



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Практикум
по выполнению расчетно-графической
работы на тему
«Плоское напряженное состояние»
по дисциплине

«Сопротивление материалов»

Авторы
Кадомцева Е. Э.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Практикум содержит основные теоретические положения, примеры решения типовых задач и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Плоское напряжённое состояние» по дисциплине «Сопротивление материалов».

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по специальности 08.05.01 – «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов»
Кадомцева Е.Э.



Оглавление

1. Основные положения плоского напряжённого состояния	4
1.2. Прямая задача плоского напряжённого состояния....	5
1.3. Обратная задача плоского напряженного состояния	6
1.4. Максимальные касательные напряжения	8
1.5. Чистый сдвиг	8
2. Примеры решения задач на исследование напряжённого состояния в точке	8
2.1. Задача №1. Прямая задача при плоском напряжённом состоянии.....	9
2.2. Задача №2. Обратная задача при плоском напряжённом состоянии.....	11
2.3. Задача №3. Напряжённое состояние при плоском изгибе.....	13
2.4. Задача №4. Напряжённое состояние при кручении вала круглого поперечного сечения.....	25
2.5. Задача №5. Напряжённое состояние при одноосном растяжении-сжатии.....	28
3. Контрольные вопросы	33
4. Рекомендуемая литература	34

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

1.1 Напряжённое состояние в точке

Напряжённым состоянием в точке называется совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.

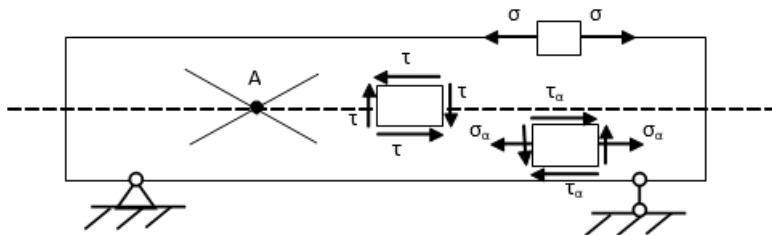


Рис. 1. Различные виды напряжённого состояния в точке

Через каждую точку деформированного тела можно провести бесконечное множество площадок (точка А, рис. 1), по которым в общем случае действуют нормальные σ_α и касательные напряжения τ_α .

Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, называются главными, а возникающие нормальные напряжения на этих площадках называются главными напряжениями.

В общем случае в деформируемом поле возникает три главных напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 . Причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Такое напряжённое состояние называется объёмным (рис. 2).

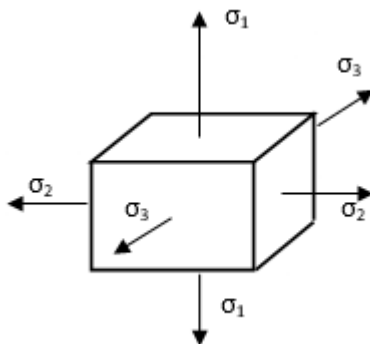


Рис. 2. Объёмное напряжённое состояние

Если одно из главных напряжений равно нулю, то такое напряженное состояние называется плоским или двусосным (рис.3)

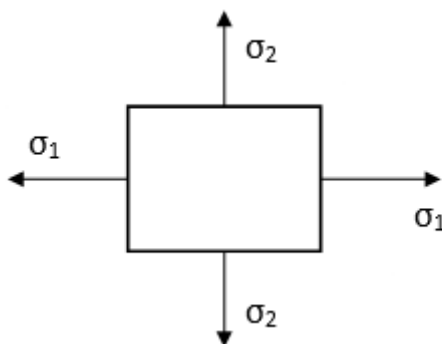


Рис. 3. Плоское напряжённое состояние

Если не равно нулю только одно главное напряжение, то такое напряженное состояние называется одноосным (рис.4)



Рис. 4. Одноосное напряжённое состояние

1.2. Прямая задача плоского напряжённого состояния

Прямая задача плоского напряжённого состояния заключается в определении численных значений касательных τ_α , τ_β и

нормальных σ_α , σ_β напряжений на произвольных площадках через главные напряжения σ_1 , σ_2 . (рис.5)

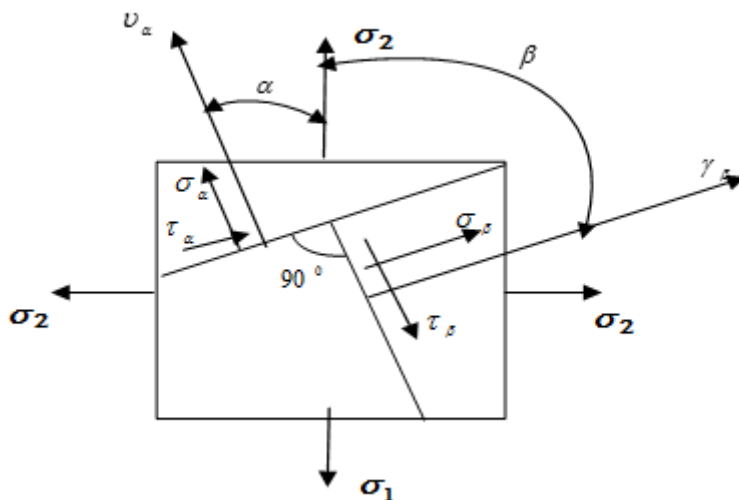


Рис. 5. Напряжения на главных и наклонной площадках при плоском напряжённом состоянии (прямая задача).

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \\ \tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (2)$$

Сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3)$$

1.3. Обратная задача плоского напряженного состояния

Обратная задача плоского напряжённого состояния заключается в определении положения главных площадок и численных значений главных напряжений (рис.6)

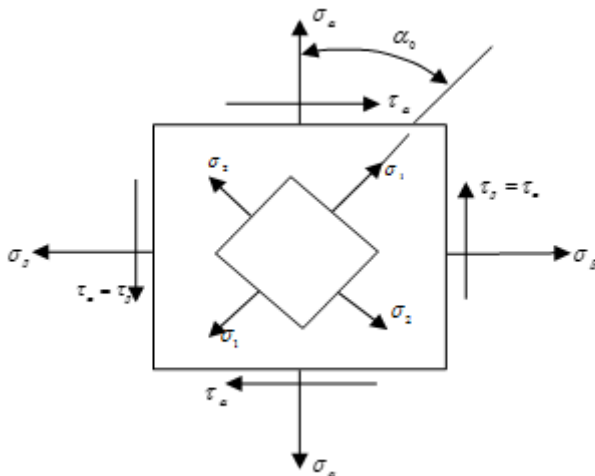


Рис. 6. Напряжения на наклонных и главных площадках при плоском напряжённом состоянии (обратная задача).

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right) \\ \sigma_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} \quad (5)$$

Где

α_0 — угол наклона главных площадок.

