присущее тонкостенным конструкциям легкость и рациональность форм сочетаются с их высокой несущей способностью, экономичностью и хорошей технологичностью.

Плоскость, которая делит толщину пластины пополам, называется срединной плоскостью. В теории изгиба пластин срединная плоскость играет такую же важную роль, как нейтральный слой в сопротивлении материалов при изгибе балок. Линию, ограничивающую срединную плоскость пластины по боковым поверхностям, называют *контурной линией*.

В зависимости от характера действующих нагрузок различают пластины, работающие на изгиб при поперечной нагрузке и на растяжение-сжатие при нагрузке, действующей в ее срединной плоскости.

Условимся оси x и y располагать в срединной плоскости пластины, а ось z направлять вниз. Соответственно, основные компоненты перемещения точек срединной поверхности – вертикальные прогибы – будем обозначать через w.

При изгибе срединная плоскость превращается в слегка искривленную поверхность, которую называют *срединной поверхностью изогнутой пластины*.

Толщина пластины оказывает на ее свойства при изгибе значительно бо'льшее влияние, чем другие ее размеры. Различают три типа пластин в зависимости от отношения *a/h* - характерного размера в плане к толщине *(a<b)*:

Первый тип – *толстые плас*тины (плиты), имеющие отношение $a/h \le (8 \div 10)$. Расчет таких пластин (плит) ведется с учетом всех компонентов напряженного состояния (как массивных тел) с помощью общих уравнений пространственной задачи теории упругости.

Второй тип, когда отношение $a/h \ge (80 \div 100)$ и пластина превращается в *мембрану,* которая может работать только при достаточно закрепленных краях на контуре. Ее сопротивление на изгиб оказывается ничтожно малым и основную роль в восприятии поперечной нагрузки играют усилия растяжения (а также сдвига) в срединной поверхности пластины. Эти усилия, называемые мембранными (цепными), создают проекцию на вертикальную ось *z* и тем самым уравновешивают поперечную нагрузку, приложенную к каждому элементу пластины.

Самый обширный промежуточный тип пластин – это так называемые *тонкие пластины* $(8 \div 10) < a/h < (80 \div 100)$. В зависимости от величины отношения *w/h* максимального прогиба пластины к ее толщине роль изгибных и мембранных усилий может быть различной. Поэтому этот вид пластин делится на два класса: жесткие и гибкие пластины.

Если у данной тонкой пластины $w/h \le 0{,}2$, то при таких малых прогибах основную роль играют изгибные силовые факторы (деформациями в срединной поверхности и мембранными усилиями можно пренебречь). Такая пластина относится к классу *жестких пластин*.

Если $0{,}2 < w/h \le 5$, то пластина одновременно работает и на изгиб, и как мембрана. Значимость этих факторов становится одного порядка, причем с ростом прогибов, роль растяжения срединной поверхности пластины возрастает. Такая пластина называется *гибкой*. Например, железобетонные плиты обычно бывают жесткими пластинами, а тонкие стальные листы в зависимости от нагрузки могут работать и как жесткие, и как гибкие. Здесь есть *аналогия со стержнем*, который, будучи достаточно тонким при закрепленных концах, работает как балка, а при больших прогибах начинает работать как нить на растяжение.

Если $w/h > 5$, то такие пластины называются абсолютно гибкими пластинами, или мембранами. В абсолютно гибкой пластине при исследовании упругих деформаций можно пренебречь собственно изгибными напряжениями по сравнению с напряжениями в срединной поверхности.

Из русских ученых, труды которых были основополагающими в области плоской задачи теории упругости, особое значение имеют работы Ивана Григорьевича Бубнова (1872-1919 гг.) (Теория пластинок с цепными напряжениями) и Бориса Григорьевича Галеркина (1871-1945 гг.) (Приближенные методы решения статических задач о расчете пластинок).

Благодаря введению определенных гипотез теория расчета тонких жестких пластин довольно проста и сводится к линейным дифференциальным уравнениям.

Деформации гибких тонких пластин (а также мембран и оболочек) описываются системой нелинейных уравнений, что существенно усложняет задачу по определению их напряженного и деформированного состояний.

Рассматриваются случаи, когда пластина нагружена только силами перпендикулярными ее срединной плоскости.

При исследовании будем считать, что система осей координат неподвижна и не перемещается вместе с пластиной при ее деформации.

1.2. Метод Бубнова - Галеркина

Решение задач теории упругости сводится к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных с заданными граничными условиями. Точного решения многих важных для практики задач нет, так как решение дифференциальных уравнений представляет собой большие математические трудности.

В связи с этим, большое значение приобрели вариационные методы решения задач, основанные на вариационных принципах теории упругости.

Вариационными принципами теории упругости называются некоторые основные теоремы, выраженные в форме интегральных равенств, которые связывают между собой перемещения, деформации и напряжения во всем объеме тела, и основанные на свойствах работы упругих сил.

Вариационные принципы представляют практический интерес, так как на них основаны вариационные методы, позволяющие находить приближенные и достаточно эффективные решения задач в тех случаях, когда классический путь интегрирования основных уравнений теории упругости невозможен или затруднителен. Следовательно, сущность вариационных методов заключается в сведении решения одного или нескольких дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы линейных алгебраических уравнений или обыкновенного дифференциального уравнения.

Многие из вариационных методов основаны на вариационных принципах: *принципе минимума энергии* и *принципе возможных перемещений*. Оба эти принципа устанавливают необходимые условия, при которых система «тело – нагрузка» находится в равновесии. Согласно принципу минимума энергии полная потенциальная энергия системы, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, *минимальна*. Принцип возможных перемещений утверждает, что если система находится в равновесии, то сумма работ всех сил на возможных перемещениях равна нулю. Под возможным перемещением (виртуальным перемещением) понимается сколь угодно малое отклонение системы от заданного положения, допускаемое наложенными связями.

Одним из методов приближенного решения дифференциальных уравнений является метод Бубнова-Галеркина. Метод Бубнова-Галеркина основан на свойстве *ортогональных функций*.

Применим этот метод к решению уравнения Софии-Жермен

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D}.\to D\nabla^4 w-q=0 . \qquad (1.1)$$

Искомая функция прогиба $w(x,y)$ должна удовлетворять этому уравнению, а также граничным условиям на краях пластины. Согласно этому методу, функция прогибов $w(x,y)$ заменяется ее приближенным значением в виде двойного ряда

$$w_{mn}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\varphi_{ij}(x,y) , \qquad (1.2)$$

или

$$w_{mn}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_i(x)Y_j(y),\qquad(1.3)$$

где C_{ij} – постоянные параметры, подлежащие определению; $\varphi_{ij}(x,y), X_i(x), Y_j(y)$ – функции, которые выбираются так, чтобы удовлетворять геометрическим и статическим условиям задачи.

Эти функции называются *базисными* или *координатными* функциями. Кроме того, для этих функций должны существовать производные порядка, не меньше, чем порядок рассматриваемого дифференциального уравнения. Например, функция $X_i(x)$ в уравнении (1.3) не может быть равной x^3, так как в этом случае для нее не существует четвертой производной, не равной нулю.

Таким образом, метод Бубнова-Галеркина позволяет получить не числовое (например, по методу конечных разностей), а аналитическое приближенное решение краевой задачи для данного дифференциального уравнения. При подстановке выражения (1.3) в дифференциальное уравнение (1.1) левая часть уравнения не обращается в нуль, а превращается в некоторую функцию от x, y C_{11}, C_{12}, C_{21}, ... В результате получаем:

$$F_z(x,y,C_{11},C_{12,}C_{21},.....)=D\nabla^4 w_{mn}-q\neq 0.\qquad(1.4)$$

Эту функцию – ошибку можно представить как некоторую неуравновешенную проекцию F_z на ось *z* всех внешних и внутренних сил, действующих не бесконечно малый элемент пластины.

Для того, чтобы выбранная функция w_{mn} мало отличалась от искомой функции прогибов $w(x,y)$, необходимо подобрать параметры *C11, C12, C21, ...* так, чтобы сила F_z как можно меньше отличалась от нуля. Для этого, согласно вариационному принципу возможных перемещений, необходимо, чтобы работа силы F_z (1.4) на возможных перемещениях срединной плоскости равнялась нулю. Аналогами возможных перемещений по направлению оси *z* являются перемещения, определяемые базисными функциями $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots..$

Таким образом, чтобы пластина находилась в равновесии, необходимо в каждой точке пластины потребовать равенства нулю суммы элементарных работ всех приложенных к ней сил на возможных перемещениях, то есть приравнять нулю следующий интеграл по площади *S* пластины

$$\iint_S F_z X_i(x) Y_j(y)\, dxdy = 0 .$$

Подставляя в интеграл выражение (1.4) для неуравновешенной силы F_z, получаем интегральное выражение, согласно которому дискретная система точек пластины будет находиться в равновесии

$$\iint_S \left(D\nabla^4 w_{mn} - q\right) X_i(x) Y_j(y)\, dxdy = 0. \to$$
$$\iint_S \left[D\left(\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4}\right) - q\right] X_i(x) Y_j(y)\, dxdy = 0, \qquad (1.5)$$

где $i = 1,2,3,\ldots,m; \quad j = 1,2,3,\ldots.,n$.

Уравнение (1.5) называется уравнением Бубнова-Галеркина.

Полученное интегральное уравнение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров C_{ij}.

