ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Практикум

по выполнению расчетно-графической работы «Расчет балок на косой изгиб» и проведению практических занятий по дисциплинам

«Сопротивление материалов», «Техническая механика», «Архитектурно-строительная механика»

Авторы
Языев Б. М.,
Литвинов С. В.,
Аваков А. А.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Практикум содержит основные теоретические положения, пример решения типовой задачи и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Расчет балок на косой изгиб» по дисциплинам сопротивление материалов, техническая механика, архитектурно-строительная механика, теоретическая и прикладная механика, строительная механика.

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям 08.03.01 – Строительство; 07.03.02 – РР; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.04 – ГР; 23.03.03 – АС; 29.03.04 – ТХОМ и специальностям 08.05.01 – СУЗ; 27.05.01 – ПГ; 23.05.01 – ПТО.

Авторы

докт. техн. наук, профессор
Языев Б.М.

канд. техн. наук, доц.
Литвинов С.В.

канд. техн. наук, ст. преп.
Аваков А.А.

Оглавление

РАСЧЕТ БАЛОК НА КОСОЙ ИЗГИБ

Тема 1. Основные теоретические положения

1.1. Понятие о косом изгибе

До сих пор были рассмотрены случаи, когда элементы конструкций, подверженные действию внешних сил, испытывали только одну из простых деформаций: осевое растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб и кручение. В действительности, во многих случаях элементы конструкций при работе испытывают одновременно не одну из перечисленных деформаций, а две или больше.

Например, валы машин испытывают одновременно деформации кручения и изгиба; колонны и столбы, нагруженные внецентренно, испытывают кроме осевого сжатия еще изгиб; лестничные косоуры подвергаются осевому сжатию и изгибу и т. д.

Элементы конструкций, испытывающие одновременно по две или более деформаций, находятся в состоянии сложного сопротивления.

Расчеты на прочность и жесткость бруса при сложном сопротивлении основываются обычно на ***принципе независимости действия сил (суперпозиций)***, при котором каждый из простых видов сопротивления рассматривают независимо от остальных. Полные напряжения и деформации, возникающие в упругой системе, определяют путем геометрического сложения напряжений и перемещений, соответствующих простым видам сопротивления.

Одним из видов сложного сопротивления является **косой изгиб**.

На практике часто встречаются случаи, когда система сил, перпендикулярных к оси стержня, лежит в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей инерции. В таких случаях изогнутая ось балки уже не будет лежать в силовой плоскости.

Случай изгиба, когда силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса, называется **косым изгибом** (рис. 1).

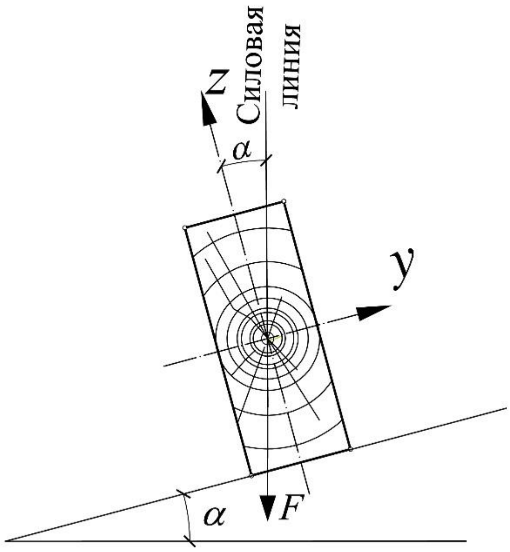


Рис. 1. Взаимное положение силовой линии и главных осей инерции при косом изгибе

Из определения понятия косого изгиба следует, что брусья с круглым, квадратным, равносторонним шестиугольным, восьмиугольным и им подобным сечениями, у которых две любые взаимно перпендикулярные центральные оси являются главными, косого изгиба испытывать не будут.

В общем случае косого изгиба в поперечных сечениях возникают четыре внутренних усилия: две поперечные силы Q_y, Q_z и два изгибающих момента M_y, M_z.

Влиянием поперечных сил на прочность и жесткость при расчете длинных балок часто пренебрегают ввиду их малости. Так, для прямоугольника и круга соответственно $\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = 4\frac{l}{h}$ и $\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = 6\frac{l}{d}$.

В дальнейшем будем учитывать только изгибающие моменты.

1.2. Нормальные напряжения при косом изгибе

Пусть на консольную балку действует сосредоточенный изгибающий момент, приложенный на свободном конце под углом $\boldsymbol{\alpha}$. Изгибающий момент $\boldsymbol{M}$ в сечении разложим на две его составляющие, действующие в главных плоскостях инерции (рис.2, а):

