



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

## **Практикум**

по выполнению расчетно-графической  
работы на тему  
«Плоское напряженное состояние»  
по дисциплине

# **«Сопротивление материалов»**

Авторы  
Кадомцева Е. Э.

Ростов-на-Дону, 2019

## Аннотация

Практикум содержит основные теоретические положения, примеры решения типовых задач и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Плоское напряжённое состояние» по дисциплине «Сопротивление материалов».

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по специальности 08.05.01 – «Строительство уникальных зданий и сооружений».

## Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов»

Кадомцева Е.Э.



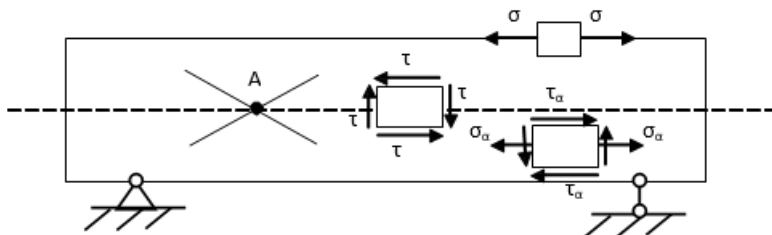
## Оглавление

<b>1. Основные положения плоского напряжённого состояния .....</b>	<b>4</b>
1.2. Прямая задача плоского напряжённого состояния....	5
1.3. Обратная задача плоского напряженного состояния	6
1.4. Максимальные касательные напряжения .....	8
1.5. Чистый сдвиг .....	8
<b>2. Примеры решения задач на исследование напряжённого состояния в точке .....</b>	<b>8</b>
2.1. Задача №1. Прямая задача при плоском напряжённом состоянии.....	9
2.2. Задача №2. Обратная задача при плоском напряжённом состоянии.....	11
2.3. Задача №3. Напряжённое состояние при плоском изгибе.....	13
2.4. Задача №4. Напряжённое состояние при кручении вала круглого поперечного сечения.....	25
2.5. Задача №5. Напряжённое состояние при одноосном растяжении-сжатии.....	28
<b>3. Контрольные вопросы .....</b>	<b>33</b>
<b>4. Рекомендуемая литература .....</b>	<b>34</b>

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

## 1.1 Напряжённое состояние в точке

Напряжённым состоянием в точке называется совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.

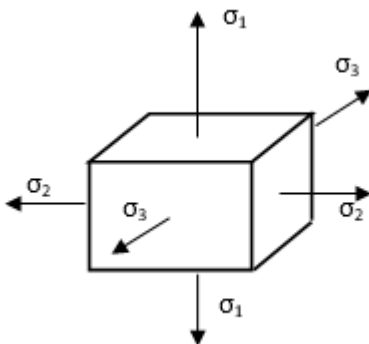


**Рис. 1. Различные виды напряжённого состояния в точке**

Через каждую точку деформированного тела можно провести бесконечное множество площадок (точка А, рис. 1), по которым в общем случае действуют нормальные  $\sigma_\alpha$  и касательные напряжения  $\tau_\alpha$ .

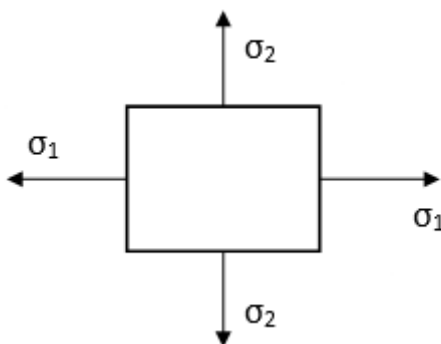
Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, называются главными, а возникающие нормальные напряжения на этих площадках называются главными напряжениями.

В общем случае в деформируемом поле возникает три главных напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Причем  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Такое напряжённое состояние называется объёмным (рис. 2).



**Рис. 2. Объёмное напряжённое состояние**

Если одно из главных напряжений равно нулю, то такое напряженное состояние называется плоским или двусосным (рис.3)



**Рис. 3. Плоское напряжённое состояние**

Если не равно нулю только одно главное напряжение, то такое напряженное состояние называется одноосным (рис.4)

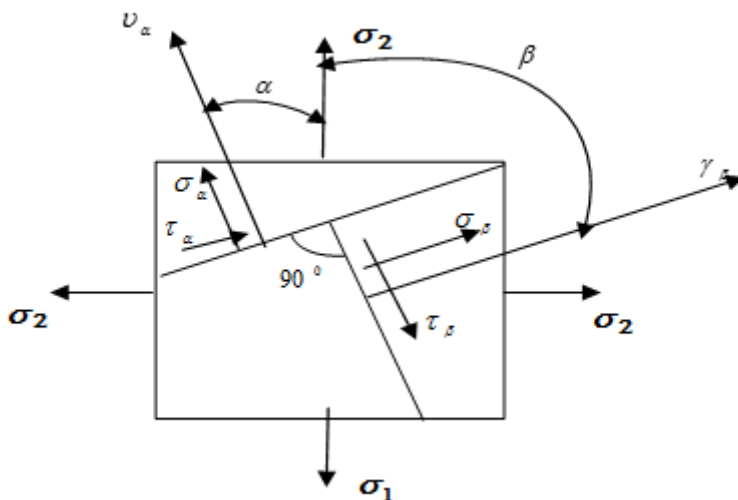


**Рис. 4. Одноосное напряжённое состояние**

## 1.2. Прямая задача плоского напряжённого состояния

Прямая задача плоского напряжённого состояния заключается в определении численных значений касательных  $\tau_\alpha$ ,  $\tau_\beta$  и

нормальных  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  напряжений на произвольных площадках через главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . (рис.5)



**Рис. 5. Напряжения на главных и наклонной площадках при плоском напряжённом состоянии (прямая задача).**

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (1)$$

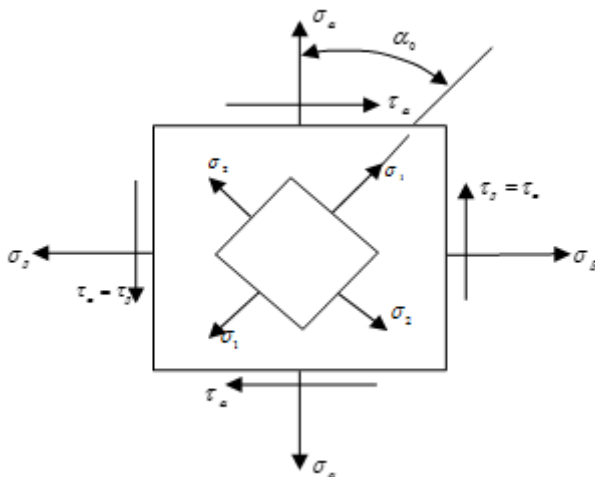
$$\begin{cases} \sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \\ \tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (2)$$

Сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3)$$

### 1.3. Обратная задача плоского напряженного состояния

Обратная задача плоского напряжённого состояния заключается в определении положения главных площадок и численных значений главных напряжений (рис.6)



**Рис. 6. Напряжения на наклонных и главных площадках при плоском напряжённом состоянии (обратная задача).**

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right) \\ \sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} \quad (5)$$

Где

$\alpha_0$  — угол наклона главных площадок.