Для определения численных значений главных напряжений можно также воспользоваться следующими формулами

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_\alpha \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \sin^2 \alpha_0 - \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 \\ \sigma_2 = \sigma_\alpha \sin^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \cos^2 \alpha_0 + \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 \end{cases} \quad (6)$$

1.4. Максимальные касательные напряжения

Максимальные касательные напряжения возникают на площадках, наклонённых к главным площадкам под углом 45°

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

1.5. Чистый сдвиг

Если на двух взаимно перпендикулярных площадках отсутствуют нормальные напряжения, то этот элемент подвергается чистому сдвигу (рис. 7).

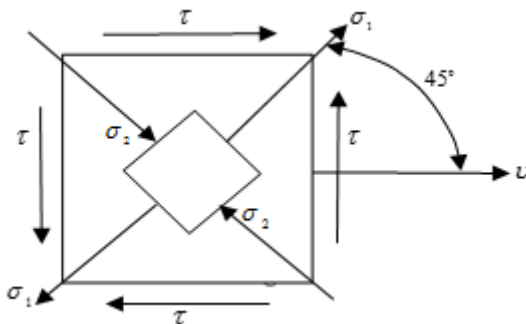


Рис. 7. Главные площадки и главные напряжения при чистом сдвиге

В этом случае

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau|$$

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

2.1. Задача №1. Прямая задача при плоском напряжённом состоянии

1. Определить нормальные σ_α и σ_β и касательные напряжения τ на площадках элемента, наклоненных к главной площадке под углом α .

Графически показать напряжённое состояние на площадках этого элемента.

2. Определить площадки, на которых возникают τ_{max} . Определить величины τ_{max} , σ_α и σ_β , возникающие на этих площадках. Графически показать напряжённое состояние на площадке этого элемента.

Дано: $\sigma_1 = 100 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 50 \text{ МПа}$, $\alpha = 25^\circ$.

Требуется:

Определить численные значения напряжений σ_α , σ_β , τ , τ_{max} .

Решение

Определим нормальные напряжения σ_α и σ_β по формулам (1) и (2)

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$|\tau_\alpha| = |\tau_\beta| = \tau$$

Подставим заданные величины

$$\sigma_\alpha = 100 \cdot \cos^2 25^\circ + 50 \sin^2 25^\circ = 100 \cdot 0,9063^2 + 50 \cdot 0,4226^2 = 91 \text{ МПа}$$

$$\sigma_\beta = 100 \cdot \sin^2 25^\circ + 50 \cdot \cos^2 25^\circ = 100 \cdot 0,4225^2 + 50 \cdot 0,9063^2 = 58,3 \text{ МПа}$$

Касательные напряжения τ на площадках элемента вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{100 - 50}{2} \cdot \sin 50^\circ = 25 \cdot 0,766 = 19,15 \text{ МПа}$$

Напряжённое состояние на площадках этого элемента указано на рис. 8.

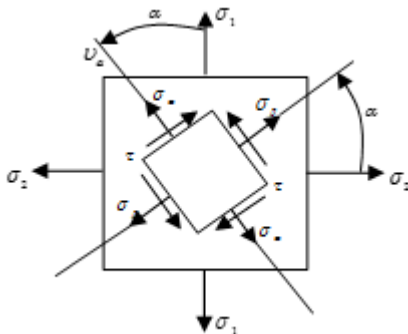


Рис.8. Напряжённое состояние в точке при заданных главных напряжениях.

2. Максимальные касательные напряжения τ_{max} возникают на площадках, наклонённых к главным площадкам под углом 45° . Следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{100 - 50}{2} = 25 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{100 + 50}{2} = 75 \text{ МПа} .$$

Напряжённое состояние на площадках этого элемента имеет вид (рис.9):

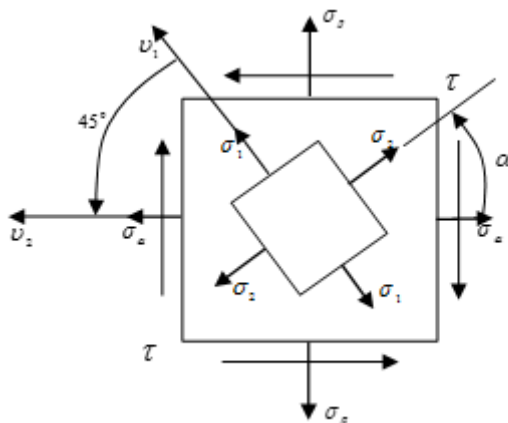


Рис. 9. Площадки с максимальными касательными напряжениями $\alpha = 45^\circ$.

Проверка: Так как нормальные напряжения достигают экстремальное значение на главных площадках (то есть в данной задаче $\sigma_1 = \sigma_{\max} = 100 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = \sigma_{\min} = 50 \text{ МПа}$) должно выполняться неравенство

$$\sigma_1 > \sigma_\alpha > \sigma_\beta > \sigma_2 \text{ или}$$

$$100 \text{ МПа} > 91 \text{ МПа} > 58,9 \text{ МПа} > 50 \text{ МПа} .$$

2.2. Задача №2. Обратная задача при плоском напряжённом состоянии

Дано:

$$\sigma_\alpha = -70 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_\beta = -210 \text{ МПа} ;$$

$$\tau_\alpha = \tau = -110 \text{ МПа} .$$

Требуется:

Определить положение главных площадок и численные значения главных напряжений (рис. 10)

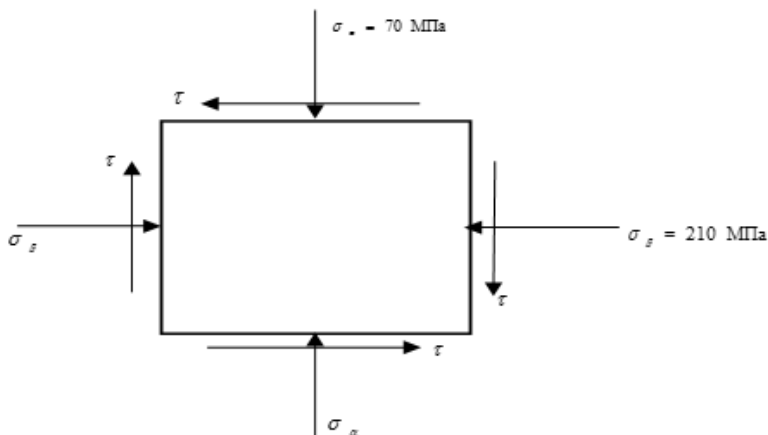


Рис. 10. Напряжённое состояние в точке (обратная задача)

Напряжённое состояние на рис. 10 показано с учётом знаков σ_α , σ_β , τ_α .