$$M_y = M \cdot cos\alpha \text{ и } M_z = M \cdot sin\alpha$$

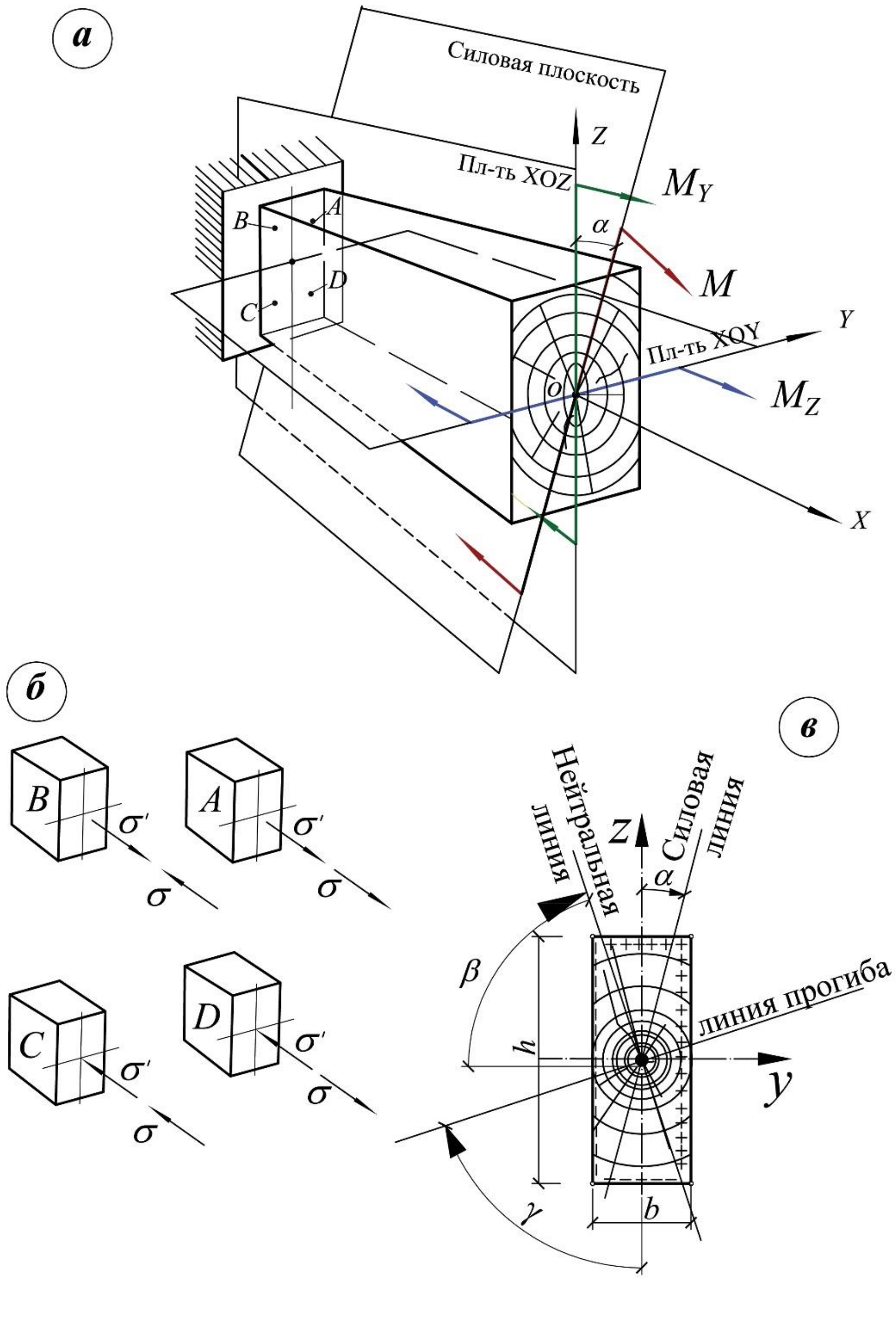


Рис. 2. Внешний изгибающий момент M и его составляющие M_y и M_z, действующие в главных плоскостях инерции (а); напряженное состояние в произвольных точках поперечного сечения бруса (б); расположение силовой линии, нейтральной линии и линии прогиба в произвольном сечении бруса (в)

От каждого из внутренних усилий возникают нормальные напряжения, приложенные к одной паре площадок. Две другие пары площадок свободны от напряжений. Имеет место линейное напряженное состояние.

Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ будут равны сумме напряжений от моментов M_y, M_z (рис.2, б)

$$\sigma = \pm\sigma' \pm \sigma'' = \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y. \qquad (1)$$

Из рисунка следует, что опасными являются точки, в которых складываются напряжения с одним знаком, то есть точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$

$$\sigma = M\left(\frac{z \cdot cos\alpha}{I_y} + \frac{y \cdot sin\alpha}{I_z}\right). \qquad (2)$$

<u>Правила знаков</u>. Из анализа знаков напряжений (рис.2, б) следует, что для получения верного результата по формулам (1) и (2) необходим как учет знака изгибающего момента, так и выбор (назначение) направления координатных осей в сечении.

Направление координатных осей следует выбирать так, чтобы в первом квадранте координатной системы $\boldsymbol{y}\,0\,\boldsymbol{z}$ *(где* $y > 0;\ \ z > 0$*) изгибающий момент вызывал растягивающие напряжения* (рис. 3).

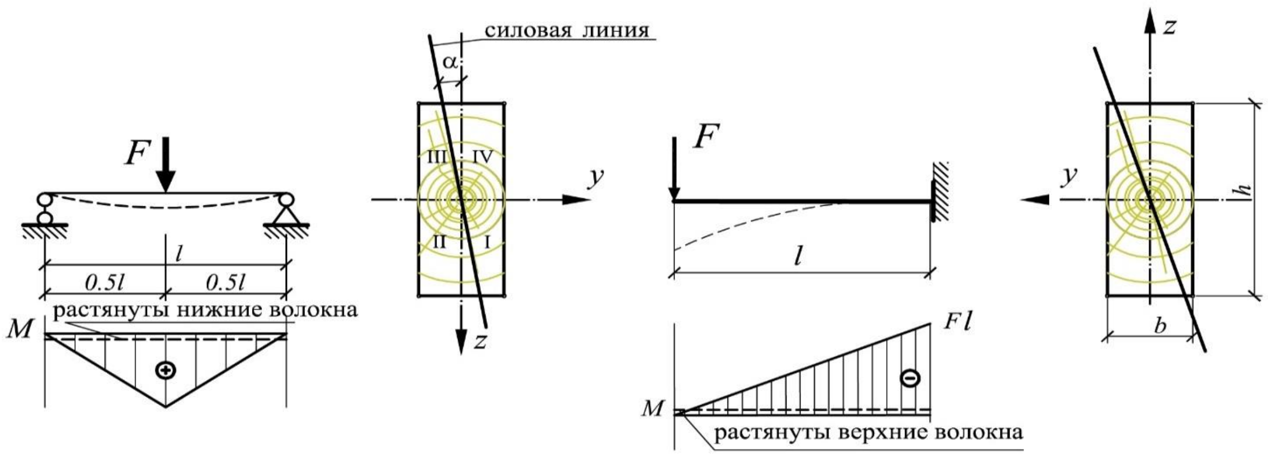


Рис. 3. Примеры выбора направления координатных осей при косом изгибе

1.3. Нейтральная линия при косом изгибе

Определим положение нейтральной линии, для чего рассмотрим уравнение (2). В уравнении (2), связывающем напряжение в произвольной точке с ее координатами, переменными являются координаты $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$. Поскольку они в первой степени, то, следовательно, напряжения распределяются по линейному закону и должна быть линия, на которой напряжения равны нулю.

Нейтральная линия (нейтральная ось) *– это геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю.*

Для составления уравнения нейтральной линии необходимо приравнять выражение (2) нулю

$$\sigma = M\left(\frac{z \cdot cos\alpha}{I_y} + \frac{y \cdot sin\alpha}{I_z}\right) = 0 \tag{3}$$

Так как изгибающий момент M не может быть равным нулю, то остается принять равным нулю выражение в скобках, то есть

$$\left(\frac{z \cdot cos\alpha}{I_y} + \frac{y \cdot sin\alpha}{I_z}\right) = 0. \tag{4}$$

или

$$\frac{z}{y} = -\left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot \frac{I_y}{I_z}\right) \tag{5}$$

Обозначив через $\boldsymbol{\beta}$ угол наклона нейтральной линии к горизонтальной главной оси $\boldsymbol{Y}$ (рис. 2, в), получим

$$tg\beta = \frac{z}{y} \tag{6}$$

После подстановки в полученное выражение (6) уравнения (5) выражение для тангенса угла наклона нейтральной линии к оси $\boldsymbol{Y}$ примет вид

$$tg\beta = -tg\alpha \cdot \frac{I_y}{I_z} \tag{7}$$

После вычисления по формуле (7) угла $\boldsymbol{\beta}$ показываем на поперечном сечении балки нейтральную линию.

Свойства нейтральной линии (нейтральной оси) при косом изгибе

1. Как видно из формулы (7), углы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ в общем случае не равны между собой, *то есть нейтральная линия при косом изгибе не перпендикулярна силовой линии, как это имело место в случае плоского изгиба.*

2. Углы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ в формуле (7) имеют разные знаки, следовательно, силовая и нейтральная линии лежат в разных плоскостях.

3. Углы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ откладывают в одном направлении, но от разноименных осей (рис. 2,в).

4. Из формулы (7) видно также, что положение нейтральной линии не зависит от величины внешнего момента $\boldsymbol{M}$, а зависит от угла $\boldsymbol{\alpha}$ наклона плоскости действия внешних сил к оси $\boldsymbol{Z}$ и от формы поперечного сечения.