Для определения численных значений главных напряжений можно также воспользоваться следующими формулами

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_\alpha \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \sin^2 \alpha_0 - \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 \\ \sigma_2 = \sigma_\alpha \sin^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \cos^2 \alpha_0 + \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 \end{cases} \quad (6)$$

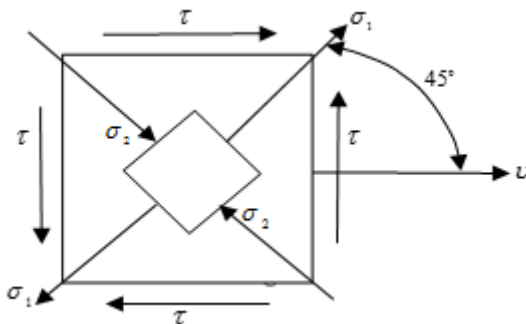
### 1.4. Максимальные касательные напряжения

Максимальные касательные напряжения возникают на площадках, наклонённых к главным площадкам под углом  $45^\circ$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

### 1.5. Чистый сдвиг

Если на двух взаимно перпендикулярных площадках отсутствуют нормальные напряжения, то этот элемент подвергается чистому сдвигу (рис. 7).



**Рис. 7. Главные площадки и главные напряжения при чистом сдвиге**

В этом случае

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau|$$

## 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ



## 2.1. Задача №1. Прямая задача при плоском напряжённом состоянии

1. Определить нормальные  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$  и касательные напряжения  $\tau$  на площадках элемента, наклоненных к главной площадке под углом  $\alpha$ .

Графически показать напряжённое состояние на площадках этого элемента.

2. Определить площадки, на которых возникают  $\tau_{max}$ .  
 Определить величины  $\tau_{max}$ ,  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$ , возникающие на этих площадках. Графически показать напряжённое состояние на площадке этого элемента.

**Дано:**  $\sigma_1 = 100 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = 50 \text{ МПа}$ ,  $\alpha = 25^\circ$ .

**Требуется:**

Определить численные значения напряжений  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau$ ,  $\tau_{max}$ .

### Решение

Определим нормальные напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$  по формулам (1) и (2)

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$|\tau_\alpha| = |\tau_\beta| = \tau$$

Подставим заданные величины

$$\sigma_\alpha = 100 \cdot \cos^2 25^\circ + 50 \sin^2 25^\circ = 100 \cdot 0,9063^2 + 50 \cdot 0,4226^2 = 91 \text{ МПа}$$

$$\sigma_\beta = 100 \cdot \sin^2 25^\circ + 50 \cdot \cos^2 25^\circ = 100 \cdot 0,4225^2 + 50 \cdot 0,9063^2 = 58,3 \text{ МПа}$$

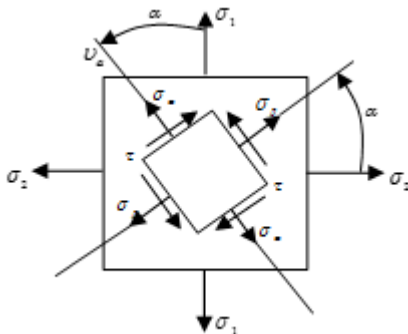
Касательные напряжения  $\tau$  на площадках элемента вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{100 - 50}{2} \cdot \sin 50^\circ = 25 \cdot 0,766 = 19,15 \text{ МПа}$$

Напряжённое состояние на площадках этого элемента указано на рис. 8.



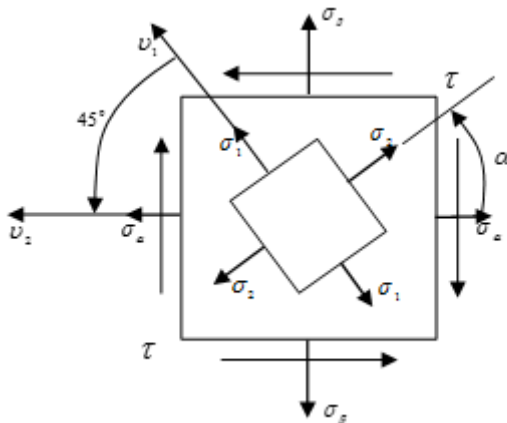
**Рис.8. Напряжённое состояние в точке при заданных главных напряжениях.**

2. Максимальные касательные напряжения  $\tau_{max}$  возникают на площадках, наклонённых к главным площадкам под углом  $45^\circ$ . Следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{100 - 50}{2} = 25 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{100 + 50}{2} = 75 \text{ МПа} .$$

Напряжённое состояние на площадках этого элемента имеет вид (рис.9):



**Рис. 9. Площадки с максимальными касательными напряжениями  $\alpha = 45^\circ$ .**

**Проверка:** Так как нормальные напряжения достигают экстремальное значение на главных площадках (то есть в данной задаче  $\sigma_1 = \sigma_{\max} = 100 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{\min} = 50 \text{ МПа}$ ) должно выполняться неравенство

$$\sigma_1 > \sigma_\alpha > \sigma_\beta > \sigma_2 \text{ или}$$

$$100 \text{ МПа} > 91 \text{ МПа} > 58,9 \text{ МПа} > 50 \text{ МПа} .$$

## 2.2. Задача №2. Обратная задача при плоском напряжённом состоянии

**Дано:**

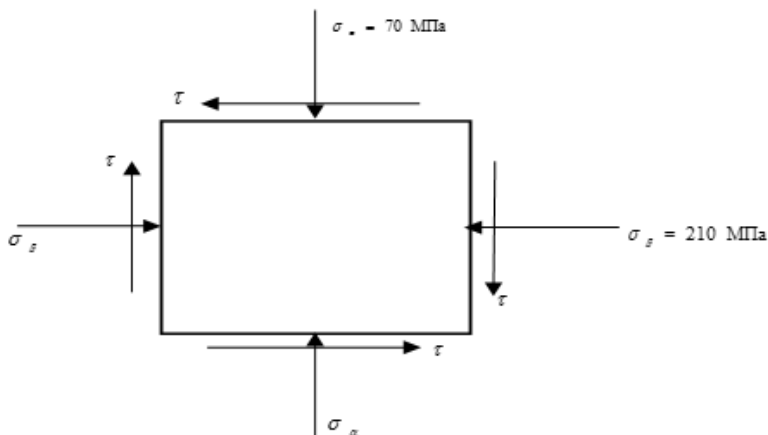
$$\sigma_\alpha = -70 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_\beta = -210 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_\alpha = \tau = -110 \text{ МПа} .$$

**Требуется:**

Определить положение главных площадок и численные значения главных напряжений (рис. 10)



**Рис. 10. Напряжённое состояние в точке (обратная задача)**

Напряжённое состояние на рис. 10 показано с учётом знаков  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\alpha$ .

