



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

## **Практикум**

о выполнении расчетно-графической  
работы на тему  
«Расчет балок на упругом основании»  
по дисциплине

**«Сопротивление материалов»**

Авторы  
Кадомцева Е. Э.

Ростов-на-Дону, 2019

## Аннотация

Практикум предназначен для студентов очной формы обучения направлений 08.03.01 «Строительство», 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Содержат краткую теорию, пример расчёта на прочность и жёсткость балки на упругом основании с использованием таблиц функций Крылова, приведен необходимый справочный материал.

## Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов» Кадомцева Е.Э.



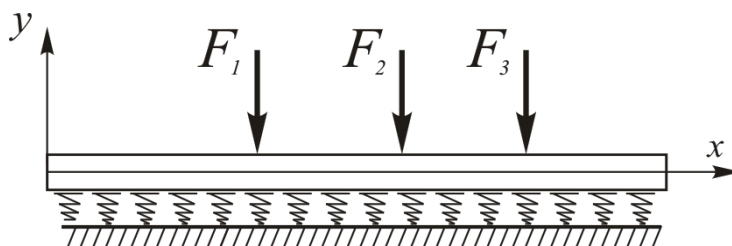
## Оглавление

<b>1. Основные теоретические положения .....</b>	<b>4</b>
<b>2. Пример расчёта на прочность и жёсткость балки на упругом Винклеровском основании с использованием таблиц функций Крылова .....</b>	<b>9</b>
2.1. Постановка задачи .....	9
2.2. Решение численного примера .....	10
<b>3. Проверка на прочность и жёсткость балки на упругом основании .....</b>	<b>23</b>
<b>4. Вопросы .....</b>	<b>23</b>
<b>5. Литература .....</b>	<b>24</b>
<b>Приложение 1 .....</b>	<b>24</b>
<b>Приложение 2 .....</b>	<b>25</b>
<b>Приложение 3 .....</b>	<b>26</b>

## 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

К числу статически неопределимых балок может быть отнесена балка на упругом основании. Так называется балка, опирающаяся по всей своей длине (рис.1) на упругое основание, оказывающее в каждой точке на балку реакцию, пропорциональную  $v(x)$  — прогибу балки в этой точке.

Введение предположения о пропорциональности реакций прогибу является приближением, хотя и достаточно близким к действительным условиям.



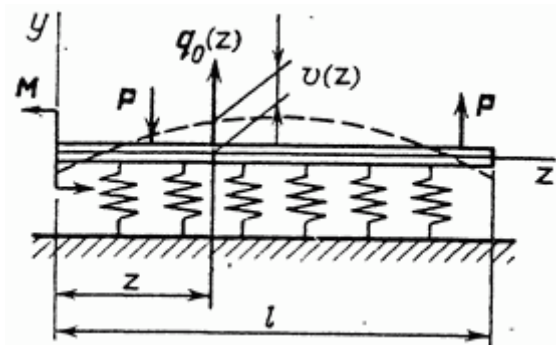
**Рис.1. Расчетная схема балки на упругом основании.**

Предположение ввести в расчет коэффициент пропорциональности  $\alpha$ , выражаемый через, так называемый, «коэффициент постели»  $k$ , было впервые сделано русским академиком Николаем Ивановичем Фуссом в 1801 году. Принимая это предположение, получаем, что *интенсивность* реакции основания в каждой точке сила равна  $\alpha v(x)$ . Здесь  $\alpha = k b$ , где  $b$  — ширина основания поперечного сечения балки, стыкующего с упругим основанием.

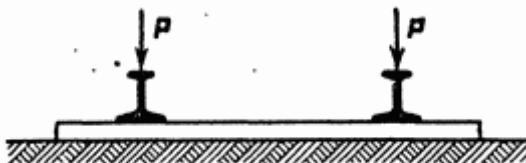
Будем считать, что основание оказывает реакцию при прогибах балки как вниз, так и вверх.

На практике задачи о расчете балки на упругом основании встречаются в железнодорожном деле (рельс, шпала), в строительстве — фундаменты различных сооружений, передающие нагрузку на грунт.

Если балка (стержень), опирается на ряд близко расположенных упругих опор, то можно считать, что балка лежит на сплошном упругом основании (рис.2). Такая расчетная модель применяется во многих случаях.

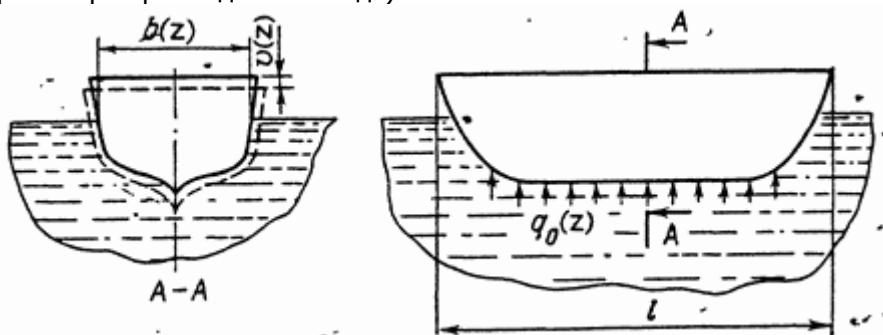


**Рис.2. Расчетная модель балки на упругом основании**



**Рис.3. Балка на упругом основании (схема рельсового пути на шпалах)**

На рис. 3. показана схема рельсового пути, причем как шпалы, так и рельсы могут приближенно рассматриваться как балки на упругом основании (многие видели значительную осадку рельс при прохождении поезда).



**Рис.4. Усилия, возникающие при общих прогибах корпуса судна**

Еще один пример расчетной модели балки на упругом основании: приближенный расчет корпуса судна по стержневой теории. Длина современных танкеров достигает 200—300 м и более, размеры поперечного сечения можно считать малыми по сравнению с длиной. Это дает основания для применения модели стержня.

Статически неопределимой такая балка будет потому, что условие статики — сумма нагрузок равна всей реакции основания — не дает возможности установить *распределение* этой реакции по длине балки из уравнений равновесия, а значит, вычислить изгибающие моменты и поперечные силы.

Таким образом, при заданной внешней распределённой нагрузке  $q(x)$  полная распределённая нагрузка  $p(x)$ , действующая на балку, будет

$$p(x) = q(x) - \alpha v(x)$$

Интенсивность реакции в каждой точке связана с прогибами балки. Поэтому для решения задачи необходимо сначала найти уравнение изогнутой оси, а уже затем формулы для вычисления изгибающего момента и поперечной силы. Ход решения задачи оказывается обратным обычному.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки согласно принятым допущениям и выбранным направлениям  $v(x)$  (рис. 4, рис.5) принимает вид

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{1}{EJ} [q(x) - \alpha v(x)]. \quad (1)$$

Введя обозначение  $L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\alpha}}$ , и, заменив независимую переменную  $x$  безразмерной абсциссой  $\xi = \frac{x}{L}$ , получим следующие зависимости

$$\frac{dv(x)}{d\xi} = \varphi(\xi)L, \quad \frac{d^2 v(x)}{d\xi^2} = -M(\xi) \frac{L^2}{EJ}, \quad \frac{d^3 v(x)}{d\xi^3} = -Q(\xi) \frac{L^3}{EJ}. \quad (2)$$

### Управление дистанционного образования и повышения квалификации

#### Расчет балок на упругом основании

Решая дифференциальное уравнение (1), и используя зависимости (2), получим следующие выражения для  $v(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$ :

$$EJv(x) = EJv_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + EJ\varphi_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) - M_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) - Q_0 L^3 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) - \sum m_i L^2 Y_3\left(\frac{x-a_i}{L}\right) + \sum q_i \frac{L^4}{4} \left[1 - Y_1\left(\frac{x-c_i}{L}\right)\right] - \sum q_i \frac{L^4}{4} \left[1 - Y_1\left(\frac{x-d_i}{L}\right)\right] + \sum F_i L^3 Y_4\left(\frac{x-b_i}{L}\right)$$

;

(3)

## Сопротивление материалов

$$\begin{aligned}
 EJ\varphi(x) = & -\frac{4EI}{L}v_0 \cdot Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + EJ\varphi_0 \cdot Y_1\left(\frac{x}{L}\right) - \left[ M_0LY_2\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0L^2Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\
 & + \sum m_iLY_2\left(\frac{x-a_i}{L}\right) - \sum q_iL^3Y_4\left(\frac{x-c_i}{L}\right) + \sum q_iL^3Y_4\left(\frac{x-d_i}{L}\right) - \\
 & \left. \sum F_iL^2Y_3\left(\frac{x-b_i}{L}\right) \right];
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 M(x) = & \frac{4}{L^2}EJv_0 \cdot Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{4}{L}EJ\varphi_0 \cdot Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + M_0Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0LY_2\left(\frac{x}{L}\right) + \\
 & + \sum m_iY_1\left(\frac{x-a_i}{L}\right) - \sum q_iL^2Y_3\left(\frac{x-c_i}{L}\right) + \sum q_iL^2Y_3\left(\frac{x-d_i}{L}\right) - \sum F_iLY_2\left(\frac{x-b_i}{L}\right);
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 Q(x) = & \frac{4}{L^3}EJv_0 \cdot Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{4}{L^2}EJ\varphi_0 \cdot Y_3\left(\frac{x}{L}\right) - M_0\frac{4}{L}Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0Y_1\left(\frac{x}{L}\right) - \\
 & - \sum m_i\frac{4}{L}Y_4\left(\frac{x-a_i}{L}\right) - \sum q_iLY_2\left(\frac{x-c_i}{L}\right) + \sum q_iLY_2\left(\frac{x-d_i}{L}\right) - \sum F_iY_1\left(\frac{x-b_i}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Здесь

$v_0$ - прогиб в начале координат;

$\varphi_0$ - угол поворота в начале координат;

$M_0$ - изгибающий момент в начале координат;

$Q_0$ - поперечная сила в начале координат;

$m_i$ - сосредоточенный момент, приложенный на расстоянии  $a_i$  от левого конца балки;

$F_i$ - сосредоточенная сила, приложенная на расстоянии  $b_i$  от левого конца балки;

$q_i$  – интенсивность равномерно распределённой нагрузки на участке, который начинается на расстоянии  $c_i$  от левого конца балки и заканчивается на расстоянии  $d_i$  от левого конца балки.

При определении  $v(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$  в каком – либо сечении балки по формулам (3), (4), (5), (6), учитываются только те слагаемые, которые соответствуют нагрузкам, лежащим слева от этого сечения.

Начальные параметры  $v_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  определяются из граничных условий. Граничные условия на концах балки (значения  $v(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $M(x)$  и  $Q(x)$ ) приведены в таблице №1.

