



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

## **Практикум**

по выполнению расчетно-графической  
работы «Расчет стержней на изгиб с  
кручением» и проведению практических  
занятий  
по дисциплинам

**«Сопротивление материалов»,  
«Техническая механика»,  
«Архитектурно-строительная  
механика»**

Авторы  
Литвинов С. В.,  
Аваков А. А.,  
Языев Б. М.

Ростов-на-Дону, 2024

## Аннотация

Практикум содержит основные теоретические положения, пример решения типовой задачи и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Расчет стержней на изгиб с кручением» по дисциплинам сопротивление материалов, техническая механика, архитектурно-строительная механика, теоретическая и прикладная механика, строительная механика.

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям 08.03.01 – Строительство; 07.03.02 – РР; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.04 – ГР; 23.03.03 – АС; 29.03.04 – ТХОМ и специальностям 08.05.01 – СУЗ; 27.05.01 – ПГ; 23.05.01 – ПТО.

## Авторы

канд. техн. наук, доц.  
Литвинов С.В.

канд. техн. наук, ст. преп.  
Аваков А.А.

докт. техн. наук, профессор  
Языев Б.М.





## Оглавление

<b>Расчет стержней на изгиб с кручением .....</b>	<b>4</b>
<b>Тема 1. Основные теоретические положения.....</b>	<b>4</b>
1.1. Понятие о совместном действии изгиба и кручения .....	4
1.2. Напряжения при совместном действии изгиба и кручения .....	4
1.3. Понятие о теориях прочности.....	6
<b>Тема 2. Пример расчета ломаного стержня на совместное действие         изгиба и кручения.....</b>	<b>11</b>
<b>Контрольные вопросы к расчётно-графической работе.....</b>	<b>20</b>
<b>Рекомендуемая литература.....</b>	<b>21</b>

## РАСЧЁТ СТЕРЖНЕЙ НА ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

### Тема 1. Основные теоретические положения

#### 1.1. Понятие о совместном действии изгиба и кручения

Совместное действие изгиба и кручения имеет место в том случае, если стержень подвергается одновременному действию поперечных и скручивающих нагрузок (одновременно стержень работает на поперечный изгиб и кручение).

#### 1.2. Напряжения при совместном действии изгиба и кручения

Основные формулы для определения напряжений имеют вид:

##### При изгибе

– нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z; \quad (1)$$

– касательные напряжения определяются по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{QS_y}{bI_y}. \quad (2)$$

##### При кручении

– касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} r. \quad (3)$$

В этих формулах

$\sigma$  – нормальное напряжение от поперечных нагрузок при изгибе стержня;

$\tau$  – касательное напряжение от поперечных и скручивающих нагрузок;

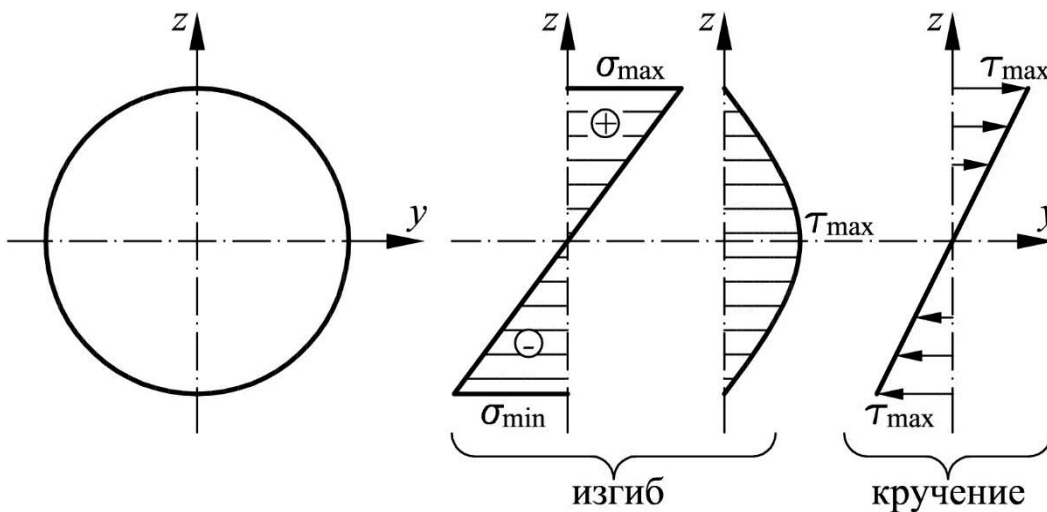
$M_y$  – величина внутреннего усилия в стержне, изгибающего момента, в исследуемом сечении относительно оси главной  $y$ ;

