ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Практикум

по выполнению расчетно-графической работы «Цилиндрический изгиб прямоугольной пластины на упругом основании»

по дисциплине

«Теория расчета пластин и оболочек»

Авторы
Демченко Д. Б.,
Маяцкая И. А.,
Чепурненко А. С.,
Языев Б. М.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Цилиндрический изгиб прямоугольной пластины на упругом основании: методические указания предназначены для проведения практической работы по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек» для обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания включают основные теоретические положения и пример выполнения задания расчетно-графической работы для студентов, изучающих курс «Теория расчета пластин и оболочек».

Авторы

докт. техн. наук, профессор
Языев Б.М.

канд. техн. наук, доц.
Демченко Д.Б.

канд. техн. наук, доц.
Маяцкая И.А.

канд. техн. наук, ст. преп.
Чепурненко А.С.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ПОНЯТИЕ О СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ. МОДЕЛЬ ВИНКЛЕРА.

В инженерной практике часто встречаются конструкции, опирающиеся по всей длине или площади на сплошное основание, которое может упруго деформироваться под действием приложенной к нему нагрузки. К таким конструкциям относятся, например, фундаменты зданий и гидротехнических сооружений, аэродромные и дорожные покрытия и т. п., опирающиеся на различного рода грунтовые и скальные основания. Конструкции на упругом основании могут иметь также жесткие опоры.

При расчете конструкций на упругом основании необходимо определить реактивный отпор со стороны основания на конструкцию. Реактивный отпор представляет собой поперечную нагрузку, распределенную по длине или площади конструкции.

Рассмотрим, например, работу балки, свободно лежащую на упругом основании. Суммарная распределенная нагрузка на балку равна

$$\bar{q}(x) = q(x) - q_r(x),$$

где $q(x)$ - внешняя нагрузка на балку, а $q_r(x)$ - реактивный отпор основания (рис.1 а).

Внешняя нагрузка на балку, как правило, всегда известна. Задача, таким образом, сводится к определению реактивного отпора. Эта задача не может быть решена с помощью уравнений статики. Например, для свободно лежащей балки уравнения статики позволяют определить только величину равнодействующей реактивного отпора основания и положение линии ее действия. Закон распределения реактивного отпора по длине балки остается при этом неизвестным.

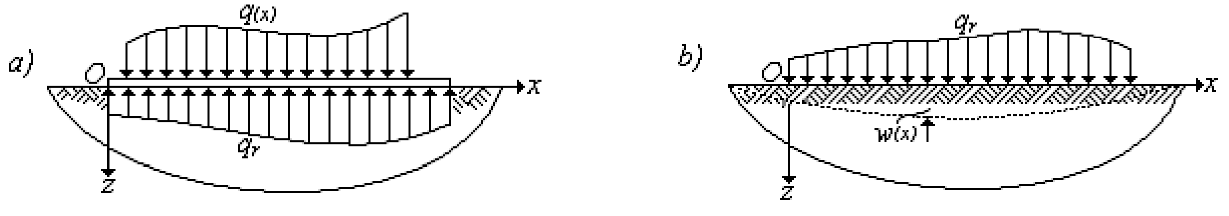

Рис. 1

Для решения такой задачи необходимо ввести предположение о зависимости между реактивным отпором и осадкой поверхности основания $w(x)$ (рис. б). Эта зависимость характеризует расчетную схему или модель основания. Учеными и инженерами в разное время предложено несколько моделей упругого основания. Наиболее простой и широко применяемой на практике является модель, предложенная немецким ученым Е. Винклером. В этой модели зависимость между реактивным отпором основания и осадкой его поверхности предполагается линейной и в задачах расчета балок на упругом основании записывается в следующем виде:

$$q_r(x) = kbw(x),$$

где b – ширина подошвы балки и k – коэффициент, характеризующий жесткость основания и называемый *коэффициентом постели*.

Этот коэффициент определяется экспериментально и имеет размерность силы, отнесенной к единице длины в третьей степени, например *Н/см*^{3}.

Значения коэффициента жесткости (коэффициента постели) некоторых грунтовых и скальных оснований приведены в таблице 1.

С физической точки зрения модель Е. Винклера может быть представлена множеством несвязанных между собой одинаковых упругих пружин, опирающихся на абсолютно жесткое основание (рис. 2).

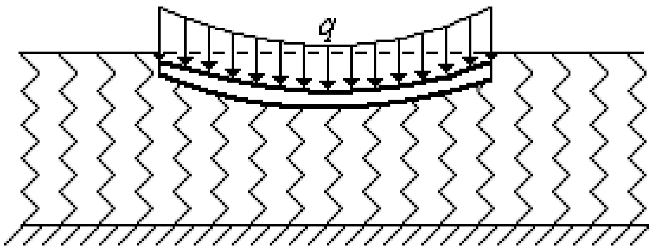

Рис. 2

Таблица 1

№№ пп	Материал основания	k *Н/см*^{3}
1	Песок свеженасыпанный Глина мокрая, размягченная	$1 \div 5$
2	Песок слежавшийся Гравий насыпной Глина влажная	$5 \div 50$

3	Песок и гравий плотно слежавшиеся Щебень Глина малой влажности	$50 \div 100$
4	Грунт песчано-глинистый искусственно уплотненный Глина твердая	$100 \div 200$
5	Известняк, песчаник, мерзлота	$200 \div 1000$
6	Твердая скала	$1000 \div 15000$

В большинстве задач принимается, что пружины могут работать как на сжатие, так и на растяжение, что характеризует двустороннюю связь между балкой и основанием

Деформация упругого основания, соответствующего модели Винклера, происходит только в области, приложенной к нему нагрузки. Это достаточно хорошо отражает реальные свойства рыхлых и несвязных оснований.

Для плотных и, тем более, скальных оснований модель Винклера не соответствует действительному характеру деформации основания, которая происходит и за пределами области приложения нагрузки. Существуют другие модели упругого основания (например, модель с двумя коэффициентами постели, модель упругого полупространства и т. п.), которые позволяют учитывать работу основания за пределами области приложенных нагрузок. Однако расчет балок и других конструктивных элементов с использованием таких моделей достаточно сложен.

1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ РАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ЖЕСТКО ОПЕРТОЙ ПО КРАЯМ И ОПИРАЮЩЕЙСЯ ВСЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Рассмотрим изгиб длинной прямоугольной пластины, равномерно нагруженной, опирающейся всей своей поверхностью на упругое основание и жестко опертой по краям (рис. 3). Вырезав из пластины элементарную балку – полосу, ее можно рассматривать как балку на упругом основании.

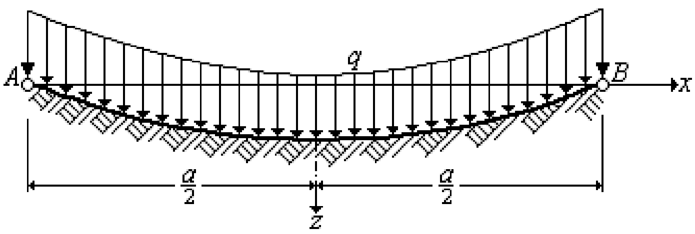

Рис. 3

При этом полагают, что балка-полоса уложена на постель из материала, способного сопротивляться как силам, действующим вниз, так и силам, действующим вверх. Положив, что реакция основания в некоторой произвольной точке пластины пропорциональна ее прогибу w в этой точке (модель Винклера) и воспользовавшись

уравнением $$D\frac{d^2w}{dx^2}=-M_x,$$

после двукратного его дифференцирования получим

$$D\frac{d^4w}{dx^4}=q-kw. \qquad (1.1)$$

Здесь q – интенсивность действующей на пластину нагрузки, а k – реакция основания на единицу площади при прогибе, равном единице (*коэффициент жесткости упругого основания - коэффициент постели*).