**Таблица 1**

Условия на концах балки		Левый конец ( $x = 0$ )				Правый конец ( $x = l$ )			
Левый конец	Правый конец	$v(0)$	$\varphi(0)$	$M(0)$	$Q(0)$	$v(l)$	$\varphi(l)$	$M(l)$	$Q(l)$
Свободен	Свободен	-	-	$M_0$	$Q_0$	-	-	$M_1$	$Q_1$
Свободен	Шарнирно-опёрт	-	-	$M_0$	$Q_0$	0	-	$M_1$	-
Свободен	Заделан	-	-	$M_0$	$Q_0$	0	0	-	-
Шарнирно-опёрт	Шарнирно-опёрт	0	-	$M_0$	-	0	-	$M_1$	-
Шарнирно-опёрт	Заделан	0	-	$M_0$	-	0	0	-	-
Заделан	Заделан	0	0	-	-	0	0	-	-

В формулах  $3 \div 6$   $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  - функции А.Н. Крылова

$$Y_1(\xi) = \cosh \xi \cos \xi = \frac{1}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) \cos \xi;$$

$$Y_2(\xi) = \frac{1}{2} (\cosh \xi \sin \xi + \sinh \xi \cos \xi)$$

$$= \frac{1}{4} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi + (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi];$$

$$Y_3(\xi) = \frac{1}{4} \sinh \xi \sin \xi = \frac{1}{4} (e^\xi - e^{-\xi}) \sin \xi;$$

$$Y_4(\xi) = \frac{1}{4} (\cosh \xi \sin \xi - \sinh \xi \cos \xi)$$

$$= \frac{1}{8} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi - (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi].$$

При дифференцировании функций Крылова справедливы следующие зависимости

$$Y_1' = -4Y_4; \quad Y_2' = Y_1; \quad Y_3' = Y_2; \quad Y_4' = Y_3.$$

Значения функций А.Н. Крылова приведены в Приложении 2.



## 2. ПРИМЕР РАСЧЁТА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ БАЛКИ НА УПРУГОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТАБЛИЦ ФУНКЦИЙ КРЫЛОВА

### 2.1. Постановка задачи

Дана балка двутаврового поперечного сечения, нагруженная сосредоточенным моментом  $m$ , сосредоточенной силой  $F$  и распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$  на упругом основании (рис.5).

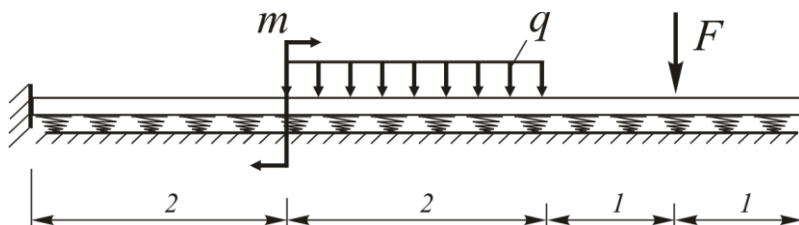


Рис.5. Консольная балка на упругом основании.

Слева балка жёстко закреплена, справа - свободно опёрта.  
**Дано:**  $m=10$  кНм,  $F=10$  кН,  $q=10$  кН/м, поперечное сечение - двутавр № 20, грунт песчано-глинистый с коэффициентом постели  $k=100 \frac{\text{Н}}{\text{см}^3}$  (Приложение 1).

Из сортамента выписываем необходимые данные для двутавра №20:

- ширина полки двутавра №20, соприкасающейся с основанием,  $b=10$  см;
- осевой момент инерции относительно нейтральной линии  $J=1840 \text{ см}^4$ .

Модуль упругости стали при растяжении  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, жесткость балки при изгибе  $EJ=3680$  кНм<sup>2</sup>,  $\alpha = k \cdot b = 100 \frac{\text{Н}}{\text{см}^3} \cdot 10$  см = 10 МПа,

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\alpha}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4}{10 \text{ МПа}}} = 1.1 \text{ м.}$$

## 2.2. Решение численного примера

### 2.2.1. Составить выражения для внутренних усилий и перемещений для заданной балки.

Запишем выражения для вычисления прогиба  $v(x)$ , угла поворота  $\varphi(x)$ , изгибающего момента  $M(x)$ , поперечной силы  $Q(x)$ , используя формулы (3), (4), (5), (6)

$$EJv(x) = EJv_0 \cdot Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + EJ\varphi_0 \cdot L \cdot Y_2\left(\frac{x}{L}\right) - \left[ M_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L^3 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) \right]_{0 \leq x \leq 2m} - \left[ mL^2 Y_3\left(\frac{x-2m}{L}\right) - q \frac{L^4}{4} \left[ 1 - Y_1\left(\frac{x-2m}{L}\right) \right] \right]_{2m \leq x \leq 4m} - q \frac{L^4}{4} \left[ 1 - Y_1\left(\frac{x-4m}{L}\right) \right]_{4m \leq x \leq 5m} + FL^3 Y_4\left(\frac{x-5m}{L}\right)_{5m \leq x \leq 6m}$$

$$EJ\varphi(x) = -\frac{4}{L} EJv_0 \cdot Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + EJv_0 \cdot Y_1\left(\frac{x}{L}\right) - \left[ M_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) \right]_{0 \leq x \leq 2m} - \left[ mL Y_2\left(\frac{x-2m}{L}\right) - q L^3 Y_4\left(\frac{x-2m}{L}\right) \right]_{2m \leq x \leq 4m} + q L^3 Y_4\left(\frac{x-4m}{L}\right)_{4m \leq x \leq 5m} + FL^2 Y_3\left(\frac{x-5m}{L}\right)_{5m \leq x \leq 6m}$$

$$M(x) = \frac{4}{L^2} EJv_0 \cdot Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{4}{L} EJ\varphi_0 \cdot Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + \left[ M_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) \right]_{0 \leq x \leq 2m} + \left[ m Y_1\left(\frac{x-2m}{L}\right) - q L^2 Y_3\left(\frac{x-2m}{L}\right) \right]_{2m \leq x \leq 4m} + q L^2 Y_3\left(\frac{x-4m}{L}\right)_{4m \leq x \leq 5m} - F L Y_2\left(\frac{x-5m}{L}\right)_{5m \leq x \leq 6m}$$

$$Q(x) = \frac{4}{L^3} EJv_0 \cdot Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{4}{L^2} EJ\varphi_0 \cdot Y_3\left(\frac{x}{L}\right) - \left[ M_0 \frac{4}{L} Y_4\left(\frac{x}{L}\right) - Q_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) \right]_{0 \leq x \leq 2m} - \left[ m \frac{4}{L} Y_4\left(\frac{x-2m}{L}\right) + q L Y_2\left(\frac{x-2m}{L}\right) \right]_{2m \leq x \leq 4m} + q L Y_2\left(\frac{x-4m}{L}\right)_{4m \leq x \leq 5m} - F Y_1\left(\frac{x-5m}{L}\right)_{5m \leq x \leq 6m}$$

### 2.2.2. Определить численные значений начальных параметров.

Найдём начальные параметры  $v_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $Q_0$ ,  $M_0$ , используя граничные условия.

На левом конце балки прогиб  $v(x)$  и угол поворота  $\varphi(x)$  отсутствуют, так как это сечение балки жёстко зашце́млено. То есть,  $v_1(0) = v_0 = 0$  (1-е граничное условие),  $\varphi_1(0) = \varphi_0 = 0$  (2-е граничное условие).

На правом конце балки отсутствуют поперечная сила  $Q(x)$  и изгибающий момент  $M(x)$ , так как это сечение балки свободно оперто (свободное опирание). То есть,  $Q_4(6m) = 0$  (3-е граничное условие),  $M_4(6m) = 0$  (4-е граничное условие).

Составим таблицу №2 значений функций Крылова, необходимых для дальнейших расчётов: определения  $Q_0, M_0$ , построения эпюр  $v(x), \varphi(x), Q(x), M(x)$ .

**Таблица 2**

$x(\text{м})$	$\xi = \frac{x}{L}$	$Y_1\left(\frac{x}{L}\right)$	$Y_2\left(\frac{x}{L}\right)$	$Y_3\left(\frac{x}{L}\right)$	$Y_4\left(\frac{x}{L}\right)$
0,5	0,45	0,9932	0,4494	0,1012	0,0152
1,0	0,91	0,8859	0,8893	0,4109	0,1252
1,5	1,36	0,4345	1,2057	0,8898	0,4124
2,0	1,82	-0,7811	1,1640	1,4561	0,9526
2,5	2,27	-3,1485	0,33065	1,83215	1,7064
3,0	2,73	-7,0564	-1,9587	1,5267	2,519



3.5	3.18	-12.0353	-6.2281	-0.2305	2.8828
4,0	3.63	-16.6626	-12.77475	-4.4217	1.9459
4.5	4.09	-17.4159	-20.8419	-12.132	-1.7179
5,0	4.56	-7.2556	-27.2485	-23.6164	-9.9973
5.5	5,00	21.0504	-25.0565	-35.5775	-23.0525
6,0	5.45	78.4841	-3.727	-42.966	-41.1041

Подставив в выражения  $Q(x)$  и  $M(x)$  значения функций Крылова из таблицы № 2 (при  $x = 6m$ ), все известные значения приложенных внешних нагрузок, учитывая 3-е и 4-е граничные условия, получим уравнения для определения  $Q_0, M_0$

$$\begin{cases} 78.5Q_0 + 149.5 M_0 + 72.7 = 0 \\ -4.19Q_0 + 78.5 M_0 - 104.7 = 0 \end{cases}$$

Решив систему этих двух уравнений, найдём численные значения начальных параметров  $Q_0, M_0$

$$\begin{cases} Q_0 = -3.15 \text{ кН;} \\ M_0 = 1.17 \text{ кНм.} \end{cases}$$

### 2.2.2. Построить эпюры $Q(x), M(x), \varphi(x), v(x)$ .

Запишем выражения для вычисления поперечной силы  $Q(x)$ , изгибающего момента  $M(x)$ , угла поворота  $\varphi(x)$  и прогиба  $v(x)$ , используя формулы (3), (4), (5), (6)

$$Q(x) = - \left[ M_0 \frac{4}{L} Y_4 \left( \frac{x}{L} \right) - Q_0 Y_1 \left( \frac{x}{L} \right) \right] \frac{1 \text{ уч-ок}}{0 \leq x \leq 2m} - \left[ m \frac{4}{L} Y_4 \left( \frac{x-2m}{L} \right) + qLY_2 \left( \frac{x-2m}{L} \right) \right] \frac{2 \text{ уч-ок}}{2m \leq x \leq 4m} + \left[ qLY_2 \left( \frac{x-4m}{L} \right) \right] \frac{3 \text{ уч-ок}}{4m \leq x \leq 5m} - \left[ FY_1 \left( \frac{x-5m}{L} \right) \right] \frac{4 \text{ уч-ок}}{5m \leq x \leq 6m}$$