Так, для значений *m=n=2* получим, с учетом (1.3), систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}

$$\begin{gathered}
\iint_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right) - q\right]X_1Y_1dxdy = 0; \\
\iint_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right) - q\right]X_1Y_2dxdy = 0; \\
\iint_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right) - q\right]X_2Y_1dxdy = 0; \\
\iint_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right) - q\right]X_2Y_2dxdy = 0;
\end{gathered} \qquad (1.6)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений приводит к определению величин параметров C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} и получению окончательного выражения для вычисления функции w_{mn}. Чем больше коэффициентов C_{ij} будет учтено в выражении (1.3), тем точнее функция w_{mn} аппроксимирует искомую функцию прогибов $w(x, y)$.

Если в выражении (1.3) учитывать только один член ряда, то вместо системы уравнений будет одно уравнение

$$C_{11}D\iint_S \left(X_1^{IV}Y_1 + 2X_1^{II}Y_1^{II} + X_1Y_1^{IV}\right)X_1Y_1dxdy = q\iint_S X_1Y_1dxdy + \sum_{k=1}^{K} F_kX_1\left(x_{F_k}\right)Y_1\left(y_{F_k}\right), \quad (1.7)$$

где x_{F_k}, y_{F_k} – координаты точки приложения сосредоточенных нормальных сил F_k, действующих на пластину.

В случае наличия сосредоточенных сил, выражение (1.6) принимает вид

$$\iint\limits_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right)\right]X_1Y_1dxdy = \\ = q\iint\limits_S qX_1Y_1dxdy + \sum_{k=1}^{K} F_kX_1\left(x_{F_k}\right)Y_1\left(y_{F_k}\right);$$

$$\iint\limits_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right)\right]X_1Y_2dxdy = \\ = q\iint\limits_S qX_1Y_2dxdy + \sum_{k=1}^{K} F_kX_1\left(x_{F_k}\right)Y_2\left(y_{F_k}\right);$$

$$\iint\limits_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right)\right]X_2Y_1dxdy = \\ = q\iint\limits_S qX_2Y_1dxdy + \sum_{k=1}^{K} F_kX_2\left(x_{F_k}\right)Y_1\left(y_{F_k}\right);$$

$$\iint\limits_S \left[D\nabla^4\left(C_{11}X_1Y_1 + C_{12}X_1Y_2 + C_{21}X_2Y_1 + C_{22}X_2Y_2\right)\right]X_2Y_2dxdy = \\ = q\iint\limits_S qX_2Y_2dxdy + \sum_{k=1}^{K} F_kX_2\left(x_{F_k}\right)Y_2\left(y_{F_k}\right). \qquad (1.8)$$

Таким образом, метод Бубнова-Галеркина позволяет учесть действие сосредоточенных сил F_k, что невозможно при работе с дифференциальным уравнением.

Запишем уравнение (1.7) в более удобном для вычислений виде

$$C_{11}D\left(\int_0^a X_1^{IV}X_1dx\int_0^b Y_1Y_1dy + 2\int_0^a X_1^{II}X_1dx\int_0^b Y_1^{II}Y_1dy + \int_0^a X_1X_1dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_1dy\right) = \\ = q\int_0^a X_1dx\int_0^b Y_1dy + \sum_{k=1}^{K} F_kX_1\left(x_{F_k}\right)Y_1\left(y_{F_k}\right).$$

Здесь

a и *b* – размеры пластины по осям координат *x* и *y*, соответственно.

Из этого уравнения определяется параметр *C* по формуле

$$C_{11} = \frac{\Delta_1}{\alpha_1}, \qquad (1.9)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{q}{D}\int_0^a X_1 dx \int_0^b Y_1 dy + \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{K} F_k X_1\left(x_{F_k}\right) Y_1\left(y_{F_k}\right); \qquad (1.10)$$

$$\alpha_1 = \left(\int_0^a X_1^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_1 Y_1 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_1 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_1 X_1 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy\right). \qquad (1.11)$$

После нахождения параметра *C*, по формуле (1.3) определяются искомые прогибы $w_{mn}(x,y)$ срединной плоскости. Затем, по известным формулам определяются все параметры напряженно деформированного состояния пластины (перемещения, деформации, напряжения) и внутренние усилия (моменты, поперечные силы).

Аналогично запишем уравнение (1.8) в более удобном для вычислений виде

$$\left[\begin{array}{l} C_{11}\left(\int_0^a X_1^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_1 Y_1 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_1 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_1 X_1 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy\right) + \\ + C_{12}\left(\int_0^a X_1^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_2 Y_1 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_1 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_1 X_1 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy\right) + \\ + C_{21}\left(\int_0^a X_2^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_1 Y_1 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_1 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_2 X_1 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy\right) + \\ + C_{22}\left(\int_0^a X_2^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_2 Y_1 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_1 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_2 X_1 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy\right) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{q}{D}\int_0^a X_1 dx \int_0^b Y_1 dy + \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{F} F_k X_1\left(x_{F_k}\right) Y_1\left(y_{F_k}\right);$$

$$
\left[\begin{array}{l}
C_{11}-\left(\int_0^a X_1^{IV}X_1dx\int_0^b Y_1Y_2dy+2\int_0^a X_1^{II}X_1dx\int_0^b Y_1^{II}Y_2dy+\int_0^a X_1X_1dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_2dy\right)+\\
+C_{12}\left(\int_0^a X_1^{IV}X_1dx\int_0^b Y_2Y_2dy+2\int_0^a X_1^{II}X_1dx\int_0^b Y_2^{II}Y_2dy+\int_0^a X_1X_1dx\int_0^b Y_2^{IV}Y_2dy\right)+\\
+C_{21}\left(\int_0^a X_2^{IV}X_1dx\int_0^b Y_1Y_2dy+2\int_0^a X_2^{II}X_1dx\int_0^b Y_1^{II}Y_2dy+\int_0^a X_2X_1dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_2dy\right)+\\
+C_{22}\left(\int_0^a X_2^{IV}X_1dx\int_0^b Y_2Y_2dy+2\int_0^a X_2^{II}X_1dx\int_0^b Y_2^{II}Y_2dy+\int_0^a X_2X_1dx\int_0^b Y_2^{IV}Y_2dy\right)
\end{array}\right]=
$$

$$
=\frac{q}{D}\int_0^a X_1dx\int_0^b Y_2dy+\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{F}F_kX_1\left(x_{F_k}\right)Y_2\left(y_{F_k}\right);
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
C_{11}\left(\int_0^a X_1^{IV}X_2dx\int_0^b Y_1Y_1dy+2\int_0^a X_1^{II}X_2dx\int_0^b Y_1^{II}Y_1dy+\int_0^a X_1X_2dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_1dy\right)+\\
+C_{12}\left(\int_0^a X_1^{IV}X_2dx\int_0^b Y_2Y_1dy+2\int_0^a X_1^{II}X_2dx\int_0^b Y_2^{II}Y_1dy+\int_0^a X_1X_2dx\int_0^b Y_2^{IV}Y_1dy\right)+\\
+C_{21}\left(\int_0^a X_2^{IV}X_2dx\int_0^b Y_1Y_1dy+2\int_0^a X_2^{II}X_2dx\int_0^b Y_1^{II}Y_1dy+\int_0^a X_2X_2dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_1dy\right)+\\
+C_{22}\left(\int_0^a X_2^{IV}X_2dx\int_0^b Y_2Y_1dy+2\int_0^a X_2^{II}X_2dx\int_0^b Y_2^{II}Y_1dy+\int_0^a X_2X_2dx\int_0^b Y_2^{IV}Y_1dy\right)
\end{array}\right]=
$$

$$
=\frac{q}{D}\int_0^a X_2dx\int_0^b Y_1dy+\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{F}F_kX_2\left(x_{F_k}\right)Y_1\left(y_{F_k}\right);
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
C_{11}\left(\int_0^a X_1^{IV}X_2dx\int_0^b Y_1Y_2dy+2\int_0^a X_1^{II}X_2dx\int_0^b Y_1^{II}Y_2dy+\int_0^a X_1X_2dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_2dy\right)+\\
+C_{12}\left(\int_0^a X_1^{IV}X_2dx\int_0^b Y_2Y_2dy+2\int_0^a X_1^{II}X_2dx\int_0^b Y_2^{II}Y_2dy+\int_0^a X_1X_2dx\int_0^b Y_2^{IV}Y_2dy\right)+\\
+C_{21}\left(\int_0^a X_2^{IV}X_2dx\int_0^b Y_1Y_2dy+2\int_0^a X_2^{II}X_2dx\int_0^b Y_1^{II}Y_2dy+\int_0^a X_2X_2dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_2dy\right)+\\
+C_{22}\left(\int_0^a X_2^{IV}X_2dx\int_0^b Y_2Y_2dy+2\int_0^a X_2^{II}X_2dx\int_0^b Y_2^{II}Y_2dy+\int_0^a X_2X_2dx\int_0^b Y_2^{IV}Y_2dy\right)
\end{array}\right]=
$$

$$
=\frac{q}{D}\int_0^a X_2dx\int_0^b Y_2dy+\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{F}F_kX_2\left(x_{F_k}\right)Y_2\left(y_{F_k}\right);
$$