Используя обозначение $$\beta=\frac{a}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{4D}} \qquad (1.2)$$

общее решение уравнения (1.1) можно представить в следующем виде:

$$w=C_1\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot sh\frac{2\beta}{a}x+C_2\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot ch\frac{2\beta}{a}x+$$
$$+C_3\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot sh\frac{2\beta}{a}x+C_4\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+\frac{q}{k}, \qquad (a)$$

где первые четыре члена представляют решение однородного дифференциального уравнения, а последний член – частное решение, зависящее от характера внешней нагрузки.

Из условий на концах балки-полосы надлежит определить четыре постоянных интегрирования. В рассматриваемом случае прогиб симметричен относительно середины полосы. Расположим поэтому оси координат в соответствии с рис. 3. При принятой системе координат члены выражения (а) с коэффициентами C_2 и C_3 меняют знак при замене x на $-x$ и, следовательно, граничные условия выполняются, если $C_2 = C_3 = 0$. Тогда выражение (а) принимает вид:

$$w = \frac{q}{k} + C_1 \sin\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\beta}{a}x + C_4 \cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x. \qquad (б)$$

Постоянные C_1 и C_4 находим из условия, что на конце $(x = a/2)$ как прогиб, так и изгибающий момент полосы равны нулю. Поэтому

$$w_{\left(x=\frac{a}{2}\right)} = 0; \quad M_{x\left(x=\frac{a}{2}\right)} = 0. \rightarrow \frac{d^2w}{dx^2}_{\left(x=\frac{a}{2}\right)} = 0. \qquad (в)$$

Подставив в выражение (в) значение w из выражения (б), получим

$$C_1 \sin\beta \cdot sh\beta + C_4 \cos\beta \cdot ch\beta + \frac{q}{k} = 0. \qquad (г)$$

Найдем вторую производную от прогиба.

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2\beta}{a}\left[\begin{array}{l} C_1\left(\cos\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\beta}{a}x + \sin\frac{2\beta}{a}x \cdot ch\frac{2\beta}{a}x\right) + \\ + C_4\left(-\sin\frac{2\beta}{a}x \cdot ch\frac{2\beta}{a}x + \cos\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\beta}{a}x\right). \end{array}\right]$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4\beta^2}{a^2}\left[\begin{array}{l} C_1\left(\begin{array}{l} -\sin\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\beta}{a}x + \cos\frac{2\beta}{a}x \cdot ch\frac{2\beta}{a}x + \\ + \cos\frac{2\beta}{a}x \cdot ch\frac{2\beta}{a}x + \sin\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\beta}{a}x \end{array}\right) + \\ + C_4\left(\begin{array}{l} -\cos\frac{2\beta}{a}x \cdot ch\frac{2\beta}{a}x - \sin\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\phi}{a}x - \\ -\sin\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\beta}{a}x + \cos\frac{2\beta}{a}x \cdot ch\frac{2\beta}{a}x \end{array}\right) \end{array}\right],$$

или
$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{8\beta^2}{a^2}\left(C_1 \cos\frac{2\beta}{a}x \cdot ch\frac{2\beta}{a}x - C_4 \sin\frac{2\beta}{a}x \cdot sh\frac{2\beta}{a}x\right). \qquad (д)$$

Подставим значение второй производной во второе граничное условие.

$$C_1\cos\beta\cdot ch\beta - C_4\sin\beta\cdot sh\beta = 0. \qquad \text{(е)}$$

Рассмотрим совместно граничные условия (г) и (е).

$$\left.\begin{array}{l} C_1\sin\beta\cdot sh\beta + C_4\cos\beta\cdot ch\beta = -\dfrac{q}{k}; \\ C_1\cos\beta\cdot ch\beta - C_4\sin\beta\cdot sh\beta = 0 \end{array}\right|\left.\begin{array}{l}\times\cos\beta\cdot ch\beta \\ \times\sin\beta\cdot sh\beta\end{array}\right\}-.\rightarrow$$

$$C_4\left(\cos^2\beta\cdot ch^2\beta + \sin^2\beta\cdot sh^2\beta\right) = -\frac{q}{k}\cos\beta\cdot ch\beta.\rightarrow$$

$$C_4 = -\frac{q}{k}\cdot\frac{\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos^2\beta\cdot ch^2\beta + \sin^2\beta\cdot sh^2\beta}.$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1\sin\beta\cdot sh\beta + C_4\cos\beta\cdot ch\beta = -\dfrac{q}{k}; \\ C_1\cos\beta\cdot ch\beta - C_4\sin\beta\cdot sh\beta = 0 \end{array}\right|\left.\begin{array}{l}\times\sin\beta\cdot sh\beta \\ \times\cos\beta\cdot ch\beta\end{array}\right\}+.\rightarrow.$$

$$C_1\left(\sin^2\beta + sh^2\beta + \cos^2\beta\cdot ch^2\beta\right) = -\frac{q}{k}\sin\beta\cdot sh\beta.\rightarrow$$

$$C_1 = -\frac{q}{k}\frac{\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos^2\beta\cdot ch^2\beta + \sin^2\beta\cdot sh^2\beta}.$$

Упростим выражение

$$\cos^2\beta\cdot ch^2\beta + \sin^2\beta\cdot sh^2\beta = \frac{1}{2}(\cos 2\beta + 1)\cdot\frac{1}{2}(ch2\beta + 1) +$$

$$+\frac{1}{2}(-\cos 2\beta + 1)\cdot\frac{1}{2}(ch2\beta - 1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\cos 2\beta\cdot ch2\beta + \cos 2\beta + ch2\beta + 1 - \\ -\cos 2\beta\cdot ch2\beta + \cos 2\beta + ch2\beta - 1\end{pmatrix} = .$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos 2\beta + 2ch2\beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\beta + ch2\beta).$$

Окончательно получим выражения для C_1 и C_4 в виде:

$$C_1 = -\frac{q}{k}\frac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}; \quad C_4 = -\frac{q}{k}\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}. \qquad \text{(ж)}$$

Подставив значения произвольных интегрирования в выражение (б), получим:

$$w=\frac{q}{k}-\frac{q}{k}\frac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot sh\frac{2\beta}{a}x-\frac{q}{k}\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot ch\frac{2\beta}{a}x=$$
$$=\frac{q}{k}\left(1-\frac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot sh\frac{2\beta}{a}x-\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot ch\frac{2\beta}{a}x\right).$$

С учетом (1.2) выражение для прогиба имеет вид:

$$w=\frac{qa^4}{64D\beta^4}\left(1-\frac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right). \quad (1.3)$$

Определим прогиб в середине полосы $(x=0)$.

$$w=\frac{qa^4}{64D\beta^4}\left(1-\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\right)=\frac{qa^4}{64D\beta^4}[1-\varphi_0(\beta)], \quad (1.4)$$

где
$$\varphi_0(\beta)=\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}. \quad (1.5)$$

Для получения углов поворота пластины, дифференцируем выражение (1.3).

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{qa^3}{32D\beta^3}\left[\begin{aligned}&\frac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\left(\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot sh\frac{2\beta}{a}x+\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot ch\frac{2\beta}{a}x\right)+\\&+\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\left(-\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot ch\frac{2\beta}{a}x+\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot sh\frac{2\beta}{a}x\right)\end{aligned}\right]. \quad (3)$$

Определим угол поворота края пластины $(x=-a/2)$.