- $M_{кр}$  – величина внутреннего усилия в стержне, крутящего момента, в исследуемом сечении относительно продольной оси;
- $Q$  – величина внутреннего усилия в стержне, поперечной силы, в исследуемом сечении вдоль главной оси  $z$ ;
- $I_y$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно главной оси  $y$ ;
- $I_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения стержня относительно продольной оси;
- $S_y$  – статический момент инерции отсечённой части поперечного сечения относительно главной оси  $y$  при изгибе стержня;
- $b$  – ширина поперечного сечения стержня вдоль оси  $y$ , в котором определяются касательные напряжения;
- $z$  – координата волокна, в котором определяются нормальные напряжения при изгибе стержня (с учётом знака);
- $r$  – расстояние от центра тяжести сечения до волокна, в котором определяются касательные напряжения при кручении стержня.

Если по формулам **Ошибка! Источник ссылки не найден.-Ошибка!** **Источник ссылки не найден.** построить эпюры нормальных и касательных напряжений (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**), то становится ясно, что нормальные напряжения при изгибе и касательные при кручении достигают максимальных значений на наибольшем удалении от центра тяжести; касательные напряжения при изгибе, напротив, достигает своего максимального значения именно в центре тяжести сечения.

Поскольку в подавляющей массе производится расчёт стержней, когда их длина намного превышает диаметр, то касательные напряжения при изгибе, как правило, весьма малы и ими можно пренебречь.

Таким образом, в дальнейших выкладках используют величины  $\sigma = \sigma_{\max}$  (при изгибе) и  $\tau = \tau_{\max}$  (при кручении).



*Рис. 1. Сравнение эпюр нормальных и касательных напряжений в стержне при совместном действии изгиба и кручения*

При расчётах стержней на прочность формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** удобно использовать в следующем виде

$$\sigma = \sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} z_{\max} = \frac{M_y}{W_y}, \quad (4)$$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_\rho} r_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho} = \frac{M_{\text{кр}}}{2W_y}, \quad (5)$$

где

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad \text{— момент сопротивления поперечного сечения стержня}$$

относительно главной оси  $y$ ;

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{r_{\max}} \quad \text{— полярный момент сопротивления круглого сечения.}$$

В случае круглого сечения имеет место соотношение  $W_\rho = 2W_y$ .

### 1.3. Понятие о теориях прочности

Рассмотрим наиболее часто используемые при практических расчётах теории прочности и запишем соответствующие этим теориям условия прочности для стержней.

1. **Теория наибольших нормальных напряжений**. В этом случае считается, что разрушение стержня (или переход в пластическое состояние) происходит при достижении наибольшим из главных напряжений допустимого значения  $[\sigma]$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (6)$$

где

$\sigma_{1,3}$  – соответственно наибольшее и наименьшее нормальные напряжения.

С учётом формул **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, выражение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** записывается в виде

$$\frac{M_y}{2W_y} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_p}{2W_y}\right)^2} \leq [\sigma];$$
$$\frac{0,5M_y \pm 0,5\sqrt{M_y^2 + M_p^2}}{W_y} \leq [\sigma]; \quad (7)$$

Поскольку при расчётах на прочность важно определить максимальные значения напряжений, то в формуле **Ошибка! Источник ссылки не найден.** перед корнем остаётся только знак «+»

$$\sigma^I = \frac{M_{\text{расч}}^I}{W_y} = \frac{0,5M_y + 0,5\sqrt{M_y^2 + M_p^2}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (8)$$

2. **Теория наибольших относительных деформаций**. Считается, что опасное состояние наступает, когда наибольшая деформация растяжения или

сжатия достигает предельного значения  $[\varepsilon_p]$  или  $[\varepsilon_c]$ , определённого из опытов на простое растяжение (сжатие). В случае стального стержня рассматривается только растяжение

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_3) \leq [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}; \quad (9)$$

$$\sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (10)$$

В выражении **Ошибка! Источник ссылки не найден.**

$\varepsilon_1$  – соответственно наибольшая относительная деформация стержня;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$E$  – модуль Юнга или модуль упругости первого рода.