### Решение

1. Определение положения главных площадок

Найдём угол наклона главных площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{2(-110 \text{ МПа})}{-70 \text{ МПа} + 210 \text{ МПа}} = -1,57$$

$$2\alpha_0 = -63,9^\circ \rightarrow \alpha_0 = -31,95^\circ$$

2. Определение численных значений главных напряжений

$$\cos^2 \alpha_0 = 0,769; \quad \sin^2 \alpha_0 = 0,2314; \quad \sin 2\alpha_0 = -0,843$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_\alpha \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \sin^2 \alpha_0 + \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 = \\ &= -70 \text{ МПа} \cdot 0,769 - 210 \text{ МПа} \cdot 0,2314 + 110 \text{ МПа} \cdot 0,843 = -9,7 \text{ МПа} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_\alpha \sin^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \cos^2 \alpha_0 - \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 = \\ &= -70 \text{ МПа} \cdot 0,2314 - 210 \text{ МПа} \cdot 0,769 - 110 \text{ МПа} \cdot 0,843 = -270,4 \text{ МПа} \end{aligned}$$

**Проверка:**

$$1) \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left( -280 \pm \sqrt{140^2 + 4 \cdot 110^2} \right) \text{ МПа} = \frac{1}{2} (-280 \pm 260,8) \text{ МПа}$$

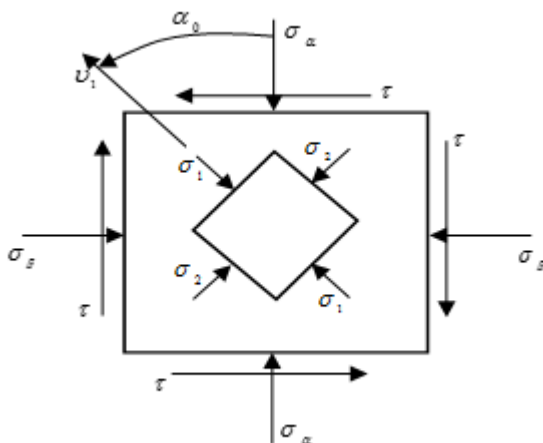
$$\sigma_1 = -9,6 \text{ МПа}; \sigma_2 = -270,4 \text{ МПа};$$

$$2) \sigma_1 > \sigma_\alpha > \sigma_\beta > \sigma_2 \rightarrow (-9,6) > (-70) > (-210) > (-270,4)$$

;

$$3) \sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow -70 - 210 = -9,6 - 270,4 \rightarrow -280 = -280$$

Положение главных площадок и главных напряжений показано на рис. 11.



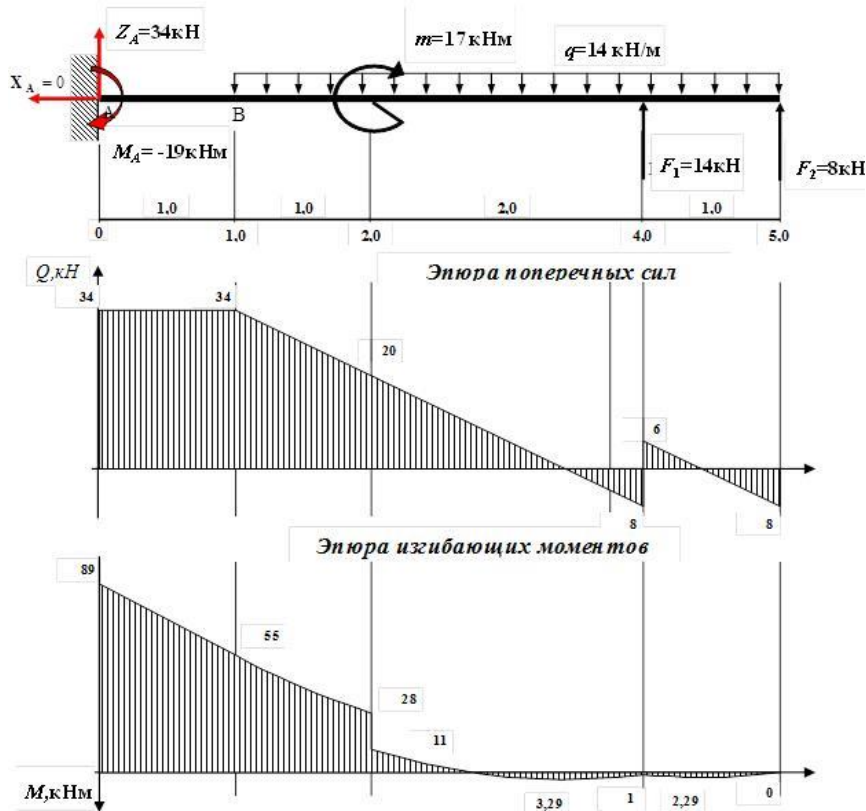
**Рис.11. Главные площадки и главные напряжения.**

### 2.3. Задача №3. Напряжённое состояние при плоском изгибе

Исследование напряжённого состояния для двутаврового поперечного сечения проведём на примере балки по схеме рис. 2(б) методических указаний к данному заданию(рис. 12).

1. Построим для этой балки эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$  по «Правилам контроля и построения эпюр внутренних силовых факторов»(рис. 12).

**Примечание:** «Правила контроля и построения эпюр внутренних силовых факторов» смотри в Практикуме по выполнению расчётно-графической работы «Построение эпюр внутренних силовых факторов в балках и плоских рамах». /Портал электронного обучения «СКИФ» ДГТУ (<http://skif.donstu.ru/>).



**Рис. 12. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента.**

2. Заданная балка имеет двутавровое поперечное сечение (двутавр №18).

Проверим прочность заданной балки

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \rightarrow \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma] \rightarrow \frac{89 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{148 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 601 \text{ МПа} > [\sigma]$$

Так как заданное сечение не обеспечивает прочность балки необходимо провести перерасчёт и найти новое двутавровое поперечное сечение.

3. Подберем новое поперечное сечение балки

$$W_y = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{89 \cdot 10^3 \text{ НМ} \cdot \text{М}^2}{160 \cdot 10^6 \text{ Н}} = 0,556 \cdot 10^{-3} \text{ М}^3 = 556 \text{ см}^3$$

Принимаем сечение балки:

а).

Дву-

тавр

$$\text{№30а, } W_y = 518 \text{ см}^3, \quad \sigma_{max} = \frac{89 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2} = 172 \text{ МПа}$$

> [σ]

Проверка экономичности

$$\left| \frac{160 - 172}{160} \right| \cdot 100\% = 7,5\% > 5\%,$$

Балка перегружена. Следовательно, двутавр №30а не подходит.

б).

Рассмотрим

двутавр

$$\text{№}33, \quad W_y = 597 \text{ см}^3, \quad \sigma_{max} = \frac{89 \cdot 10^3}{597} \frac{H}{M^2} = 149 \text{ МПа} <$$

<  $[\sigma]$ .