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=\frac{a}{2}\right)}=-\frac{qa^4}{64D\beta^4}\frac{2\beta}{a}\left[\begin{aligned}&\frac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}(-\cos\beta\cdot sh\beta-\sin\beta\cdot ch\beta)+\\&+\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}(\sin\beta\cdot ch\beta-\cos\beta\cdot sh\beta)\end{aligned}\right]=$$
$$=-\frac{qa^3}{16D\beta^3}\frac{1}{\cos 2\beta+ch2\beta}\left[\begin{aligned}&-\sin\beta\cdot sh^2\beta\cdot\cos\beta-\sin^2\beta\cdot sh\beta\cdot ch\beta+\\&+\cos\beta\cdot\sin\beta\cdot ch^2\beta-\cos^2\beta\cdot ch\beta\cdot sh\beta\end{aligned}\right];$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=\frac{a}{2}\right)}=-\frac{qa^3}{16D\beta^3}\left[\frac{\sin\beta\cdot\cos\beta\left(ch^2\beta-sh^2\beta\right)-sh\beta\cdot ch\beta\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)}{\cos 2\beta+ch2\beta}\right]=$$

$$=-\frac{qa^3}{16D\beta^3}\frac{\sin\beta\cdot\cos\beta-sh\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}=\frac{qa^3}{16D\beta^3}\frac{1}{2}\frac{sh2\beta-\sin 2\beta}{(\cos 2\beta+ch2\beta)};\rightarrow$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=\frac{a}{2}\right)}=\frac{qa^3}{32D\beta^3}\frac{sh2\beta-\sin 2\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}=\frac{qa^3}{24D}\cdot\left[\frac{3}{4\beta^3}\frac{sh2\beta-\sin 2\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\right]=\frac{qa^3}{24D}\cdot\varphi_1(\beta).\rightarrow,$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)}=\frac{qa^3}{24D}\cdot\varphi_1(\beta), \qquad (1.6)$$

где
$$\varphi_1(\beta)=\frac{3}{4\beta^3}\frac{sh2\beta-\sin 2\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}. \qquad (1.7)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки-полосы получим из уравнения $M_x=-D\dfrac{d^2w}{dx^2}$,

где
$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{qa^3}{16D\beta^3}\frac{2\beta}{a}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\left(\begin{array}{l}-\sin\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x+\cos\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x+\\+\cos\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x+\sin\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x\end{array}\right)+\\+\dfrac{\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\left(\begin{array}{l}-\cos\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x-\sin\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x-\\-\sin\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x+\cos\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x\end{array}\right).\end{array}\right];$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{qa^2}{4D\beta^2}\frac{\sin\beta sh\beta\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-\cos\beta ch\beta\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x}{\cos 2\beta+ch2\beta}.$$

$$M_x=-D\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{qa^2}{4\beta^2}\frac{\sin\beta sh\beta\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-\cos\beta ch\beta\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x}{\cos 2\beta+ch2\beta}. \qquad (1.8)$$

Для середины балки-полосы $(x=0)$

$$M_{x(x=0)}=\frac{qa^2}{4\beta^2}\frac{\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos2\beta+ch2\beta}=\frac{qa^2}{8}\left(\frac{2}{\beta^2}\frac{\sin\beta sh\beta}{\cos2\beta+sh2\beta}\right)=\frac{qa^2}{8}\varphi_2(\beta). \qquad (1.9)$$

где $\varphi_2(\beta)=\dfrac{2}{\beta^2}\dfrac{\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos2\beta+ch2\beta}$. (1.10)

Перечную силу в произвольном сечении балки-полосы получим из уравнения

$$Q_{zx}=\frac{dM_x}{dx}$$

$$Q_{zx}=\frac{qa^2}{4\beta^2}\frac{2\beta}{a}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sin\beta sh\beta}{\cos2\beta+ch2\beta}\left(-\sin\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x+\cos\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x\right)-\\ -\dfrac{\cos\beta ch\beta}{\cos2\beta+ch2\beta}\left(\cos\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x+\sin\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x\right)\end{array}\right],$$

или, с учетом (1.5) и (1.10): $Q_{zx}=\dfrac{qa}{4\beta}\left[\begin{array}{l}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x-\\ -\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x\end{array}\right]$. (1.11)

Для левого края балки-полосы $(x=-a/2)$:

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{2}\right)}=-\frac{qa}{4\beta}\left[\begin{array}{l}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\beta sh\beta-\\ -\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\beta ch\beta\end{array}\right]. \qquad (1.12)$$

Подставив (1.5) и (1.10) в (1.3) формулу для прогиба приведем к виду:

$$w=\frac{qa^4}{64D\beta^4}\left[1-\beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right]. \qquad (1.13)$$

Определение сечения с максимальным изгибающим моментом.

В силу симметрии нагрузки и условий закрепления, изгибающий момент в центре балки-полосы достигает экстремального, но не всегда максимального значения. Необходимо определить и другие поперечные сечения балки-полосы с экстремальными (максимальными) значениями изгибающего момента. В силу симметрии таких сечений два.

В сечении с экстремальным (максимальным) изгибающим моментом поперечная сила (1.11) равна нулю, т. е.:

$$Q_{zx(x=x_0)} = \frac{qa}{4\beta}\begin{bmatrix}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\frac{2\beta}{a}x_0 sh\frac{2\beta}{a}x_0 - \\ -\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\frac{2\beta}{a}x_0 ch\frac{2\beta}{a}x_0\end{bmatrix} = 0. \rightarrow$$

$$\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\frac{2\beta}{a}x_0 sh\frac{2\beta}{a}x_0 - \left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\frac{2\beta}{a}x_0 ch\frac{2\beta}{a}x_0 = 0. \quad (1.14)$$

Подставив $\varphi_0(\beta)$ и $\varphi_2(\beta)$ из (1.5) и (1.10) получим: $\dfrac{tg\beta\cdot th\beta-1}{tg\beta\cdot th\beta+1}\cdot\dfrac{th\frac{2\beta}{a}x_0}{tg\frac{2\beta}{a}x_0}=1.$

Переходя к безразмерным параметрам, обозначим $\xi = x_0/a$. (1.15)

Тогда уравнение для определения безразмерного параметра ξ принимает вид:

$$\frac{tg\beta\cdot th\beta-1}{tg\beta\cdot th\beta+1}\cdot\frac{th(2\beta\xi)}{tg(2\beta\xi)}=1. \quad (1.16)$$

Анализ подбора параметра ξ из уравнения (1.16) при различных значениях β показал, что до значения $\beta < 1{,}575$, изгибающий момент принимает экстремальное (максимальное) значение только в центре балки-полосы ($x = 0$).

При значениях $1{,}575 \le \beta \le 3{,}927$ изгибающие моменты достигают экстремальных значений в трех сечениях: в центре – минимум, а в двух, симметрично расположенных относительно центра, - максимум.

Значения безразмерного параметра ξ в зависимости от величины β приведены в таблице 3.

2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВДАВЛИВАЕМОЙ В УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ЕЕ КРАЯМ НАГРУЗКАМИ.

Условия, аналогичные показанным на рис. 3, получаются, если длинная прямоугольная пластина (рис. 4) вдавливается в упругое основание, равномерно распределенными по ее краям нагрузками величиной *F* на единицу длины. Пластина вдавливается в упругое основание и изгибается, как показано пунктиром (рис.4).