С учётом **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, выражение **Ошибка!**

**Источник ссылки не найден.** записывается

$$\frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$\frac{1-\nu}{2}\frac{M_y}{W_y} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2} \leq [\sigma];$$

$$\frac{1-\nu}{2}M_y \pm \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_y^2 + M_\rho^2} \leq [\sigma]W_y. \quad (11)$$

Для стали марки Ст. 3 коэффициент Пуассона равен  $\nu=0,3$ , тогда выражение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** принимает вид

$$\sigma^{\text{II}} = \frac{M^{\text{II}}_{\text{расч}}}{W_y} = \frac{0,35M_y + 0,65\sqrt{M_y^2 + M_\rho^2}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (12)$$

**3. Теория наибольших касательных напряжений.** В этом случае считается, что причиной разрушения или перехода в пластическое состояние



являются наибольшие касательные напряжения. Исходя из этой гипотезы, условие наступления опасного состояния имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (13)$$

При плоском напряжённом состоянии

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (14)$$

При центральном растяжении-сжатии

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (15)$$

С учётом **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, выражение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** записывается

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (16)$$

Где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  определяются выражением **Ошибка! Источник ссылки не найден.**

Тогда выражение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** принимает вид

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} &\leq [\sigma]; \\ \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2} &\leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_y} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_\rho^2}}{W_y} &\leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (17)$$

**4. Энергетическая теория прочности.** Считается, что разрушение (или переход в пластическое состояние) наступает, когда удельная потенциальная энергия формоизменения  $U_\phi$  при работе материала в упругой

стадии достигает предельного значения  $[U_\phi]$ , соответствующего одноосному напряжённому состоянию

$$U_\phi \leq [U_\phi]. \quad (18)$$

При плоском напряжённом состоянии

$$U_\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3). \quad (19)$$

При центральном растяжении-сжатии

$$[U_\phi] = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma]^2. \quad (20)$$

С учётом **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, выражение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** записывается

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3) &\leq \frac{1+\nu}{3E} [\sigma]^2. \\ \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} &\leq [\sigma] \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя выражения для главных напряжений **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и проводя ряд математических упрощений, выражение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** принимает вид

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} &\leq [\sigma]; \\ \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2} &\leq [\sigma]; \\ \sigma^{IV} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{W_y} = \frac{\sqrt{M_y^2 + 0,75M_p^2}}{W_y} &\leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (22)$$

Теория наибольших касательных напряжений и энергетическая теория прочности хорошо подтверждаются экспериментально для пластичных материалов.

**5. Теория прочности Мора.** Теория применяется для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию (хрупкие материалы).

Условием возникновения опасного состояния является равенство

$$\sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma_p],$$

где

$k = [\sigma_p] / [\sigma_c]$  – коэффициент, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию.

При  $[\sigma_p] = [\sigma_c]$  теория Мора совпадает с теорией наибольших касательных напряжений.

Теория прочности Мора хорошо подтверждается экспериментально как для пластичных, так и для хрупких материалов, особенно, если  $\sigma_1 > 0$ , а  $\sigma_3 < 0$ .

## **Тема 2. Пример расчета ломаного стержня на совместное действие изгиба и кручения**

**Задача.** Для изображенного в аксонометрии ломаного стержня (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**) круглого поперечного сечения, расположенного в горизонтальной плоскости, с прямыми углами в точке **B** и **D** от действия вертикальной нагрузки, требуется:

1. Построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов.
2. Установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности.

3. Вычислить расчетные напряжения по четвертой теории прочности, считая заданными величину нагрузки  $q$ , длину  $l$ , диаметр круглого поперечного сечения стержня  $d$ .

4. Определить диаметр  $d$  круглого поперечного сечения стержня, считая заданными величину нагрузки  $q$ , длину  $l$ , допускаемое напряжение  $[\sigma]$ . Использовать четвертую теорию прочности.

5. Определить допускаемую величину нагрузки  $q$ , используя четвертую теорию прочности, если заданы диаметр круглого поперечного сечения стержня  $d$ , допускаемое напряжение  $[\sigma]$ , длина  $l$ .