Полученную систему четырех уравнений запишем в виде

$$\left.\begin{aligned}
C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 + C_{21}\alpha_3 + C_{22}\alpha_4 &= \Delta_1;\\
C_{11}\beta_1 + C_{12}\beta_2 + C_{21}\beta_3 + C_{22}\beta_4 &= \Delta_2;\\
C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{21}\gamma_3 + C_{22}\gamma_4 &= \Delta_3;\\
C_{11}\lambda_1 + C_{12}\lambda_2 + C_{21}\lambda_3 + C_{22}\lambda_4 &= \Delta_4.
\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_1 Y_1 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_1 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_1 X_1 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy\right);\\
\alpha_2 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_2 Y_1 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_1 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_1 X_1 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy\right);\\
\alpha_3 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_1 Y_1 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_1 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_2 X_1 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy\right);\\
\alpha_4 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_2 Y_1 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_1 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_2 X_1 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy\right);\\
\beta_1 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_1 Y_2 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_1 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_1 X_1 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_2 dy\right);\\
\beta_2 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_2 Y_2 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_1 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_1 X_1 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_2 dy\right);\\
\beta_3 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_1 Y_2 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_1 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_2 X_1 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_2 dy\right);\\
\beta_4 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_1 dx \int_0^b Y_2 Y_2 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_1 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_2 X_1 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_2 dy\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_1 Y_1 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_2 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_1 X_2 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy\right);\\
\gamma_2 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_2 Y_1 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_2 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_1 X_2 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy\right);\\
\gamma_3 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_1 Y_1 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_2 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_2 X_2 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy\right);\\
\gamma_4 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_2 Y_1 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_2 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy + \int_0^a X_2 X_2 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy\right);\\
\lambda_1 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_1 Y_2 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_2 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_1 X_2 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_2 dy\right);\\
\lambda_2 &= \left(\int_0^a X_1^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_2 Y_2 dy + 2\int_0^a X_1^{II} X_2 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_1 X_2 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_2 dy\right);\\
\lambda_3 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_1 Y_2 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_2 dx \int_0^b Y_1^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_2 X_2 dx \int_0^b Y_1^{IV} Y_2 dy\right);\\
\lambda_4 &= \left(\int_0^a X_2^{IV} X_2 dx \int_0^b Y_2 Y_2 dy + 2\int_0^a X_2^{II} X_2 dx \int_0^b Y_2^{II} Y_2 dy + \int_0^a X_2 X_2 dx \int_0^b Y_2^{IV} Y_2 dy\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{q}{D}\int_0^a X_1 dx \int_0^b Y_1 dy + \sum_{k=1}^{F} F_k X_1\left(x_{F_k}\right) Y_1\left(y_{F_k}\right);\\
\Delta_2 &= \frac{q}{D}\int_0^a X_1 dx \int_0^b Y_2 dy + \sum_{k=1}^{F} F_k X_1\left(x_{F_k}\right) Y_2\left(y_{F_k}\right);\\
\Delta_3 &= \frac{q}{D}\int_0^a X_2 dx \int_0^b Y_1 dy + \sum_{k=1}^{F} F_k X_2\left(x_{F_k}\right) Y_1\left(y_{F_k}\right);\\
\Delta_4 &= \frac{q}{D}\int_0^a X_2 dx \int_0^b Y_2 dy + \sum_{k=1}^{F} F_k X_2\left(x_{F_k}\right) Y_2\left(y_{F_k}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

Вычислив по формулам (1.13), (1.14) и (1.15) значения $\alpha_1,..\beta_1,..\gamma_1,..\lambda_1,..\Delta_1,..$ и решив систему уравнений (1.12), найдем значения параметров $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$.

После нахождения параметров $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$, по формуле (1.3) определяются искомые прогибы $w_{mn}(x, y)$ срединной плоскости. Затем, по известным формулам определяются все параметры напряженно деформированного состояния пластины (перемещения, деформации, напряжении, моменты, поперечные силы).

ТЕМА 2. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

При расчете прямоугольной пластины необходимо выполнить:

1. Проверить выполнение граничных условий при заданной аппроксимирующей функции.
2. Методом Бубнова-Галеркина определить величину коэффициента C_{ij}.
3. Определить величины M_x, M_y, H, Q_{zx}, Q_{zy}. Построить эпюры прогибов и внутренних усилий в сечениях по осям симметрии пластины.
4. Для опасных точек определить нормальные и касательные напряжения.

Рассмотрим пример расчета прямоугольной пластины на действие собственного веса q_γ, локальной равномерно распределенной нагрузки q_F и сосредоточенных сил *F* при *m = 1* и *n = 1*.

Схема нагружения пластины представлена на рис. 1

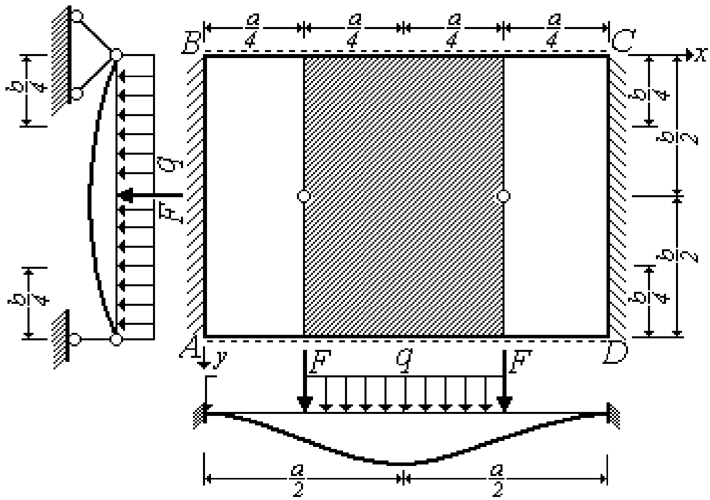

Рис. 1

Данные для расчета пластины:

$$a = 5{,}6\,м; \quad b = 3{,}2\,м;$$

$$h = 5\,см; \quad q_F = 40\,\frac{кН}{м^2};$$

$$F = 60\,кН; \quad E = 2{,}1 \cdot 10^5\ МПа;$$

$$\gamma = 78\,\frac{кН}{м^3}; \quad \mu = 0{,}3$$

.

Собственный вес пластины, приходящийся на 1м^2 поверхности, равен

$$q_\gamma = \gamma \cdot h = 78 \cdot 0{,}05 = 3{,}9\,\frac{кН}{м^2}.$$

Функция прогибов задана в виде

$$w(x,y)=C_{11}\varphi(x,y)=C_{11}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y, \qquad (2.1)$$

где

$$\varphi(x,y)=\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y$$ – базисная функция.

2.1. Проверка выполнения граничных условий

а). При *x = 0* (грань *AB*) – жесткая заделка, следовательно

$$w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

б). При *x = a* (грань *CD*) – жесткая заделка, следовательно

$$w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

в). При *y = 0* (грань *BC*) – шарнирное опирание, следовательно

$$w=0; \quad M_y=0$$

г). При *y = b* (грань *AD*) – шарнирное опирание, следовательно

$$w=0; \quad M_y=0$$

При *y = 0* и *y = b* (грани *BC* и *AD*) пластина шарнирно закреплена.

Статическое граничное условие имеет вид

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0.$$

Так как шарнирные опоры считаются жесткими (прогибы в направлении оси *y* равны нулю), то из граничного условия $M_y = 0$ следует, что $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Подставим уравнения граней пластины в заданную функцию прогибов (2.1).

Грань *AB* (*x = 0*):

$$w(0, y) = C_{11}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{a}0\right)\sin\frac{\pi}{b}y \cdot = (1-1)\sin\frac{\pi}{b}y = 0$$

Грань *BC* (*y = 0*):

$$w(x,0) = C_{11}\cdot\left(1 - \cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}\cdot 0 \cdot = C\cdot\left(1 - \cos\frac{2i\pi}{a}x\right)\cdot 0 = 0$$

Грань *CD* (*x = a*):

$$w(a, y) = C_{11}\cdot\left(1 - \cos\frac{2\pi}{a}a\right)\cdot\sin\frac{\pi}{b}y = C(1-1)\sin\frac{\pi}{b}y = 0$$

Грань *AD* (*y = b*):

$$w(x, b) = C_{11}\cdot\left(1 - \cos\frac{2\pi}{a}x\right)\cdot\sin\frac{\pi}{b}b = C\cdot\left(1 - \cos\frac{2\pi}{a}x\right)\cdot 0 = 0.$$

Таким образом, на контуре пластины прогибы равны нулю, следовательно, кромки пластины либо защемлены, либо шарнирно оперты.

Первые производные заданной базисной функции имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2\pi}{a}\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\pi}{b}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\frac{\pi}{b}y.$$

При $x = 0$ (грань AB):

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)=C_{11}\frac{2\pi}{a}\sin\frac{2\pi}{a}\cdot 0\sin\frac{\pi}{b}y=0$$

При $x = a$ (грань CD):

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a,y)=C_{11}\frac{2\pi}{a}\sin\frac{2\pi}{a}\cdot a\sin\frac{\pi}{b}y=C_{11}\frac{2\pi}{a}\sin(2\pi)\sin\frac{\pi}{b}y=0,$$

то есть углы поворота на гранях, параллельных оси y, между касательной к срединной поверхности и осью x равны нулю. Следовательно, грани AB и CD защемлены (жесткая заделка).