;

$$M(x) = \left[ M_0 Y_1 \left( \frac{x}{L} \right) + Q_0 LY_2 \left( \frac{x}{L} \right) \right] \frac{1 \text{ уч-ок}}{0 \leq x \leq 2m} + \left[ mY_1 \left( \frac{x-2m}{L} \right) - qL^2 Y_3 \left( \frac{x-2m}{L} \right) \right] \frac{2 \text{ уч-ок}}{2m \leq x \leq 4m} + \left[ qL^2 Y_3 \left( \frac{x-4m}{L} \right) \right] \frac{3 \text{ уч-ок}}{4m \leq x \leq 5m} - \left[ FL Y_2 \left( \frac{x-5m}{L} \right) \right] \frac{4 \text{ уч-ок}}{5m \leq x \leq 6m}$$

;

$$EJ\varphi(x) = - \left[ M_0 LY_2 \left( \frac{x}{L} \right) + Q_0 L^2 Y_3 \left( \frac{x}{L} \right) \right] \frac{1 \text{ уч-ок}}{0 \leq x \leq 2m} - \left[ mL Y_2 \left( \frac{x-2m}{L} \right) - qL^3 Y_4 \left( \frac{x-2m}{L} \right) \right] \frac{2 \text{ уч-ок}}{2m \leq x \leq 4m} - \left[ qL^3 Y_4 \left( \frac{x-4m}{L} \right) \right] \frac{3 \text{ уч-ок}}{4m \leq x \leq 5m} + \left[ FL^2 Y_3 \left( \frac{x-5m}{L} \right) \right] \frac{4 \text{ уч-ок}}{5m \leq x \leq 6m}$$

;

$$EJv(x) = - \left[ M_0 L^2 Y_3 \left( \frac{x}{L} \right) + Q_0 L^3 Y_4 \left( \frac{x}{L} \right) \right] \frac{1 \text{ уч-ок}}{0 \leq x \leq 2m} - \left[ mL^2 Y_3 \left( \frac{x-2m}{L} \right) - q \frac{L^4}{4} \left[ 1 - Y_1 \left( \frac{x-2m}{L} \right) \right] \right] \frac{2 \text{ уч-ок}}{2m \leq x \leq 4m} - \left[ q \frac{L^4}{4} \left[ 1 - Y_1 \left( \frac{x-4m}{L} \right) \right] \right] \frac{3 \text{ уч-ок}}{4m \leq x \leq 5m} + \left[ FL^3 Y_4 \left( \frac{x-5m}{L} \right) \right] \frac{4 \text{ уч-ок}}{5m \leq x \leq 6m}$$

;

## Сопротивление материалов

После подстановки в эти выражения известных значений  $M_0 = 1.17 \text{ кНм}$ ,  $Q_0 = -3.15 \text{ кН}$ ,  $m = 10 \text{ кНм}$ ,  $q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $L = 1.1 \text{ м}$ , получим уравнения для вычисления  $Q(x)$ ,  $M(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $v(x)$ , в которые входят функции Крылова

$$Q(x) = \left[ -4.3Y_4\left(\frac{x}{L}\right) - 3.15Y_1\left(\frac{x}{L}\right) \right]_{0 \leq x \leq 2\text{м}} \frac{1 \text{ уч} - \text{ок}}{0 \leq x \leq 2\text{м}} - \left[ 36.36Y_4\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) + 11Y_2\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) \right]_{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} \frac{2 \text{ уч} - \text{ок}}{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} + \left[ 11Y_2\left(\frac{x-4\text{м}}{L}\right) \right]_{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} \frac{3 \text{ уч} - \text{ок}}{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} - \left[ 10Y_1\left(\frac{x-5\text{м}}{L}\right) \right]_{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} \frac{4 \text{ уч} - \text{ок}}{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} ; ( \text{кН} )$$

$$M(x) = \left[ 1.17Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + 3.47Y_2\left(\frac{x}{L}\right) \right]_{0 \leq x \leq 2\text{м}} \frac{1 \text{ уч} - \text{ок}}{0 \leq x \leq 2\text{м}} + \left[ 10Y_1\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) - 12.1Y_3\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) \right]_{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} \frac{2 \text{ уч} - \text{ок}}{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} + \left[ 12.1Y_3\left(\frac{x-4\text{м}}{L}\right) \right]_{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} \frac{3 \text{ уч} - \text{ок}}{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} - \left[ 11Y_2\left(\frac{x-5\text{м}}{L}\right) \right]_{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} \frac{4 \text{ уч} - \text{ок}}{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} ] \text{ кНм}$$

$$EJ\varphi(x) = \left[ -1.276Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + 3.81Q_0Y_3\left(\frac{x}{L}\right) \right]_{0 \leq x \leq 2\text{м}} \frac{1 \text{ уч} - \text{ок}}{0 \leq x \leq 2\text{м}} - \left[ 11Y_2\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) + 13.3Y_4\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) \right]_{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} \frac{2 \text{ уч} - \text{ок}}{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} - \left[ 13.3Y_4\left(\frac{x-4\text{м}}{L}\right) \right]_{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} \frac{3 \text{ уч} - \text{ок}}{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} + \left[ 12.1Y_3\left(\frac{x-5\text{м}}{L}\right) \right]_{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} \frac{4 \text{ уч} - \text{ок}}{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} ] \text{ кНм}^2$$

$$EJv(x) = \left\{ -1.41Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + 4.2Y_4\left(\frac{x}{L}\right) \right\}_{0 \leq x \leq 2\text{м}} \frac{1 \text{ уч} - \text{ок}}{0 \leq x \leq 2\text{м}} - \left[ 12.1Y_3\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) + 3.66 \left[ 1 - Y_1\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) \right] \right]_{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} \frac{2 \text{ уч} - \text{ок}}{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} - \left[ 3.66 \left[ 1 - Y_1\left(\frac{x-4\text{м}}{L}\right) \right] \right]_{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} \frac{3 \text{ уч} - \text{ок}}{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} + \left[ 13.31Y_4\left(\frac{x-5\text{м}}{L}\right) \right]_{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} \frac{4 \text{ уч} - \text{ок}}{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} \} \text{ кНм}^3$$

Для построения эпюр найдём численные значения  $Q(x)$ ,  $M(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $v(x)$  в характерных точках соответствующих участков балки.

- **Вычисление численных значений  $Q(x)$  в характерных точках соответствующих участков балки.**

$$Q(x) = \left[ -4.3Y_4\left(\frac{x}{L}\right) - 3.15Y_1\left(\frac{x}{L}\right) \begin{cases} 1\text{уч} - \text{ок} \\ 0 \leq x \leq 2M \\ -11Y_2\left(\frac{x-2M}{L}\right) \end{cases} \begin{cases} 2\text{уч} - \text{ок} \\ 2M \leq x \leq 4M \\ + \end{cases} + 11Y_2\left(\frac{x-4M}{L}\right) \begin{cases} 3\text{уч} - \text{ок} \\ 4M \leq x \leq 5M \\ -10Y_1\left(\frac{x-5M}{L}\right) \end{cases} \begin{cases} 4\text{уч} - \text{ок} \\ 5M \leq x \leq 6M \end{cases} \right]$$

**1 участок:**  $0 \leq x \leq 2M$

$$Q_1(0.5M) = -4,3 * 0,0152 - 3,15 * 0,99 = -3,18 \text{ кН};$$

$$Q_1(1,0M) = -4,3 * 0,1252 - 3,15 * 0,8859 = -3,33 \text{ кН};$$

$$Q_1(1,5M) = -4,3 * 0,4124 - 3,15 * 0,4345 = -3,11 \text{ кН};$$

$$Q_1(2,0M) = -4,3 * 0,9526 - 3,15 * (-0,7811) = -1,6 \text{ кН}.$$

**2 участок:**  $2M \leq x \leq 4M$

$$Q_2(2,5M) = -4,3 * 1,7 - 3,15 * (-3,1485) - 36,36 * 0,0152 - 11 * 0,4494 = -2,89 \text{ кН};$$

$$Q_2(3,0M) = -4,3 * 2,519 - 3,15 * (-7,0564) - 36,36 * 0,1252 - 11 * 0,8893 = -2,94 \text{ кН};$$

$$Q_2(3,5M) = -4,3 * 2,8828 - 3,15 * (-12,0353) - 36,36 * 0,4124 - 11 * 1,2057 = -2,7 \text{ кН}$$

$$Q_2(4,0M) = -4,3 * 1,9459 - 3,15 * (-16,6626) - 36,36 * 0,9526 - 11 * 1,164 = -3,3 \text{ кН}$$

**3 участок:**  $4M \leq x \leq 5M$

$$Q_3(4,5M) = -4,3 * (-1,7179) - 3,15 * (-17,42) - 36,36 * 1,71 - 11 * (0,331 - 0,45) = 1,39 \text{ кН};$$

$$Q_3(5,0M) = -4,3 * (-9,9973) - 3,15 * (-7,2556) - 36,36 * 2,519 - 11 * (-1,9587 - 0,8893) = 5,58 \text{ кН}$$

**4 участок:**  $5M \leq x \leq 6M$

$$Q_3(5,0M) = -4,3 * (-9,973) - 3,15 * (-7,2556) - 36,36 * 2,519 + 11 * (1,9587 + 0,8893) - 10 = -4,42 \text{ кН}$$



$$Q_2(5,5\text{м}) = 4,3 * 23,0525 - 3,15 * 21,05 - 36,36 * 2,8828 - 11 * (-6,2281 - 1,21) - 10 * 0,9932 = -0,11 \text{ кН}$$

$$Q_2(6,0\text{м}) = -4,3 * (-41,1) - 3,15 * 78,48 - 36,36 * 1,95 + 11 * (12,8 + 1,16) - 10 * 0,89 = 0 \text{ кН}$$

- **Вычисление численных значений  $M(x)$  в характерных точках соответствующих участков балки**

$$M(x) = \left[ 1,17Y_1\left(\frac{x}{L}\right) - 3,47Y_2\left(\frac{x}{L}\right) \Big|_{0 \leq x \leq 2\text{м}}^{1\text{уч} - \text{ок}} + 10Y_1\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) - 12,1Y_3\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) \Big|_{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}}^{2\text{уч} - \text{ок}} + 12,1Y_3\left(\frac{x-4\text{м}}{L}\right) \Big|_{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}}^{3\text{уч} - \text{ок}} - 11Y_2\left(\frac{x-5\text{м}}{L}\right) \Big|_{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}}^{4\text{уч} - \text{ок}} \right]$$