Проверка экономичности

$$\left| \frac{160 - 149}{160} \right| \cdot 100\% = 6,9\% > 5\%, \text{ Балка недогружена.}$$

Окончательно принимаем

двутавр № 33. Выпишем из сортамента его геометрические характеристики:

$$h = 33 \text{ см}; \quad v = 14 \text{ см}; \quad d = 0,7 \text{ см}; \quad t = 1,12 \text{ см}; \quad A = 53,8 \text{ см}^2; \quad I_y = 9840 \text{ см}^4;$$

$$W_y = 597 \text{ см}^3; \quad S_y = 339 \text{ см}^3$$

4. Построим эпюры напряжений  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  в опасном сечении балки.

**Примечание:** План построения эпюр « $\sigma$ » и « $\tau$ » смотри в Практикуме по выполнению расчётно-графической работы «Расчёт балок на прочность». /Портал электронного обучения «СКИФ» ДГТУ (<http://skif.donstu.ru/>).

Для определения главных напряжений найдём  $\sigma$  и  $\tau$  в точках 1,2,3, 4 и 5.



$$\begin{aligned}
 (\bullet)1: \quad \tau &= \frac{Q \cdot S_y^{omc}}{e^{omc} \cdot I_y} = \frac{Q \cdot \frac{1}{2}(h-t) \cdot bt}{d \cdot I_y} = \\
 &= \frac{34 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot (33-1,12) \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 14 \cdot 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 12,3 \text{ МПа}
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{M_{max} \cdot z_1}{I_y}; \quad z_1 = -\left(\frac{h}{2} - t\right) = -\left(\frac{33 \text{ см}}{2} - 1,12 \text{ см}\right) = -15,38 \text{ см}$$

$$\sigma = \frac{-89 \cdot 10^3 \text{ Нм}(-15,38) \cdot 10^{-2}}{9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 139 \text{ МПа}$$

$$\begin{aligned}
 (\bullet)2: \quad S_y^{omc} &= (S_y^{omc})_1 + (S_y^{omc})_2 = \frac{1}{2}(h-t) \cdot bt + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right) d \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{4} - t\right)\right] = \\
 &= \frac{1}{2}(h-t) \cdot bt + \frac{3}{8}\left(\frac{h}{2} - t\right)^2 \cdot d = \frac{1}{2}(33-1,12) \cdot 14 \cdot 1,12 \text{ см}^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{33}{2} - 1,12\right)^2 \cdot 0,7 \text{ см}^3 = \\
 &= 249,9 \text{ см}^3 + 62,1 \text{ см}^3 = 312 \text{ см}^3 = 312 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3
 \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{34 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 312 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 15,4 \text{ МПа}$$

$$\sigma = \frac{M_{y \max} \cdot z_2}{I_y}; \quad z_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right) = -7,69 \text{ см}$$

$$\sigma = \frac{-89 \cdot 10^3 \text{ Нм} \cdot (-7,69) \cdot 10^{-2} \text{ м}}{9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 69 \text{ МПа}$$

$$(\bullet)3: \quad S_y^{omc} = S_y = 339 \text{ см}^3$$

$$\tau = \frac{34 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 339 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 16,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma = 0;$$

так как  $Z_3 = 0$

$$(\bullet) 4: \tau = \tau_{(\bullet)2} = 15,4 \text{ МПа}, \sigma = -\sigma_{(\bullet)2} = -69 \text{ МПа}$$

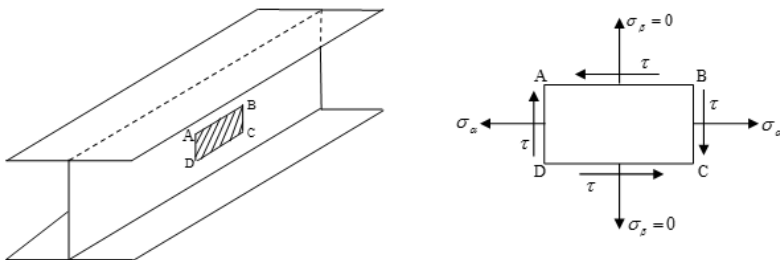
$$(\bullet) 5: \tau = \tau_{(\bullet)1} = 12,3 \text{ МПа}, \sigma = -\sigma_{(\bullet)1} = -139 \text{ МПа}$$

Определим главные напряжения в точках 1, 2, 3, 4 и 5 по

$$\text{формулам } \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right]$$

При плоском изгибе  $\sigma_\alpha = \sigma$  (нормальные напряжения в поперечном сечении),  $\sigma_\beta = 0$  (нормальные напряжения в продольных сечениях),  $\sigma_\alpha > 0$ ;  $\tau > 0$ .

(рис. 13).



**Рис. 13. Напряжённое состояние в произвольной точке при плоском изгибе.**

Используя формулу главных напряжений (4), получим

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right).$$

Главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right), \sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

$$(\bullet) 1: \sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) = \frac{1}{2} \left( 139 + \sqrt{139^2 + 4 \cdot 12,3^2} \right) \text{ МПа} = 140 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) = \frac{1}{2}(139 - 141,2)\text{МПа} = -1,1\text{МПа}$$

$$(\bullet) 2: \sigma_1 = \frac{1}{2}(69 + \sqrt{69^2 + 4 \cdot 15,4^2})\text{МПа} = 72,3\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(69 - 75,56)\text{МПа} = -3,28\text{МПа}$$

$$(\bullet) 3: \sigma_1 = \frac{1}{2}(0 + \sqrt{0 + 4\tau^2}) = \tau = 16,7\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(0 - \sqrt{0 + 4\tau^2}) = -\tau = -16,7\text{МПа}$$

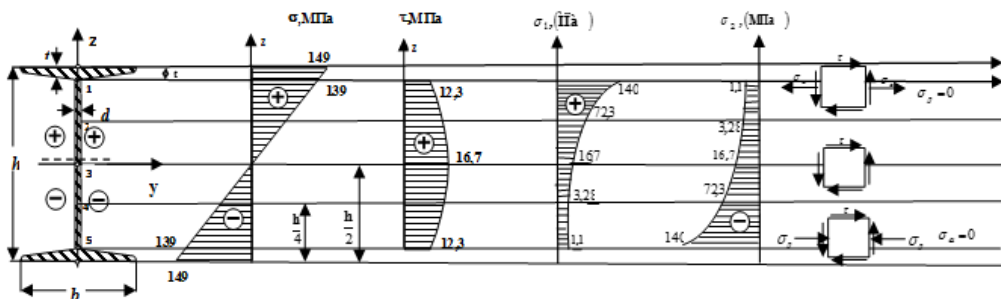
$$(\bullet) 4: \sigma_1 = \frac{1}{2}(-69 + \sqrt{69^2 + 4 \cdot 15,4^2})\text{МПа} = (-69 + 75,56)\frac{1}{2} = 3,28\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(-69 - \sqrt{69^2 + 4 \cdot 15,4^2})\text{МПа} = -72,3\text{МПа}$$

$$(\bullet) 5: \sigma_1 = \frac{1}{2}(-139 + \sqrt{139^2 + 4 \cdot 12,3^2})\text{МПа} = \frac{1}{2}(-139 + 141,2)\text{МПа} = 1,1\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(-139 - \sqrt{139^2 + 4 \cdot 12,3^2})\text{МПа} = \frac{1}{2}(-139 - 141,2)\text{МПа} = -140\text{МПа}$$

По полученным численным значениям главных напряжений строим эпюры  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  (рис. 14).