5. Нейтральная линия делит сечение балки на сжатую и растянутые зоны и всегда проходит через начало координат.

1.4. Расчет балки на прочность при косом изгибе

Поскольку напряженное состояние линейное (рис. 2,б), результаты расчета по любой из гипотез прочности совпадают. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Их положение определяют графически после построения нейтральной линии (рис. 4).

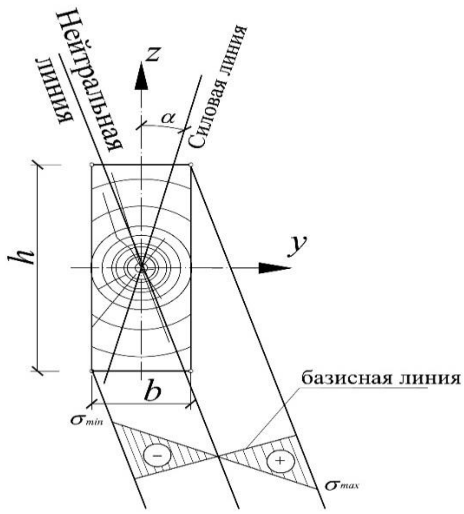


Рис. 4. Максимальные напряжения

Условие прочности, вытекающее из уравнения (1)

$$\sigma_{max} = \left(\frac{M_y \cdot z_{max}}{I_y} + \frac{M_z \cdot y_{max}}{I_z}\right) \leq [\sigma]. \tag{8}$$

или

$$\sigma_{max} = \left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}\right) \leq [\sigma]. \tag{9}$$

Условие прочности, вытекающее из уравнения (2)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y}\left(cos\alpha + \frac{W_y}{W_z} \cdot sin\alpha\right) \leq [\sigma]. \tag{10}$$

При расчете на прочность решают три вида задач: проверочный, проектный расчет и определение допускаемой нагрузки.

Проектный расчет. Требуемый размер поперечного сечения находят из условия прочности (10)

$$W_y = \frac{M_{max}}{[\sigma]}\left(cos\alpha + \frac{W_y}{W_z} \cdot sin\alpha\right). \tag{11}$$

Искомый параметр находится по обе стороны от знака неравенства. Полученное уравнение – **трансцендентное**, то есть *не могущее быть выраженным алгебраическим выражением*. Такие уравнения решают методом **итераций,** то есть методом последовательных приближений.

Для стандартного прокатного профиля (двутавр, швеллер) отношение W_y/W_z зависит от размеров профиля. Так, для двутавров от № 10 до № 60 отношение W_y/W_z изменяется в диапазоне от 6,12 до 14,07. Поэтому в первом приближении принимают среднее число из указанного диапазона (например,10). Подбирают профиль, а затем выполняют поверочный расчет. Следующее приближение – уточняющее.

Перегрузку $\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\%$ выше 5% не допускают.

Пример 1.

Подобрать размер двутавра для консольной балки, нагруженной распределенной нагрузкой.

Дано: $q = 5\frac{кН}{м}$; $\alpha = 10^{\circ}$; $l = 2$ м; $[\sigma] = 200$ МПа $= 20$ кН/см^2.

Решение

Из условия прочности при косом изгибе

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y}\left(cos\alpha + \frac{W_y}{W_z} \cdot sin\alpha\right) \leq [\sigma].$$

Требуемый момент сопротивления

$$W_y = \frac{M_{max}}{[\sigma]}\left(cos\alpha + \frac{W_y}{W_z} \cdot sin\alpha\right).$$

Где

$$M_{max} = 0{,}5ql^2 = 5 \cdot \frac{4}{2} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1000 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$W_y \geq {}^{1000 \text{ кН} \cdot \text{см}}/_{20 \text{ Кн/см}^2} \cdot (0{,}985 + 10 \cdot 0{,}174) = 136 \text{ см}^3.$$

Приближение № 1

Принимаем двутавр №18:

$$W_y = 143 \text{ см}^3; \quad W_z = 18{,}4\text{см}^3.$$

Поверочный расчет

$$\sigma_{max} = \frac{1000}{143}\left(0{,}985 + \frac{143}{18{,}4} \cdot 0{,}174\right) = 16{,}3\ \frac{\text{Кн}}{\text{см}^2} = 163 \text{ МПа}.$$

Недогрузка

$$\left(\frac{200-163}{200}\right) \cdot 100 = 18{,}2\% \ > 5\%$$

Уточняющее приближение

Принимаем двутавр №16:

$$W_y = 109 \text{ см}^3; \quad W_z = 14{,}5\text{см}^3;$$

Поверочный расчет

$$\sigma_{max} = \frac{1000}{109}\left(0{,}985 + \frac{109}{14{,}5} \cdot 0{,}174\right) = 21{,}0\ \frac{\text{Кн}}{\text{см}^2} = 210 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составляет

$$\left(\frac{200 - 210}{200}\right) \cdot 100 = -5\ \%.$$

Такая перегрузка допустима.

Вычислим напряжения, возникающие в рассматриваемой балке, при плоском изгибе, то есть при $\alpha = 0$

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{1000}{109} = 9{,}17\ \frac{\text{Кн}}{\text{см}^2} = 91{,}7\ \text{МПа}.$$

Сопоставление напряжений, возникающих в рассматриваемой балке, при косом и плоском изгибах

$$\frac{\sigma_{max}^{\text{кос.}}}{\sigma_{max}^{\text{плоск.}}} = \frac{210\ \text{МПа}}{91{,}7\ \text{МПа}} = 2{,}29$$

<u>**Вывод:**</u> При одной и той же величине внешней нагрузки напряжения в балке при косом изгибе больше, чем при плоском изгибе. Косой изгиб опаснее плоского.

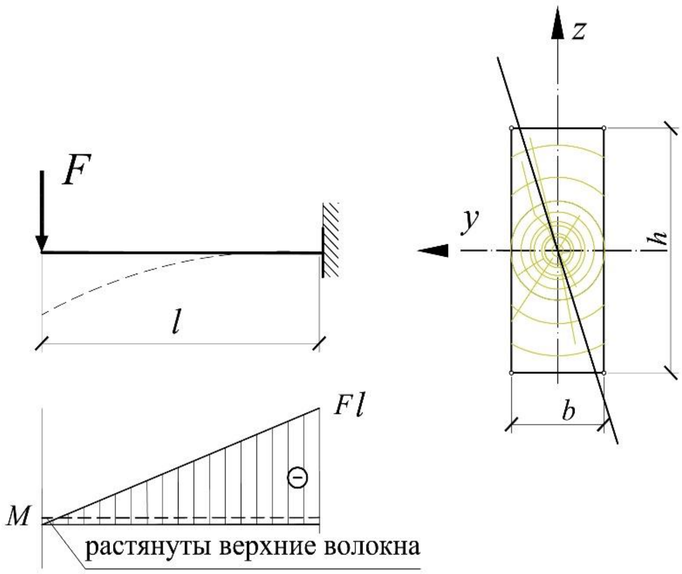
<u>**Пример 2.**</u>

Подобрать размеры поперечного сечения деревянной балки с отношением высоты к ширине $c = \frac{h}{b} = 2$.