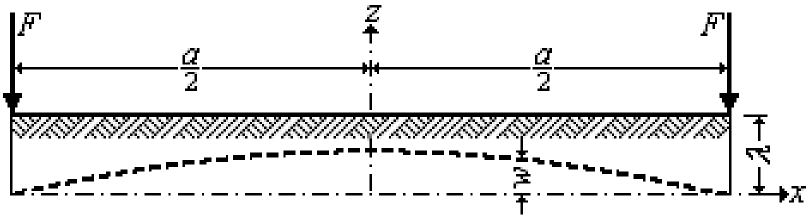

Рис. 4

Если прогиб на краях пластины обозначить λ, то реакция основания в произвольной точке будет равна: $k(\lambda - w) = k\lambda - kw$, (2.1)

где w выражается уравнением (1.3) при замене q на $q = k \cdot \lambda$, т. е.

$$w = \frac{k \cdot \lambda \cdot a^4}{64 D \cdot \beta^4}\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{2\sin\beta \cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch 2\beta}\sin\dfrac{2\beta}{a}x sh\dfrac{2\beta}{a}x - \\ - \dfrac{2\cos\beta \cdot ch\beta}{\cos 2\beta + ch 2\beta}\cos\dfrac{2\beta}{a}x ch\dfrac{2\beta}{a}x \end{array}\right]. \quad (2.2)$$

Величина λ находится из условия, что нагрузка уравновешивается реакцией основания. Отсюда

$$F = \frac{k \cdot \lambda \cdot a}{2} - k\int_0^{a/2} w dx = \frac{k \cdot \lambda \cdot a}{2} - \frac{k^2 \lambda \cdot a^4}{64 D \beta^4}\int_0^{a/2}\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{2\sin\beta \cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch 2\beta}\sin\dfrac{2\beta}{a}x sh\dfrac{2\beta}{a}x - \\ - \dfrac{2\cos\beta \cdot ch\beta}{\cos 2\beta + ch 2\beta}\cos\dfrac{2\beta}{a}x ch\dfrac{2\beta}{a}x \end{array}\right] dx;$$

$$F = \frac{k \cdot \lambda \cdot a}{2}\left[1 - \frac{k a^3}{32 \beta^4 D}\left(\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{a/2} dx - \frac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta + ch 2\beta}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x dx - \\ \displaystyle - \frac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta + ch 2\beta}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x dx \end{array}\right)\right]. \quad (а)$$

Выразим гиперболические функции через показательные функции.

$$\begin{aligned} &\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x dx = \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\left(e^{\frac{2\beta}{a}x} - e^{\frac{-2\beta}{a}x}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x \cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x \cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx. \end{aligned} \quad (б)$$

$$\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}xdx=\frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\left(e^{\frac{2\beta}{a}x}+e^{\frac{-2\beta}{a}x}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx. \qquad (в)$$

Из таблицы интегралов (Д.Б. Двайт) найдем значения интегралов.

Рассмотрим выражение (б).

Предварительно выполним замену переменных.

$\frac{2\beta}{a}x=t.\rightarrow\frac{2\beta}{a}dx=dt.\rightarrow dx=\frac{a}{2\beta}dt.$ $\qquad x=0.\rightarrow t=0;\quad x=a.\rightarrow t=\beta.$ Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_0^{\beta}\sin t\cdot e^{t}dt=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\left[\frac{e^{t}}{1+1}(\sin t-\cos t)\right]_0^{\beta}=$$
$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{\beta}}{2}(\sin\beta-\cos\beta)-\frac{1}{2}(-1)\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta-\cos\beta)+1\right].$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_0^{\beta}\sin t\cdot e^{-t}=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e-t}{1+1}(-\sin t-\cos t)\right]_0^{\beta}=$$
$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{-\beta}}{2}(-\sin\beta-\cos\beta)-\frac{1}{2}(-1)\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{-\beta}(-\sin\beta-\cos\beta)+1\right].$$

Подставив значения интегралов в выражение (б), получим:

$$\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}xdx=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta-\cos\beta)+e^{-\beta}(\sin\beta+\cos\beta)\right]. \qquad (г)$$

Рассмотрим выражение (в)

$$\frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_0^{\beta}\cos t\cdot e^{t}dt=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{t}}{1+1}(\cos t+\sin t)\right]_0^{\beta}=$$
$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{\beta}}{2}(\cos\beta+\sin\beta)-\frac{1}{2}\cdot 1\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta+\sin\beta)-1\right].$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_0^{\beta}\cos t\cdot e^{-t}dt=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{-t}}{1+1}(-\cos t+\sin t)\right]\Bigg|_0^{\beta}=$$

$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{-\beta}}{2}(-\cos\beta+\sin\beta)-\frac{1}{2}\cdot(-1)\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{-\beta}(-\cos\beta+\sin\beta)+1\right].$$

Подставив значения интегралов в выражение (в), получим:

$$\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}xdx=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta+\sin\beta)+e^{-\beta}(-\cos\beta+\sin\beta)\right]. \qquad \text{(д)}$$

Выражения (г) и (д) подставим в уравнение (а).

$$F=\frac{k\cdot\lambda\cdot a}{2}\left[1-\frac{ka^3}{32\beta^4 D}\left(\begin{array}{l}\dfrac{a}{2}-\dfrac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\dfrac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta-\cos\beta)+e^{-\beta}(\sin\beta+\cos\beta)\right]\\ -\dfrac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\dfrac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta+\sin\beta)+e^{-\beta}(-\cos\beta+\sin\beta)\right]\end{array}\right)\right],$$

или
$$F=\frac{k\cdot\lambda\cdot a}{2}\cdot\Omega.$$

(е)

где $\Omega=1-\dfrac{ka^3}{32\beta^4 D}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a}{2}-\dfrac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\dfrac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta-\cos\beta)+e^{-\beta}(\sin\beta+\cos\beta)\right]-\\ -\dfrac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\dfrac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta+\sin\beta)+e^{-\beta}(-\cos\beta+\sin\beta)\right]\end{array}\right\}.$

Выразив показательные функции через гиперболические функции, получим:

$$\Omega=1-\frac{ka^3}{32\beta^4 D}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a}{2}-\dfrac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\dfrac{a}{8\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta+sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta+\cos\beta)\end{array}\right]-\\ -\dfrac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\dfrac{a}{8\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta+sh\beta)(\cos\beta+\sin\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(-\cos\beta+\sin\beta)\end{array}\right].\end{array}\right\}.$$

$$\Omega=1-\frac{ka^4}{256\beta^5 D}\left\{\begin{array}{l}4\beta-\dfrac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta+sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta+\cos\beta)\end{array}\right]-\\ -\dfrac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta+sh\beta)(\cos\beta+\sin\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(-\cos\beta+\sin\beta)\end{array}\right].\end{array}\right\}.$$

Из (1.5) и (1.10) имеем:

$$\varphi_0(\beta)=\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta},\ \varphi_2(\beta)=\frac{2}{\beta^2}\frac{\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}.\to\frac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}=\beta^2\varphi_2.$$

Тогда

$$\Omega=1-\frac{ka^4}{256\beta^5 D}\begin{bmatrix}4\beta-\beta^2\varphi_2(\beta)\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta+\cos\beta)\end{bmatrix}-\\-\varphi_0(\beta)\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\cos\beta+\sin\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(-\cos\beta+\sin\beta)\end{bmatrix}.\end{bmatrix}.$$

Из (1.2) найдем: $\beta=\frac{a}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{4D}}.\to\beta^4=\frac{a^4}{16}\cdot\frac{k}{4D}.\to k=\frac{64\beta^4\cdot D}{a^4}.$ (ж)

Подставив в полученное выражение для Ω, получим:

$$\Omega=1-\frac{64\beta^4a^4\cdot D}{256\beta^5D\cdot a^4}\begin{bmatrix}4\beta-\beta^2\varphi_2(\beta)\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta+\cos\beta)\end{bmatrix}-\\-\varphi_0(\beta)\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\cos\beta+\sin\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(-\cos\beta+\sin\beta)\end{bmatrix}.\end{bmatrix}.\to$$

$$\Omega=1-\frac{1}{4\beta}\begin{bmatrix}4\beta-\beta^2\varphi_2(\beta)\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta+\cos\beta)\end{bmatrix}-\\-\varphi_0(\beta)\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\cos\beta+\sin\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(-\cos\beta+\sin\beta)\end{bmatrix}.\end{bmatrix}\to$$

$$\Omega=\frac{\beta}{4}\varphi_2\cdot\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta+\cos\beta)\end{bmatrix}+\frac{\varphi_0}{4\beta}\cdot\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\cos\beta+\sin\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(-\cos\beta+\sin\beta)\end{bmatrix}.\quad(2.3)$$

Подставив значение Ω в выражение (е) и учитывая (ж), получим:

$$F=\frac{k\cdot\lambda\cdot a}{2}\Omega=\frac{64\beta^4D\cdot\lambda\cdot a}{2a^4}\cdot\Omega=\frac{32\beta^4D\cdot\lambda}{a^3}\cdot\Omega.$$