Вторая производная по переменной x от заданной базисной функции

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\cos\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y.$$

Вторая производная по переменной y от заданной базисной функции

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y$$

При $y = 0$ (грань BC):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,0) = -C_{11}\cdot\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}\cdot 0 = 0,$$

а при $y = b$ (грань *AD*):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,b) = -C_{11}\cdot\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}\cdot b = 0,$$

то есть грани пластины *BC* и *AD* шарнирно оперты.

Таким образом, заданная функция прогибов удовлетворяет всем граничным условиям на контуре пластины.

2.2. Определение коэффициента C_{11}

Найдем четвертые производные от базисной функции

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4\cos\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y;\quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^4\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y.$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\cos\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y.$$

Базисную функцию и ее производные запишем в следующем виде:

$$X = \left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right);\quad X^{II} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\cos\frac{2\pi}{a}x;\quad X^{IV} = -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4\cos\frac{2\pi}{a}x;$$

$$Y = \sin\frac{\pi}{b}y;\quad Y^{II} = -\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\sin\frac{\pi}{b}y;\quad Y^{IV} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^4\sin\frac{\pi}{b}y;$$

Так как в уравнении (1.3) учитывается только один член ряда, то коэффициент C_{11} определим по формуле (1.9)

$$C_{11} = \frac{\Delta_1}{\alpha_1}, \qquad (2.2)$$

Определим величину Δ_1 (1.10)

$$\Delta_1 = \frac{q}{D}\int_0^a X_1 dx \int_0^b Y_1 dy + \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{K} F_k X_1\left(x_{F_k}\right) Y_1\left(y_{F_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{D}\left[q_F \int_{a/4}^{3a/4} X_1 dx \int_0^b Y_1 dy + q_\gamma \int_0^a X_1 dx \int_0^b Y_1 dy\right] + \frac{F}{D}\left[X_1\left(\frac{a}{4}\right) Y_1\left(\frac{b}{2}\right) + X_1\left(\frac{3a}{4}\right) Y_1\left(\frac{b}{2}\right)\right].$$

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)} = \frac{2{,}1\cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 5^3 \cdot 10^{-6}}{12\left(1-0{,}3^2\right)} \approx 2404 \text{кНм}.$$

$$q_F \int_{a/4}^{3a/4} X_1 dx \int_0^b Y_1 dy = q_F \int_{a/4}^{3a/4}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)dx \int_0^b \sin\frac{\pi}{b} y dy.$$

По таблице интегралов находим

$$\int_{a/4}^{3a/4}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)dx = \left.\left(x - \frac{a}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{a}x\right)\right|_{a/4}^{3a/4} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2\pi}\left(\sin 3\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi};$$

$$\int_0^a \left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)dx = \left.\left(x - \frac{a}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{a}x\right)\right|_0^a = (a-0) - \frac{a}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{a}\cdot a - \sin\frac{2\pi}{a}\cdot 0\right) = a;$$

$$\int_0^b \sin\frac{\pi}{b} y dy = \left.-\frac{b}{\pi}\cos\frac{\pi}{b} y\right|_0^b = -\frac{b}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{b}\cdot b - \cos\frac{\pi}{b}\cdot 0\right) = \frac{2b}{\pi};$$

$$X\left(\frac{a}{4}\right)Y\left(\frac{b}{2}\right)+X\left(\frac{3a}{4}\right)Y\left(\frac{b}{2}\right)=\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{4}\right)\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}+\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\frac{3a}{4}\right)\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=$$
$$=\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}+\left(1-\cos\frac{3\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}=2.$$

При заданных значениях *a* и *b*, получаем

$$\Delta_1=\frac{1}{D}\left[q_F\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{\pi}\right)\frac{2b}{\pi}+q_\gamma a\frac{2b}{\pi}+2F\right]=\frac{1}{2404}\left[40\left(\frac{5{,}6}{2}+\frac{5{,}6}{\pi}\right)\frac{2\cdot 3{,}2}{\pi}\right]+$$
$$+\frac{1}{2404}\left[3{,}9\cdot 5{,}6\frac{2\cdot 3{,}2}{\pi}+2\cdot 60\right]=0{,}224\frac{1}{\text{м}}. \qquad (2.3)$$

Определим величину α_1 (1.11)

$$\alpha_1=\left(\int_0^a X_1^{IV}X_1dx\int_0^b Y_1Y_1dy+2\int_0^a X_1^{II}X_1dx\int_0^b Y_1^{II}Y_1dy+\int_0^a X_1X_1dx\int_0^b Y_1^{IV}Y_1dy\right)=$$
$$=-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4\int_0^a\cos\frac{2\pi}{a}x\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)dx\int_0^b\sin^2\frac{\pi}{b}ydy+$$
$$+2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\int_0^a\cos\frac{2\pi}{a}x\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)dx\cdot(-1)\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\int_0^b\sin^2\frac{\pi}{b}ydy+$$
$$+\int_0^a\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)^2dx\cdot\left(\frac{\pi}{b}\right)^4\int_0^b\sin^2\frac{\pi}{b}ydy.$$

.

По таблице интегралов находим

$$\int_0^a\cos\frac{2\pi}{a}xdx=\frac{a}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{a}x\Big|_0^a=0;$$

$$\int_0^a\cos^2\frac{2\pi}{a}xdx=\frac{a}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{2a}x+\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{a}x\right)\Bigg|_0^a=\frac{a}{2};$$

$$\int_0^a\sin^2\frac{\pi}{b}ydy=\frac{b}{\pi}\left(\frac{\pi}{2b}y-\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{b}y\right)\Bigg|_0^b=\frac{b}{2};$$

$$\int_0^a dx = x\Big|_0^a = a.$$

При заданных значениях *a* и *b*, получаем

$$\alpha_1 = -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4\left[0-\frac{a}{2}\right]\frac{b}{2} - 2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(0-\frac{a}{2}\right)\frac{b}{2} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^4\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{b}{2} =$$
$$= \pi^4\left(\frac{4b}{a^3} + \frac{2}{ab} + \frac{3a}{4b^3}\right) = \pi^4\left(\frac{4\cdot 3{,}2}{5{,}6^3} + \frac{2}{5{,}6\cdot 3{,}2} + \frac{3\cdot 5{,}6}{4\cdot 3{,}2^3}\right) = 30{,}395\cdot\frac{1}{\text{м}^2} \qquad (2.4)$$

Подставив (2.3) и (2.4) в (2.2), находим значение параметра C_{11}

$$C_{11} = \frac{\Delta_1}{\alpha_1} = \frac{0{,}224}{30{,}395} = 7{,}37\cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

Таким образом, функция прогибов (2.1) пластины имеет вид

$$w(x,y) = 7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y.$$

2.3. Определение внутренних усилий

Изгибающие моменты

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_{11}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\cos\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y;\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C_{11}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y.$$

$$C_{11}D = 7{,}37\cdot 10^{-3}\cdot 2404 = 17{,}717\,кНм^2.$$

$$M_x = -C_{11}D\left[\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{a}x - \mu\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{b}x\right)\right]\sin\frac{\pi}{b}y =$$

$$= -17{,}717\left[1{,}2576\cos\frac{2\pi}{a}x - 0{,}2888\right]\sin\frac{\pi}{b}y = \left(5{,}117 - 27{,}398\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y;$$

$$M_y = -CD\left[-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right) + \mu\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\cos\frac{2\pi}{a}x\right]\sin\frac{\pi}{b}y =$$

$$= -17{,}717\left[1{,}3401\cos\frac{2\pi}{a}x - 0{,}9628\right]\sin\frac{\pi}{b}y = \left(17{,}058 - 23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}y;$$

Крутящий момент

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C_{11}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)\sin\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y = \frac{2\pi^2}{ab}\sin\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y.$$

$$H = -CD(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y\cdot$$

Поперечные силы

$$Q_{zx} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right); \quad Q_{zy} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -C_{11}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = -C_{11}\left(\frac{\pi}{b}\right)^3\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\frac{\pi}{b}y;$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = C_{11}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y. \to \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = C_{11}\frac{4\pi^3}{a^2 b}\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y; \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -C_{11}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(\frac{2\pi}{a}\right)\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y. \to \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -C_{11}\frac{2\pi^3}{ab^2}\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y.$$

$$Q_{zx} = 17{,}717\left[1{,}410 + 1{,}080\right]\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y = 44{,}115\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y;$$

$$Q_{zy} = 17{,}717\left[0{,}9448 - 2{,}1788\cos\frac{2\pi}{a}x\right]\cos\frac{\pi}{b}y = 16{,}739\cos\frac{\pi}{b}y - 38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y$$

Проверим правильность вычислений внутренних усилий

$$Q_{zx} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = -27{,}398\left(-\frac{2\pi}{a}\right)\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y - 13{,}646\left(-\frac{\pi}{b}\right)\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y =$$
$$= (30{,}725 + 13{,}389)\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y = 44{,}114\sin\frac{2\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y.$$

$$Q_{zy} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = \left(17{,}058 - 23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)\cos\frac{\pi}{b}y - 13{,}646\left(\frac{2\pi}{a}\right)\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y =$$
$$= 16{,}738\cos\frac{\pi}{b}y - 38{,}600\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}y.$$

Следовательно, соотношения (2.5) выполняются тождественно.