**1 участок:**  $0 \leq x \leq 2\text{м}$

$$M_1(0,5\text{м}) = 1,17 * 0,9932 - 3,47 * 0,4494 = -0,397 \text{ кНм};$$

$$M_1(1,0\text{м}) = 1,17 * 0,8859 - 3,47 * 0,8893 = -2,0 \text{ кНм};$$

$$M_1(1,5\text{м}) = 1,17 * 0,4345 - 3,47 * 1,2057 = -3,7 \text{ кНм};$$

$$M_1(2,0\text{м}) = 1,17 * (-0,7811) - 3,47 * 1,164 = -4,95 \text{ кНм}.$$

**2 участок:**  $2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}$

$$M_2(2,0\text{м}) = 1,17 * (-0,7811) - 3,47 * 1,164 + 10 = 5,05 \text{ кНм};$$

$$M_2(2,5\text{м}) = 1,17 * (-3,1585) - 3,47 * 0,33065 + 10 * 0,9932 - 12,1 * 0,1012 = 3,88 \text{ кНм}$$

$$M_2(3,0\text{м}) = 1,17 * (-7,0564) - 3,47 * (-1,9587) + 10 * 0,8859 - 12,1 * 0,4109 = 2,43 \text{ кНм};$$

$$M_2(3,5\text{м}) = 1,17 * (-12,0353) - 3,47 * (-6,2281) + 10 * 0,4345 - 12,1 * 0,8898 = 1,1 \text{ кНм}$$

*Управление дистанционного образования и повышения квалификации*

*Расчет балок на упругом основании*

$$M_2(4,0\text{м}) = 1,17 * (-16,6625) - 3,47 * (-12,77) + 10 * (-0,7811) - 12,1 * 1,4561 = -0,61 \text{ кНм}.$$

**3 участок:**  $4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}$

$$M_3(4.5M) = 1.17 * (-17,42) - 3,47 * (-20,8419) + 10 * (-3,1485) - 12,1 * (1,83215 - 0,1012) = -0,49 \text{ кНМ}$$

$$M_3(5.0M) = 1.17 * (-7,2556) - 3,47 * (-27,2485) + 10 * (-7,0564) - 12,1 * (1,5267 - 0,4109) = 1,998 \text{ кНМ}$$

**4 участок:  $5M \leq x \leq 6M$** 

$$M_4(5.5M) = 1.17 * 21,0504 - 3,47 * (-25,0565) + 10 * (-12,0353) + 12,1$$

$$* (0,205 + 0,8899) - 11 * 0,4494 = -0,473 \text{ кНМ};$$

$$M_4(6.0M) = 1.17 * 78,4841 - 3,47 * 3,727 + 10 * (-16,6626) + 12,1 * (4,4217 + 1,4561) - 11 * 0,8893 = 0.$$

- **Вычисление численных значений  $\varphi(x)$  в характерных точках соответствующих участков балки**

$$EJ\varphi(x) = \left[ -1,276Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + 3,81Q_0V_3\left(\frac{x}{L}\right) \Big|_{0 \leq x \leq 2M}^{1\text{уч} - \text{ок}} - 11Y_2\left(\frac{x-2M}{L}\right) + 13,3Y_4\left(\frac{x-2M}{L}\right) \Big|_{2M \leq x \leq 4M}^{2\text{уч} - \text{ок}} - 13,3Y_4\left(\frac{x-4M}{L}\right) \Big|_{4M \leq x \leq 5M}^{3\text{уч} - \text{ок}} + 12,1Y_3\left(\frac{x-5M}{L}\right) \Big|_{5M \leq x \leq 6M}^{4\text{уч} - \text{ок}} \right] \text{кНМ}^2.$$

**1 участок:  $0 \leq x \leq 2M$** 

$$EJ\varphi_1(0.5M) = -1,276 * 0,4494 + 3,81 * 0,1012 = -0,187 \text{ кНМ}^2;$$

$$EJ\varphi_1(1.0M) = -1,276 * 0,8893 + 3,81 * 0,4109 = 0,417 \text{ кНМ}^2;$$

$$EJ\varphi_1(1.5M) = -1,276 * 1,2057 + 3,81 * 0,8898 = 1,85 \text{ кНМ}^2;$$

$$EJ\varphi_1(2.0M) = -1,276 * 1,1640 + 3,81 * 1,4561 = 4,01 \text{ кНМ}^2.$$

**2 участок:  $2M \leq x \leq 4M$** 

$$EJ\varphi_2(2.5M) = -1,276 * 0,33065 + 3,81 * 1,8215 - 11 * 0,4494 + 13,3 * 0,0152 = 1,82 \text{ кНМ}^2$$

$$EJ\varphi_2(3.0M) = -1,276 * (-1,9587) + 3,81 * 1,5267 - 11 * 0,8893 + 13,3 * 0,1252 = 0,199 \text{ кНМ}^2$$

$$EJ\varphi_2(3.5M) = -1,276 * (-6,2281) + 3,81 * (-0,2305) - 11 * 1,2057 + 13,3 * 0,4124 = -0,71 \text{ кНМ}^2;$$

$$EJ\varphi_2(4.0M) = -1,276 * (-12,77475) + 3,81 * (-4,4217) - 11 * 1,164 + 13,3 * 0,9526 = -0,86 \text{ кНМ}^2.$$

**3 участок:  $4M \leq x \leq 5M$**

$$EJ\varphi_2(4.5\text{м}) = -1,276 * (-20,8419) + 3,81 * (-12,132) - 11 * 0,3307 + 13,3 * (1,706 - 0,0152) = -0,77 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ\varphi_2(5.0\text{м}) = -1,276 * (-27,2485) + 3,81 * (-23,6164) + 11 * 1,9587 + 13,3 * (2,519 - 0,1252) = -1,8 \text{ кНм}^2.$$

**4 участок:  $5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}$** 

$$EJ\varphi_4(5.5\text{м}) = -1,276 * (-25,0565) + 3,81 * (-35,5775) + 11 * 6,2281 + 13,3 * (2,8828 - 0,4124) + 12,1 * 0,1012 = -0,98 \text{ кНм}^2$$

$$EJ\varphi_4(6.0\text{м}) = -1,276 * (-3,727) + 3,81 * (-42,966) + 11 * 12,77475 + 13,3 * (1,9459 - 0,9526) + 12,1 * 0,4109 = -0,24 \text{ кНм}^2$$

- **Вычисление численных значений  $v(x)$  в характерных точках соответствующих участков балки**

$$EJv(x) = \left\{ -1,41Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + 4,2Y_4\left(\frac{x}{L}\right) \Big|_{0 \leq x \leq 2\text{м}} - 12,1Y_3\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) + 3,66 \left[ 1 - Y_1\left(\frac{x-2\text{м}}{L}\right) \right] \Big|_{2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}} - 3,66 \left[ 1 - Y_1\left(\frac{x-4\text{м}}{L}\right) \right] \Big|_{4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}} + 13,31Y_4\left(\frac{x-5\text{м}}{L}\right) \Big|_{5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}} \right\} \text{кНм}^3$$

**1 участок:  $0 \leq x \leq 2\text{м}$** 

$$EJv_1(0.5\text{м}) = -1,41 * 0,1012 + 4,2 * 0,0152 = -0,079 \text{ кНм}^3;$$

$$EJv_1(1.0\text{м}) = -1,41 * 0,4109 + 4,2 * 0,1252 = -0,05 \text{ кНм}^3;$$

$$EJv_1(1.5\text{м}) = -1,41 * 0,8898 + 4,2 * 0,4121 = 0,48 \text{ кНм}^3;$$

$$EJv_1(2.0\text{м}) = -1,41 * 1,4561 + 4,2 * 0,9526 = 1,96 \text{ кНм}^3.$$

**2 участок:  $2\text{м} \leq x \leq 4\text{м}$** 

$$EJv_2(2.5\text{м}) = -1,41 * 1,83215 + 4,2 * 1,7064 - 12,1 * 0,1012 + 3,66 * (1 - 0,9932) = 3,38 \text{ кНм}^3;$$

$$EJv_2(3.0\text{м}) = -1,41 * 1,5267 + 4,2 * 2,519 - 12,1 * 0,4109 + 3,66 * (1 - 0,8859) = 3,78 \text{ кНм}^3;$$

$$EJv_2(3.5\text{м}) = -1,41 * (-0,2305) + 4,2 * 2,8828 - 12,1 * 0,8898 + 3,66 * (1 - 0,4345) = 3,73 \text{ кНм}^3$$

$$EJv_2(4.0\text{м}) = -1,41 * (-4,4217) + 4,2 * 1,9459 - 12,1 * 1,4561 + 3,66 * (1 + 0,7811) = 3,3 \text{ кНм}^3$$

**3 участок:**  $4\text{м} \leq x \leq 5\text{м}$

$$EJv_3(4.5\text{м}) = -1,41 * (-12.132) + 4.2 * (-1.7179) - 12.1 * 1.83215 + 3.66 * (3.1485 + 0.9932) = 2.88 \text{ кНм}^2;$$

$$EJv_3(5.0\text{м}) = -1,41 * (-23.6164) + 4.2 * (-9.9973) - 12.1 * 1.5267 + 3.66 * (7.0564 + 0.8859) = 1.91 \text{ кНм}^2$$

**4 участок:**  $5\text{м} \leq x \leq 6\text{м}$

$$EJv_3(5.5\text{м}) = -1,41 * (-35.5775) + 4.2 * (-23.0525) + 12.1 * 0.2305 + 3.66 * (12.0353 + 0.4345) + 13.3 * 0.0152 = 1.77 \text{ кНм}^2;$$

$$EJv_3(5.5\text{м}) = -1,41 * (-42.966) + 4.2 * (-41.1041) + 12.1 * 4.421 + 3.66 * (16.6626 - 0.7811) + 13.3 * 0.1252 = 1.054 \text{ кНм}^2.$$

Полученные численные значения занесём в таблицу №3.