Отсюда $\lambda=\frac{Fa^3}{32\beta^4D\cdot\Omega},$

(2.4)

Выражение для прогиба (2.2), с учетом (ж), (1.5), (1.10) и (2.4), принимает вид:

$$w=\frac{64\beta^4 D\cdot Fa^3\cdot a^4}{32\cdot\beta^4 64a^4 D\beta^4 D\Omega}\left[\begin{array}{l}1-\beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x-\\ -\varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\end{array}\right].\rightarrow$$

$$w=\frac{Fa^3}{32\beta^4 D\cdot\Omega}\cdot\left[1-\beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right]. \qquad (2.5)$$

Прогиб в центре пластины $x=0$:

$$w_{(x=0)}=\frac{Fa^3}{32\beta^4 D\cdot\Omega}\cdot[1-\varphi_0(\beta)]=\lambda\cdot[1-\varphi_0(\beta)], \qquad (2.6)$$

Для получения углов поворота продифференцируем выражение (2.5) по *x*.

$$\frac{dw}{dx}=\frac{Fa^3}{32\beta^4 D\Omega}\left[\begin{array}{l}-\beta^2\varphi_2(\beta)\left(\frac{2\beta}{a}\cos\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x+\frac{2\beta}{a}\sin\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right)-\\ -\varphi_0(\beta)\left(-\frac{2\beta}{a}\sin\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x+\frac{2\beta}{a}\cos\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x\right)\end{array}\right].\rightarrow$$

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{2\beta}{a}\frac{Fa^3}{32\beta^4 D\Omega}\left[\begin{array}{l}\beta^2\varphi_2(\beta)\left(\cos\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x+\sin\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right)+\\ +\varphi_0(\beta)\left(-\sin\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x+\cos\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x\right)\end{array}\right].\rightarrow$$

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{Fa^2}{16\beta^3 D\Omega}\left\{\begin{array}{l}[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)]\cos\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x+\\ +[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)]\sin\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

Определим угол поворота левого края балки-полосы $(x=-a/2)$.

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)}=\frac{Fa^3}{16\beta^3 D}\{[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)]\cos\beta sh\beta+[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)]\sin\beta ch\beta\} \qquad (2.8)$$

Изгибающий момент в произвольном поперечном сечении балки-полосы получаем из уравнения

$$M_x=-D\frac{d^2w}{dx^2}.$$

Продифференцируем выражение (2.7)

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{Fa^2}{16\beta^3 D\Omega}\left\{\begin{matrix}\left[\beta^2\cdot\varphi_2+\varphi_0\right]\frac{2\beta}{a}\left(-\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}+\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right)+\\+\left[\beta^2\cdot\varphi_2-\varphi_0\right]\frac{2\beta}{a}\left(\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right)\end{matrix}\right\}\rightarrow.$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{Fa}{4\beta^2 D\Omega}\left\{\beta^2\cdot\varphi_2\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right\}.$$

Подставив в выражение для изгибающего момента, получим:

$$M_x=\frac{Fa}{4\beta^2\Omega}\left[\beta^2\cdot\varphi_2\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right]. \qquad (2.9)$$

Значение изгибающего момента в центре балки-полосы

$$M_{x(x=0)}=\frac{Fa}{4\beta^2\Omega}\left[\beta^2\cdot\varphi_2\right]=\frac{Fa}{4\Omega}\cdot\varphi_2. \qquad (2.10)$$

Поперечную силу в произвольном сечении балки-полосы получим из уравнения $Q_{zx}=\frac{dM_x}{dx}$.

Из уравнения (2.9) получим:

$$Q_{zx}=\frac{Fa}{4\beta^2\Omega}\left[\begin{matrix}\frac{2\beta}{a}\beta^2\varphi_2(\beta)\left(-\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right)-\\-\frac{2\beta}{a}\varphi_0(\beta)\left(\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x+\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right)\end{matrix}\right].\rightarrow$$

$$Q_{zx}=\frac{F}{2\beta\Omega}\left\{\begin{matrix}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-\\-\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\end{matrix}\right\}. \qquad (2.11)$$

Значение поперечной силы на левом конце балки-полосы $(x=-a/2)$

$$Q_{zx}=\frac{F}{2\beta\Omega}\left\{\begin{matrix}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\beta\cdot(-sh\beta)-\\-\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\cdot(-\sin\beta)xch\beta\end{matrix}\right\}.\rightarrow$$

$$Q_{zx}=-\frac{F}{2\beta\Omega}\left\{\begin{matrix}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\beta sh\beta-\\-\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\beta xch\beta\end{matrix}\right\}. \qquad (2.12)$$

Определение сечения с максимальным изгибающим моментом.

Сравнивая (1.11) и (2.11) видим, что выражения в скобках у них одинаковы, следовательно, безразмерные координаты сечений с экстремальными значениями изгибающих моментов первой и второй задач совпадают, т. е. уравнение (1.16)

$$\frac{tg\beta\cdot th\beta-1}{tg\beta\cdot th\beta+1}\cdot\frac{th(2\beta\xi)}{tg(2\beta\xi)}=1$$

для определения безразмерного параметра ξ применимо для обеих задач.

3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВДАВЛИВАЕМОЙ В УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВСЕЙ ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ НАГРУЗКОЙ.

Условия, аналогичные показанным на рис. 3, получаются, если длинная прямоугольная пластина (рис. 5) вдавливается в упругое основание, равномерно распределенной по ее поверхности нагрузкой величиной *q*. Пластина вдавливается в упругое основание и изгибается, как показано пунктиром (рис.5).

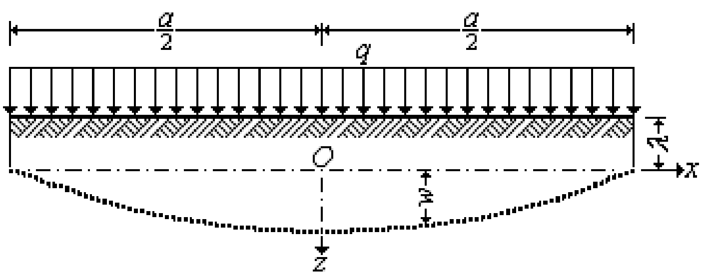

Рис. 5

Если прогиб на краях пластины обозначить λ, то реакция основания в произвольной точке будет равна:

$$k(\lambda+w)=k\cdot\lambda+kw, \qquad (3.1)$$

где w выражается уравнением (1.3) при замене q на $q = k\cdot\lambda$, т. е.

$$w = \frac{k\cdot\lambda\cdot a^4}{64D\cdot\beta^4}\left[\begin{array}{l} 1-\dfrac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\sin\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x - \\ -\dfrac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\cos\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x \end{array}\right]. \quad (3.2)$$

Величина λ находится из условия, что нагрузка уравновешивается реакцией основания. Отсюда

$$q\frac{a}{2} = \frac{k\cdot\lambda\cdot a}{2} + k\int_0^{a/2} wdx = \frac{k\cdot\lambda\cdot a}{2} + \frac{k^2\cdot\lambda\cdot a^4}{64D\beta^4}\int_0^{a/2}\left[\begin{array}{l} 1-\dfrac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\sin\dfrac{2\beta}{a}xsh\dfrac{2\beta}{a}x - \\ -\dfrac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\cos\dfrac{2\beta}{a}xch\dfrac{2\beta}{a}x \end{array}\right]dx$$

Отсюда

$$q = k\cdot\lambda\left[1+\frac{ka^3}{32\beta^4 D}\left(\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{a/2} dx - \frac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}xdx - \\ \displaystyle -\frac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}xdx \end{array}\right)\right]. \quad (а)$$

Выразим гиперболические функции через показательные функции.

$$\begin{aligned} &\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}xdx = \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\left(e^{\frac{2\beta}{a}x} - e^{\frac{-2\beta}{a}x}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx. \end{aligned} \quad (б)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}xdx = \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\left(e^{\frac{2\beta}{a}x} + e^{\frac{-2\beta}{a}x}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx. \end{aligned} \quad (в)$$

Из таблицы интегралов (Д.Б. Двайт) найдем значения интегралов.