2.4. Определение прогибов и усилий в характерных сечениях пластины

Определим прогибы и усилия в характерных сечениях пластины

При $x = \frac{a}{4}, \quad 0 \le y \le \frac{b}{2}$:

$$Q_{zx}\left(\frac{a}{4}, y\right) = 44{,}115\sin\frac{2\pi}{a}\frac{a}{4}\sin\frac{\pi}{b}y = 44{,}115\sin\frac{\pi}{b}y.$$

$$Q_{zx}\left(\frac{a}{4},0\right)=44{,}115\sin\frac{\pi}{b}\cdot 0=0;\quad Q_{zx}\left(\frac{a}{4},\frac{b}{6}\right)=44{,}115\sin\frac{\pi}{b}\cdot\frac{b}{6}=22{,}06\,\frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$Q_{zx}\left(\frac{a}{4},\frac{b}{4}\right)=44{,}115\sin\frac{\pi}{b}\cdot\frac{b}{4}=31{,}21\,\frac{\text{кН}}{\text{м}};\quad Q_{zx}\left(\frac{a}{4},\frac{b}{3}\right)=44{,}115\sin\frac{\pi}{b}\cdot\frac{b}{3}=38{,}16\,\frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$Q_{zx}\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=44{,}115\sin\frac{\pi}{b}\cdot\frac{b}{2}=44{,}12\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

$$H\left(\frac{a}{4},y\right)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}\frac{a}{4}\cos\frac{\pi}{b}y=-13{,}646\cos\frac{\pi}{b}y.\cdot$$

$$H\left(\frac{a}{4},0\right)=-13{,}646\cdot 1=-13{,}65\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};\quad H\left(\frac{a}{4},\frac{b}{6}\right)=-13{,}646\cos\frac{\pi}{b}\frac{b}{6}=-11{,}80\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$H\left(\frac{a}{4},\frac{b}{4}\right)=-13{,}646\cos\frac{\pi}{b}\frac{b}{4}=-9{,}65\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};\quad H\left(\frac{a}{4},\frac{b}{3}\right)=-13{,}646\cos\frac{\pi}{b}\frac{b}{3}=-6{,}82\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$H\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=-13{,}646\cos\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=0.$$

При $x=\frac{a}{4},\quad \frac{b}{2}\le y\le b$:

$$Q_{zx}\left(\frac{x=a/4}{(b/2)\le y\le b}\right)=Q_{zx}\left(\frac{x=a/4}{0\le y\le b/2}\right);\quad H\left(\frac{x=a/4}{(b/2)\le y\le b}\right)=-H\left(\frac{x=a/4}{0\le y\le b/2}\right).$$

При $x=\frac{a}{2},\quad 0\le y\le\frac{b}{2}$:

$$w\left(\frac{a}{2},y\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}(1+1)\sin\frac{\pi}{b}y=14{,}74\cdot 10^{-3}\sin\frac{\pi}{b}y.\quad w\left(\frac{a}{2},0\right)=0;$$

$$w\left(\frac{a}{2},y\right)=7{,}37\cdot10^{-3}(1+1)\sin\frac{\pi}{b}y=14{,}74\cdot10^{-3}\sin\frac{\pi}{b}y.\quad w\left(\frac{a}{2},0\right)=0;$$

$$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{6}\right)=14{,}74\cdot10^{-3}\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{6}=7{,}37\cdot10^{-3}\text{м}=7{,}37\,мм;$$

$$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{4}\right)=14{,}74\cdot10^{-3}\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{4}=10{,}42\cdot10^{-3}\,м=10{,}42\,мм.$$

$$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{3}\right)=14{,}74\cdot10^{-3}\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{3}=4{,}62\cdot10^{-3}\text{м}=12{,}75\,мм;$$

$$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=14{,}74\cdot10^{-3}\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=14{,}74\cdot10^{-3}\text{м}=14{,}74\,мм.$$

$$M_x\left(\frac{a}{2},y\right)=\left(5{,}117-27{,}398\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{2}\right)\sin\frac{\pi}{b}y=32{,}515\sin\frac{\pi}{b}y.$$

$$M_x\left(\frac{a}{2},0\right)=32{,}515\sin\frac{\pi}{b}\cdot0=0;\quad M_x\left(\frac{a}{2},\frac{b}{6}\right)=32{,}515\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{6}=16{,}26\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$M_x\left(\frac{a}{2},\frac{b}{4}\right)=32{,}515\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{4}=22{,}99\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};\quad M_x\left(\frac{a}{2},\frac{b}{3}\right)=32{,}515\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{3}=28{,}12\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$M_x\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=32{,}515\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=32{,}52\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}}.$$

$$H\left(\frac{a}{2},y\right)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}\frac{a}{2}x\cos\frac{\pi}{b}y=0;\quad Q_{zx}\left(\frac{a}{2},y\right)=44{,}115\sin\frac{2\pi}{a}\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{b}y=0.$$

При $x=\frac{a}{2},\quad \frac{b}{2}\le y\le b$:

$$w\left(\frac{x=a/2}{(b/2)\le y\le b}\right)=w\left(\frac{x=a/2}{0\le y\le b/2}\right);\quad M_x\left(\frac{x=a/2}{(b/2)\le y\le b}\right)=M_x\left(\frac{x=a/4}{0\le y\le b/2}\right).$$

При $x=\frac{3a}{4},\quad 0\le y\le\frac{b}{2}$:

$$Q_{zx}\left(\frac{x=3a/4}{0\le y\le b/2}\right)=-Q_{zx}\left(\frac{x=a/4}{0\le y\le b/2}\right);\quad H\left(\frac{x=3a/4}{0\le y\le b/2}\right)=-H\left(\frac{x=a/4}{0\le y\le b/2}\right)$$

При $x=\frac{3a}{4},\quad \frac{b}{2}\le y\le b$:

$$Q_{zx}\left(\frac{x=3a/4}{(b/2)\le y\le b}\right)=-Q_{zx}\left(\frac{x=a/4}{0\le y\le b/2}\right);\quad H\left(\frac{x=3a/4}{(b/2)\le y\le b}\right)=-H\left(\frac{x=a/4}{0\le y\le b/2}\right).$$

При $y=0,\quad 0\le x\le\frac{a}{2}$:

$$Q_{zy}(x,0)=16{,}739\cos\frac{\pi}{b}\cdot 0-38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}\cdot 0=16{,}739-38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}x,$$

$$Q_{zy}(0,0)=16{,}739-38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}\cdot 0=-21{,}86\,\frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$Q_{zy}\left(\frac{a}{6},0\right)=16{,}739-38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{6}=-2{,}51\,\frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$Q_{zy}\left(\frac{a}{4},0\right)=16{,}739-38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{4}=16{,}74\,\frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$Q_{zy}\left(\frac{a}{3},0\right)=16{,}739-38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{3}=36{,}04\,\frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$Q_{zy}\left(\frac{a}{2},0\right)=16{,}739-38{,}602\cos\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{2}=55{,}34\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

$$H(x,0)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}\cdot 0=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}x.$$

$$H(0,0)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}\cdot 0=0;\quad H\left(\frac{a}{6},0\right)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{6}=-11{,}80;$$

$$H\left(\frac{a}{4},0\right)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{4}=-13{,}65;\quad H\left(\frac{a}{3},0\right)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{a}{3}=-11{,}80.$$

При $y=0,\quad \frac{a}{2}\le x\le a$:

$$Q_{zy}\left(\frac{(a/2)\le x\le a}{y=0}\right)=Q_{zx}\left(\frac{0\le x\le a/2}{y=0}\right);\quad H\left(\frac{(a/2)\le x\le a}{y=0}\right)=-H\left(\frac{0\le x\le a/2}{y=0}\right).$$

При $y=b,\quad 0\le x\le \dfrac{a}{2}$:

$$Q_{zy}\left(\frac{y=b}{0\le x\le a/2}\right)=-\quad Q_{zy}\left(\frac{y=0}{0\le x\le a/2}\right);\quad H\left(\frac{y=b}{0\le x\le a/2}\right)=-\quad H\left(\frac{y=0}{0\le x\le a/2}\right);$$

При $y=b,\quad a/2\le x\le a$:

$$Q_{zy}\left(\frac{y=b}{(a/2)\le x\le a}\right)=Q_{zy}\left(\frac{y=b}{0\le x\le a.2}\right);\quad H\left(\frac{y=b}{(a/2)\le x\le a}\right)=-H\left(\frac{y=b}{0\le x\le a.2}\right)$$

При $y=\dfrac{b}{2},\quad 0\le x\le \dfrac{a}{2}$:

$$w\left(x,\frac{b}{2}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right).$$

$$w\left(0,\frac{b}{2}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}x\right)=0;$$

$$w\left(\frac{a}{6},\frac{b}{2}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{6}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=4{,}68\cdot 10^{-3}\,\text{м}=3{,}68\cdot\text{мм};$$

$$w\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{4}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}(1-0)=7{,}37\cdot 10^{-3}\,\text{м}=7{,}37\cdot\text{мм};$$

$$w\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{3}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=11{,}06\cdot 10^{-3}\,\text{м}=11{,}06\cdot\text{мм};$$

$$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{2}\right)=7{,}37\cdot 10^{-3}[1-(-1)]=14{,}74\cdot 10^{-3}\,\text{м}=14{,}74\cdot\text{мм};$$

$$M_y\left(x,\frac{b}{2}\right)=\left(17{,}058-23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=17{,}058-23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}x.$$

$$M_y\left(0,\frac{b}{2}\right)=17{,}058-23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}\cdot 0=17{,}058-23{,}742=-6{,}68\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$M_y\left(\frac{a}{6},\frac{b}{2}\right)=17{,}058-23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{6}=17{,}058-11{,}87=5{,}19\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$M_y\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=17{,}058-23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{4}=17{,}058-0=17{,}06\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$M_y\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2}\right)=17{,}058-23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{3}=17{,}058-(-11{,}871)=28{,}93\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}};$$

$$M_y\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=17{,}058-23{,}742\cos\frac{2\pi}{a}\frac{a}{2}=17{,}058-(-17{,}058)=34{,}12\,\frac{\text{кНм}}{\text{м}}.$$

$$H\left(x,\frac{b}{2}\right)=-13{,}646\sin\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=0\cdot$$

$$Q_{zy}\left(x,\frac{b}{2}\right)=16{,}739\cos\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}-38{,}596\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{b}\frac{b}{2}=0,$$

При $y=\frac{b}{2},\quad \frac{a}{2}\le x\le a$:

$$w\left(\frac{(a/2)\le x=a}{y=b/2}\right)=w\left(\frac{0\le x=a/2}{y=b/2}\right);\quad M_y\left(\frac{(a/2)\le x=a}{y=b/2}\right)=M_y\left(\frac{0\le x=a/2}{y=b/2}\right).$$

Эпюры прогибов и усилий показаны на рис. 2.