<u>**Дано:**</u> $F = 2kH$; $\alpha = 10^{\circ}$;

$l = 3$ м; $[\sigma] = 200\ \text{МПа} =$

$= 20\ \text{кН/см}^2$.



Решение

<u>Приближение № 1</u>

Из условия прочности при косом изгибе

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y}\left(cos\alpha + \frac{W_y}{W_z}\cdot sin\alpha\right) \le [\sigma]$$

Требуемый момент сопротивления будет равен

$$W_y \ge \frac{M_{max}}{[\sigma]}\left(cos\alpha + \frac{W_y}{W_z}\cdot sin\alpha\right).$$

где

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{b\cdot h^2}{6}\frac{6}{h\cdot b^2} = \frac{h}{b} = c$$

С другой стороны,

$$W_y = \frac{b\cdot h^2}{6} = \frac{b(bc)^2}{6} = \frac{b^3c^2}{6}$$

Откуда,

$$b \ge \sqrt[3]{\frac{6W_y}{c^2}}$$

Из эпюры моментов

$$M_{max} = Fl = 2\cdot 3 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Тогда

$$W_y \ge \frac{6000}{1}(cos30° + 2\cdot sin30°) = 1120 \text{ см}^3$$

откуда

$$b \ge \sqrt[3]{\frac{6\cdot 1120}{2^2}} = 11{,}9\text{см}$$

Принимаем

$$b = 12 \text{ см},\quad h = 24 \text{ см}.$$

<u>Поверочный расчет</u>

$$\sigma_{max} = \frac{6000\cdot 6}{12\cdot 24^2}\left(0{,}866 + \frac{0{,}24}{0{,}12}\cdot 0{,}5\right) = 0{,}972\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 9{,}72 \text{ МПа} < [\sigma]$$

Условие прочности выполняется.

Вычислим напряжения, возникающие в рассматриваемой балке, при плоском изгибе, то есть при $\alpha = 0$

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{6000 \cdot 6}{12 \cdot 24^2} = 0{,}521\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 5{,}21\ \text{Мпа}$$

Сопоставление напряжений, возникающих в рассматриваемой балке, при косом и плоском изгибах

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{9{,}72\ \text{МПа}}{5{,}21\ \text{МПа}} = 1{,}86\ \text{раз}$$

Вывод: При одной и той же величине внешней нагрузки напряжения в балке при косом изгибе больше, чем при плоском изгибе. Косой изгиб опаснее плоского.

1.5. Деформации балки при косом изгибе

Деформацию балок при *косом изгибе* определяют путем геометрического сложения векторов прогибов в направлениях главных центральных осей инерции.

Так для балки (рис.2, а) составляющие прогибов в точке приложения силы имеют вид

$$f_z = \frac{M_y \cdot l^2}{2 \cdot EI_y}; \quad f_y = \frac{M_z \cdot l^2}{2 \cdot EI_z};$$

$$f_z = \frac{M cos\alpha \cdot l^2}{2 \cdot EI_y}; \quad f_y = \frac{M \cdot sin\alpha \cdot l^2}{2 \cdot EI_z};$$

Величину полного прогиба определяют по формуле

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \qquad (12)$$

Следовательно,

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \frac{Ml^2}{2E}\sqrt{\frac{cos^2\alpha}{I_y^2} + \frac{sin^2\alpha}{I_z^2}}$$

или

$$f = \frac{Ml^2}{2EI_y}\sqrt{cos^2\alpha + \left(\frac{I_y}{I_z}\right)^2 sin^2\alpha},$$

то есть так же, как и при плоском изгибе, но с множителем (корнем), большем единицы.

Положение плоскости изгиба (направление перемещения центра тяжести сечения) определяется углом $\boldsymbol{\gamma}$

$$tg\gamma = \frac{f_y}{f_z} = \frac{M \cdot sin\alpha \cdot l^2}{2 \cdot EI_z}\frac{2 \cdot EI_y}{Mcos\alpha \cdot l^2} = \frac{I_y}{I_z}\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{I_y}{I_z}tg\alpha$$

То есть

$$tg\gamma = \frac{I_y}{I_z}tg\alpha \quad (13)$$

Сравнивая формулы (7) и (13), можно сделать вывод, что нейтральная плоскость (нейтральная линия) и плоскость изгиба (линия прогиба) при косом изгибе взаимно перпендикулярны ($\gamma = -\beta$) и не совпадают с силовой плоскостью (силовой линией) (рис. 5)

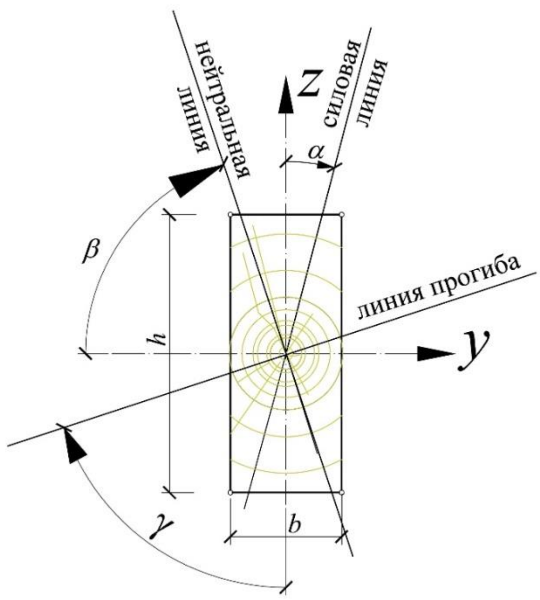


Рис. 5. Расположение силовой линии, нейтральной линии и линии прогиба при косом изгибе

Тема 2. Пример расчета балки на косой изгиб

Задача. Расчет деревянной балки прямоугольного поперечного сечения на двух шарнирных опорах на косой изгиб

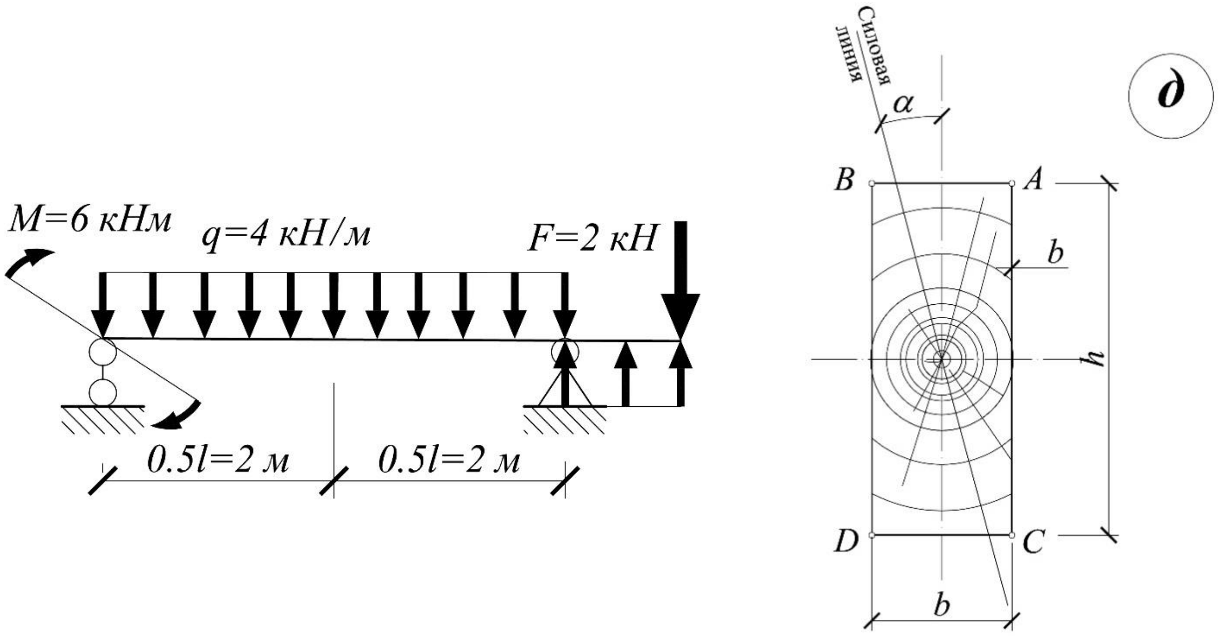


Рис. 6. Расчетная схема балки

Исходные данные:

$$\alpha = 10° \,;\;\; F = 2\text{ кН};\;\; [\sigma] = 12\text{ МПа};\;\; l = 4\text{ м};\;\; q = 4\frac{\text{кН}}{\text{м}};\;\; m = 6\text{ кН};$$

$$E = 1 \cdot 10^4\text{ МПа}$$

Для заданной расчетной схемы деревянной балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 6) требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил ($\boldsymbol{Q}$) и изгибающих моментов ($\boldsymbol{M}$). Определить опасное сечение.
2. Определить положение нейтральной линии.
3. Учитывая, что вся нагрузка лежит в одной плоскости (силовая плоскость), составляющей угол $\boldsymbol{\alpha}$ с вертикальной главной центральной осью поперечного сечения $\boldsymbol{z}$, вычислить значения нормальных напряжений в угловых точках опасного сечения и построить эпюры нормальных напряжений.

4. Определить прогиб в опасном сечении балки методом начальных параметров.

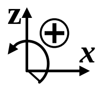
Решение

1. **Построение эпюр поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M). Определение опасного сечения**

а). Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков (рис. 7):

1. Сумма проекций всех сил на ось $\boldsymbol{x}$ равна нулю



$$\boldsymbol{\Sigma F_x = 0}: \quad -H_B = 0, \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{H_B = 0}.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры $\boldsymbol{B}$ равно нулю

$$\boldsymbol{\Sigma m_B = 0}: \; m + q \cdot 4 \cdot 2 + q \cdot 1 \cdot 0{,}5 - F \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0$$

$$6 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 1 = R_A \cdot 4;$$

$$\boldsymbol{R_A = 6{,}5} \text{ кН}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры $\boldsymbol{A}$ равна нулю

$$\boldsymbol{\Sigma m_A = 0}: \; -F \cdot 5 + R_B \cdot 4 + q \cdot 1 \cdot 4{,}5 - q \cdot 4 \cdot 2 - m = 0;$$

$$-2 \cdot 5 + R_B \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 4{,}5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 6 = 0;$$

$$\boldsymbol{R_B = 7{,}5} \text{ кН}.$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось **z** *должна быть равна* $\boldsymbol{0}$*)*

$$\boldsymbol{\Sigma F_z = 0}; \; -F + q \cdot 1 + R_B - q \cdot 4 + R_A = 0;$$

$$-2 + 4 + 7{,}5 - 16 + 6{,}5 = 0$$

б). Построение эпюр поперечной силы $\boldsymbol{Q}$*, изгибающего момента* $\boldsymbol{M}$ *и определение положения опасного сечения.*

Расчетная схема балки имеет два участка (рис. 7).

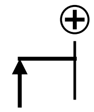
I участок: $\mathbf{0 \le x \le 4}$ (начало отсчета на левом конце балки).

Проводим поперечное сечение в пределах первого рассматриваемого участка, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем левую от проведенного сечения часть балки (рис. 7), так как справа от сечения сил приложено больше, чем слева.

Составляем выражения для поперечной силы $\boldsymbol{Q}$ и изгибающего момента $\boldsymbol{M}$. При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы $\boldsymbol{Q}$ на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось $\boldsymbol{z}$**,** перпендикулярную геометрической оси балки, с учетом правила знаков:



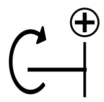
$$\boldsymbol{Q = R_A - q \cdot x_1},$$

$x = 0; \quad Q = 6{,}5$кН;

$x = 4; \quad Q = -9{,}5$кН.

Определяем величину изгибающего момента $\boldsymbol{M}$ на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 7), с учетом правила знаков.



$$\boldsymbol{M = M + R_A \cdot x_1 - q \cdot \frac{{x_1}^2}{2}},$$

$x = 0; \quad M = 6{,}0$ кНм;

$x = 4; \quad M = 0$ кНм.

Поскольку поперечная сила **Q** *меняет знак в пределах* **I** *участка, определяем координату* $\boldsymbol{x_1}$ *сечения, в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент* **M** *принимает экстремальное значение)*

$0 = R_A - q \cdot x_1, \; x_1 = {}^{R_A}/_{q} = \frac{6{,}5}{4} = 1{,}63$ м;

$$M_{max} = 6 + 6{,}5 \cdot 1{,}63 - 4 \cdot \frac{1{,}63^2}{2} = 11{,}28 \text{ кНм},$$

II участок: $\mathbf{0 \leq x \leq 1}$ (начало отсчета на правом конце балки).

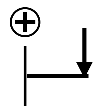
Проводим поперечное сечение в пределах второго рассматриваемого участка, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем правую от сечения часть балки (рис. 7), так как слева от сечения сил приложено больше, чем справа.

Составляем выражения для поперечной силы $\boldsymbol{Q}$ и изгибающего момента $\boldsymbol{M}$.

При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы $\boldsymbol{Q}$ на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось $\boldsymbol{z}$**,** перпендикулярную геометрической оси балки, с учетом правила знаков.



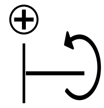
$\boldsymbol{Q = F - q \cdot x_2}$;

$x = 0; \quad Q = 2$ кН;

$x = 1; \quad Q = -2$ кН.

Определяем величину изгибающего момента $\boldsymbol{M}$ на втором участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно точки центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 7), с учетом правила знаков.



$\boldsymbol{M = -F \cdot x_2 + q \cdot \frac{{x_2}^2}{2}}$;

$x = 0; \quad M = 0$ кНм;

$x = 1; \quad M = 0$ кНм.

Поскольку поперечная сила **Q** *меняет знак в пределах участка, определяем координату* $\mathbf{x_2}$ *сечения, в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент* **M** *принимает экстремальное значение)*

$0 = F - q \cdot x_2, \; x_2 = \frac{F}{q} = \frac{2}{4} = 0{,}5$ м,

$$M = M_{max} = -F \cdot x_2 + q \cdot \frac{{x_2}^2}{2} = -2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot \frac{0{,}5^2}{2} = -0{,}5 \text{ кНм}.$$

По полученным численным значениям $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{M}$ в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 7.

Опасным является сечение с наибольшим по абсолютному значению изгибающим моментом

$$M_{max} = 11{,}28 \text{ кНм} = 1128 \text{ кНсм}$$

В этом сечении и будем определять напряжения.