Рассмотрим выражение (б). Предварительно выполним замену переменных: $\frac{2\beta}{a}x = t. \to \frac{2\beta}{a}dx = dt. \to dx = \frac{a}{2\beta}dt.,\quad x = 0. \to t = 0;\quad x = a. \to t = \beta.$ Тогда

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_{0}^{\beta}\sin t\cdot e^{t}dt=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\left[\frac{e^{t}}{1+1}(\sin t-\cos t)\right]\Bigg|_{0}^{\beta}=$$
$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{\beta}}{2}(\sin\beta-\cos\beta)-\frac{1}{2}(-1)\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta-\cos\beta)+1\right].$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_{0}^{\beta}\sin t\cdot e^{-t}=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e-t}{1+1}(-\sin t-\cos t)\right]\Bigg|_{0}^{\beta}=$$
$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{-\beta}}{2}(-\sin\beta-\cos\beta)-\frac{1}{2}(-1)\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{-\beta}(-\sin\beta-\cos\beta)+1\right].$$

Подставив значения интегралов в выражение (б), получим:

$$\int_{0}^{a/2}\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}xdx=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta-\cos\beta)+e^{-\beta}(\sin\beta+\cos\beta)\right]. \qquad (г)$$

Рассмотрим выражение (в)

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_{0}^{\beta}\cos t\cdot e^{t}dt=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{t}}{1+1}(\cos t+\sin t)\right]\Bigg|_{0}^{\beta}=$$
$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{\beta}}{2}(\cos\beta+\sin\beta)-\frac{1}{2}\cdot 1\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta+\sin\beta)-1\right].$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}x\cdot e^{\frac{-2\beta}{a}x}dx=\frac{1}{2}\frac{a}{2\beta}\int_{0}^{\beta}\cos t\cdot e^{-t}dt=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{-t}}{1+1}(-\cos t+\sin t)\right]\Bigg|_{0}^{\beta}=$$
$$=\frac{a}{4\beta}\left[\frac{e^{-\beta}}{2}(-\cos\beta+\sin\beta)-\frac{1}{2}\cdot(-1)\right]=\frac{a}{8\beta}\left[e^{-\beta}(-\cos\beta+\sin\beta)+1\right].$$

Подставив значения интегралов в выражение (в), получим:

$$\int_{0}^{a/2}\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}xdx=\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta+\sin\beta)+e^{-\beta}(-\cos\beta+\sin\beta)\right]. \qquad (д)$$

Выражения (г) и (д) подставим в уравнение (а).

$$q=k\cdot\lambda\left[1+\frac{ka^{3}}{32\beta^{4}D}\left(\begin{array}{l}\frac{a}{2}-\frac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta-\cos\beta)+e^{-\beta}(\sin\beta+\cos\beta)\right]\\ -\frac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}\cdot\frac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta+\sin\beta)+e^{-\beta}(-\cos\beta+\sin\beta)\right]\end{array}\right)\right],$$

или $$q = k \cdot \lambda \cdot \Omega.$$

(е)

где $$\Omega = 1 + \frac{ka^3}{32\beta^4 D}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{2} - \dfrac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} \cdot \dfrac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\sin\beta - \cos\beta) + e^{-\beta}(\sin\beta + \cos\beta)\right] - \\ - \dfrac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} \cdot \dfrac{a}{8\beta}\left[e^{\beta}(\cos\beta + \sin\beta) + e^{-\beta}(-\cos\beta + \sin\beta)\right] \end{array}\right\}.$$

Выразив показательные функции через гиперболические, получим:

$$\Omega = 1 + \frac{ka^3}{32\beta^4 D}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{2} - \dfrac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} \cdot \dfrac{a}{8\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\sin\beta - \cos\beta) + \\ + (ch\beta - sh\beta)(\sin\beta + \cos\beta)\end{array}\right] - \\ - \dfrac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} \cdot \dfrac{a}{8\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\cos\beta + \sin\beta) + \\ + (ch\beta - sh\beta)(-\cos\beta + \sin\beta)\end{array}\right]. \end{array}\right\}$$

или $$\Omega = 1 + \frac{ka^4}{256\beta^5 D}\left\{\begin{array}{l} 4\beta - \dfrac{2\sin\beta sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\sin\beta - \cos\beta) + \\ + (ch\beta - sh\beta)(\sin\beta + \cos\beta)\end{array}\right] - \\ - \dfrac{2\cos\beta ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\cos\beta + \sin\beta) + \\ + (ch\beta - sh\beta)(-\cos\beta + \sin\beta)\end{array}\right]. \end{array}\right\}$$

Из (1.5) и (1.10) имеем:

$$\varphi_0(\beta) = \frac{2\cos\beta \cdot ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta},\ \varphi_2(\beta) = \frac{2}{\beta^2}\,\frac{\sin\beta \cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta}. \to \frac{2\sin\beta \cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} = \beta^2\varphi_2.$$

Тогда $$\Omega = 1 + \frac{ka^4}{256\beta^5 D}\left[\begin{array}{l} 4\beta - \beta^2\varphi_2(\beta)\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\sin\beta - \cos\beta) + \\ + (ch\beta - sh\beta)(\sin\beta + \cos\beta)\end{array}\right] - \\ - \varphi_0(\beta)\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\cos\beta + \sin\beta) + \\ + (ch\beta - sh\beta)(-\cos\beta + \sin\beta)\end{array}\right]. \end{array}\right].$$

Из (1.2) найдем: $$\beta = \frac{a}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{4D}}. \to \beta^4 = \frac{a^4}{16} \cdot \frac{k}{4D}. \to k = \frac{64\beta^4 \cdot D}{a^4}. \qquad (ж)$$

Подставив в полученное выражение для Ω, получим:

$$\Omega = 1 + \frac{64\beta^4 a^4 \cdot D}{256\beta^5 D \cdot a^4}\left[\begin{array}{l} 4\beta - \beta^2\varphi_2(\beta)\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\sin\beta - \cos\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(\sin\beta + \cos\beta)\end{array}\right] - \\ -\varphi_0(\beta)\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\cos\beta + \sin\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(-\cos\beta + \sin\beta)\end{array}\right]. \end{array}\right],$$

или
$$\Omega = 1 + \frac{1}{4\beta}\left[\begin{array}{l} 4\beta - \beta^2\varphi_2(\beta)\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\sin\beta - \cos\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(\sin\beta + \cos\beta)\end{array}\right] - \\ -\varphi_0(\beta)\left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\cos\beta + \sin\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(-\cos\beta + \sin\beta)\end{array}\right]. \end{array}\right].$$

или

$$\Omega = 2 - \frac{\beta}{4}\varphi_2 \cdot \left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\sin\beta - \cos\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(\sin\beta + \cos\beta)\end{array}\right] + \frac{\varphi_0}{4\beta} \cdot \left[\begin{array}{l}(ch\beta + sh\beta)(\cos\beta + \sin\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(-\cos\beta + \sin\beta)\end{array}\right]. \quad (3.3)$$

Подставив значение Ω в выражение (е) и учитывая (ж), получим:

$$q = k \cdot \lambda \cdot \Omega = \frac{64\beta^4 D \cdot \lambda}{a^4} \cdot \Omega = \frac{64\beta^4 D \cdot \lambda}{a^4} \cdot \Omega.. \qquad \text{Отсюда} \qquad \lambda = \frac{qa^4}{64\beta^4 D \cdot \Omega}.$$

(3.4)