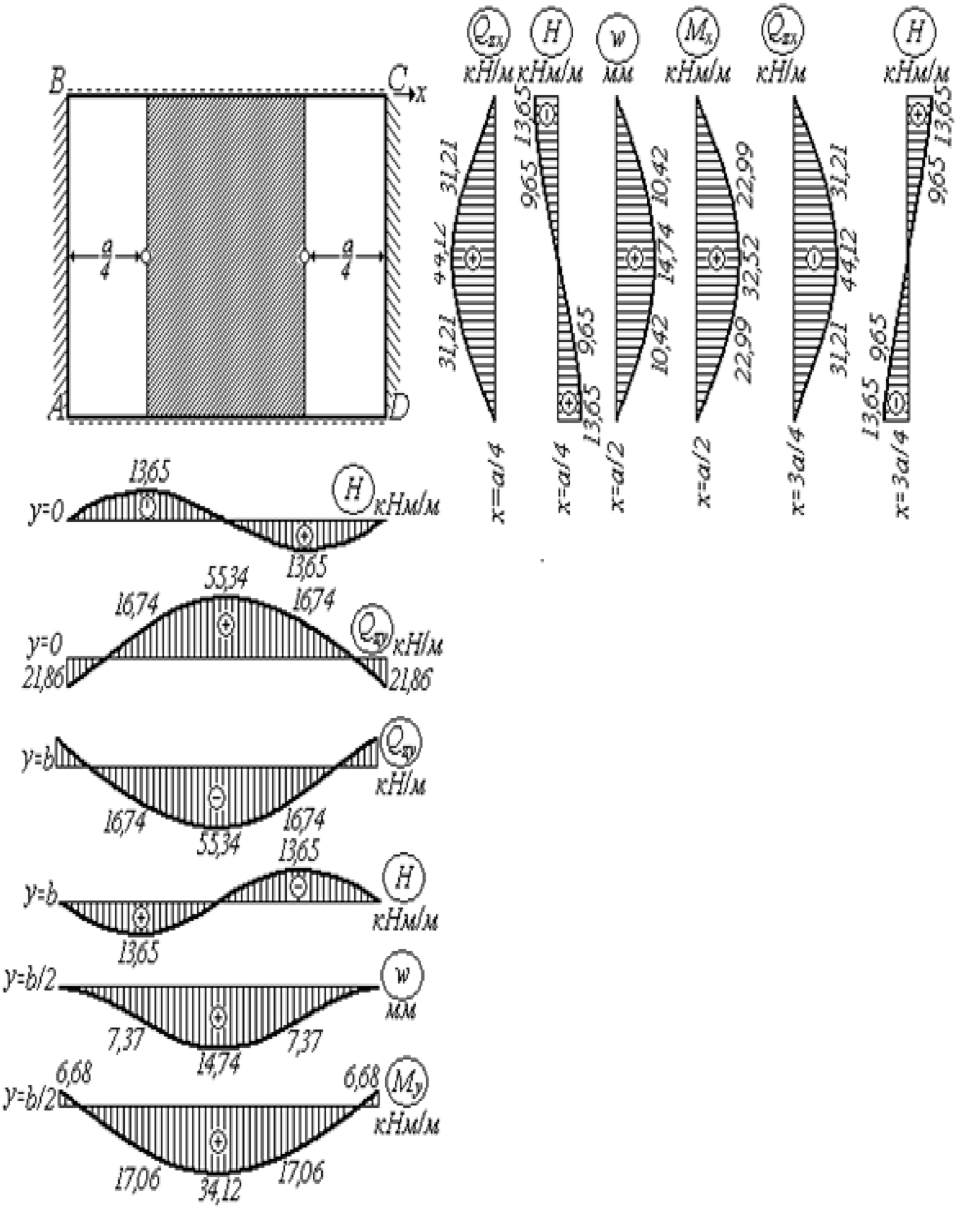
B
C
x
A
D
a/4
a/4
y=0
13,65
13,65
H кНм/м
55,34
16,74
16,74
y=0
21,86
21,86
Q_{zy} кН/м
y=b
16,74
55,34
16,74
y=b
13,65
13,65
y=b/2
7,37
14,74
7,37
w мм
y=b/2
6,68
6,68
M_y кНм/м
17,06
34,12
17,06
Q_{zx} кН/м
31,21
44,12
31,21
x=a/4
H кНм/м
13,65
9,65
9,65
13,65
x=a/4
w мм
10,42
14,74
10,42
x=a/2
M_x кНм/м
22,99
32,52
22,99
x=a/2
Q_{zx} кН/м
31,21
44,12
31,21
x=3a/4
H кНм/м
13,65
9,65
9,65
13,65
x=3a/4

Рис. 2

Табличные интегралы, необходимые для выполнения задания.

$$\int \cos x dx = \sin x; \quad \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4};$$

$$\int \sin x dx = -\cos x; \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4};$$

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3};$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32};$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$$

2.5. Определение нормальных и касательных напряжений в опасных точках

Из эпюр изгибающих моментов M_x и M_y устанавливаем, что опасной является точка в центре пластины. Нормальные напряжения $(z = \pm h/2)$ равны

$$\max|\sigma_x| = \frac{6 \cdot |M_x^{\max}|}{h^2} = \frac{6 \cdot 32{,}52 \cdot 10^{-3}}{5^2 \cdot 10^{-4}} = 78{,}05 МПа;$$
$$\max|\sigma_y| = \frac{6 \cdot |M_y^{\max}|}{h^2} = \frac{6 \cdot 34{,}12 \cdot 10^{-3}}{5^2 \cdot 10^{-4}} = 81{,}89 МПа.$$

Из эпюр крутящего момента H устанавливаем, что опасными являются точки на гранях пластины с координатами $\left(\frac{a}{4}, 0\right)$; $\left(\frac{3a}{4}, 0\right)$ $\left(\frac{a}{4}, b\right)$ $\left(\frac{3a}{4}, b\right)$

Касательные напряжения $(z = \pm h/2)$ равны

$$\max\left|\tau_{xy}\right| = \max\left|\tau_{yx}\right| = \frac{6\cdot\left|H^{\max}\right|}{h^2} = \frac{6\cdot 13{,}65\cdot 10}{5^2} = 32{,}76 МПа;$$

Из эпюр поперечных сил устанавливаем, что опасными являются точки пластины с координатами для: Q_{zx} $\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)$ и $\left(\frac{3a}{4},\frac{b}{2}\right)$; Q_{zy} $\left(\frac{a}{2},0\right)$ и $\left(\frac{a}{2},b\right)$

$$\max\left|\tau_{zx}\right| = \frac{3\cdot\left|Q_{zx}^{\max}\right|}{2h} = \frac{3\cdot 44{,}12\cdot 10^{-3}}{2\cdot 5\cdot 10^{-2}} = 1{,}32 МПа;$$

$$\max\left|\sigma_{y}\right| = \frac{3\cdot\left|Q_{zy}^{\max}\right|}{2h} = \frac{3\cdot 55{,}34\cdot 10^{-3}}{2\cdot 5\cdot 10^{-2}} = 1{,}66 МПа.$$