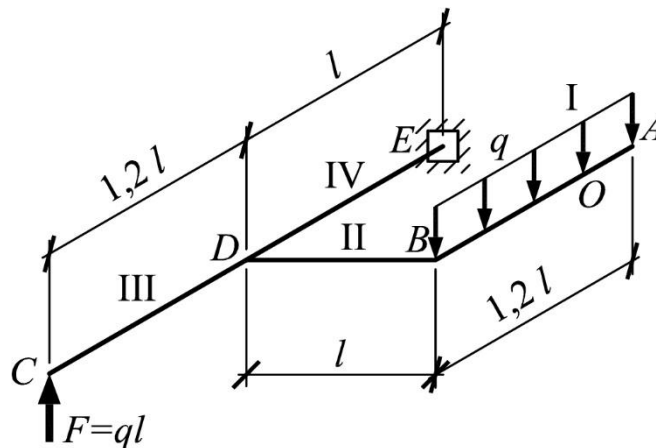


Рис. 2. Расчётная схема задачи

### Решение

#### 1. Построение (в аксонометрии) эпюр изгибающих и крутящих моментов

Для определения крутящих и изгибающих моментов, как и всех внутренних сил, используют метод сечений. Стержень разбивают на участки, руководствуясь тем, что границей участка является изменение направления стержня или любое изменение в нагрузке. На **Ошибка! Источник ссылки не найден.** стержень разбит на 4 участка: *I* участок –  $AB$ ; *II* участок –  $BD$ ; *III* участок –  $CD$ ; *IV* участок –  $DE$ .

Затем проводят сечение на  $I$  участке, которое разбивает стержень на две части (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**): левую ( $OB$ ,  $BD$ ,  $CD$ ,  $DE$ ) и правую ( $AO$ ).

При определении левой и правой частей, смотрят на стержни, перпендикулярные к плоскости чертежа ( $AB$ ,  $CE$ ), справа – налево, по направлению стрелок (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

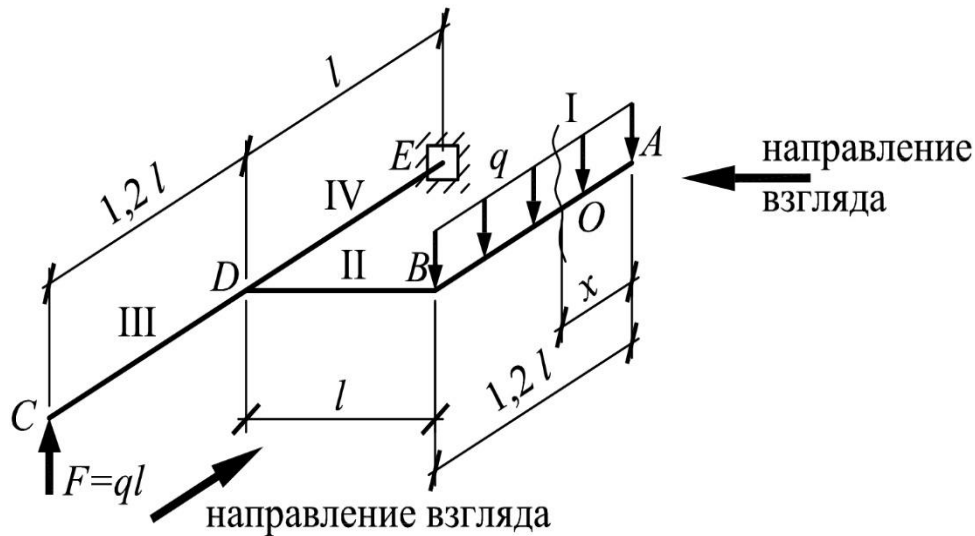


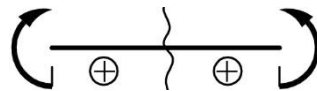
Рис. 3. Схема «разбиения» стержня на расчётные участки

Мысленно отбрасываем левую часть, содержащую неизвестные опорные реакции в точке  $E$ , оставляем правую. Расстояние от свободного конца до сечения обозначаем « $x$ » и составляем выражения для изгибающего и крутящего моментов, учитывая все нагрузки правее сечения.