**Рис. 14. Эпюры распределения нормальных, касательных и главных напряжений в поперечном сечении балки**

5. В опасном сечении балки определим положение главных площадок и численные значения главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  в точках  $z = \pm \frac{h}{2}$ ;  $z = \pm \frac{h}{4}$ ;  $z = 0$  и

$$z = \pm \frac{h}{2}; z = \pm \frac{h}{4}; z = 0$$

покажем на рисунке напряжённое состояние элемента в этих точках.

При построении эпюр  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в предыдущем пункте величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  уже были определены.

Найдем угол наклона  $\alpha_0$  главных площадок для элемента ABCD (рис. 13), находящегося в точках 1, 2, 3, 4 и 5 и покажем графически напряжённое состояние этого элемента в этих точках.

Угол  $\alpha_0$  отсчитывается от направления алгебраически большего напряжения  $\sigma_2$ . Обозначения выбираем так, чтобы выполнялось условие  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ .

Для точек 1 и 2:  $\sigma_\alpha = \sigma$ ,  $\sigma_\beta = 0$ .

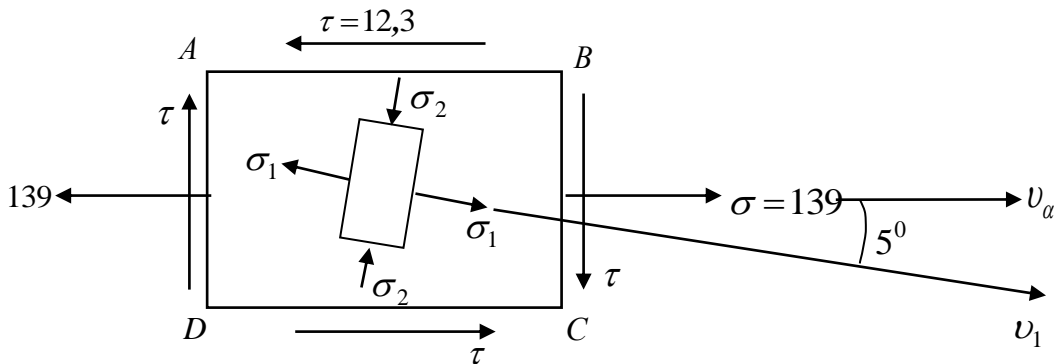
Для точек 4 и 5:  $\sigma_\alpha = 0$ ;  $\sigma_\beta = \sigma$  (так как в этих точках  $\sigma < 0$ ).

При этом формулы для главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  не изменяются

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

$$(\bullet) 1: (\text{рис.15}) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \cdot 12,3}{139} = 0,177$$

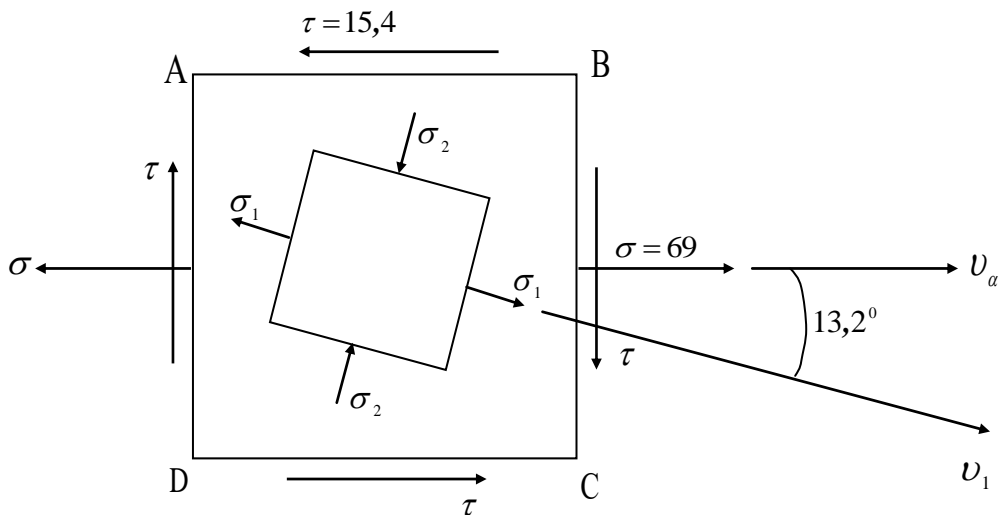
$$\alpha_0 = 5,5^\circ, \quad \sigma_1 = 140 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -1,1 \text{ МПа}$$



**Рис.15. Напряжённое состояние в точке 1**

$$(\bullet) 2: (\text{рис.16}) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \cdot 15,4}{69} = 0,44$$

$$\alpha_0 = 13,2^\circ, \quad \sigma_1 = 72,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -3,28 \text{ МПа}$$

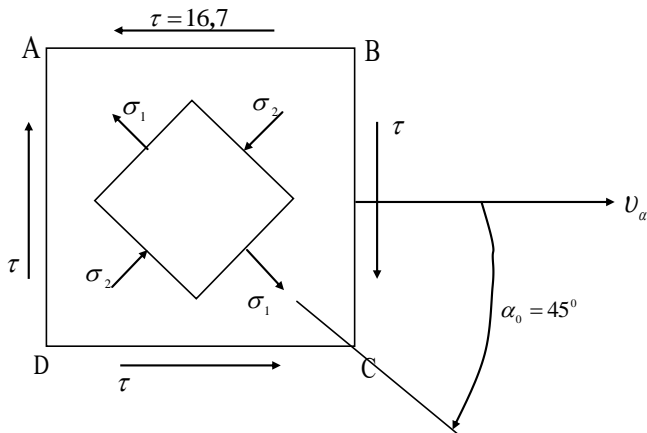


**Рис.16. Напряжённое состояние в точке 2.**

(•) 3: (Рис.17)  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2\tau}{0} = \infty \rightarrow \alpha_0 = 45^\circ$

$\alpha_1 = 16,7\text{МПа}; \quad \sigma_2 = -16,7\text{МПа}$

На уровне (•) 3 элемент ABCD подвергается чистому сдвигу  $\sigma_1 = 16,7\text{МПа}; \quad \sigma_2 = -16,7\text{МПа}$ .