Решение

1. Определение положения главных площадок

Найдём угол наклона главных площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{2(-110 \text{ МПа})}{-70 \text{ МПа} + 210 \text{ МПа}} = -1,57$$

$$2\alpha_0 = -63,9^\circ \rightarrow \alpha_0 = -31,95^\circ$$

2. Определение численных значений главных напряжений

$$\cos^2 \alpha_0 = 0,769; \quad \sin^2 \alpha_0 = 0,2314; \quad \sin 2\alpha_0 = -0,843$$

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \sin^2 \alpha_0 + \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 =$$

$$= -70 \text{ МПа} \cdot 0,769 - 210 \text{ МПа} \cdot 0,2314 + 110 \text{ МПа} \cdot 0,843 = -9,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \sigma_\alpha \sin^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \cos^2 \alpha_0 - \tau_\alpha \sin 2\alpha_0 =$$

$$= -70 \text{ МПа} \cdot 0,2314 - 210 \text{ МПа} \cdot 0,769 - 110 \text{ МПа} \cdot 0,843 = -270,4 \text{ МПа}$$

Проверка:

$$1) \quad \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-280 \pm \sqrt{140^2 + 4 \cdot 110^2} \right) \text{ МПа} = \frac{1}{2} (-280 \pm 260,8) \text{ МПа}$$

$$\sigma_1 = -9,6 \text{ МПа}; \sigma_2 = -270,4 \text{ МПа};$$

$$2) \quad \sigma_1 > \sigma_\alpha > \sigma_\beta > \sigma_2 \rightarrow (-9,6) > (-70) > (-210) > (-270,4)$$

;

$$3) \quad \sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow -70 - 210 = -9,6 - 270,4 \rightarrow -280 = -280$$

Положение главных площадок и главных напряжений показано на рис. 11.

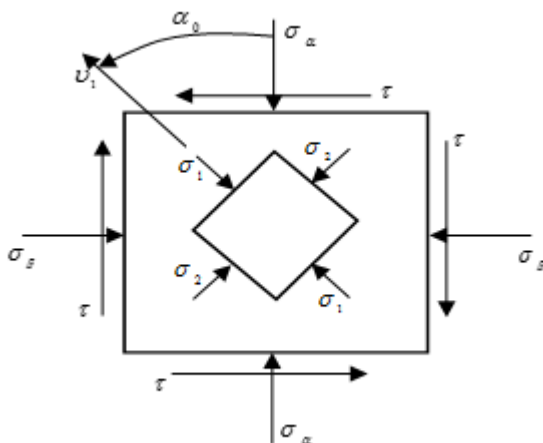


Рис.11. Главные площадки и главные напряжения.

2.3. Задача №3. Напряжённое состояние при плоском изгибе

Исследование напряжённого состояния для двутаврового поперечного сечения проведём на примере балки по схеме рис. 2(б) методических указаний к данному заданию(рис. 12).

1. Построим для этой балки эпюры $Q(x)$ и $M(x)$ по «Правилам контроля и построения эпюр внутренних силовых факторов»(рис. 12).

Примечание: «Правила контроля и построения эпюр внутренних силовых факторов» смотри в Практикуме по выполнению расчётно-графической работы «Построение эпюр внутренних силовых факторов в балках и плоских рамах». /Портал электронного обучения «СКИФ» ДГТУ (<http://skif.donstu.ru/>).

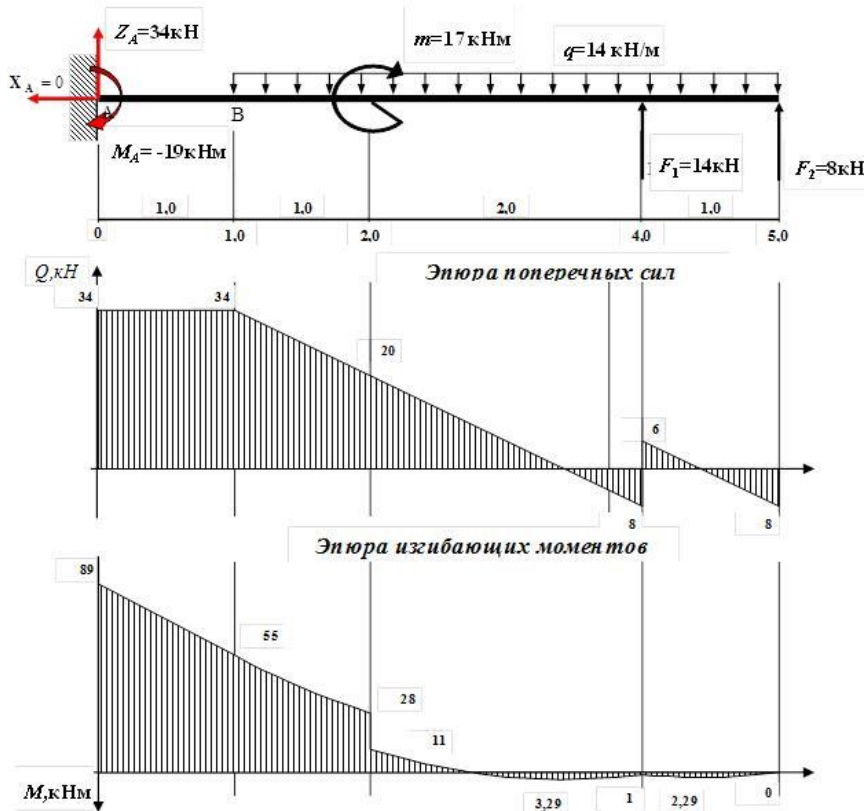


Рис. 12. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

2. Заданная балка имеет двутавровое поперечное сечение (двутавр №18).

Проверим прочность заданной балки

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \rightarrow \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma] \rightarrow \frac{89 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{148 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 601 \text{ МПа} > [\sigma]$$

Так как заданное сечение не обеспечивает прочность балки необходимо провести перерасчёт и найти новое двутавровое поперечное сечение.

3. Подберем новое поперечное сечение балки

$$W_y = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{89 \cdot 10^3 \text{ НМ} \cdot \text{М}^2}{160 \cdot 10^6 \text{ Н}} = 0,556 \cdot 10^{-3} \text{ М}^3 = 556 \text{ см}^3$$

Принимаем сечение балки:

а). Дву-
тавр

№30а, $W_y = 518 \text{ см}^3$, $\sigma_{max} = \frac{89 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2} = 172 \text{ МПа}$
> $[\sigma]$

Проверка экономичности

$$\left| \frac{160 - 172}{160} \right| \cdot 100\% = 7,5\% > 5\%,$$

Балка перегружена. Следовательно, двутавр №30а не подходит.

б).

Рассмотрим

двутавр

$$\text{№}33, \quad W_y = 597 \text{ см}^3, \quad \sigma_{\max} = \frac{89 \cdot 10^3}{597} \frac{H}{M^2} = 149 \text{ МПа} <$$

< $[\sigma]$.

Проверка экономичности

$$\left| \frac{160 - 149}{160} \right| \cdot 100\% = 6,9\% > 5\%, \text{ Балка недогружена.}$$

Окончательно принимаем

двутавр № 33. Выпишем из сортамента его геометрические характеристики:

$$h = 33 \text{ см}; \quad v = 14 \text{ см}; \quad d = 0,7 \text{ см}; \quad t = 1,12 \text{ см}; \quad A = 53,8 \text{ см}^2; \quad I_y = 9840 \text{ см}^4;$$

$$W_y = 597 \text{ см}^3; \quad S_y = 339 \text{ см}^3$$

4. Построим эпюры напряжений σ , τ , σ_1 , σ_2 в опасном сечении балки.