Примечание

Для $m = 2$ и $n = 2$ значения интегралов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Базисные функции: $\varphi_{ij} = X_i(x)\cdot Y_j(y);\quad i=1,2\quad j=1,2.$
$X_1 = \sin\frac{\pi}{a}x,\quad X_2 = \sin\frac{2\pi}{a}x.$
$X_1^{II} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\sin\frac{\pi}{a}x;\quad X_2^{II} = -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\sin\frac{2\pi}{a}x;\quad X_1^{IV} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4\sin\frac{\pi}{a}x;\quad X_2^{IV} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^4\sin\frac{2\pi}{a}x;$ $\int_0^a X_1dx = \frac{2a}{\pi};\quad \int_0^a X_2dx = 0;\quad \int_0^a X_1X_1dx = \frac{a}{2};\quad \int_0^a X_1X_2dx = 0;\quad \int_0^a X_2X_2dx = \frac{a}{2};\quad \int_0^a X_1^{II}X_1dx = -\frac{\pi^2}{2a};$ $\int_0^a X_2^{II}X_2dx = -\frac{2\pi^2}{a};\quad \int_0^a X_1^{IV}X_1dx = \frac{\pi^4}{2a^3};\quad \int_0^a X_1^{IV}X_2dx = 0;\quad \int_0^a X_2^{IV}X_1dx = 0;\quad \int_0^a X_2^{IV}X_2dx = 8\frac{\pi^4}{a^3};$ $\int_0^{2a/3} X_1dx = \frac{3a}{2\pi};\quad \int_0^{2a/3} X_2dx = \frac{3a}{4\pi};\quad \int_0^{a/2} X_1dx = \frac{a}{\pi};\quad \int_0^{a/2} X_2dx = \frac{a}{\pi};\quad \int_{a/3}^{2a/3} X_1dx = \frac{a}{\pi};\quad \int_{a/3}^{2a/3} X_2dx = 0;$ $\int_{a/4}^{3a/4} X_1dx = \frac{a\sqrt{2}}{\pi};\quad \int_{a/4}^{3a/4} X_2dx = 0;\quad \int_0^a X_1^{II}X_2dx = 0;\quad \int_0^a X_2^{II}X_1dx = 0.$

$$Y_1 = \sin\frac{\pi}{b}y, \quad Y_2 = \sin\frac{2\pi}{b}y.$$

$$Y_1^{II} = -\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{\pi}{b}y; \quad Y_2^{II} = -\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{b}y; \quad Y_1^{IV} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \sin\frac{\pi}{b}y; \quad Y_2^{IV} = \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \sin\frac{2\pi}{b}y;$$

$$\int_0^b Y_1 dy = \frac{2b}{\pi}; \quad \int_0^b Y_2 dy = 0; \quad \int_0^b Y_1 Y_1 dy = \frac{b}{2}; \quad \int_0^b Y_1 Y_2 dy = 0; \quad \int_0^b Y_2 Y_2 dy = \frac{b}{2}; \quad \int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy = -\frac{\pi^2}{2b};$$

$$\int_0^b Y_2^{II} Y_2 dy = -\frac{2\pi^2}{b}; \quad \int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy = \frac{\pi^4}{2b^3}; \quad \int_0^b Y_1^{IV} Y_2 dy = 0; \quad \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy = 0; \quad \int_0^b Y_2^{IV} Y_2 dy = 8\frac{\pi^4}{b^3}.$$

$$\int_0^b Y_1^{II} Y_2 dy = 0; \quad \int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy = 0.$$

$$X_1 = 1 - \cos\frac{2\pi}{a}x, \quad X_2 = 1 - \cos\frac{4\pi}{a}x.$$

$$X_1^{II} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{a}x; \quad X_2^{II} = \left(\frac{4\pi}{a}\right)^2 \cos\frac{4\pi}{a}x; \quad X_1^{IV} = -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 \cos\frac{2\pi}{a}x;$$

$$\int_0^{2a/3} X_2 dx = a\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\right);$$

$$X_2^{IV} = -\left(\frac{4\pi}{a}\right)^4 \cos\frac{4\pi}{a}x; \quad \int_0^a X_1 dx = a; \quad \int_0^a X_2 dx = a; \quad \int_0^a X_1 X_1 dx = 3\frac{a}{2}; \quad \int_0^a X_1 X_2 dx = a;$$

$$\int_0^a X_2 X_2 dx = 3\frac{a}{2}; \quad \int_0^a X_1^{II} X_1 dx = -\frac{2\pi^2}{a}; \quad \int_0^a X_2^{II} X_2 dx = -8\frac{\pi^2}{a}; \quad \int_0^a X_1^{II} \cdot X_2 dx = 0;$$

$$\int_0^a X_2^{II} X_1 dx = 0; \quad \int_0^a X_1^{IV} X_1 dx = 8\frac{\pi^4}{a^3}; \quad \int_0^a X_1^{IV} X_2 dx = 0;$$

$$\int_0^a X_2^{IV} X_1 dx = 0; \quad \int_0^a X_2^{IV} X_2 dx = 128\frac{\pi^4}{a^3}; \quad \int_0^{a/2} X_1 dx = \frac{a}{2}; \quad \int_0^{a/2} X_2 dx = \frac{a}{2}; \quad \int_{a/3}^{2a/3} X_1 dx = a\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right);$$

$$\int_{a/3}^{2a/3} X_2 dx = a\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right) \quad \int_{a/4}^{3a/4} X_1 dx = \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi}; \quad \int_{a/4}^{3a/4} X_2 dx = \frac{a}{2}; \quad \int_0^{2a/3} X_1 dx = a\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right);$$

$$Y_1 = 1 - \cos\frac{2\pi}{b}y, \quad Y_2 = 1 - \cos\frac{4\pi}{b}y.$$

$$Y_1^{II} = \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{b}y; \quad Y_2^{II} = \left(\frac{4\pi}{b}\right)^2 \cos\frac{4\pi}{b}y; \quad Y_1^{IV} = -\left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \cos\frac{2\pi}{b}y; \quad \int_0^b Y_2^{IV} Y_1 dy = 0;$$

$Y_2^{IV} = -\left(\frac{4\pi}{b}\right)^2 \cos\frac{4\pi}{b}y$; $\int_0^b Y_1 dy = b$; $\int_0^b Y_2 dy = b$; $\int_0^b Y_1Y_1 dy = 3\frac{b}{2}$; $\int_0^b Y_1Y_2 dy = b$; $\int_0^b Y_2^{IV} Y_2 dy = 128\frac{\pi^4}{b^3}$; $\int_0^b Y_2Y_2 dy = 3\frac{b}{2}$; $\int_0^b Y_1^{II} Y_1 dy = -\frac{2\pi^2}{b}$; $\int_0^b Y_2^{II} Y_2 dy = -8\frac{\pi^2}{b}$; $\int_0^b Y_1^{IV} Y_1 dy = 8\frac{\pi^4}{b^3}$; $\int_0^b Y_1^{IV} Y_2 dy = 0$. $\int_0^b Y_2^{II} Y_1 dy = -8\frac{\pi^2}{a}$; $\int_0^b Y_1^{II}\cdot Y_2 dy = 0$.
$X_1 = \cos\frac{\pi}{2a}x$, $X_2 = \cos\frac{\pi}{a}x$.
$X_1^{II} = -\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2a}x$; $X_2^{II} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\frac{\pi}{a}x$; $X_1^{IV} = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^4 \cos\frac{\pi}{2a}x$; $X_2^{IV} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \cos\frac{\pi}{a}x$; $\int_{-a}^a X_1 dx = \frac{4a}{\pi}$; $\int_{-a}^a X_2 dx = 0$; $\int_{-a}^a X_1X_1 dx = a$; $\int_{-a}^a X_1X_2 dx = \frac{4a}{3\pi}$; $\int_{-a}^a X_2X_2 dx = a$; $\int_{-a}^a X_1^{II}X_1 dx = -\frac{\pi^2}{4a}$; $\int_{-a}^a X_2^{II}X_2 dx = -\frac{\pi^2}{a}$; $\int_{-a}^a X_1^{IV}X_1 dx = \frac{\pi^4}{16a^3}$; $\int_{-a}^a X_1^{IV}X_2 dx = \frac{\pi^3}{12a^3}$; $\int_{-a}^a X_2^{IV}X_1 dx = \frac{4\pi^3}{3a^3}$; $\int_{-a}^a X_2^{IV}X_2 dx = \frac{\pi^4}{a^3}$; $\int_{-a}^0 X_1 dx = \frac{2a}{\pi}$; $\int_{-a}^0 X_2 dx = 0$. $\int_0^a X_1^{II}X_2 dx = -\frac{\pi}{6a}$; $\int_0^a X_2^{II}X_1 dx = -\frac{2\pi}{2a}$.
$Y_1 = \cos\frac{\pi}{2b}y$, $Y_2 = \cos\frac{\pi}{b}y$.
$Y_1^{II} = -\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2b}y$; $Y_2^{II} = -\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos\frac{\pi}{b}y$; $Y_1^{IV} = \left(\frac{\pi}{2b}\right)^4 \cos\frac{\pi}{2b}y$; $Y_2^{IV} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \cos\frac{\pi}{b}y$; $\int_{-b}^b Y_1 dy = \frac{4b}{\pi}$; $\int_{-b}^b Y_2 dy = 0$; $\int_{-b}^b Y_1Y_1 dy = b$; $\int_{-b}^b Y_1Y_2 dy = \frac{4b}{3\pi}$; $\int_{-b}^b Y_2Y_2 dy = b$; $\int_{-b}^b Y_1^{II}Y_1 dy = -\frac{\pi^2}{4b}$;

$$\int_{-b}^{b} Y_2^{II} Y_2 dy = -\frac{\pi^2}{b}; \quad \int_{-b}^{b} Y_1^{IV} Y_1 dy = \frac{\pi^4}{16b^3}; \quad \int_{-b}^{b} Y_1^{IV} Y_2 dy = \frac{\pi^3}{12b^3}; \quad \int_{-b}^{b} Y_2^{IV} Y_1 dy = \frac{4\pi^3}{3b^3};$$