Составляем выражения для изгибающего момента  $M_{изг}$  и крутящего момента  $M_{кр}$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

*Изгибающий момент в рассматриваемом сечении стержня численно равен сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, относительно оси, перпендикулярной к оси стержня (горизонтальная ось « $y$ »).*

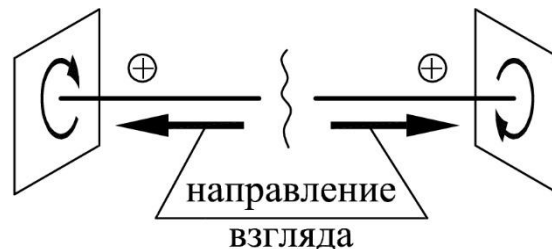
**Правило знаков.** Изгибающие моменты считаются положительными, если они действуют по ходу часовой стрелки, если учитываются нагрузки левее сечения. Изгибающие моменты считаются положительными, если они действуют против хода часовой стрелки, если учитываются нагрузки правее сечения (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).



*Рис. 4. Правило знаков для изгибающего момента*

*Крутящий момент в рассматриваемом сечении стержня численно равен сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, относительно оси стержня (ось «х»).*

**Правило знаков.** Если при взгляде со стороны сечения (направление взгляда показано стрелкой), крутящий момент действует по направлению хода часовой стрелки, договоримся считать его положительным (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).



*Рис. 5. Правило знаков для крутящего момента*

**Рассмотрим I участок АВ (рис. 6).**

Так как на I участке АВ действует равномерно распределенная нагрузка, заменим ее равнодействующей, численно равной площади заштрихованного прямоугольника, и приложенной в центре тяжести этого прямоугольника (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

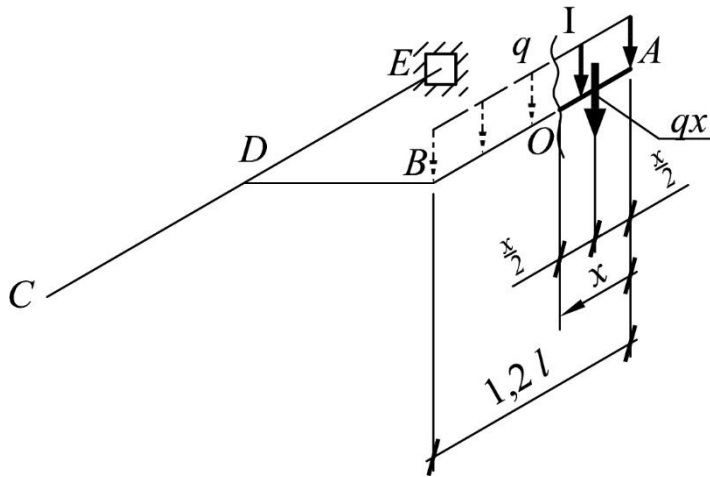


Рис. 6. Определение внутренних усилий на I участке

Момент силы  $q \cdot x$  относительно оси  $y$  будет численно равен изгибающему моменту

$$M_{\text{изг}} = -qx \frac{x}{2},$$

Знак « $-$ » (минус) поставлен, так как сила  $q \cdot x$  правее сечения и даёт момент по ходу часовой стрелки.

Момент силы  $q \cdot x$  относительно оси  $x$  – крутящий момент – равен нулю, так как сила пересекает ось  $x$

$$M_{\text{кр}} = 0.$$

Учитывая, что  $x$  на первом участке может принимать значения от  $0$  до  $1,2l$ , кратко запишем вычисления на I участке.

**I участок AB:**  $0 \leq x \leq 1,2l$

$$M_{\text{изг}} = -q \frac{x^2}{2}.$$

При  $x = 0 \rightarrow M_{\text{изг}} = 0.$

При  $x = 0,6l \rightarrow M_{\text{изг}} = -q \frac{(0,6l)^2}{2} = -0,18ql^2.$

При  $x = 1,2l \rightarrow M_{\text{изг}} = -q \frac{(1,2l)^2}{2} = -0,72ql^2.$

$$M_{\text{кр}} = 0.$$

Рассмотрим *II* участок *BD* (Ошибка! Источник ссылки не найден.).

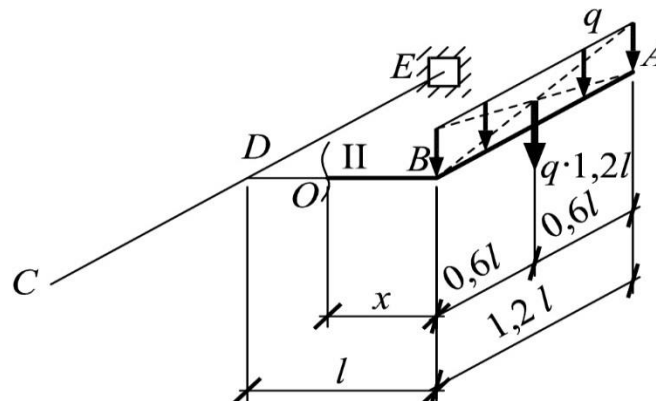


Рис. 7. Определение внутренних усилий на *II* участке

Проведем сечение в любом месте *II* участка, которое разобьет стержень на 2 части: левую (*OD, CD, DE*), которую мысленно отбросим, и правую (*AB, BO*).