Примечание: План построения эпюр « σ » и « τ » смотри в Практикуме по выполнению расчётно-графической работы «Расчёт балок на прочность». /Портал электронного обучения «СКИФ» ДГТУ (<http://skif.donstu.ru/>).

Для определения главных напряжений найдём σ и τ в точках 1,2,3, 4 и 5.

$$\begin{aligned}
 (\bullet)1: \quad \tau &= \frac{Q \cdot S_y^{omc}}{e^{omc} \cdot I_y} = \frac{Q \cdot \frac{1}{2}(h-t) \cdot bt}{d \cdot I_y} = \\
 &= \frac{34 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot (33-1,12) \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 14 \cdot 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 12,3 \text{ МПа}
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{M_{max} \cdot z_1}{I_y}; \quad z_1 = -\left(\frac{h}{2} - t\right) = -\left(\frac{33 \text{ см}}{2} - 1,12 \text{ см}\right) = -15,38 \text{ см}$$

$$\sigma = \frac{-89 \cdot 10^3 \text{ Нм}(-15,38) \cdot 10^{-2}}{9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 139 \text{ МПа}$$

$$\begin{aligned}
 (\bullet)2: \quad S_y^{omc} &= (S_y^{omc})_1 + (S_y^{omc})_2 = \frac{1}{2}(h-t) \cdot bt + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right)d \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{4} - t\right)\right] = \\
 &= \frac{1}{2}(h-t) \cdot bt + \frac{3}{8}\left(\frac{h}{2} - t\right)^2 \cdot d = \frac{1}{2}(33-1,12) \cdot 14 \cdot 1,12 \text{ см}^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{33}{2} - 1,12\right)^2 \cdot 0,7 \text{ см}^3 = \\
 &= 249,9 \text{ см}^3 + 62,1 \text{ см}^3 = 312 \text{ см}^3 = 312 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3
 \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{34 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 312 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 15,4 \text{ МПа}$$

$$\sigma = \frac{M_y \cdot z_2}{I_y}; \quad z_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right) = -7,69 \text{ см}$$

$$\sigma = \frac{-89 \cdot 10^3 \text{ Нм} \cdot (-7,69) \cdot 10^{-2} \text{ м}}{9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 69 \text{ МПа}$$

$$(\bullet)3: \quad S_y^{omc} = S_y = 339 \text{ см}^3$$

$$\tau = \frac{34 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 339 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{0,7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 16,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma = 0;$$

так как $Z_3 = 0$

$$(\bullet) 4: \tau = \tau_{(\bullet)2} = 15,4 \text{ МПа}, \sigma = -\sigma_{(\bullet)2} = -69 \text{ МПа}$$

$$(\bullet) 5: \tau = \tau_{(\bullet)1} = 12,3 \text{ МПа}, \sigma = -\sigma_{(\bullet)1} = -139 \text{ МПа}$$

Определим главные напряжения в точках 1,2,3, 4 и 5 по

$$\text{формулам } \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right]$$

При плоском изгибе $\sigma_\alpha = \sigma$ (нормальные напряжения в поперечном сечении), $\sigma_\beta = 0$ (нормальные напряжения в продольных сечениях), $\sigma_\alpha > 0$; $\tau > 0$.

(рис. 13).

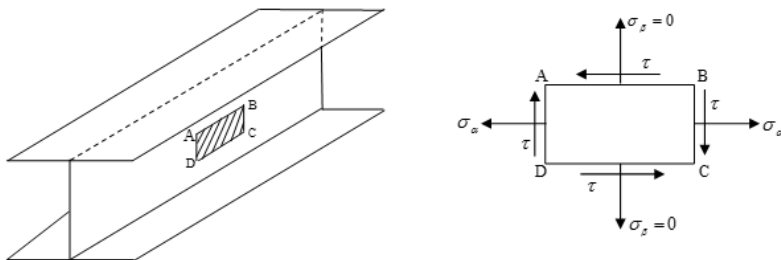


Рис. 13. Напряжённое состояние в произвольной точке при плоском изгибе.

Используя формулу главных напряжений (4), получим

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right).$$

Главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

$$(\bullet) 1: \sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) = \frac{1}{2} \left(139 + \sqrt{139^2 + 4 \cdot 12,3^2} \right) \text{ МПа} = 140 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) = \frac{1}{2}(139 - 141,2)\text{МПа} = -1,1\text{МПа}$$

$$(\bullet) 2: \sigma_1 = \frac{1}{2}(69 + \sqrt{69^2 + 4 \cdot 15,4^2})\text{МПа} = 72,3\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(69 - 75,56)\text{МПа} = -3,28\text{МПа}$$

$$(\bullet) 3: \sigma_1 = \frac{1}{2}(0 + \sqrt{0 + 4\tau^2}) = \tau = 16,7\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(0 - \sqrt{0 + 4\tau^2}) = -\tau = -16,7\text{МПа}$$

$$(\bullet) 4: \sigma_1 = \frac{1}{2}(-69 + \sqrt{69^2 + 4 \cdot 15,4^2})\text{МПа} = (-69 + 75,56)\frac{1}{2} = 3,28\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(-69 - \sqrt{69^2 + 4 \cdot 15,4^2})\text{МПа} = -72,3\text{МПа}$$

$$(\bullet) 5: \sigma_1 = \frac{1}{2}(-139 + \sqrt{139^2 + 4 \cdot 12,3^2})\text{МПа} = \frac{1}{2}(-139 + 141,2)\text{МПа} = 1,1\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(-139 - \sqrt{139^2 + 4 \cdot 12,3^2})\text{МПа} = \frac{1}{2}(-139 - 141,2)\text{МПа} = -140\text{МПа}$$

По полученным численным значениям главных напряжений строим эпюры σ_1 , σ_2 (рис. 14).

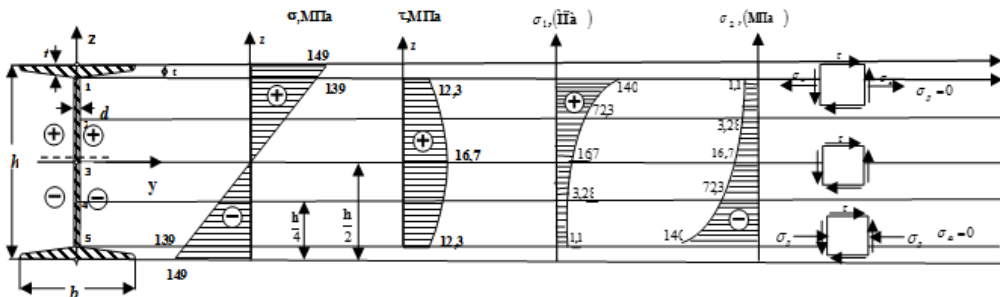


Рис. 14. Эпюры распределения нормальных, касательных и главных напряжений в поперечном сечении балки

5. В опасном сечении балки определим положение главных площадок и численные значения главных напряжений σ_1 , σ_2 в точках $z = \pm \frac{h}{2}$; $z = \pm \frac{h}{4}$; $z = 0$ и покажем на рисунке напряжённое состояние элемента в этих точках.

$$z = \pm \frac{h}{2}; z = \pm \frac{h}{4}; z = 0$$

покажем на рисунке напряжённое состояние элемента в этих точках.