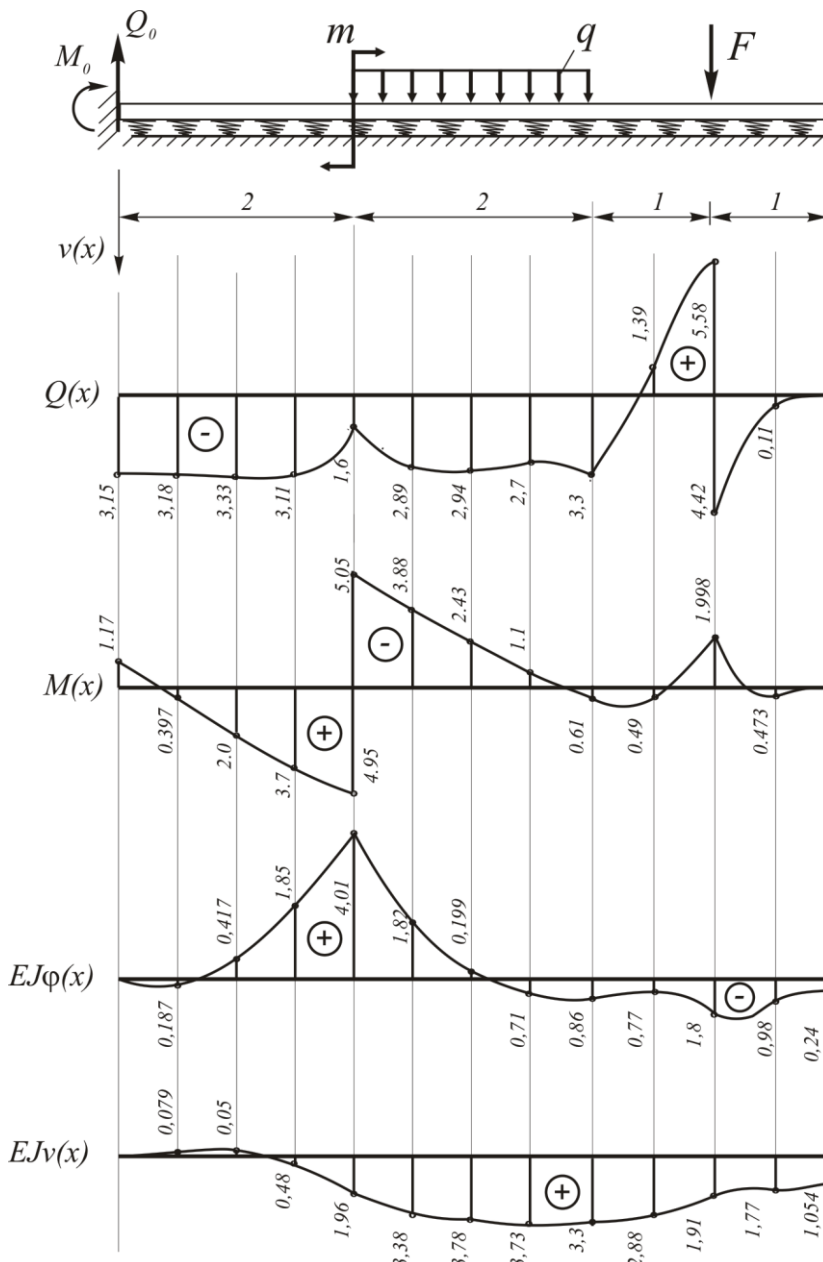


Таблица 3

$x$ (м)	$\xi = \frac{x}{L}$	$Q(x)$ (кН)	$M(x)$ (кНм)	$EJ\varphi(x)$ (кНм <sup>2</sup> )	$EJv(x)$ (кНм <sup>3</sup> )	Участки
0.0	0	-3.15	1.17	0	0	1-ый
0.5	0.45	-3.18	-0.397	-0.187	-0.079	1-ый
1.0	0.91	-3.33	-2	0.417	-0.05	1-ый
1.5	1.36	-3.11	-3.7	1.85	0.48	1-ый
2.0	1.82	-1.6	<u>1 – ый уч. : (-4.95)</u> 2 – ой уч. : 5.05	4.01	1.96	конец 1 начало 2
2.5	2.27	-2.89	3.88	1.82	3.38	2-ой
3.0	2.73	-2.94	2.43	0.199	3.78	2-ой
3.5	3.18	-2.7	1.1	-0.71	3.73	2-ой
4.0	3.63	-3.3	-0.61	-0.86	3.3	конец 2 начало 3
4.5	4.09	1.39	-0.47	-0.77	2.88	3-ий
5.0	4.56	<u>3 – ий уч. : (5.58)</u> 4 – ый уч. : (-4.42)	1.998	-1.8	1.91	конец 3 начало 4
5.5	5	-0.11	-0,473	-0,98	1.77	4-ый
6.0	5.45	0	0	-0,24	1.054	4-ый

По полученным численным значениям  $Q(x)$ ,  $M(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $v(x)$  строим эпюры (рис.6).

## Сопротивление материалов


 Рис.6. Эпюры  $Q(x)$ ,  $M(x)$ ,  $EJ\varphi(x)$ ,  $EJv(x)$ .

### 3. ПРОВЕРКА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Условие прочности балки имеет вид  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ .

Из эпюры  $M(x)$  определяем  $M_{\max}=5,05\text{кн}$ . Из сортамента для двутавра №20  $W_y = 184 \cdot 10^{-6}\text{м}^3$ .

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{5,05 \cdot 10^3 \text{ нм}}{184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 27 \text{ МПа} \leq 160 \text{ МПа}.$$

Условие жёсткости балки имеет вид  $v_{\max} \leq [v]$ .

Задавая  $[v] = \frac{l}{800}$ , получаем  $[v] = \frac{l}{800} = \frac{6\text{м}}{800} = 7,5 \cdot 10^{-3}\text{м}$ .

По эпюре  $v(x)$  определяем  $v_{\max} = \frac{3,78 \text{ кнм}^3}{EJ} = \frac{3,78 \text{ кнм}^3}{3680 \text{ кнм}^2} = 1 \cdot 10^{-3}\text{м} \leq [v] = 7,5 \cdot 10^{-3}\text{м}$ .

Балка недогружена. При необходимости должен быть проведён перерасчёт, т.е. выбран меньший номер двутавра и проделаны все расчёты, приведённые выше.

### 4. ВОПРОСЫ.

1. Что называется изгибом?
2. Что называется плоским изгибом?
3. Как должны быть приложены внешние нагрузки, чтобы в балке возникал плоский изгиб?
4. Что называется упругим Винклеровским основанием?
5. Балка на упругом основании является статически неопределимой?
6. Какая гипотеза лежит в основании расчёта балок на винклеровском основании?
7. Запишите дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом Винклеровском основании?
8. Напишите выражение функций Крылова.
9. Запишите зависимости, связывающие функции Крылова.
10. Запишите выражение для прогиба балки на упругом основании.
11. Запишите дифференциальные зависимости, связывающие  $Q(x)$ ,  $M(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $v(x)$ .

12. Как определяются начальные параметры  $v_0, \varphi_0, Q_0, M_0$ ,

## 5. ЛИТЕРАТУРА.

1. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) [Текст] : учебник / Варданян, Гумедин Суменович ; Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков; Под ред. Г. С. Варданяна. - Изд. испр. - М. : ИНФРА-М, 2011. - 505 с. : ил. - (Высшее образование). - Доп. Мин - вом образования РФ. - Учеб. изд. - Прил. - Сп. лит.: с.500
2. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] : Учебное пособие для студентов вузов / Под ред. В. К. Качурина; Авт.: Н. М. Беляев и др. - Изд.2-е, испр.; Репринтное изд. - М. : Альянс, 2014. - 429 с. : ил. - Доп. Мин. высш. и сред. спец. образования СССР; Прил. - ISBN 978-5-903034-39-1 : В пер.:7
3. Сопротивление материалов : Учебник для студ. строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; Под ред. А. В. Александрова. - 6-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2008. - 56 2.
4. Справочник для студентов технических вузов: Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов [Текст] / А. Д. Полянин и др. - 3-е изд. - М. : АСТ: Астрель, 2008. - 735 с. - ISBN 978-5-17-030740-1; 978-5-271-11602-5 : В пер.: 240-00. 0 с. : ил. - ISBN 978-5-06-003732-6 : В пер.:1005-00.
5. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. - 3-е изд., перераб. и доп. - Киев : Дельта, 2008. - 813 с. : ил. - Исп. лит.: с.799-800. - ISBN 978-966-8797-29-3 : В пер.: 2400-00.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### *Коэффициент постели оснований*

Материал основания	$k_0, \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$\frac{MIIa}{M}$
--------------------	--------------------------------------	------------------

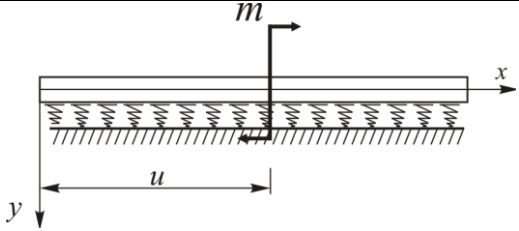
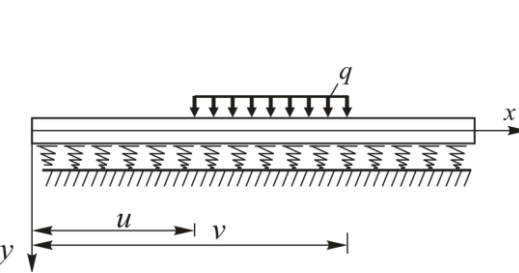


Песок свеженасыпной, глина мокрая, размячённая	0,1-0.5	1-5
Песок слежавшийся, гравий насыпной, глина влажная	0,5-5	5-50
Песок и гравий сложенный, щебень, глина малой влажности	5-10	50-100
Грунт песчано-глинистый уплотнённый, глина твёрдая	10-20	100-200
Известняк, песчаник, мерзлота	20-100	200-1000
Твёрдая скала	100-1500	$10^3 - 15 \cdot 10^3$
Кирпич	400-500	$4 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3$
Бутовая кладка	500-600	$5 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3$
Бетон и железобетон	800-15000	$8 \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^4$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Выражения для прогибов

	При $x > u$ $v(x) = \frac{F}{EJ} L^3 \gamma_4 \left( \frac{x-u}{L} \right)$
--	--

	При $x > u$ $v(x) = -\frac{m}{EJ} L^2 Y_3\left(\frac{x-u}{L}\right)$
	При $u \leq x \leq v$ $v(x) = \frac{q}{4EJ} L^4 \left[1 - Y_1\left(\frac{x-u}{L}\right)\right]$ При $x > v$ $v(x) = \frac{q}{4EJ} L^4 \left\{ \left[1 - Y_1\left(\frac{x-u}{L}\right)\right] - \left[1 - Y_1\left(\frac{x-v}{L}\right)\right] \right\}$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**Функции А.Н.Крылова для расчета балок постоянного сечения на упругом основании**