Выражение для прогиба (3.2), с учетом (ж), (1.5), (1.10) и (3.4), принимает вид:

$$w = \frac{64\beta^4 D \cdot qa^4 \cdot a^4}{64 \cdot \beta^4 64 a^4 D \beta^4 D \Omega}\left[\begin{array}{l} 1 - \beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x - \\ -\varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x \end{array}\right].$$

или $$w = \frac{qa^4}{64\beta^4 D \cdot \Omega} \cdot \left[1 - \beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x - \varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right].$$

Учитывая (3.4), получим:

$$w = \frac{qa^4}{64\beta^4 D \cdot \Omega} \cdot \left[1 - \beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x - \varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right]. \quad (3.5)$$

Прогиб в центре пластины $x = 0$:

$$w_{(x=0)}=\frac{qa^4}{64\beta^4 D\cdot\Omega}\cdot\left[1-\varphi_0(\beta)\right]=\Delta\cdot\left[1-\varphi_0(\beta)\right], \qquad (3.6)$$

Для получения углов поворота продифференцируем выражение (3.5) по *x*.

$$\frac{dw}{dx}=\frac{qa^4}{64\beta^4 D\Omega}\left[\begin{aligned}&-\beta^2\varphi_2(\beta)\left(\frac{2\beta}{a}\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x+\frac{2\beta}{a}\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right)-\\&-\varphi_0(\beta)\left(-\frac{2\beta}{a}\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+\frac{2\beta}{a}\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right)\end{aligned}\right],$$

или
$$\frac{dw}{dx}=-\frac{2\beta}{a}\frac{qa^4}{64\beta^4 D\Omega}\left[\begin{aligned}&\beta^2\varphi_2(\beta)\left(\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x+\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right)+\\&+\varphi_0(\beta)\left(-\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right)\end{aligned}\right],$$

или
$$\frac{dw}{dx}=-\frac{qa^3}{32\beta^3 D\Omega}\left\{\begin{aligned}&\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x+\\&+\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

Определим угол поворота левого края балки-полосы $(x=-a/2)$:

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)}=\frac{qa^3}{32\beta^3 D\Omega}\left\{\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\cos\beta sh\beta+\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\sin\beta ch\beta\right\}. \qquad (3.8)$$

Изгибающий момент в произвольном поперечном сечении балки-полосы найдем из уравнения $M_x=-D\dfrac{d^2w}{dx^2}$.

Продифференцируем выражение (3.7).

Получим:

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{qa^3}{32\beta^3 D\Omega}\left\{\begin{aligned}&\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\frac{2\beta}{a}\left(-\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}+\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right)+\\&+\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\frac{2\beta}{a}\left(\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right)\end{aligned}\right\},$$

или $$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{qa^2}{8\beta^2 D\Omega}\left\{\beta^2\cdot\varphi_2(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right\}.$$

Подставив в выражение для изгибающего момента, получим:

$$M_x=\frac{qa^2}{8\beta^2\Omega}\left[\beta^2\cdot\varphi_2(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right]. \qquad (3.9)$$

Значение изгибающего момента в центре балки-полосы

$$M_{x(x=0)}=\frac{qa^2}{8\beta^2\Omega}\left[\beta^2\cdot\varphi_2(\beta)\right]=\frac{qa^2}{8\Omega}\cdot\varphi_2(\beta). \qquad (3.10)$$

Поперечную силу в произвольном сечении балки-полосы получим из уравнения

$$Q_{zx}=\frac{dM_x}{dx}.$$

Из уравнения (3.9) найдем:

$$Q_{zx}=\frac{qa^2}{8\beta^2\Omega}\left[\begin{array}{l}\frac{2\beta}{a}\beta^2\varphi_2(\beta)\left(-\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right)-\\-\frac{2\beta}{a}\varphi_0(\beta)\left(\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x+\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right)\end{array}\right].$$

или $$Q_{zx}=\frac{qa}{4\beta\Omega}\left\{\begin{array}{l}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-\\-\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\end{array}\right\}. \qquad (3.11)$$

Значение поперечной силы на левом конце балки-полосы $(x=-a/2)$

$$Q_{zx(x=-a/2)}=\frac{qa}{4\beta\Omega}\left\{\begin{array}{l}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\beta\cdot(-sh\beta)-\\-\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\cdot(-\sin\beta)xch\beta\end{array}\right\}.$$

или $$Q_{zx(x=-a/2)}=-\frac{qa}{4\beta\Omega}\left\{\begin{array}{l}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\beta sh\beta-\\-\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\beta xch\beta\end{array}\right\}. \qquad (3.12)$$

Определение сечения с максимальным изгибающим моментом.

Сравнивая (1.11), (2.11) и (3.11) видим, что выражения в скобках у них одинаковы, следовательно, безразмерные координаты сечений с экстремальными значениями изгибающих моментов первой, второй и третьей задач совпадают, т. е. уравнение (1.16)

$$\frac{tg\beta \cdot th\beta - 1}{tg\beta \cdot th\beta + 1} \cdot \frac{th(2\beta\xi)}{tg(2\beta\xi)} = 1$$

для определения безразмерного параметра ξ применимо для всех трех задач.

Значения параметров φ_0, φ_1, φ_2 и ξ представлены в таблицах 2 и 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Вариант *А*.

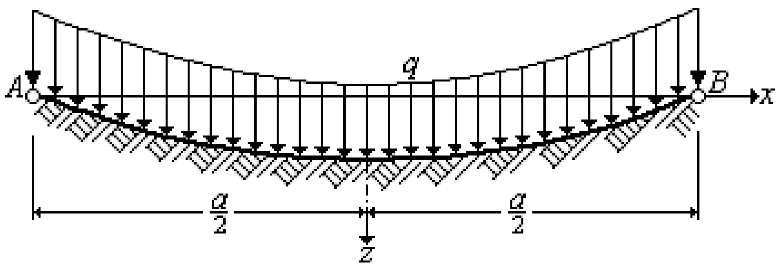

Рис.6

Для выделенной из пластины элементарной балки-полосы:

1. Определить цилиндрическую жесткость *D* и коэффициент β.

2. По полученному значению коэффициента β найти по табл. 2 или по формулам (1.5), (1.7), (1.10) значения $\varphi_0(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$.

3. Составить выражения для прогибов *w*, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_{zx}.

Вычислить значения *w*, dw/dx, M_x, Q_{zx} в характерных сечениях балки-полосы и построить эпюры.

4. Определить максимальные нормальные σ_x и касательные τ_{zx} напряжения

5. Полученные результаты сравнить по прогибам и изгибающим моментам с решением

численным методом – методом конечных разностей.

Вариант *Б*.

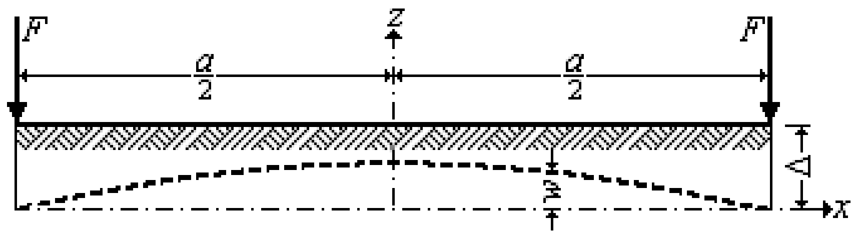

Рис.7

Для выделенной из пластины элементарной балки-полосы:

1. Определить цилиндрическую жесткость D и коэффициент β.

2. По полученному значению коэффициента β найти по табл. 2 или по формулам (1.5), (1.7), (1.10) значения $\varphi_0(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$.

3. Вычислить значение параметра λ

4. Составить выражения для прогибов w, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_{zx}.

Вычислить значения w, dw/dx, M_x, Q_{zx} в характерных сечениях балки-полосы и построить эпюры.

5. Определить максимальные нормальные σ_x и касательные τ_{zx} напряжения

6. Полученные результаты сравнить (по прогибам и изгибающим моментам) с решением численным методом – методом конечных разностей.