При построении эпюр σ_1 и σ_2 в предыдущем пункте величины σ_1 и σ_2 уже были определены.

Найдем угол наклона α_0 главных площадок для элемента ABCD (рис. 13), находящегося в точках 1, 2, 3, 4 и 5 и покажем графически напряжённое состояние этого элемента в этих точках.

Угол α_0 отсчитывается от направления алгебраически большего напряжения σ_2 . Обозначения выбираем так, чтобы выполнялось условие $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$.

Для точек 1 и 2: $\sigma_\alpha = \sigma$, $\sigma_\beta = 0$.

Для точек 4 и 5: $\sigma_\alpha = 0$; $\sigma_\beta = \sigma$ (так как в этих точках $\sigma < 0$).

При этом формулы для главных напряжений σ_1, σ_2 не изменяются

Сопротивление материалов

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

$$(\bullet) 1: (\text{рис.15}) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \cdot 12,3}{139} = 0,177$$

$$\alpha_0 = 5,5^\circ, \quad \sigma_1 = 140 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -1,1 \text{ МПа}$$

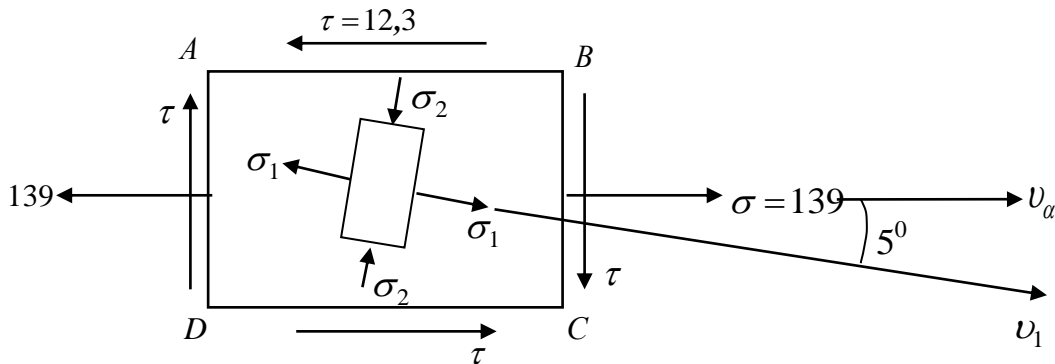


Рис.15. Напряжённое состояние в точке 1

$$(\bullet) 2: (\text{рис.16}) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2 \cdot 15,4}{69} = 0,44$$

$$\alpha_0 = 13,2^\circ, \quad \sigma_1 = 72,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -3,28 \text{ МПа}$$

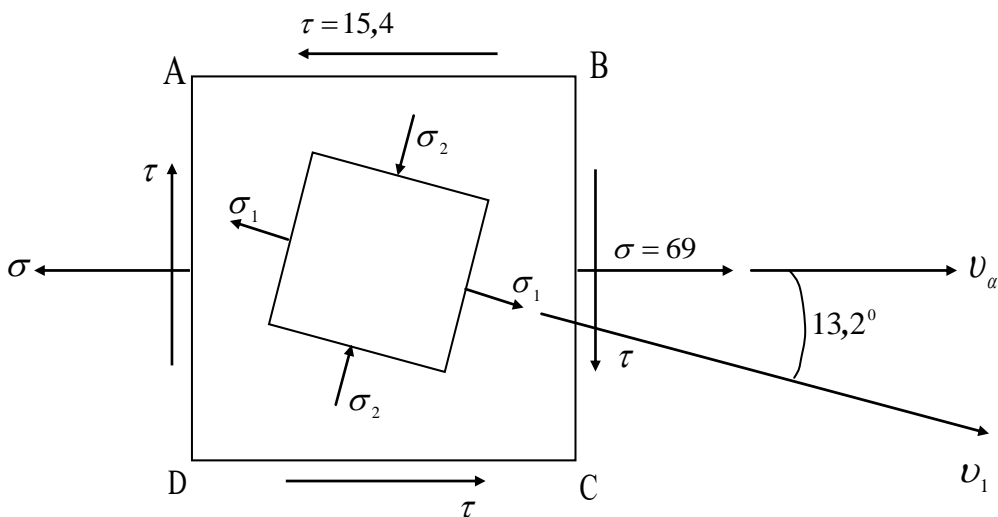


Рис.16. Напряжённое состояние в точке 2.

(•) 3: (Рис.17) $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2\tau}{0} = \infty \rightarrow \alpha_0 = 45^\circ$

$\alpha_1 = 16,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -16,7 \text{ МПа}$

На уровне (•) 3 элемент ABCD подвергается чистому сдвигу $\sigma_1 = 16,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -16,7 \text{ МПа}$.

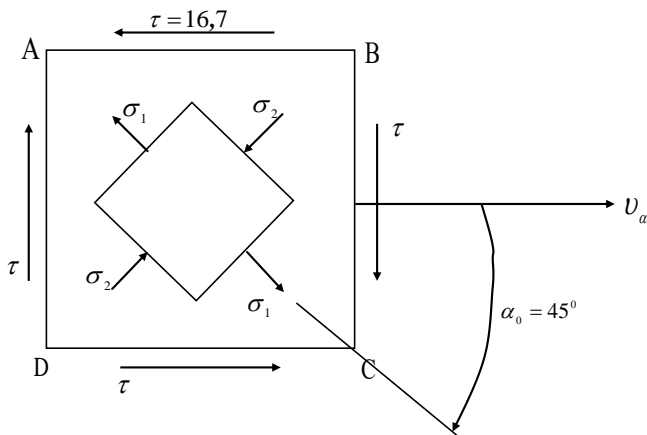


Рис.17. Напряжённое состояние в точке 3

(•) 4 (Рис.18) так как $\sigma < 0$ в этой точке, примем

$$\sigma_\alpha = 0; \quad \sigma_\beta = -69 \text{ МПа}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{2 \cdot 15,4}{-(-69)} = +0,44; \quad \alpha_0 = +13,2$$

$$\sigma_1 = 3,28 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -72,3 \text{ МПа}$$