$x$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1	2	3	4	5
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,11	1,0000	0,1100	0,0060	0,0002
0,12	1,0000	0,1200	0,0072	0,0003
0,13	1,0000	0,1300	0,0084	0,0004
0,14	0,9999	0,1400	0,0098	0,0005
0,15	0,9999	0,1500	0,0112	0,0006
0,16	0,9999	0,1600	0,0128	0,0007
0,17	0,9999	0,1700	0,0144	0,0008
0,18	0,9998	0,1800	0,0162	0,0010
0,19	0,9998	0,1900	0,0180	0,0011
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0013
0,21	0,9997	0,2100	0,0220	0,0015
0,22	0,9996	0,2200	0,0242	0,0018
0,23	0,9995	0,2300	0,0264	0,0020
0,24	0,9994	0,2400	0,0288	0,0023
0,25	0,9993	0,2500	0,0312	0,0026
0,26	0,9992	0,2600	0,0338	0,0029
0,27	0,9991	0,2700	0,0364	0,0033
0,28	0,9990	0,2799	0,0392	0,0037
0,29	0,9988	0,2899	0,0420	0,0041
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,31	0,9985	0,3099	0,0480	0,0050
0,32	0,9983	0,3199	0,0512	0,0055
0,33	0,9980	0,3299	0,0544	0,0060
0,34	0,9978	0,3398	0,0578	0,0066
0,35	0,9975	0,3498	0,0612	0,0071
0,36	0,9972	0,3598	0,0648	0,0078
0,37	0,9969	0,3698	0,0684	0,0084
0,38	0,9965	0,3797	0,0722	0,0091

1	2	3	4	5
0,39	0,9961	0,3897	0,0760	0,0099
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,41	0,9953	0,4096	0,0840	0,0115
0,42	0,9948	0,4196	0,0882	0,0123
0,43	0,9943	0,4295	0,0924	0,0132
0,44	0,9938	0,4395	0,0968	0,0142
0,45	0,9932	0,4494	0,1012	0,0152
0,46	0,9925	0,4593	0,1057	0,0162
0,47	0,9919	0,4692	0,1104	0,0173
0,48	0,9912	0,4792	0,1151	0,0184
0,49	0,9904	0,4891	0,1200	0,0196
0,50	0,9896	0,4990	0,1249	0,0208

0,51	0,9887	0,5089	0,1300	0,0221
0,52	0,9878	0,5187	0,1351	0,0234
0,53	0,9869	0,5286	0,1403	0,0248
0,54	0,9858	0,5385	0,1457	0,0262
0,55	0,9848	0,5483	0,1511	0,0277
0,56	0,9836	0,5582	0,1566	0,0293
0,57	0,9824	0,5680	0,1623	0,0308
0,58	0,9811	0,5778	0,1680	0,0325
0,59	0,9798	0,5876	0,1738	0,0342
0,60	0,9784	0,5974	0,1797	0,0360
0,61	0,9769	0,6072	0,1858	0,0378
0,62	0,9754	0,6169	0,1919	0,0397
0,63	0,9738	0,6267	0,1981	0,0416
0,64	0,9720	0,6364	0,2044	0,0437
0,65	0,9703	0,6461	0,2108	0,0457
0,66	0,9684	0,6558	0,2173	0,0479
0,67	0,9664	0,6655	0,2239	0,0501
0,68	0,9644	0,6752	0,2307	0,0524
0,69	0,9622	0,6848	0,2375	0,0547
0,70	0,9600	0,6944	0,2443	0,0571
0,71	0,9577	0,7040	0,2513	0,0596
0,72	0,9552	0,7136	0,2584	0,0621
0,73	0,9527	0,7231	0,2656	0,0647
0,74	0,9501	0,7326	0,2729	0,0674
0,75	0,9473	0,7421	0,2803	0,0702
0,76	0,9444	0,7516	0,2877	0,0730
0,77	0,9415	0,7610	0,2953	0,0760
0,78	0,9384	0,7704	0,3029	0,0790

1	2	3	4	5
0,79	0,9351	0,7797	0,3107	0,0820
0,80	0,9318	0,7891	0,3185	0,0852
0,81	0,9283	0,7984	0,3265	0,0884
0,82	0,9247	0,8076	0,3345	0,0917
0,83	0,9210	0,8169	0,3426	0,0951
0,84	0,9171	0,8261	0,3508	0,0985
0,85	0,9131	0,8352	0,3592	0,1021
0,86	0,9090	0,8443	0,3676	0,1057
0,87	0,9046	0,8534	0,3760	0,1095
0,88	0,9002	0,8624	0,3846	0,1133
0,89	0,8956	0,8714	0,3933	0,1171
0,90	0,8908	0,8803	0,4020	0,1211
0,91	0,8859	0,8892	0,4109	0,1252
0,92	0,8808	0,8981	0,4198	0,1293
0,93	0,8755	0,9068	0,4289	0,1336
0,94	0,8701	0,9156	0,4380	0,1379
0,95	0,8645	0,9242	0,4472	0,1423
0,96	0,8587	0,9329	0,4565	0,1469

0,97	0,8528	0,9414	0,4658	0,1515
0,98	0,8466	0,9499	0,4753	0,1562
0,99	0,8403	0,9583	0,4848	0,1610
1,00	0,8337	0,9667	0,4944	0,1659
1,01	0,8270	0,9750	0,5042	0,1709
1,02	0,8201	0,9832	0,5139	0,1760
1,03	0,8129	0,9914	0,5238	0,1811
1,04	0,8056	0,9995	0,5338	0,1864
1,05	0,7980	1,0075	0,5438	0,1918
1,06	0,7902	1,0155	0,5539	0,1973
1,07	0,7822	1,0233	0,5641	0,2029
1,08	0,7740	1,0311	0,5744	0,2086
1,09	0,7655	1,0388	0,5847	0,2144
1,10	0,7568	1,0464	0,5952	0,2203
1,11	0,7479	1,0539	0,6057	0,2263
1,12	0,7387	1,0614	0,6162	0,2324
1,13	0,7293	1,0687	0,6269	0,2386
1,14	0,7196	1,0760	0,6376	0,2449
1,15	0,7097	1,0831	0,6484	0,2514
1,16	0,6995	1,0902	0,6593	0,2579
1,17	0,6891	1,0971	0,6702	0,2646

1	2	3	4	5
1,18	0,6784	1,1039	0,6812	0,2713
1,19	0,6674	1,1107	0,6923	0,2782
1,20	0,6561	1,1173	0,7034	0,2852
1,21	0,6446	1,1238	0,7146	0,2922
1,22	0,6327	1,1302	0,7259	0,2995
1,23	0,6206	1,1364	0,7372	0,3068
1,24	0,6082	1,1426	0,7486	0,3142
1,25	0,5955	1,1486	0,7601	0,3217
1,26	0,5824	1,1545	0,7716	0,3294
1,27	0,5691	1,1603	0,7832	0,3372
1,28	0,5555	1,1659	0,7948	0,3451
1,29	0,5415	1,1714	0,8065	0,3531
1,30	0,5272	1,1767	0,8182	0,3612
1,31	0,5126	1,1819	0,8300	0,3694
1,32	0,4977	1,1870	0,8419	0,3778
1,33	0,4824	1,1919	0,8538	0,3863
1,34	0,4668	1,1966	0,8657	0,3949
1,35	0,4508	1,2012	0,8777	0,4036
1,36	0,4345	1,2056	0,8897	0,4124
1,37	0,4178	1,2099	0,9018	0,4214
1,38	0,4008	1,2140	0,9139	0,4305
1,39	0,3834	1,2179	0,9261	0,4397
1,40	0,3656	1,2216	0,9383	0,4490
1,41	0,3474	1,2252	0,9505	0,4584
1,42	0,3289	1,2286	0,9628	0,4680

1,43	0,3100	1,2318	0,9751	0,4777
1,44	0,2907	1,2348	0,9874	0,4875
1,45	0,2710	1,2376	0,9998	0,4974
1,46	0,2509	1,2402	1,0122	0,5075
1,47	0,2304	1,2426	1,0246	0,5177
1,48	0,2095	1,2448	1,0370	0,5280
1,49	0,1882	1,2468	1,0495	0,5384
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
1,51	0,1442	1,2501	1,0745	0,5597
1,52	0,1216	1,2515	1,0870	0,5705
1,53	0,0986	1,2526	1,0995	0,5814
1,54	0,0751	1,2534	1,1120	0,5925
1,55	0,0512	1,2541	1,1246	0,6036
1,56	0,0268	1,2544	1,1371	0,6149

1	2	3	4	5
1,57	0,0020	1,2546	1,1497	0,6264
1,58	-0,0233	1,2545	1,1622	0,6379
1,59	-0,0490	1,2541	1,1747	0,6496
1,60	-0,0753	1,2535	1,1873	0,6614
1,61	-0,1020	1,2526	1,1998	0,6734
1,62	-0,1291	1,2515	1,2123	0,6854
1,63	-0,1568	1,2500	1,2248	0,6976
1,64	-0,1849	1,2483	1,2373	0,7099
1,65	-0,2136	1,2463	1,2498	0,7224
1,66	-0,2427	1,2440	1,2623	0,7349
1,67	-0,2724	1,2415	1,2747	0,7476
1,68	-0,3025	1,2386	1,2871	0,7604
1,69	-0,3332	1,2354	1,2995	0,7733
1,70	-0,3644	1,2319	1,3118	0,7864
1,71	-0,3961	1,2281	1,3241	0,7996
1,72	-0,4284	1,2240	1,3364	0,8129
1,73	-0,4612	1,2196	1,3486	0,8263
1,74	-0,4945	1,2148	1,3607	0,8399
1,75	-0,5284	1,2097	1,3729	0,8535
1,76	-0,5628	1,2042	1,3849	0,8673
1,77	-0,5977	1,1984	1,3969	0,8812
1,78	-0,6333	1,1923	1,4089	0,8953
1,79	-0,6694	1,1857	1,4208	0,9094
1,80	-0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,81	-0,7433	1,1716	1,4444	0,9381
1,82	-0,7811	1,1640	1,4560	0,9526
1,83	-0,8195	1,1560	1,4676	0,9672
1,84	-0,8584	1,1476	1,4792	0,9819
1,85	-0,8980	1,1388	1,4906	0,9968
1,86	-0,9382	1,1296	1,5019	1,0117
1,87	-0,9790	1,1201	1,5132	1,0268
1,88	-1,0203	1,1101	1,5243	1,0420
1,89	-1,0623	1,0997	1,5354	1,0573

1,90	-1,1049	1,0888	1,5463	1,0727
1,91	-1,1481	1,0776	1,5572	1,0882
1,92	-1,1920	1,0659	1,5679	1,1038
1,93	-1,2364	1,0537	1,5785	1,1196
1,94	-1,2815	1,0411	1,5890	1,1354
1,95	-1,3273	1,0281	1,5993	1,1513
1,96	-1,3737	1,0146	1,6095	1,1674