2. Определение положения нейтральной линии

По формуле (7) вычисляем угол наклона нейтральной линии к горизонтальной главной центральной оси $\boldsymbol{Y}$

$$tg\beta = -tg\alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13824 \text{ см}^3 \qquad I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{24 \cdot 12^3}{12} = 3456 \text{ см}^3$$

$$cos10° = 0{,}9848; \qquad sin10° = 0{,}1736$$

$$\alpha = 10° \quad tg10° = 0{,}1763 \quad tg\beta = -\frac{13824}{3456} \cdot 0{,}1763 = -0{,}7052$$

$$\beta = arctg(0{,}7052) = -35°12' \quad \beta = -35°12'$$

Направление координатных осей следует выбирать так, чтобы в первом квадранте координатной системы $\boldsymbol{y\,0\,z}$ *(где* $y > 0$; $z > 0$*) изгибающий момент вызывал растягивающие напряжения.*

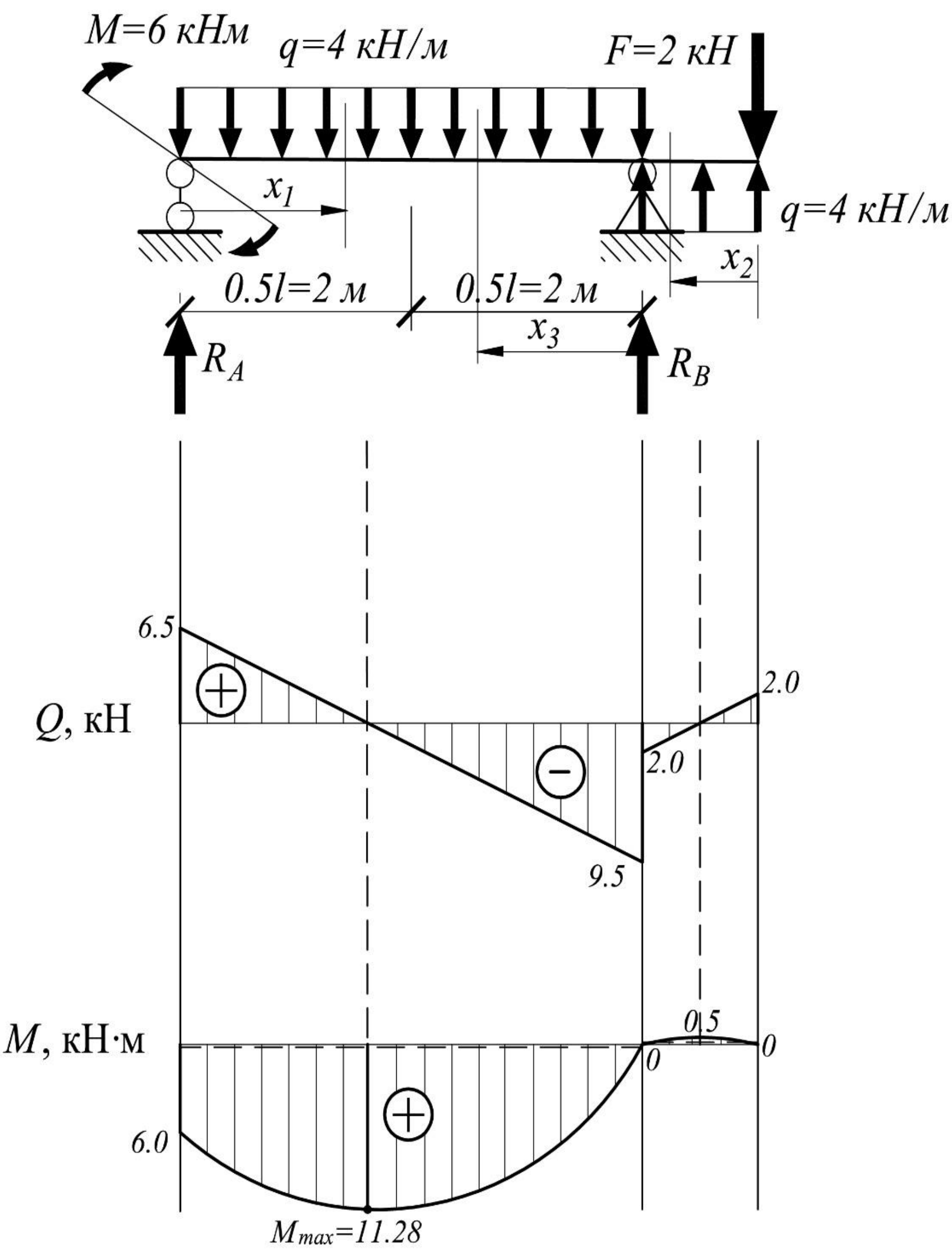


Рис. 7. Эпюра поперечных сил и изгибающих моментов

Так как в нашем случае в рассматриваемом опасном сечении ($M_{max} = 11{,}28$ кНм) растягиваются нижние волокна – координатные оси располагаем согласно рис. 8.

Строим нейтральную линию.

Для этого откладываем от горизонтальной главной оси $\boldsymbol{Y}$ против хода часовой стрелки угол $\boldsymbol{\beta}$ (рис. 8).