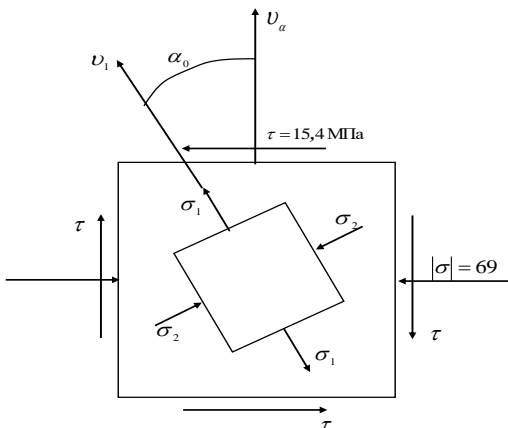


Рис.18. Напряжённое состояние в точке 4

Сравним с точкой 2: изменение направления напряжения σ ведёт к изменению величин σ_1, σ_2 и направления главных площадок.

$$(\bullet) 5: (\text{Рис.19}) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (12,3)}{-(-139)} = +0,177, \quad \alpha_0 = +5,5^\circ; \quad \sigma_\alpha = 0; \quad \sigma_\beta = -69 \text{ МПа}$$

$$\sigma_1 = 1,1 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -140 \text{ МПа}$$

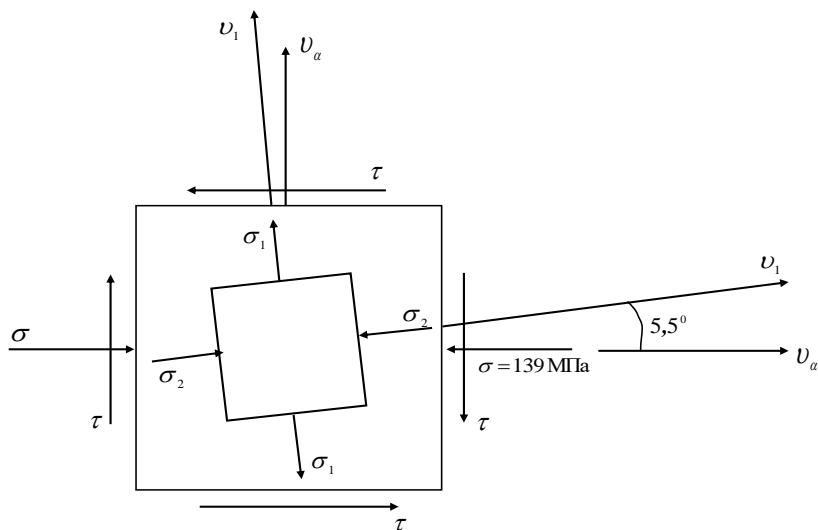


Рис.19. Напряжённое состояние в точке 5

Необходимо проверить правильность определения σ_1 , σ_2 , α , используя следующие формулы и свойства главных напряжений

$$\text{а) } \left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_\alpha \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\beta \sin^2 \alpha_0 + \tau \sin 2\alpha_0 \\ \sigma_2 &= \sigma_\beta \cos^2 \alpha_0 + \sigma_\alpha \sin^2 \alpha_0 - \tau \sin 2\alpha_0 \end{aligned} \right\}$$

б) $\sigma_1 > \sigma_\alpha > \sigma_\beta > \sigma_2$

в) $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$

Проведём проверку для точки 2

$$\sigma_\alpha = \sigma = 69 \text{ МПа}; \quad \sigma_\beta = 0; \quad \tau = 15,4; \quad \alpha_0 = 13,2^\circ$$

$$\sigma_1 = 72,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -3,28 \text{ МПа}$$

а)

$$\cos^2 \alpha_0 = 0,9576; \quad \sin^2 \alpha_0 = 0,0424; \quad \sin 2\alpha_0 = 0,4029$$

$$\sigma_1 = 69 \text{ МПа} \cdot 0,9576 + 15,4 \text{ МПа} \cdot 0,4029 = 72,3 \text{ МПа}$$

$$\sigma_1 = 69 \text{ МПа} \cdot 0,0424 - 15,4 \text{ МПа} \cdot 0,4029 = -32,8 \text{ МПа}$$

$$\text{б) } 72,3 > 69 > 0 > (-3,28)$$

$$\text{в) } 69 + 0 = 72,3 - 3,3$$

$$69 = 69$$

Вывод: Численные значения главных напряжений и положение главных площадок в (\bullet) 2 найдены верно.

Примечание: Аналогично решается задача №3 для балок прямоугольного поперечного сечения.

2.4. Задача №4. Напряжённое состояние при кручении вала круглого поперечного сечения

Для вала, изображенного на рис.20, **требуется:**

1. Построить эпюры крутящих моментов.
2. Проверить прочность вала, если $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ (сталь).
3. Если $\tau_{\text{max}} > [\tau]$, подобрать радиус вала R из условия прочности.
4. Графически показать напряжённое состояние элементов вала на поверхности в опасном сечении.

Да-

но: $m_1 = 17 \text{ кНм}$; $m_2 = -20 \text{ кНм}$; $m_3 = 28 \text{ кНм}$;

$m_4 = 14 \text{ кНм}$; $[\tau] = 80 \text{ МПа}$; $R = 2,5 \text{ см}$.

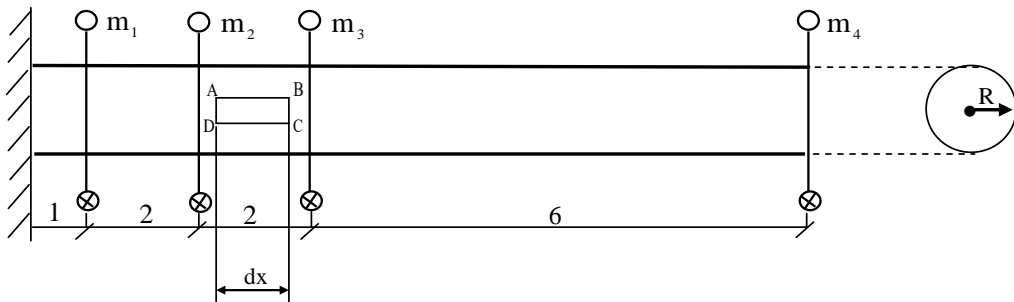


Рис.20. Расчётная схема вала.

Решение

1. Определяем значения крутящих моментов на участках стержня, пронумеровав их справа налево

$$M_{4-3} = m_4 = 14 \text{ кНм};$$

$$M_{3-2} = m_4 + m_3 = 14 + 28 = 42 \text{ кНм};$$

$$M_{2-1} = m_4 + m_3 + m_2 = 14 + 28 - 20 = 22 \text{ кНм};$$

$$M_{1-0} = m_4 + m_3 + m_2 + m_1 = 14 + 28 - 20 + 17 = 39 \text{ кНм};$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов

M_k (рис.21)

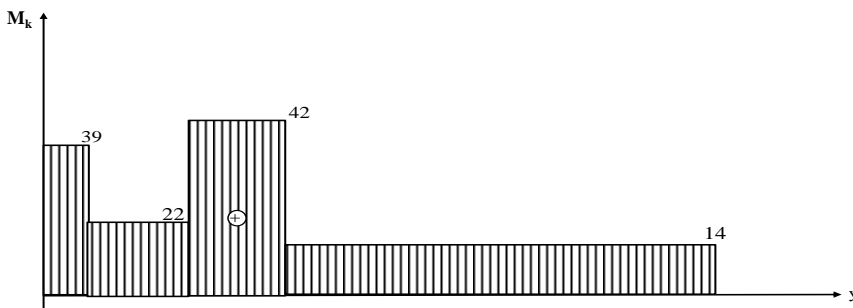


Рис. 21. Эпюра крутящих моментов (Размерность крутящего момента кнм).