1	2	3	4	5
1,97	-1,4207	1,0006	1,6196	1,1835
1,98	-1,4683	0,9862	1,6295	1,1998
1,99	-1,5167	0,9712	1,6393	1,2161
2,00	-1,5656	0,9558	1,6489	1,2326
2,02	-1,6656	0,9235	1,6677	1,2657
2,04	-1,7682	0,8892	1,6859	1,2993
2,06	-1,8734	0,8528	1,7033	1,3332
2,08	-1,9815	0,8142	1,7200	1,3674
2,10	-2,0922	0,7735	1,7359	1,4020
2,12	-2,2058	0,7305	1,7509	1,4368
2,14	-2,3221	0,6852	1,7651	1,4720
2,16	-2,4413	0,6376	1,7783	1,5074
2,18	-2,5633	0,5876	1,7905	1,5431
2,20	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5790
2,22	-2,8160	0,4800	1,8119	1,6152
2,24	-2,9467	0,4224	1,8210	1,6515
2,26	-3,0802	0,3621	1,8288	1,6880
2,28	-3,2167	0,2992	1,8354	1,7247
2,30	-3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,32	-3,4986	0,1649	1,8447	1,7983
2,34	-3,6439	0,0935	1,8473	1,8352
2,36	-3,7922	0,0191	1,8485	1,8722
2,38	-3,9434	-0,0582	1,8481	1,9091
2,40	-4,0977	-0,1386	1,8461	1,9461
2,42	-4,2548	-0,2221	1,8425	1,9830
2,44	-4,4149	-0,3088	1,8372	2,0198
2,46	-4,5780	-0,3988	1,8301	2,0564
2,48	-4,7440	-0,4920	1,8212	2,0930
2,50	-4,9128	-0,5885	1,8104	2,1293
2,52	-5,0846	-0,6885	1,7977	2,1654
2,54	-5,2593	-0,7919	1,7829	2,2012
2,56	-5,4368	-0,8989	1,7660	2,2367
2,58	-5,6171	-1,0094	1,7469	2,2718
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7256	2,3065
2,62	-5,9862	-1,2415	1,7019	2,3408
2,64	-6,1748	-1,3631	1,6759	2,3746
2,66	-6,3661	-1,4885	1,6474	2,4078
2,68	-6,5600	-1,6177	1,6163	2,4405
2,70	-6,7566	-1,7509	1,5826	2,4725
2,72	-6,9556	-1,8880	1,5463	2,5037

1	2	3	4	5
2,74	-7,1571	-2,0291	1,5071	2,5343
2,76	-7,3611	-2,1743	1,4651	2,5640
2,78	-7,5674	-2,3236	1,4201	2,5929
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,82	-7,9867	-2,6346	1,3210	2,6477
2,84	-8,1995	-2,7965	1,2667	2,6736
2,86	-8,4144	-2,9626	1,2091	2,6984
2,88	-8,6312	-3,1331	1,1481	2,7220
2,90	-8,8499	-3,3079	1,0837	2,7443
2,92	-9,0703	-3,4871	1,0158	2,7653
2,94	-9,2923	-3,6707	0,9442	2,7849
2,96	-9,5158	-3,8588	0,8689	2,8030
2,98	-9,7407	-4,0514	0,7899	2,8196
3,00	-9,9669	-4,2484	0,7069	2,8346
3,02	-10,1942	-4,4500	0,6199	2,8479
3,04	-10,4225	-4,6562	0,5288	2,8594
3,06	-10,6517	-4,8670	0,4336	2,8690
3,08	-10,8815	-5,0823	0,3341	2,8767
3,10	-11,1119	-5,3022	0,2303	2,8823
3,12	-11,3426	-5,5268	0,1220	2,8859
3,14	-11,5736	-5,7559	0,0092	2,8872
3,16	-11,8045	-5,9897	-0,1083	2,8862
3,18	-12,0353	-6,2281	-0,2304	2,8828
3,20	-12,2657	-6,4711	-0,3574	2,8769
3,22	-12,4955	-6,7187	-0,4893	2,8685
3,24	-12,7246	-6,9709	-0,6262	2,8573
3,26	-12,9526	-7,2277	-0,7682	2,8434
3,28	-13,1794	-7,4890	-0,9153	2,8266
3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
3,32	-13,6284	-8,0252	-1,2256	2,7838
2,34	-3,6439	0,0935	1,8473	1,8352
2,36	-3,7922	0,0191	1,8485	1,8722
2,38	-3,9434	-0,0582	1,8481	1,9091
2,40	-4,0977	-0,1386	1,8461	1,9461
2,42	-4,2548	-0,2221	1,8425	1,9830
2,44	-4,4149	-0,3088	1,8372	2,0198
2,46	-4,5780	-0,3988	1,8301	2,0564
2,48	-4,7440	-0,4920	1,8212	2,0930
2,50	-4,9128	-0,5885	1,8104	2,1293
2,52	-5,0846	-0,6885	1,7977	2,1654

1	2	3	4	5
2,54	-5,2593	-0,7919	1,7829	2,2012
2,56	-5,4368	-0,8989	1,7660	2,2367
2,58	-5,6171	-1,0094	1,7469	2,2718
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7256	2,3065



2,62	-5,9862	-1,2415	1,7019	2,3408
2,64	-6,1748	-1,3631	1,6759	2,3746
2,66	-6,3661	-1,4885	1,6474	2,4078
2,68	-6,5600	-1,6177	1,6163	2,4405
2,70	-6,7566	-1,7509	1,5826	2,4725
2,72	-6,9556	-1,8880	1,5463	2,5037
2,74	-7,1571	-2,0291	1,5071	2,5343
2,76	-7,3611	-2,1743	1,4651	2,5640
2,78	-7,5674	-2,3236	1,4201	2,5929
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,82	-7,9867	-2,6346	1,3210	2,6477
2,84	-8,1995	-2,7965	1,2667	2,6736
2,86	-8,4144	-2,9626	1,2091	2,6984
2,88	-8,6312	-3,1331	1,1481	2,7220
2,90	-8,8499	-3,3079	1,0837	2,7443
2,92	-9,0703	-3,4871	1,0158	2,7653
2,94	-9,2923	-3,6707	0,9442	2,7849
2,96	-9,5158	-3,8588	0,8689	2,8030
2,98	-9,7407	-4,0514	0,7899	2,8196
3,00	-9,9669	-4,2484	0,7069	2,8346
3,02	-10,1942	-4,4500	0,6199	2,8479
3,04	-10,4225	-4,6562	0,5288	2,8594
3,06	-10,6517	-4,8670	0,4336	2,8690
3,08	-10,8815	-5,0823	0,3341	2,8767
3,10	-11,1119	-5,3022	0,2303	2,8823
3,12	-11,3426	-5,5268	0,1220	2,8859
3,14	-11,5736	-5,7559	0,0092	2,8872
3,16	-11,8045	-5,9897	-0,1083	2,8862
3,18	-12,0353	-6,2281	-0,2304	2,8828
3,02	-12,2657	-6,4711	-0,3574	2,8769
3,22	-12,4955	-6,7187	-0,4893	2,8685
3,24	-12,7246	-6,9709	-0,6262	2,8573
3,26	-12,9526	-7,2277	-0,7682	2,8434
3,28	-13,1794	-7,4890	-0,9153	2,8266
3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
3,32	-13,6284	-8,0252	-1,2256	2,7838

1	2	3	4	5
3,34	-13,8501	-8,3000	-1,3888	2,7577
3,36	-14,0696	-8,5792	-1,5576	2,7282
3,38	-14,2866	-8,8628	-1,7320	2,6954
3,40	-14,5008	-9,1506	-1,9121	2,6589
3,42	-14,7119	-9,4428	-2,0981	2,6188
3,44	-14,9197	-9,7391	-2,2899	2,5750
3,46	-15,1238	-10,0395	-2,4877	2,5272
3,48	-15,3239	-10,3440	-2,6915	2,4754
3,50	-15,5197	-10,6525	-2,9014	2,4195
3,52	-15,7109	-10,9648	-3,1176	2,3593
3,54	-15,8971	-11,2809	-3,3401	2,2948

3,56	-16,0780	-11,6006	-3,5689	2,2257
3,58	-16,2531	-11,9239	-3,8041	2,1520
3,60	-16,4221	-12,2507	-4,0458	2,0735
3,62	-16,5847	-12,5808	-4,2942	1,9901
3,64	-16,7404	-12,9141	-4,5491	1,9017
3,66	-16,8888	-13,2504	-4,8107	1,8081
3,68	-17,0296	-13,5896	-5,0791	1,7092
3,70	-17,1622	-13,9315	-5,3543	1,6049
3,72	-17,2862	-14,2760	-5,6364	1,4950
3,74	-17,4012	-14,6229	-5,9254	1,3794
3,76	-17,5067	-14,9720	-6,2213	1,2579
3,78	-17,6023	-15,3231	-6,5243	1,1305
3,80	-17,6874	-15,6760	-6,8343	0,9969
3,82	-17,7616	-16,0305	-7,1513	0,8570
3,84	-17,8244	-16,3864	-7,4755	0,7108
3,86	-17,8752	-16,7434	-7,8068	0,5580
3,88	-17,9135	-17,1013	-8,1452	0,3985
3,90	-17,9388	-17,4598	-8,4909	0,2321
3,92	-17,9504	-17,8188	-8,8436	0,0588
3,94	-17,9480	-18,1778	-9,2036	-0,1217
3,96	-17,9308	-18,5366	-9,5707	-0,3094
3,98	-17,8983	-18,8949	-9,9451	-0,5046
4,00	-17,8499	-19,2524	-10,3265	-0,7073
4,02	-17,7849	-19,6088	-10,7152	-0,9177
4,04	-17,7028	-19,9637	-11,1109	-1,1359
4,06	-17,6029	-20,3168	-11,5137	-1,3622
4,08	-17,4847	-20,6677	-11,9235	-1,5965
4,10	-17,3473	-21,0160	-12,3404	-1,8391
4,12	-17,1902	-21,3614	-12,7642	-2,0902

1	2	3	4	5
4,14	-17,0126	-21,7035	-13,1948	-2,3498
4,16	-16,8140	-22,0418	-13,6323	-2,6180
4,18	-16,5935	-22,3759	-14,0765	-2,8951
4,20	-16,3505	-22,7054	-14,5273	-3,1811
4,22	-16,0843	-23,0298	-14,9846	-3,4762
4,24	-15,7941	-23,3486	-15,4484	-3,7805
4,26	-15,4792	-23,6614	-15,9185	-4,0942
4,28	-15,1388	-23,9676	-16,3948	-4,4173
4,30	-14,7721	-24,2668	-16,8772	-4,7500
4,32	-14,3785	-24,5583	-17,3655	-5,0925
4,34	-13,9571	-24,8417	-17,8595	-5,4447
4,36	-13,5071	-25,1164	-18,3591	-5,8069
4,38	-13,0277	-25,3818	-18,8641	-6,1791
4,40	-12,5182	-25,6373	-19,3743	-6,5615
4,42	-11,9776	-25,8823	-19,8895	-6,9541
4,44	-11,4052	-26,1162	-20,4095	-7,3571
4,46	-10,8002	-26,3383	-20,9341	-7,7705
4,48	-10,1617	-26,5480	-21,4630	-8,1945