Обозначим расстояние от правого конца стержня до проведенного сечения – « $x$ », установим границы изменения « $x$ » на этом участке:  $0 \leq x \leq l$ .

Заменяем распределенную нагрузку, действующую на оставленную правую часть равнодействующей, равной площадке прямоугольника  $q \cdot 1,2l$ , которую приложим в центре тяжести прямоугольника.

Составим выражения для изгибающего и крутящего моментов.

Умножив силу  $q \cdot 1,2l$  на расстояние до оси  $y$  – « $x$ », получим выражение изгибающего момента

$$M_{\text{изг}} = -1,2qlx.$$

Получим выражение для крутящего момента, умножив силу  $q \cdot 1,2l$  на расстояние до оси  $x$  –  $0,6l$ ,

$$M_{\text{кр}} = -1,2ql0,6l = -0,72ql^2.$$

**II участок BD:**  $0 \leq x \leq l$

$$M_{\text{изг}} = -1,2ql \cdot x.$$

При  $x = 0 \rightarrow M_{\text{изг}} = 0.$

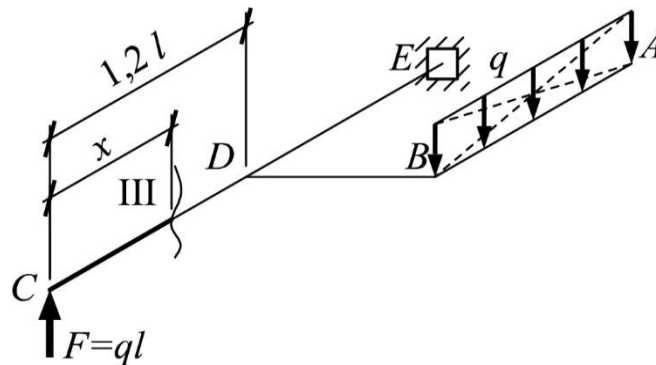
При  $x = l \rightarrow M_{\text{изг}} = -1,2ql^2.$



$$M_{кр} = -1,2ql \cdot 0,6l = -0,72ql^2.$$

Аналогично рассмотрим *III* и *IV* участки. Проводя сечения на этих участках, будем оставлять левую часть и через  $x$  обозначать расстояние от левого конца стержня до проведенного сечения.

**Рассмотрим *III* участок *CD* (рис. 8).**



*Рис. 8. Определение внутренних усилий на *III* участке*

**III участок *CD*:**  $0 \leq x \leq 1,2l$

$$M_{изг} = F \cdot x = q \cdot l \cdot x;$$

При  $x = 0 \rightarrow M_{изг} = 0$ .

При  $x = 1,2l \rightarrow M_{изг} = -1,2ql^2$ .

$$M_{кр} = 0.$$

**Рассмотрим *IV* участок *DE* (рис. 9).**

**IV участок *DE*:**  $0 \leq x \leq \ell$

$$M_{изг} = 1,2ql(0,6l - x) + F(1,2l + x) = 1,2ql(0,6l - x) + ql(1,2l + x).$$

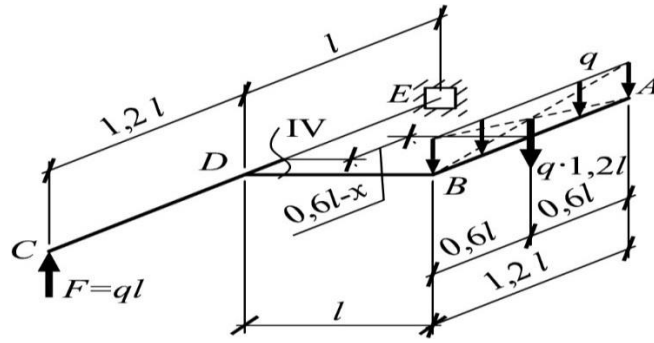


Рис. 9. Определение внутренних усилий на IV участке

При  $x = 0 \rightarrow M_{\text{изг}} = 1,92ql^2$ .