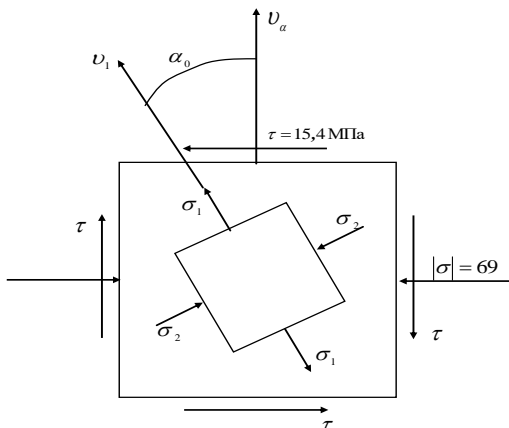
**Рис.17. Напряжённое состояние в точке 3**

(•) 4 (Рис.18) так как  $\sigma < 0$  в этой точке, примем

$$\sigma_\alpha = 0; \quad \sigma_\beta = -69 \text{ МПа}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{2 \cdot 15,4}{-(-69)} = +0,44; \quad \alpha_0 = +13,2$$

$$\sigma_1 = 3,28 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -72,3 \text{ МПа}$$

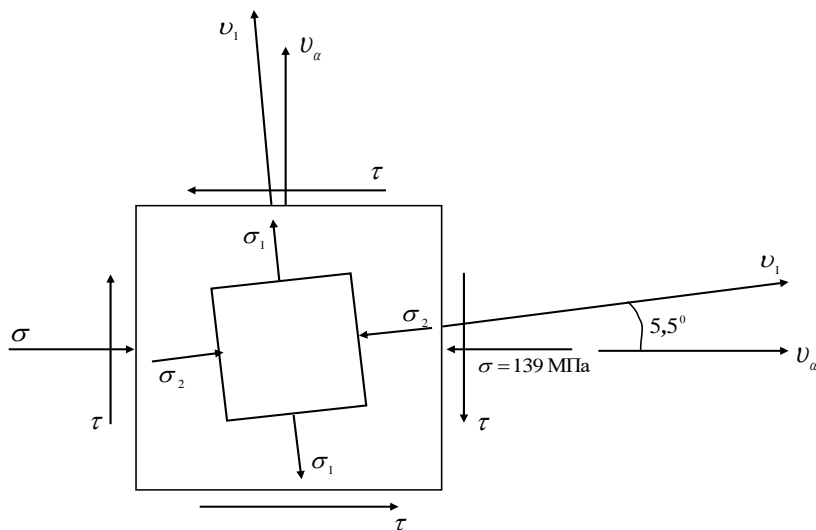


**Рис.18. Напряжённое состояние в точке 4**

Сравним с точкой 2: изменение направления напряжения  $\sigma$  ведёт к изменению величин  $\sigma_1, \sigma_2$  и направления главных площадок.

$$(\bullet) 5: (\text{Рис.19}) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (12,3)}{-(-139)} = +0,177, \quad \alpha_0 = +5,5^\circ; \quad \sigma_\alpha = 0; \quad \sigma_\beta = -69 \text{ МПа}$$

$$\alpha_1 = 1,1 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -140 \text{ МПа}$$



**Рис.19. Напряжённое состояние в точке 5**

Необходимо проверить правильность определения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\alpha$ , используя следующие формулы и свойства главных напряжений

$$\text{а) } \left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_\alpha \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \sin^2 \alpha_0 + \tau \sin 2\alpha_0 \\ \sigma_2 &= \sigma_\beta \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\alpha \sin^2 \alpha_0 - \tau \sin 2\alpha_0 \end{aligned} \right\}$$

б)  $\sigma_1 > \sigma_\alpha > \sigma_\beta > \sigma_2$

в)  $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$

Проведём проверку для точки 2

$$\sigma_\alpha = \sigma = 69 \text{ МПа}; \quad \sigma_\beta = 0; \quad \tau = 15,4; \quad \alpha_0 = 13,2^\circ$$

$$\sigma_1 = 72,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -3,28 \text{ МПа}$$

а)

$$\cos^2 \alpha_0 = 0,9576; \quad \sin^2 \alpha_0 = 0,0424; \quad \sin 2\alpha_0 = 0,4029$$



$$\sigma_1 = 69 \text{ МПа} \cdot 0,9576 + 15,4 \text{ МПа} \cdot 0,4029 = 72,3 \text{ МПа}$$

$$\sigma_1 = 69 \text{ МПа} \cdot 0,0424 - 15,4 \text{ МПа} \cdot 0,4029 = -32,8 \text{ МПа}$$

$$\text{б) } 72,3 > 69 > 0 > (-3,28)$$

$$\text{в) } 69 + 0 = 72,3 - 3,3$$

$$69 = 69$$

**Вывод:** Численные значения главных напряжений и положение главных площадок в  $(\bullet)$  2 найдены верно.

**Примечание:** Аналогично решается задача №3 для балок прямоугольного поперечного сечения.

## 2.4. Задача №4. Напряжённое состояние при кручении вала круглого поперечного сечения

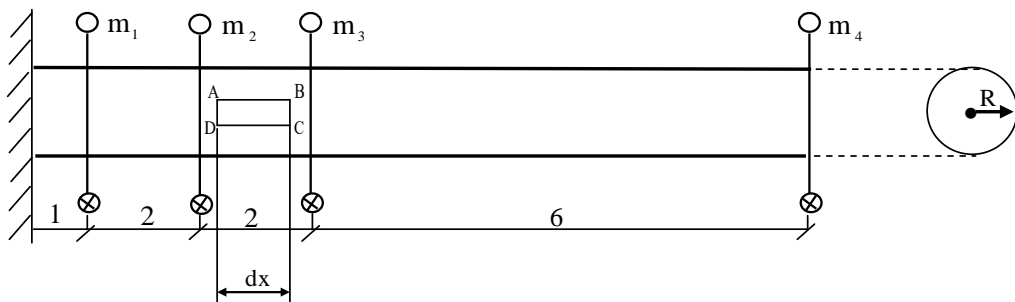
Для вала, изображенного на рис.20, **требуется:**

1. Построить эпюры крутящих моментов.
2. Проверить прочность вала, если  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$  (сталь).
3. Если  $\tau_{\text{max}} > [\tau]$ , подобрать радиус вала  $R$  из условия прочности.
4. Графически показать напряжённое состояние элементов вала на поверхности в опасном сечении.

**Да-**

**но:**  $m_1 = 17 \text{ кНм}$ ;  $m_2 = -20 \text{ кНм}$ ;  $m_3 = 28 \text{ кНм}$ ;

$m_4 = 14 \text{ кНм}$ ;  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ ;  $R = 2,5 \text{ см}$ .