4,50	-9,4888	-26,7446	-21,9959	-8,6291
4,52	-8,7807	-26,9273	-22,5326	-9,0743
4,54	-8,0366	-27,0955	-23,0729	-9,5304
4,56	-7,2556	-27,2485	-23,6164	-9,9973
4,58	-6,4368	-27,3855	-24,1627	-10,4751
4,60	-5,5793	-27,5057	-24,7117	-10,9638
4,62	-4,6823	-27,6084	-25,2628	-11,4635
4,64	-3,7448	-27,6928	-25,8159	-11,9743
4,66	-2,7661	-27,7579	-26,3704	-12,4962
4,68	-1,7451	-27,8031	-26,9261	-13,0291
4,70	-0,6811	-27,8275	-27,4824	-13,5732
4,72	0,4269	-27,8301	-28,0390	-14,1284
4,74	1,5797	-27,8101	-28,5955	-14,6948
4,76	2,7784	-27,7666	-29,1513	-15,2723
4,78	4,0236	-27,6986	-29,7060	-15,8608
4,80	5,3164	-27,6053	-30,2590	-16,4605
4,82	6,6576	-27,4857	-30,8100	-17,0712
4,84	8,0481	-27,3387	-31,3583	-17,6929
4,86	9,4887	-27,1634	-31,9034	-18,3255
4,88	10,9804	-26,9588	-32,4446	-18,9690
4,90	12,5240	-26,7238	-32,9815	-19,6232
4,92	14,1204	-26,4575	-33,5134	-20,2882

1	2	3	4	5
4,94	15,7704	-26,1587	-34,0396	-20,9637
4,96	17,4749	-25,8263	-34,5595	-21,6497
4,98	19,2347	-25,4593	-35,0724	-22,3461
5,00	21,0506	-25,0565	-35,5776	-23,0526
5,04	24,8539	-24,1392	-36,5621	-24,4955
5,08	28,8912	-23,0651	-37,5067	-25,9770
5,12	33,1685	-21,8247	-38,4050	-27,4954
5,16	37,6916	-20,4084	-39,2503	-29,0487
5,20	42,4658	-18,8060	-40,0352	-30,6346
5,24	47,4963	-17,0077	-40,7522	-32,2506
5,28	52,7875	-15,0029	-41,3931	-33,8938
5,32	58,3436	-12,7811	-41,9495	-35,5610
5,36	64,1681	-10,3318	-42,4126	-37,2485
5,40	70,2640	-7,6441	-42,7729	-38,9526
5,44	76,6336	-4,7070	-43,0208	-40,6689
5,48	83,2784	-1,5097	-43,1460	-42,3926
5,52	90,1993	1,9589	-43,1379	-44,1188
5,56	97,3962	5,7099	-42,9855	-45,8417
5,60	104,8682	9,7543	-42,6772	-47,5555
5,64	112,6132	14,1030	-42,2011	-49,2537
5,68	120,6281	18,7669	-41,5448	-50,9292
5,72	128,9089	23,7568	-40,6954	-52,5747
5,76	137,4500	29,0831	-39,6397	-54,1821
5,80	146,2447	34,7562	-38,3641	-55,7429
5,84	155,2848	40,7860	-36,8545	-57,2481

5,88	164,5606	47,1821	-35,0964	-58,6880
5,92	174,0609	53,9538	-33,0749	-60,0523
5,96	183,7727	61,1098	-30,7749	-61,3302
6,00	193,6814	68,6583	-28,1809	-62,5104
6,04	203,7702	76,6067	-25,2769	-63,5806
6,08	214,0206	84,9620	-22,0469	-64,5282
6,12	224,4119	93,7302	-18,4745	-65,3398
6,16	234,9213	102,9166	-14,5429	-66,0013
6,20	245,5236	112,5252	-10,2355	-66,4982
6,24	256,1912	122,5593	-5,5352	-66,8149
6,28	266,8939	133,0209	-0,4251	-66,9355
6,32	277,5992	143,9109	5,1121	-66,8433
6,36	288,2715	155,2284	11,0935	-66,5207
6,40	298,8725	166,9716	17,5361	-65,9496
6,44	309,3611	179,1367	24,4569	-65,1114

1	2	3	4	5
6,48	319,6929	191,7184	31,8726	-63,9865
6,52	329,8204	204,7095	39,7998	-62,5548
6,56	339,6929	218,1007	48,2547	-60,7955
6,60	349,2563	231,8808	57,2530	-58,6871
6,64	358,4530	246,0363	66,8101	-56,2078
6,68	367,2218	260,5513	76,9407	-53,3347
6,72	375,4979	275,4075	87,6588	-50,0447
6,76	383,2126	290,5837	98,9776	-46,3140
6,80	390,2936	306,0560	110,9094	-42,1183
6,84	396,6644	321,7977	123,4657	-37,4329
6,88	402,2446	337,7786	136,6565	-32,2326
6,92	406,9500	353,9656	150,4907	-26,4918
6,96	410,6918	370,3218	164,9760	-20,1846
7,00	413,3774	386,8069	180,1182	-13,2850
7,04	414,9100	403,3766	195,9216	-5,7664
7,08	415,1883	419,9829	212,3888	2,3976
7,12	414,1069	436,5735	229,5201	11,2336
7,16	411,5563	453,0919	247,3137	20,7681
7,20	407,4225	469,4769	265,7656	31,0275
7,24	401,5874	485,6630	284,8692	42,0380
7,28	393,9289	501,5796	304,6151	53,8256
7,32	384,3204	517,1513	324,9910	66,4156
7,36	372,6317	532,2975	345,9815	79,8330
7,40	358,7284	546,9323	367,5680	94,1021
7,44	342,4724	560,9644	389,7281	109,2461
7,48	323,7218	574,2969	412,4358	125,2876
7,52	302,3313	586,8270	435,6611	142,2479
7,56	278,1524	598,4462	459,3698	160,1470
7,60	251,0333	609,0400	483,5232	179,0034
7,64	220,8193	618,4876	508,0777	198,8342
7,68	187,3535	626,6622	532,9852	219,6543
7,72	150,4765	633,4304	558,1920	241,4770

7,76	110,0269	638,6526	583,6390	264,3129
7,80	65,8419	642,1827	609,2616	288,1704
7,84	17,7575	643,8680	634,9890	313,0552
7,88	-34,3907	643,5492	660,7443	338,9699
7,92	-90,7678	641,0604	686,4440	365,9140
7,96	-151,5379	636,2292	711,9979	393,8835
8,00	-216,8648	628,8766	737,3088	422,8706
8,04	-286,9102	618,8171	762,2720	452,8636

1	2	3	4	5
8,08	-361,8339	605,8587	786,7755	483,8463
8,12	-441,7927	589,8032	810,6994	515,7979
8,16	-526,9396	570,4461	833,9157	548,6928
8,20	-617,4230	547,5769	856,2882	582,4999
8,24	-713,3862	520,9792	877,6722	617,1827
8,28	-814,9659	490,4311	897,9139	652,6985
8,32	-922,2916	455,7053	916,8509	688,9984
8,36	-1035,4843	416,5695	934,3115	726,0269
8,40	-1154,6557	372,7868	950,1145	763,7212
8,44	-1279,9069	324,1160	964,0693	802,0114
8,48	-1411,3270	270,3120	975,9754	840,8195
8,52	-1548,9921	211,1266	985,6225	880,0593
8,56	-1692,9640	146,3086	992,7904	919,6362
8,60	-1843,2882	75,6048	997,2487	959,4464
8,64	-1999,9932	-1,2396	998,7569	999,3768
8,68	-2163,0886	-84,4799	997,0643	1039,3043
8,72	-2332,5634	-174,3717	991,9098	1079,0958
8,76	-2508,3844	-271,1696	983,0225	1118,6073
8,80	-2690,4945	-375,1263	970,1208	1157,6840
8,84	-2878,8112	-486,4919	952,9136	1196,1596
8,88	-3073,2241	-605,5125	931,0994	1233,8557
8,92	-3273,5933	-732,4293	904,3673	1270,5820
8,96	-3479,7478	-867,4772	872,3966	1306,1352
9,00	-3691,4825	-1010,8835	834,8577	1340,2994
9,04	-3908,5573	-1162,8670	791,4116	1372,8451
9,08	-4130,6937	-1323,6356	741,7112	1403,5290
9,12	-4357,5736	-1493,3857	685,4010	1432,0939
9,16	-4588,8363	-1672,3000	622,1181	1458,2681
9,20	-4824,0766	-1860,5457	551,4926	1481,7654
9,24	-5062,8424	-2058,2731	473,1480	1502,2846
9,28	-5304,6320	-2265,6134	386,7025	1519,5092
9,32	-5548,8920	-2482,6766	291,7693	1533,1076
9,36	-5795,0145	-2709,5496	187,9576	1542,7324
9,40	-6042,3351	-2946,2938	74,8737	1548,0206
9,44	-6290,1297	-3192,9428	-47,8780	1548,5934

9,48	-6537,6125	-3449,5001	-180,6939	1544,0562
9,52	-6783,9333	-3715,9363	-323,9697	1533,9984
9,56	-7028,1748	-3992,1870	-478,0996	1517,9939
9,60	-7269,3506	-4278,1495	-643,4742	1495,6005

1	2	3	4	5
9,64	-7506,4019	-4573,6801	-820,4792	1466,3609
9,68	-7738,1957	-4878,5916	-1009,4937	1429,8021
9,72	-7963,5222	-5192,6496	-1210,8885	1385,4363
9,76	-8181,0922	-5515,5700	-1425,0239	1332,7611
9,80	-8389,5351	-5847,0153	-1652,2478	1271,2599
9,84	-8587,3964	-6186,5917	-1892,8935	1200,4023
9,88	-8773,1358	-6533,8454	-2147,2775	1119,6452
9,92	-8945,1252	-6888,2593	-2415,6967	1028,4330
9,96	-9101,6466	-7249,2492	-2698,4260	926,1986
10,00	-9240,8902	-7616,1607	-2995,7156	812,3647
10,04	-9360,9533	-7988,2648	-3307,7881	686,3443
10,08	-9459,8387	-8364,7546	-3634,8353	547,5420
10,12	-9535,4530	-8744,7416	-3977,0151	395,3557
10,16	-9585,6063	-9127,2514	-4334,4483	229,1774
10,20	-9608,0109	-9511,2202	-4707,2147	48,3953