При  $x = l \rightarrow M_{\text{изг}} = 1,72ql^2$ .

$$M_{\text{кр}} = -1,2ql^2.$$

По полученным численным значениям  $M_{\text{изг}}$  и  $M_{\text{кр}}$  в характерных сечениях ломаного стержня, строим в аксонометрии эпюры изгибающих и крутящих моментов, как показано на рис. 10.

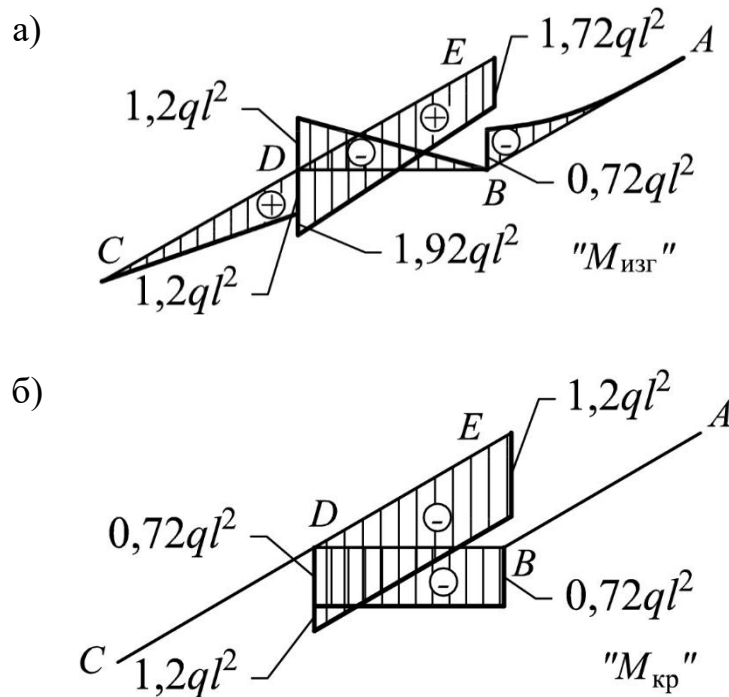


Рис. 10. Эпюры внутренних усилий:

а – изгибающего момента « $M_{\text{изг}}$ »; б – крутящего момента « $M_{\text{кр}}$ »

## 2. Установление опасного сечения и нахождение для него расчетного момента по четвертой теории прочности

Опасным является сечение, где одновременно изгибающий и крутящий моменты имеют большие значения.

При дальнейших расчётах для использования формул **Ошибка! Источник ссылки не найден.** – **Ошибка! Источник ссылки не найден.** необходимо отметить, что изгибающий момент вокруг оси  $y$  « $M_y$ » равен изгибающему моменту « $M_{изг}$ », определённого при решении задачи, то есть  $M_{изг} = M_y$ .

В данном примере опасным будет сечение, где изгибающий момент равен  $M_y = 1,92ql^2$  и крутящий момент равен  $M_{кр} = 1,2ql^2$ .

Расчётный момент по четвёртой теории прочности согласно **Ошибка! Источник ссылки не найден.** будет равен

$$M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_y^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{(1,92ql^2)^2 + 0,75(1,2ql^2)^2} = 2,183ql^2.$$

## 3. Вычисление расчетного напряжения по четвертой теории прочности, считая заданными величину нагрузки $q$ , длину $l$ , диаметр круглого поперечного сечения стержня $d$

Проверим прочность стержня, если  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м, диаметр круглого поперечного сечения стержня  $d = 10$  см,  $[\sigma] = 100$  МПа, используя четвертую теорию прочности.

Расчетные напряжения по четвертой теории прочности вычисляются по формуле **Ошибка! Источник ссылки не найден.**

$$\sigma^{IV} = \frac{M_{расч}^{IV}}{W_y};$$

$$M_{расч}^{IV} = 2,183ql^2 = 2,183 \cdot 10 \text{ кН/м} \cdot (1 \text{ м})^2 = 21,83 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$W_y = 0,1d^3 = 0,1 \cdot (10 \text{ см})^3 = 100 \text{ см}^3 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\sigma^{IV} = \frac{21,83 \text{ кН} \cdot \text{м}}{100 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 0,2183 \cdot 10^6 \text{ кПа} = 218,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{IV} = 218,3 \text{ МПа} > [\sigma] = 100 \text{ МПа}.$$

Следовательно, стержень круглого поперечного сечения диаметром  $d = 10 \text{ см}$ , от заданной нагрузки разрушится.