**Рис.20. Расчётная схема вала.**

**Решение**

1. Определяем значения крутящих моментов на участках стержня, пронумеровав их справа налево

$$M_{4-3} = m_4 = 14 \text{кНм};$$

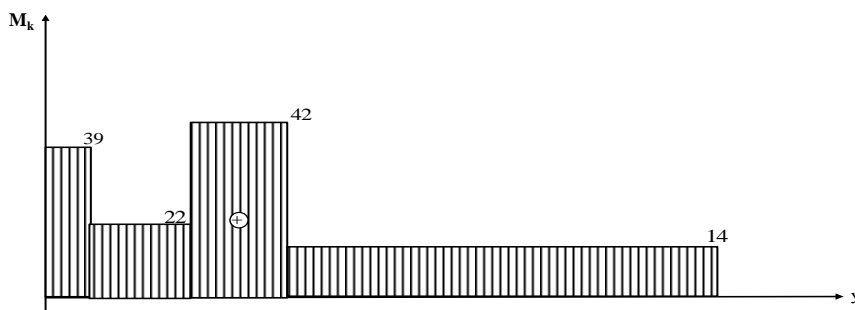
$$M_{3-2} = m_4 + m_3 = 14 + 28 = 42 \text{кНм};$$

$$M_{2-1} = m_4 + m_3 + m_2 = 14 + 28 - 20 = 22 \text{кНм};$$

$$M_{1-0} = m_4 + m_3 + m_2 + m_1 = 14 + 28 - 20 + 17 = 39 \text{кНм};$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов

$M_k$  (рис.21)



**Рис. 21. Эпюра крутящих моментов (Размерность крутящего момента кнм).**

Максимальное значение крутящего момента

$$M_{k \max} = 42 \text{ кНм} \quad (\text{рис. 21}).$$

2. Определим радиус вала из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{k \max}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

где  $M_{k \max}$  – наибольшая величина крутящего момента на каком-либо участке эпюры  $M_k$  (по модулю);

$W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{\pi R^3}{2}.$$

Из условия прочности получим формулу для определения радиуса вала

$$R = \sqrt[3]{\frac{2M_{k \max}}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$R = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 4200 \text{ кНм}}{3,14 \cdot 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}}} = 6,941 \text{ см} \approx 6,94 \text{ см}.$$

3. Подсчитаем значение полярного момента для найденного радиуса вала

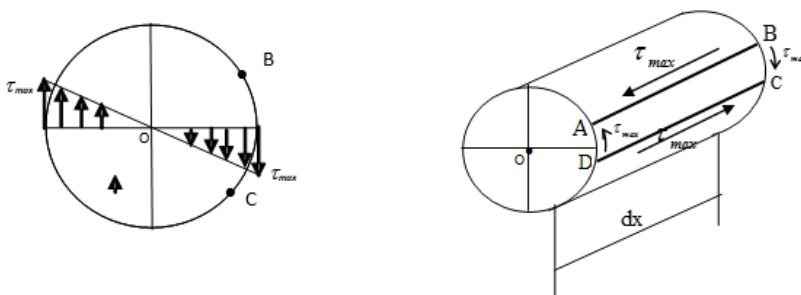
$$W_{\rho} = \frac{3,14 \cdot (6,94 \text{ см})^3}{2} = 525 \text{ см}^3$$

Тогда  $\tau_{\max}$  принимаем следующее значение

$$\tau_{\max} = \frac{4200 \text{ кНсм}}{525 \text{ см}^3} = 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 80 \text{ МПа} = [\tau]$$

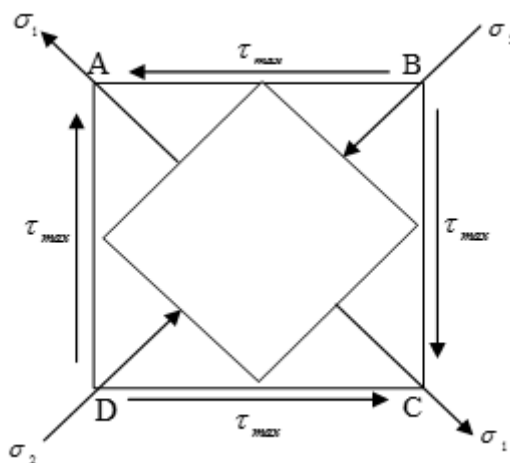
Условие прочности выполняется.

4. Покажем напряжённое состояние элементов вала на поверхности в опасном сечении (рис.22)



**Рис.22.Элемент ABCDна поверхности вала**

Элемент ABCD подвергается чистому сдвигу (рис. 23)



**Рис.23. Напряжённое состояние элемента ABCD.**

## 2.5. Задача №5. Напряжённое состояние при одноосном растяжении-сжатии

Для стержня, подвергающегося осевому растяжению (сжатию) (рис. 24), **требуется:**

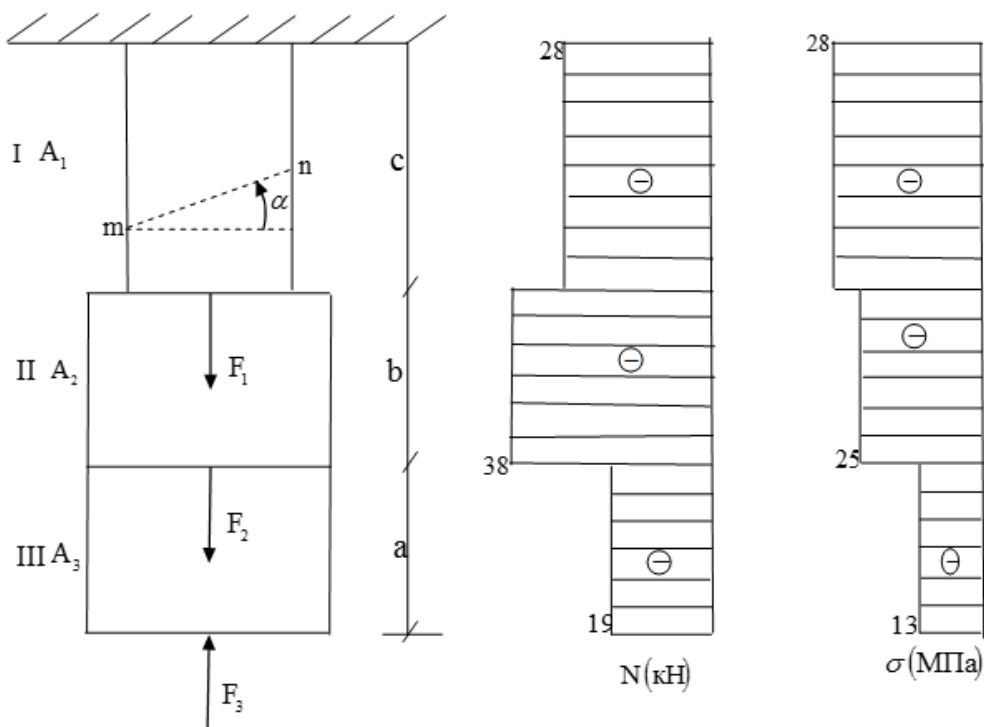
1. Построить эпюру продольных усилий  $N$ .
2. Построить эпюру  $\sigma$ .

3. В опасном сечении найти  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau$  на площадках, наклонённых к поперечному сечению под углом  $\alpha$ .
4. Графически показать напряжённое состояние элемента в опасном сечении.

**Дано:**  $F_1 = 10 \text{ кН}$ ,  $F_2 = -19 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 19 \text{ кН}$ ,

$A_1 = 10 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 15 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 15 \text{ см}^2$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 2 \text{ м}$ ,

$c = 3 \text{ м}$ ,  $\alpha = 25^\circ$ .