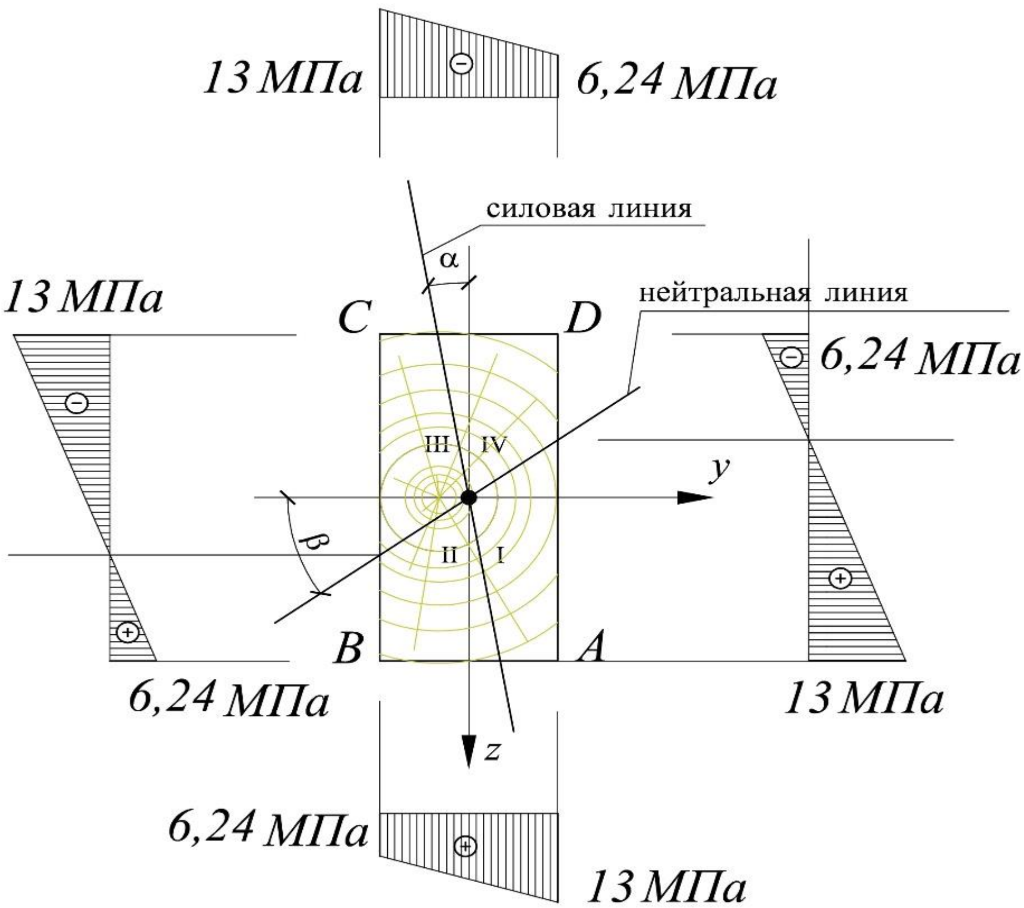


Рис. 8. Эпюры напряжений в опасном сечении

3. Определение значений нормальных напряжений в угловых точках и построение эпюры напряжений по контуру сечения

Определим напряжения в угловых точках $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ прямоугольного поперечного сечения балки (рис. 8)

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13824 \text{ см}^3 \qquad I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{24 \cdot 12^3}{12} = 3456 \text{ см}^3$$

$$cos10° = 0{,}9848; \qquad sin10° = 0{,}1736$$

$$\sigma_A = M\left(\frac{z_A \cdot cos\alpha}{I_y} + \frac{y_A \cdot sin\alpha}{I_z}\right) = 1128 \cdot \left(\frac{12 \cdot 0{,}9848}{13824} + \frac{6 \cdot 0{,}1736}{3456}\right) = 1{,}30\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$
$$= 13{,}0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = M\left(\frac{z_B \cdot cos\alpha}{I_y} + \frac{y_B \cdot sin\alpha}{I_z}\right) = 1128 \cdot \left(\frac{12 \cdot 0{,}9848}{13824} + \frac{(-6) \cdot 0{,}1736}{3456}\right) = 0{,}624\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$
$$= 6{,}24\ \text{МПа};$$

$$\sigma_C = M\left(\frac{z_C \cdot cos\alpha}{I_y} + \frac{y_C \cdot sin\alpha}{I_z}\right) = 1128 \cdot \left(\frac{(-12) \cdot 0{,}9848}{13824} + \frac{(-6) \cdot 0{,}1736}{3456}\right)$$
$$= -1{,}30\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -13{,}0\ \text{МПа};$$

$$\sigma_D = M\left(\frac{z_D \cdot cos\alpha}{I_y} + \frac{y_D \cdot sin\alpha}{I_z}\right) = 1128 \cdot \left(\frac{(-12) \cdot 0{,}9848}{13824} + \frac{6 \cdot 0{,}1736}{3456}\right) = -0{,}624\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$
$$= -6{,}24\ \text{МПа};$$

По полученным численным значениям строим эпюры напряжений по контуру сечения (рис.8.)

4. Определение прогиба в опасном сечении балки

Величину полного прогиба при косом изгибе определяют по формуле (12)

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}$$

где

f_y - прогиб по оси $\boldsymbol{Y}$ от проекции нагрузки на эту главную центральную ось;

f_z - прогиб по оси $\boldsymbol{Z}$ от проекции нагрузки на эту главную центральную ось.

Для определения прогибов, которые будем обозначать буквой $\boldsymbol{f}$, используем метод начальных параметров. Универсальное уравнение метода начальных параметров для рассматриваемой балки (рис. 9) имеет вид[1]

[1] ***Положительное направление оси Z направлено согласно выбранных осей – вниз. Соответственно и знаки в МНП выбраны согласно направления.***

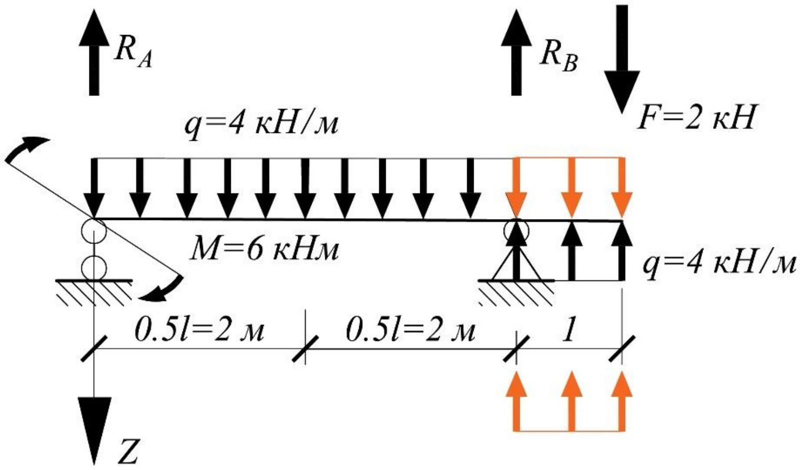


Рис. 9. Расчетная схема балки

$$EIf = EIf_0 + EI\varphi_0\, x - m\frac{x^2}{2} - R_A\frac{x^3}{6} + q\frac{x^4}{24} - R_B\frac{(x-4)^3}{6} - q\frac{(x-4)^4}{24} - q\frac{(x-4)^4}{24},$$

Определим начальный параметр $EI\varphi_0$ из условия на второй опоре

при $x = 4 \quad \rightarrow \; EIf(x = 4) = 0;$

$$EIf = EIf_0 + EI\varphi_0 \cdot 4 - 6\frac{4^2}{2} - 6{,}5\frac{4^3}{6} + 4\frac{4^4}{24} = 0,$$

Отсюда,

$$EI\varphi_0 = +18{,}67 \text{ кНм}^2$$

Определим прогиб при $x = 1{,}63$ м (опасное сечение, где $\boldsymbol{M}_{изг} = \boldsymbol{M_{max}}$)

$$EIf_{(x=1,63)} = 0 + 18{,}67 \cdot 1{,}63 - 6\frac{1{,}63^2}{2} - 6{,}5\frac{1{,}63^3}{6} + 4\frac{1.63^4}{24} = +18{,}94 \text{ кНм}^3.$$

Определим составляющие полного прогиба в опасном сечении балки

$$I_y = \frac{b\cdot h^3}{12} = \frac{12\cdot 24^3}{12} = 13824 \text{ см}^4 \qquad I_z = \frac{h\cdot b^3}{12} = \frac{24\cdot 12^3}{12} = 3456 \text{ см}^4$$

$$cos10° = 0{,}9848; \qquad sin10° = 0{,}1736$$

$$EI_z f_y = +18{,}94 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3 \cdot sin\alpha;$$

$$EI_y f_z = +18{,}94 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3 \cdot cos\alpha;$$

$$f_y = +\frac{18{,}94 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3 \cdot sin\alpha}{EI_z}; \qquad f_z = +\frac{18{,}94 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3 \cdot cos\alpha}{EI_y};$$