Максимальное значение крутящего момента

$$M_{k \max} = 42 \text{ кНм (рис. 21).}$$

2. Определим радиус вала из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{k \max}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

где $M_{k \max}$ – наибольшая величина крутящего момента на каком-либо участке эпюры M_k (по модулю);

W_{ρ} – полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{\pi R^3}{2}.$$

Из условия прочности получим формулу для определения радиуса вала

$$R = \sqrt[3]{\frac{2M_{k \max}}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$R = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 4200 \text{ кНм}}{3,14 \cdot 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}}} = 6,941 \text{ см} \approx 6,94 \text{ см}.$$

3. Подсчитаем значение полярного момента для найденного радиуса вала

$$W_{\rho} = \frac{3,14 \cdot (6,94 \text{ см})^3}{2} = 525 \text{ см}^3$$

Тогда τ_{\max} принимаем следующее значение

$$\tau_{\max} = \frac{4200 \text{ кНсм}}{525 \text{ см}^3} = 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 80 \text{ МПа} = [\tau]$$

Условие прочности выполняется.

4. Покажем напряжённое состояние элементов вала на поверхности в опасном сечении (рис.22)

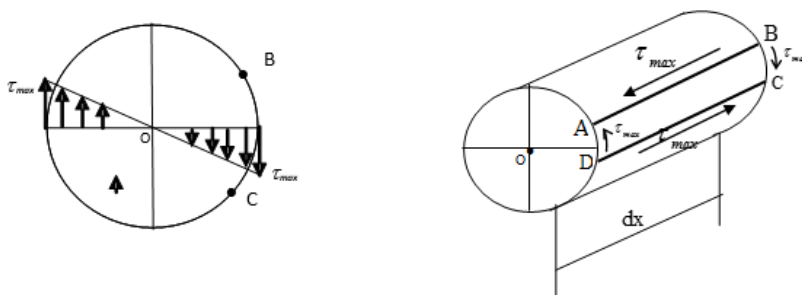


Рис.22.Элемент ABCDна поверхности вала

Элемент ABCD подвергается чистому сдвигу (рис. 23)

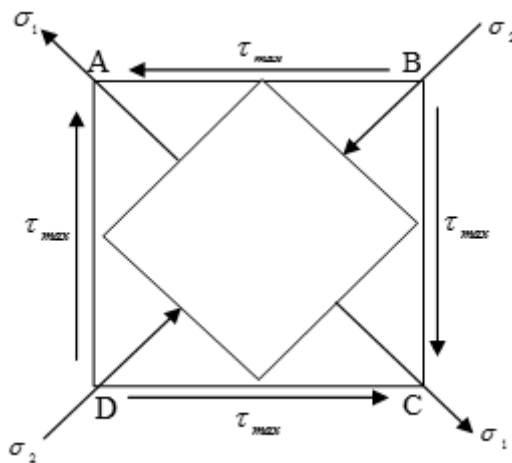


Рис.23. Напряжённое состояние элемента ABCD.

2.5. Задача №5. Напряжённое состояние при одноосном растяжении-сжатии

Для стержня, подвергающегося осевому растяжению (сжатию) (рис. 24), **требуется:**

1. Построить эпюру продольных усилий N .
2. Построить эпюру σ .

3. В опасном сечении найти σ_α , σ_β , τ на площадках, наклонённых к поперечному сечению под углом α .
4. Графически показать напряжённое состояние элемента в опасном сечении.

Дано: $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = -19 \text{ кН}$, $F_3 = 19 \text{ кН}$,

$A_1 = 10 \text{ см}^2$, $A_2 = 15 \text{ см}^2$, $A_3 = 15 \text{ см}^2$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$,

$c = 3 \text{ м}$, $\alpha = 25^\circ$.

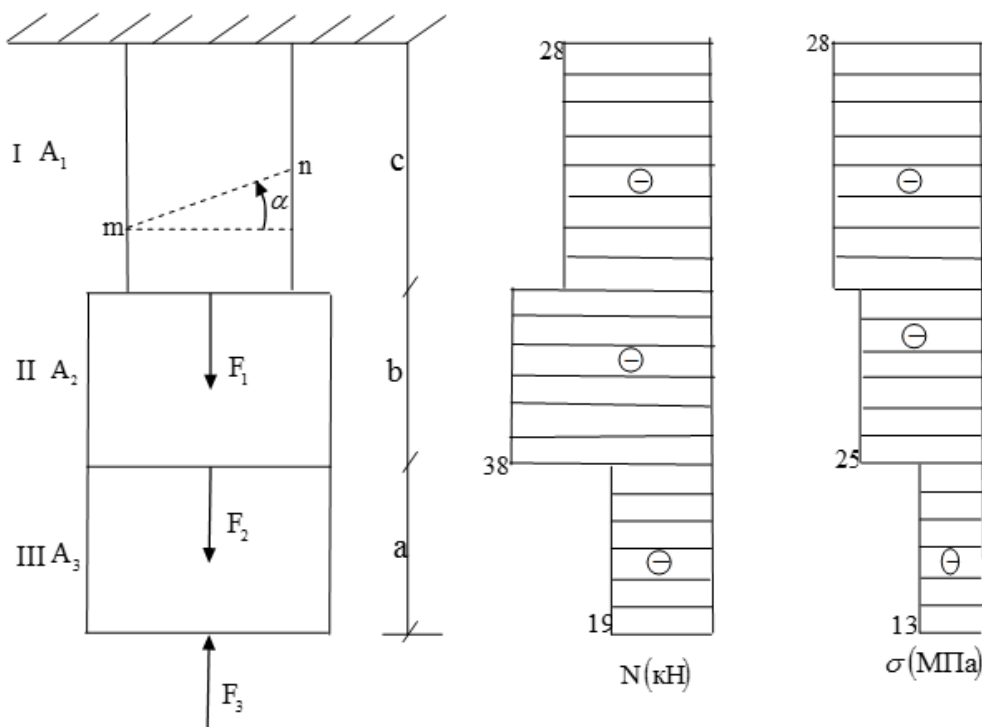


Рис. 24. Схема стержня. Эпюры продольного усилия и нормальных напряжений

1. Построение эпюры продольных усилий N .

Для построения эпюры продольных усилий разобьём стержень на три участка, начиная со свободного конца и считая границей участка любое изменение в нагрузке.