**4. Определение диаметра  $d$  круглого поперечного сечения стержня, считая заданными величину нагрузки  $q$ , длину  $l$ , допускаемое напряжение  $[\sigma]$ . Использовать четвертую теорию прочности.**

Определим необходимый диаметр  $d$  круглого поперечного сечения стержня, приняв  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ , используя четвертую теорию прочности.

Условие прочности при совместном действии изгиба с кручением по четвертой теории прочности имеет вид

$$\sigma^{IV} = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{W_y} \leq [\sigma] \rightarrow W_y = \frac{M_{\text{расч}}^{IV}}{[\sigma]};$$

$$M_{\text{расч}}^{IV} = 2,183 \cdot 10 \text{ кН/м} \cdot (1 \text{ м})^2 = 21,83 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$[\sigma] = 100 \text{ МПа} = 100 \cdot 10^3 \text{ кПа};$$

$$W_y = \frac{21,83 \text{ кН} \cdot \text{м}}{100 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 21,83 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 218,3 \text{ см}^3;$$

$$W_y = 0,1 d^3 \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{W_y}{0,1}};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{218,3 \text{ см}^3}{0,1}} = 12,97 \text{ см} \approx 13 \text{ см}.$$

Для заданной внешней нагрузки необходимый диаметр стержня должен быть не менее **13 см**.

**5. Определение допускаемой величины нагрузки  $q$ , если заданы диаметр круглого поперечного сечения стержня  $d$ , допускаемое напряжение  $[\sigma]$  и длина  $l$ . Использовать четвертую теорию прочности**

Определим допускаемую величину нагрузки  $q$ , если диаметр круглого поперечного сечения стержня  $d = 10\text{см}$ ,  $[\sigma] = 100\text{МПа}$ ,  $l = 1\text{м}$ . Используем четвертую теорию прочности.

Чтобы не произошло разрушение, должно выполняться условие прочности

$$\sigma^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{IV}}}{W_y} \leq [\sigma];$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = [\sigma] W_y;$$

$$W_y = 0,1d^3 = 0,1 \cdot (10\text{см})^3 = 100\text{см}^3;$$

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = 100 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \text{м}^3 = 10\text{кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{В опасном сечении } M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = 2,183ql^2;$$

$$2,183ql^2 = 10\text{кН} \cdot \text{м};$$

$$2,183 \cdot q \cdot (1\text{м})^2 = 10\text{кН} \cdot \text{м};$$

$$q = \frac{10\text{кН} \cdot \text{м}}{2,183\text{м}^2} = 4,58\text{кН/м}.$$

Для стержня диаметром круглого поперечного сечения  $d = 10\text{см}$ , внешняя нагрузка не должна превышать **4,58кН/м**.

**Контрольные вопросы к расчётно-графической работе**

**«Расчет стержней на изгиб с кручением»**

1. Что понимается под сложным сопротивлением?
2. Сколько внутренних силовых факторов возникает в общем случае действия сил?

3. Как выглядит формула нормальных напряжений в общем случае действия сил?
4. Как определяется опасное сечение в общем случае действия сил на стержень круглого поперечного сечения?
5. Что понимают под суммарным изгибающим моментом?
6. Сколько опасных точек имеется в сечении стержня круглого поперечного сечения в общем случае действия сил? Где располагаются эти точки?
7. Какой вид напряженного состояния имеет место в опасных точках стержня круглого поперечного сечения в общем случае действия сил?
8. Как образуется расчетный момент для стержня круглого поперечного сечения?
9. Как записывается условие прочности для стержня круглого поперечного сечения в общем случае действия сил?

#### **Рекомендуемая литература**

1. Тимофеев, С. И. Сопротивление материалов: краткий курс / С. И. Тимофеев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 336 с.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. — М.: Высшая школа, 2003. — 560 с.
3. Варданын, Г. С. Сопротивление материалов (с основами строительной механики): Учебник / Г. С. Варданын, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. — М.: ИНФРА-М, 2011. — 480 с.
4. Степин, П. А. Сопротивление материалов / П. А. Степан. — СПб.: Лань, 2014.—320 с.
5. Копнов, В. А. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапка. — М.: Высшая школа, 2003.—351 с.