$$\int_{-b}^{b} Y_2^{IV} Y_2 dy = \frac{\pi^4}{b^3}.$$

$$\int_{0}^{b} Y_1^{II} Y_2 dy = -\frac{\pi}{6b}; \quad \int_{0}^{b} Y_2^{II} Y_1 dy = -\frac{2\pi}{2b}.$$

$$X_1 = \cos^2 \frac{\pi}{2a} x, \quad X_2 = \cos^2 \frac{\pi}{a} x.$$

$$X_1^{II} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\frac{\pi}{a} x; \quad X_2^{II} = -2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{a} x; \quad X_1^{IV} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \cos\frac{\pi}{a} x; \quad X_2^{IV} = 8\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \cos\frac{2\pi}{a} x;$$

$$\int_{-a}^{a} X_1 dx = a; \quad \int_{-a}^{a} X_2 dx = a; \quad \int_{-a}^{a} X_1 X_1 dx = \frac{3a}{4}; \quad \int_{-a}^{a} X_1 X_2 dx = \frac{a}{2}; \quad \int_{-a}^{a} X_2 X_2 dx = \frac{3a}{4}; \quad \int_{-a}^{a} X_1^{II} X_1 dx = -\frac{2\pi}{3a};$$

$$\int_{-a}^{a} X_2^{II} X_2 dx = -\frac{\pi^2}{a}; \quad \int_{-a}^{a} X_1^{IV} X_1 dx = \frac{1}{4}\frac{\pi^4}{a^3}; \quad \int_{-a}^{a} X_1^{IV} X_2 dx = 0; \quad \int_{-a}^{a} X_2^{IV} X_1 dx = 0; \quad \int_{-a}^{a} X_2^{IV} X_2 dx = 4\frac{\pi^4}{a^3};$$

$$\int_{-a}^{0} X_1 dx = \frac{a}{2}; \quad \int_{-a}^{0} X_2 dx = \frac{a}{2}. \quad \int_{-a}^{a} X_1^{II} X_2 dx = 0; \quad \int_{-a}^{a} X_2^{II} X_1 dx = 0.$$

$$Y_1 = \cos^2 \frac{\pi}{2b} y, \quad Y_2 = \cos^2 \frac{\pi}{b} y.$$

$$Y_1^{II} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos\frac{\pi}{b} y; \quad Y_2^{II} = -2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{b} y; \quad Y_1^{IV} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \cos\frac{\pi}{b} y; \quad Y_2^{IV} = 8\left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \cos\frac{2\pi}{b} y;$$

$$\int_{-b}^{b} Y_1 dy = b; \quad \int_{-b}^{b} Y_2 dy = b; \quad \int_{-b}^{b} Y_1 Y_1 dy = \frac{3b}{4}; \quad \int_{-b}^{b} Y_1 Y_2 dy = \frac{b}{2}; \quad \int_{-b}^{b} Y_2 Y_2 dy = \frac{3b}{4}; \quad \int_{-b}^{b} Y_1^{II} Y_1 dy = -\frac{2\pi}{3b};$$

$$\int_{-b}^{b} Y_2^{II} Y_2 dy = -\frac{\pi^2}{b}; \quad \int_{-b}^{b} Y_1^{IV} Y_1 dy = \frac{1}{4}\frac{\pi^4}{b^3}; \quad \int_{-b}^{b} Y_1^{IV} Y_2 dy = 0; \quad \int_{-b}^{b} Y_2^{IV} Y_1 dy = 0; \quad \int_{-b}^{b} Y_2^{IV} Y_2 dy = 4\frac{\pi^4}{b^3}.$$

$\int_{-b}^{b} Y_1^{II} Y_2 dy = 0; \quad \int_{-b}^{b} Y_2^{II} Y_1 dy = 0.$
$X_1 = \sin\frac{\pi}{a}x, \quad Y_1 = \sin\frac{\pi}{b}y; \quad X_2 = \sin\frac{2\pi}{a}x, \quad Y_2 = \sin\frac{2\pi}{b}y.$
$X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0;$ $X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0;$ $X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0;$ $X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 1; \quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = -1; \quad X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0;$
$X_1 = 1-\cos\frac{2\pi}{a}x, \quad Y_1 = 1-\cos\frac{2\pi}{b}y; \quad X_2 = 1-\cos\frac{4\pi}{a}x, \quad Y_2 = 1-\cos\frac{4\pi}{b}y.$
$X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 3; \quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 3; \quad X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0;$ $X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 3; \quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 3; \quad X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0;$ $X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 2; \quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 2; \quad X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0;$ $X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 4; \quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right) = 4; \quad X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0; \quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0.$
$X_1 = \sin\frac{\pi}{a}x, \quad Y_1 = 1-\cos\frac{2\pi}{b}y; \quad X_2 = \sin\frac{2\pi}{a}x, \quad Y_2 = 1-\cos\frac{4\pi}{b}y.$

$X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{3};\quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{3};\quad X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$ $X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{3};\quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=-\sqrt{3};\quad X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0$ $X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{2};\quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{2};\quad X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0$ $X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=2;\quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=-2;\quad X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$ $X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{b}{4}\right)=1;\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{3b}{4}\right)=1;\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{b}{4}\right)=2;\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{3b}{4}\right)=2;$ $X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{b}{4}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{3b}{4}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{b}{4}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{3b}{4}\right)=0.$
$X_1=1-\cos\frac{2\pi}{a}x,\quad Y_1=\sin\frac{\pi}{b}y;\quad X_2=1-\cos\frac{4\pi}{a}x,\quad Y_2=\sin\frac{2\pi}{b}y.$
$X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{3}{2};\quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{3}{2};\quad X_1\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_1\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$ $X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{3}{2};\quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{3}{2};\quad X_2\left(\frac{a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{2a}{3}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$ $X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=1;\quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=1;\quad X_1\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_1\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$ $X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=2;\quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=2;\quad X_2\left(\frac{a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{3a}{4}\right)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$

$X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{b}{4}\right)=\sqrt{2};\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{3b}{4}\right)=\sqrt{2};\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{b}{4}\right)=2;\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{3b}{4}\right)=-3\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{b}{4}\right)=0;$ $X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_1\left(\frac{3b}{4}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{b}{4}\right)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2\left(\frac{3b}{4}\right)=0.$
$X_1=\cos\frac{\pi}{2a}x,\quad Y_1=\cos\frac{\pi}{2b}y;\quad X_2=\cos\frac{\pi}{a}x,\quad Y_2=\cos\frac{\pi}{b}y.$
$X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_1(0)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_1\left(\frac{3a}{2}\right)Y_1(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_1\left(\frac{3a}{2}\right)Y_2(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$ $X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_1(0)=0;\quad X_2\left(\frac{3a}{2}\right)Y_1(0)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=0;\quad X_2\left(\frac{3a}{2}\right)Y_2(0)=0.$
$X_1=\cos\frac{\pi}{2a}x,\quad Y_1=\cos^2\frac{\pi}{2b}y;\quad X_2=\cos\frac{\pi}{a}x,\quad Y_2=\cos^2\frac{\pi}{b}y.$
$X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_1(0)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_1\left(\frac{3a}{2}\right)Y_1(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_1\left(\frac{3a}{2}\right)Y_2(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$ $X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_1(0)=0;\quad X_2\left(\frac{3a}{2}\right)Y_1(0)=0\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=0;\quad X_2\left(\frac{3a}{2}\right)Y_2(0)=0.$
$X_1=\cos^2\frac{\pi}{2a}x,\quad Y_1=\cos\frac{\pi}{2b}y;\quad X_2=\cos^2\frac{\pi}{a}x,\quad Y_2=\cos\frac{\pi}{b}y.$
$X_1(a)Y_1\left(-\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_1(a)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=0;;\quad X_1(a)Y_2\left(-\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_1(a)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$ $X_2(a)Y_1\left(-\frac{b}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_2(a)Y_1\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad X_2(a)Y_2\left(-\frac{b}{2}\right)=0;\quad X_2(a)Y_2\left(\frac{b}{2}\right)=0;$ $X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_1(0)=\frac{1}{2};\quad X_1\left(\frac{3a}{2}\right)Y_1(0)=\frac{1}{2};\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=\frac{1}{2};\quad X_1\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=\frac{1}{2};$ $X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_1(0)=0;\quad X_2\left(\frac{3a}{2}\right)Y_1(0)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=0;\quad X_2\left(\frac{a}{2}\right)Y_2(0)=0.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

1.Какие тела называют пластинами?

2. Классификация пластин по толщине.

3. Уравнение Софи-Жермен.

4. Граничные условия при различных вариантах закрепления краев пластины.

5. Какие внутренние усилия возникают в пластинах, их единицы измерения?

6. Сущность метода Бубнова-Галеркина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М. : Высшая школа, 1990. – 399 с.
2. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. Издательство «Будівельник». Киев, 1970. – 436 с.
3. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Издательство АСВ, 1995. – 568 с.
4. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. Книжный дом «Либроком», 2009. – 640 с.
5. Демченко Б.М., Маяцкая И.А. Теория упругости с основами пластичности и ползучести. Часть 3, пластины, оболочки. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2015. – 169 с.
6. Демченко Д.Б., Демченко Б.М., Маяцкая И.А. Теория расчета пластин. – Ростов н/Д: Донской. гос. техн. строит. ун-т, 2018. – 461 с.
7. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2011. – 87 с.
8. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Языев Б.М., Смирнов И.И. Теория пластин и оболочек. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2012. – 114 с.