Определим жесткости

$$EI_z = 1{,}0 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 3456 \cdot \text{см}^4 = 3456 \ \cdot 10^3 \text{ кНсм}^2;$$

$$EI_y = 1{,}0 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 13824 \cdot \text{см}^4 = 13824 \cdot \ 10^3 \text{ кНсм}^2;$$

Составляющие прогибов будут равны

$$f_y = +\frac{18{,}94 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3 \cdot 0{,}1736}{3456 \ \cdot 10^3 \text{ кНсм}^2} = +0{,}95 \text{ см};$$

$$f_z = +\frac{18{,}94 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3 \cdot 0{,}9848}{13824 \cdot \ 10^3 \text{ кНсм}^2} = +1{,}35\text{см};$$

Полный прогиб равен

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{0{,}95^2 + 1{,}35^2} \qquad\qquad f = 1{,}65 \text{ см}$$

Угол наклона плоскости изгиба к вертикальной главной центральной оси $\boldsymbol{Z}$ (направление перемещения центра тяжести сечения) определяется углом $\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{tg\gamma} = \frac{\boldsymbol{f_y}}{\boldsymbol{f_z}} = \frac{0{,}95}{1{,}35} = 0{,}7037 \quad \gamma = arctg(0{,}7037) = 35°08'$$

$$\boldsymbol{\gamma = 35° \ 08'.}$$

Или по формуле (13)

$$\boldsymbol{tg\gamma} = \frac{\boldsymbol{I_y}}{\boldsymbol{I_z}}\boldsymbol{tg\alpha} = \frac{13824}{3456} \cdot 0{,}1763 = 0{,}7053 \ \rightarrow \quad \gamma = arctg(0{,}7053) = 35°11'$$

$$\boldsymbol{\gamma = 35°11'}$$

Учитывая, что угол наклона нейтральной линии к горизонтальной главной центральной оси $\boldsymbol{Y}$ равен $\beta = -35°12'$, а угол наклона плоскости изгиба к вертикальной главной центральной оси $\boldsymbol{Z}$ равен $\gamma = 35°11'$, отмечаем, что плоскость прогиба (линия прогиба) при косом изгибе расположена перпендикулярно нейтральной линии (рис.10).

Контрольные вопросы к расчётно-графической работе

«РАСЧЁТ БАЛОК НА КОСОЙ ИЗГИБ»

1. Какой изгиб называется косым?
2. Когда возникает косой изгиб?
3. Опишите порядок расчета брусьев при косом изгибе?
4. Сочетанием каких видов изгиба является косой изгиб?
5. К каким равнодействующим приводятся внутренние силы при косом изгибе?
6. По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при косом изгибе?
7. Как находится положение нейтральной оси при косом изгибе?
8. Как определяются опасные точки в сечении при косом изгибе?
9. Как определяются перемещения точек оси балки при косом изгибе?
10. Как определяется величина прогиба балки при косом изгибе?
11. Как определить положение наиболее напряженной (опасной) точки бруса при косом изгибе?
12. Как составить условие прочности при косом изгибе для бруса, имеющего точки сечения, максимально удаленные от обеих главных осей?
13. Как определить перемещение сечения бруса при косом изгибе?
14. Как определяются прогибы бруса при косом изгибе?
15. Докажите ортогональность вектора прогиба и нулевой линии?

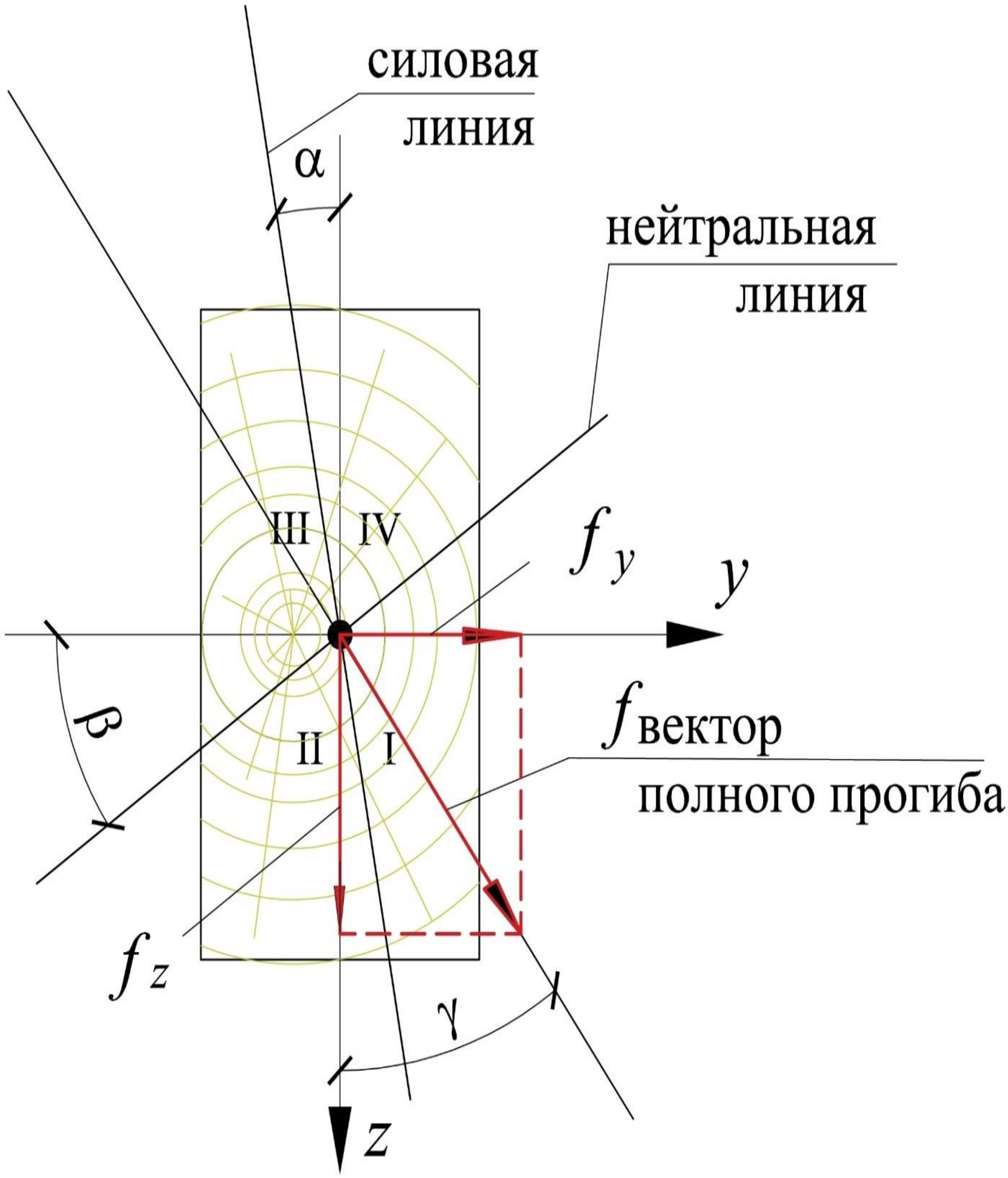


Рис.10. Расположение силовой линии, нейтральной линии и линии полного прогиба при косом изгибе

Рекомендуемая литература

1. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011.
3. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.
5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – СПб.: Лань, 2005.
6. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.