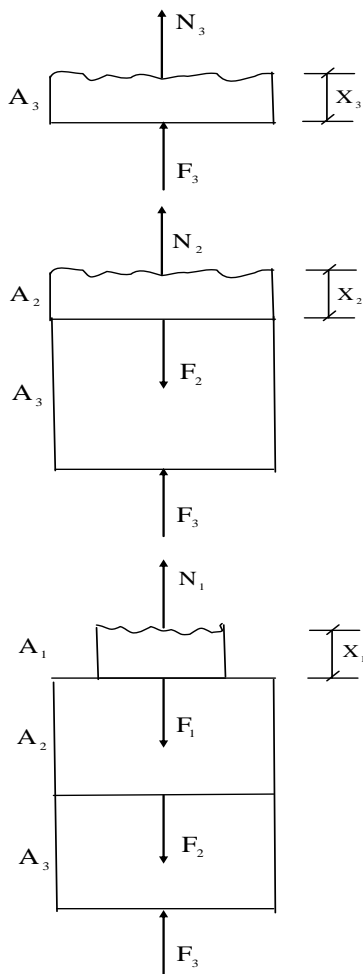


**Рис. 24. Схема стержня. Эпюры продольного усилия и нормальных напряжений**

1. Построение эпюры продольных усилий  $N$ .

Для построения эпюры продольных усилий разобьём стержень на три участка, начиная со свободного конца и считая границей участка любое изменение в нагрузке.

Внутренняя продольная сила численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на ось стержня (растягивающая сила считается положительной, сжимающая – отрицательной) (рис. 25).



**Рис.25. Определение продольных усилий на участках стержня**

Проведём сечение в любом месте третьего участка и расстояние от свободного конца до сечения обозначим через  $x_3$  ( $0 \leq x_3 \leq 2\text{м}$ ).

**III участок.**  $0 \leq x_3 \leq 2$

$$N_3(x_3) = -F_3 = -19\text{кН}$$

$$N_3(0) = N_3(2) = -19\text{кН}$$

Аналогично для второго участка

**II участок.**  $0 \leq x_2 \leq 2$

$$N_2(x_2) = -F_3 + F_2 = -19 - 19 = -38\text{кН}$$

$$N_2(0) = N_2(2) = -38\text{кН}$$

Аналогично для первого участка

**I участок.**  $0 \leq x_1 \leq 3$

$$N_1(x_1) = -F_3 + F_2 + F_1 = -19 - 19 + 10 = -28\text{кН}$$

$$N_1(0) = N_1(3) = -28\text{кН}$$

По полученным численным значениям продольных сил построим эпюру продольных сил (рис. 24).

2. Построение эпюры нормальных напряжений  $\sigma$ .

Определим напряжения на рассматриваемых участках стержня по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-19\text{кН}}{15\text{см}^2} = -1,27 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -12,7\text{МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-38\text{кН}}{15\text{см}^2} = -2,53 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -25,3\text{МПа};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-28 \text{ кН}}{10 \text{ см}^2} = -2,8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -28 \text{ МПа} .$$

По полученным численным значениям  $\sigma$  строим эпюру нормальных напряжений (рис. 24).

3. Определяем в опасном сечении значения  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau$  на площадках, наклонённых к поперечному сечению под углом  $\alpha$ .

По эпюре нормальных напряжений определяем опасный участок. В нашем примере им является участок I, так как здесь возникают наибольшие сжимающие напряжения.

Найдём  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau$  на площадках, наклонённых к поперечному сечению под углом  $\alpha = 25^\circ$ .

Для этого воспользуемся ниже приведенными формулами

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

Подставим в них числовые значения

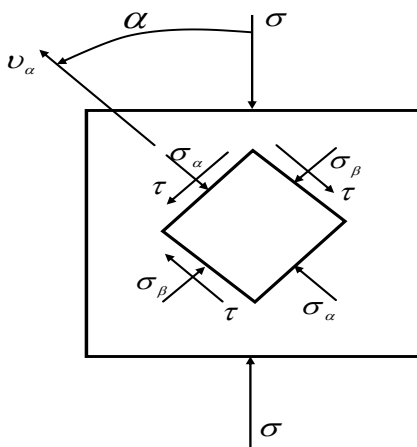
$$\sigma_\alpha = -28 \cdot \cos^2 25^\circ = -28 \cdot 0,9063^2 = -23 \text{ МПа}$$

$$\sigma_\beta = -28 \cdot \sin^2 25^\circ = -28 \cdot 0,4226^2 = -5 \text{ МПа}$$

$$\tau = -\frac{28}{2} \cdot \sin 50^\circ = -14 \cdot 0,766 = -10,7 \text{ МПа}$$

4. Покажем напряжённое состояние элемента в опасном сечении стержня (рис.26)





**Рис.26. Напряжённое состояние элемента на участке 1 при одноосном сжатии**

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется напряжением?
2. Какие виды напряжений используются в сопротивлении материалов?
3. Что называется нормальным напряжением?
4. Что называется касательным напряжением?
5. Как найти полное напряжение и его направление?
6. Какие напряжения называются главными?
7. Что называется объёмным, плоским и линейным напряжённым состоянием в точке?
8. Какие напряжения определяются в прямой задаче напряжённого состояния в точке?
9. Какие напряжения находятся в обратной задаче напряжённого состояния в точке?
10. Запишите формулы определения напряжений на наклонной площадке.
11. Запишите формулы определения главных напряжений .
11. Как определить положение главных площадок?
12. Каким является напряжённое состояние в точке при плоском изгибе?
13. Каким является напряжённое состояние в точке при од-

ноосном растяжении-сжатии?

14. Каким является напряжённое состояние в точке при кручении стержней круглого поперечного сечения?

15. В каких точках поперечного сечения возникает чистый сдвиг при плоском изгибе?

16. В каких точках поперечного сечения возникает одноосное напряжённое состояние?

17. На каких площадках возникает максимальное касательное напряжение?

#### 4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) [Текст]: учебник /Варданян, ГумединСуренович; Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков; Под ред. Г. С. Варданяна. - Изд. испр. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 505 с.: ил. - (Высшее образование). - Доп. Мин - вом образования РФ. - Учеб. изд. - Прил. - Сп. лит.: с.500.

2. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст]: Учебное пособие для студентов втузов /Под ред. В. К. Качурина; Авт.: Н. М. Беляев и др. - Изд.2-е, испр.; Репринтное изд. - М.: Альянс, 2014. - 429 с.: ил. - Доп. Мин. высш. и сред.спец. образования СССР; Прил. - ISBN 978-5-903034-39-1 : В пер.:7.

3. Сопротивление материалов : Учебник для студ. стрит.спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; Под ред. А. В. Александрова. - 6-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2008. - 56 2. Справочник для студентов технических вузов: Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов [Текст] / А. Д. Полянин и др. - 3-е изд. - М.: АСТ: Астрель, 2008. - 735 с. - ISBN 978-5-17-030740-1; 978-5-271-11602-5: В пер.: 240-00. 0 с.: ил. - ISBN 978-5-06-003732-6: В пер.:1005-00.

5. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. - 3-е изд., перераб. и доп. - Киев: Дельта, 2008. - 813 с.: ил. - Исп. лит.: с.799-800. - ISBN 978-966-8797-29-3 :В пер.: 2400-00.