Внутренняя продольная сила численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на ось стержня (растягивающая сила считается положительной, сжимающая – отрицательной) (рис. 25).

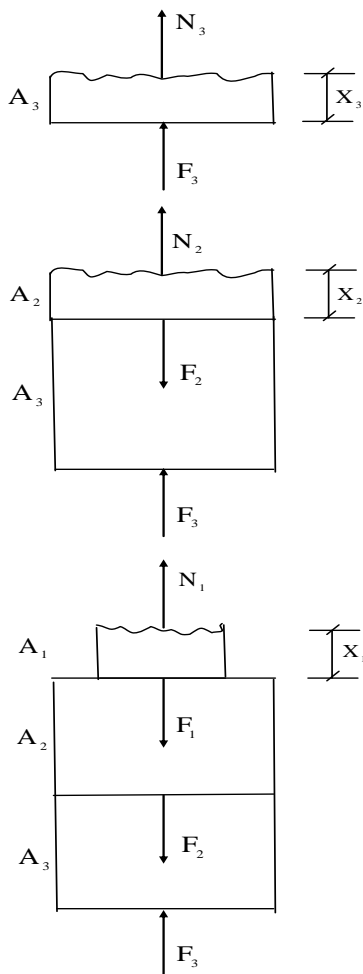


Рис.25. Определение продольных усилий на участках стержня

Проведём сечение в любом месте третьего участка и расстояние от свободного конца до сечения обозначим через x_3 ($0 \leq x_3 \leq 2\text{м}$).

III участок. $0 \leq x_3 \leq 2$

$$N_3(x_3) = -F_3 = -19\text{кН}$$

$$N_3(0) = N_3(2) = -19\text{кН}$$

Аналогично для второго участка

II участок. $0 \leq x_2 \leq 2$

$$N_2(x_2) = -F_3 + F_2 = -19 - 19 = -38\text{кН}$$

$$N_2(0) = N_2(2) = -38\text{кН}$$

Аналогично для первого участка

I участок. $0 \leq x_1 \leq 3$

$$N_1(x_1) = -F_3 + F_2 + F_1 = -19 - 19 + 10 = -28\text{кН}$$

$$N_1(0) = N_1(3) = -28\text{кН}$$

По полученным численным значениям продольных сил построим эпюру продольных сил (рис. 24).

2. Построение эпюры нормальных напряжений σ .

Определим напряжения на рассматриваемых участках стержня по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-19\text{кН}}{15\text{см}^2} = -1,27 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -12,7\text{МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-38\text{кН}}{15\text{см}^2} = -2,53 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -25,3\text{МПа};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-28 \text{ кН}}{10 \text{ см}^2} = -2,8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -28 \text{ МПа} .$$

По полученным численным значениям σ строим эпюру нормальных напряжений (рис. 24).

3. Определяем в опасном сечении значения σ_α , σ_β , τ на площадках, наклонённых к поперечному сечению под углом α .

По эпюре нормальных напряжений определяем опасный участок. В нашем примере им является участок I, так как здесь возникают наибольшие сжимающие напряжения.

Найдём σ_α , σ_β , τ на площадках, наклонённых к поперечному сечению под углом $\alpha = 25^\circ$.

Для этого воспользуемся ниже приведенными формулами

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

Подставим в них числовые значения

$$\sigma_\alpha = -28 \cdot \cos^2 25^\circ = -28 \cdot 0,9063^2 = -23 \text{ МПа}$$

$$\sigma_\beta = -28 \cdot \sin^2 25^\circ = -28 \cdot 0,4226^2 = -5 \text{ МПа}$$

$$\tau = -\frac{28}{2} \cdot \sin 50^\circ = -14 \cdot 0,766 = -10,7 \text{ МПа}$$

4. Покажем напряжённое состояние элемента в опасном сечении стержня (рис.26)

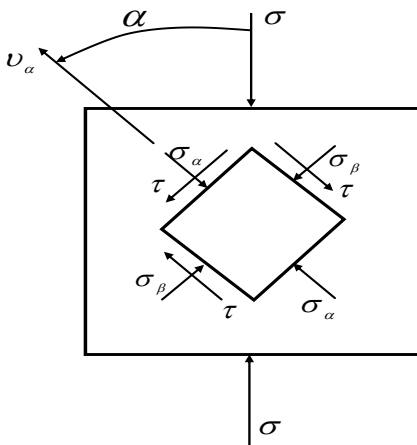


Рис.26. Напряжённое состояние элемента на участке 1 при одноосном сжатии

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется напряжением?
2. Какие виды напряжений используются в сопротивлении материалов?
3. Что называется нормальным напряжением?
4. Что называется касательным напряжением?
5. Как найти полное напряжение и его направление?
6. Какие напряжения называются главными?
7. Что называется объёмным, плоским и линейным напряжённым состоянием в точке?
8. Какие напряжения определяются в прямой задаче напряжённого состояния в точке?
9. Какие напряжения находятся в обратной задаче напряжённого состояния в точке?
10. Запишите формулы определения напряжений на наклонной площадке.
11. Запишите формулы определения главных напряжений .
11. Как определить положение главных площадок?
12. Каким является напряжённое состояние в точке при плоском изгибе?
13. Каким является напряжённое состояние в точке при од-

ноосном растяжении-сжатии?

14. Каким является напряжённое состояние в точке при кручении стержней круглого поперечного сечения?

15. В каких точках поперечного сечения возникает чистый сдвиг при плоском изгибе?

16. В каких точках поперечного сечения возникает одноосное напряжённое состояние?

17. На каких площадках возникает максимальное касательное напряжение?

4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) [Текст]: учебник /Варданян, ГумединСуренович; Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков; Под ред. Г. С. Варданяна. - Изд. испр. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 505 с.: ил. - (Высшее образование). - Доп. Мин - вом образования РФ. - Учеб. изд. - Прил. - Сп. лит.: с.500.

2. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст]: Учебное пособие для студентов втузов /Под ред. В. К. Качурина; Авт.: Н. М. Беляев и др. - Изд.2-е, испр.; Репринтное изд. - М.: Альянс, 2014. - 429 с.: ил. - Доп. Мин. высш. и сред.спец. образования СССР; Прил. - ISBN 978-5-903034-39-1 : В пер.:7.

3. Сопротивление материалов : Учебник для студ. стрит.спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; Под ред. А. В. Александрова. - 6-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2008. - 56 2. Справочник для студентов технических вузов: Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов [Текст] / А. Д. Полянин и др. - 3-е изд. - М.: АСТ: Астрель, 2008. - 735 с. - ISBN 978-5-17-030740-1; 978-5-271-11602-5: В пер.: 240-00. 0 с.: ил. - ISBN 978-5-06-003732-6: В пер.:1005-00.

5. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. - 3-е изд., перераб. и доп. - Киев: Дельта, 2008. - 813 с.: ил. - Исп. лит.: с.799-800. - ISBN 978-966-8797-29-3 :В пер.: 2400-00.