Вариант *В*.

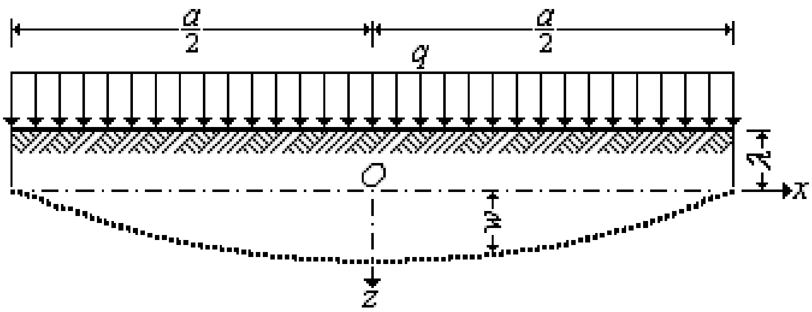

Рис.8

Для выделенной из пластины элементарной балки-полосы:

1. Определить цилиндрическую жесткость D и коэффициент β.

2. По полученному значению коэффициента β найти по табл. 2 или по формулам (1.5), (1.7), (1.10) значения $\varphi_0(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$.

3. Вычислить значение параметра λ

4. Составить выражения для прогибов w, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_{zx}.

Вычислить значения w, dw/dx, M_x, Q_{zx} в характерных сечениях балки-полосы и построить эпюры.

5. Определить максимальные нормальные σ_x и касательные τ_{zx} напряжения

6. Полученные результаты сравнить (по прогибам и изгибающим моментам) с решением численным методом – методом конечных разностей.

Данные для расчета взять из табл. 4 (по номеру зачетной книжки).

Примечание.

Для упрощения вычислений прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил используется таблица 2 численных значений функций φ_0, φ_1 и φ_2 и табл. 3 численных значений параметра ξ для различных значений аргумента β.

Таблица 2

β	φ_0	φ_1	φ_2	β	φ_0	φ_1	φ_2
0,1	1,000	1,000	1,000	1,6	-0,013	0,200	0,164
0,2	0,999	0,999	0,999	1,7	-0,052	0,166	0,129
0,3	0,993	0,995	0,995	1,8	-0,081	0,138	0,101
0,4	0,979	0,983	0,983	1,9	-0,102	0,116	0,079
0,5	0,950	0,961	0,959	2,0	-0,117	0,099	0,062
0,6	0,901	0,923	0,919	2,2	-0,133	0,072	0,037

0,7	0,827	0,866	0,859	2,4	-0,135	0,055	0,021
0,8	0,731	0,791	0,781	2,6	-0,127	0,043	0,011
0,9	0,619	0,702	0,689	2,8	-0,114	0,034	0,005
1,0	0,498	0,609	0,591	3,0	-0,098	0,028	0,002
1,1	0,380	0,517	0,494	3,2	-0,081	0,023	0,000
1,2	0,272	0,431	0,405	3,4	-0,064	0,019	-0,001
1,3	0,178	0,357	0,327	3,6	-0,049	0,016	-0,002
1,4	0,100	0,294	0,262	3,8	-0,035	0,014	-0,002
1,5	0,037	0,242	0,208	4,0	-0,024	0,012	-0,002

Таблица 3

β	ξ	β	ξ	β	ξ	β	ξ	β	ξ
<1,57	0,00	2,04	0,29760	2,54	0,34868	3,04	0,37262	3,54	0,38938
1,575	0,03619	2,06	0,30090	2,56	0,34990	3,06	0,37337	3,56	0,39002
1,58	0,05408	2,08	0,30404	2,58	0,35110	3,08	0,37410	3,58	0,39059
1,60	0,09624	2,10	0,30710	2,60	0,35230	3,10	0,37488	3,60	0,39112
1,62	0,12321	2,12	0,30995	2,62	0,35344	3,12	0,37562	3,62	0,39172
1,64	0,14422	2,14	0,31266	2,64	0,35455	3,14	0,37634	3,64	0,39228
1,66	0,16157	2,16	0,31524	2,66	0,35564	3,16	0,37704	3,66	0,39284
1,68	0,17639	2,18	0,31770	2,68	0,35670	3,18	0,37770	3,68	0,39340
1,70	0,18935	2,20	0,32005	2,70	0,35770	3,20	0,37847	3,70	0,39396
1,72	0,20083	2,22	0,32231	2,72	0,35874	3,22	0,37917	3,72	0,39452
1,74	0,21116	2,24	0,32447	2,74	0,35974	3,24	0,37979	3,74	0,39507
1,76	0,22050	2,26	0,32654	2,76	0,36071	3,26	0,38054	3,76	0,39560
1,78	0,22908	2,28	0,32852	2,78	0,36166	3,28	0,38118	3,78	0,39615
1,80	0,23686	2,30	0,33043	2,80	0,36258	3,30	0,38188	3,80	0,39667
1,82	0,24419	2,32	0,33226	2,82	0,36351	3,32	0,38247	3,82	0,39720
1,84	0,25087	2,34	0,33403	2,84	0,36442	3,34	0,38316	3,84	0,39772
1,86	0,25707	2,36	0,33573	2,86	0,36530	3,36	0,38382	3,86	0,39824
1,88	0,26283	2,38	0,33736	2,88	0,36618	3,38	0,38446	3,88	0,39876
1,90	0,26819	2,40	0,33895	2,90	0,36700	3,40	0,38509	3,90	0,39927

1,92	0,27322	2,42	0,34047	2,92	0,36791	3,42	0,38572	3,92	0,39978
1,94	0,27792	2,44	0,34195	2,94	0,36868	3,44	0,38635	3,925	0,39990
1,96	0,28233	2,46	0,34338	2,96	0,36949	3,46	0,38697	3,926	0,39993
1,98	0,28649	2,48	0,34477	2,98	0,37029	3,48	0,38758	3,927	0,39995
2,00	0,29043	2,50	0,34613	3,00	0,37101	3,50	0,38813		
2,02	0,29410	2,52	0,34741	3,02	0,37186	3,52	0,38878		

При малых значениях β, т. е. для весьма податливого основания, функции $(1-\varphi_0)/\beta^4$ и φ_2 почти не отличаются от единицы, поэтому как максимальный прогиб, так и напряжения изгиба получаются в этом случае близкими к соответствующим значениям для свободно опертой полосы (без упругого основания). С увеличением β влияние упругости основания оказывается все заметнее и заметнее.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ.

Вариант *А*. Исходные данные:

$$a = 4м, \quad q = 50кН/м^2, \quad k = 100Н/см^3; \quad E = 35\cdot 10^3 МПа; \quad h = 15см; \quad \mu = 0{,}16$$

1 Определение цилиндрической жесткости D и коэффициента β.

Согласно (1.2):

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{35\cdot 10^2\cdot 15^3}{12(1-0{,}16^2)} = 10{,}1\cdot 10^5\,\text{кНсм}; \quad \beta = \frac{a}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{4D}} = \frac{400}{2}\sqrt[4]{\frac{100\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10{,}1\cdot 10^5}} = 2{,}51$$

2 Определение функций $\varphi_0(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$. Из (1.5), (1.7) и (1.10) находим:

$$\varphi_0(\beta) = \frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} = \frac{2\cos 2{,}51\cdot ch2{,}51}{\cos 5{,}02 + ch5{,}02} = -0{,}1315;$$

$$\varphi_1(\beta) = \frac{3}{4\beta^3}\,\frac{sh2\beta - \sin 2\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} = \frac{3}{4\cdot 2{,}51^3}\,\frac{sh5{,}02 - \sin 5{,}02}{\cos 5{,}02 + ch5{,}02} = 0{,}0478;$$

$$\varphi_2(\beta) = \frac{2}{\beta^2}\,\frac{\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} = \frac{2}{2{,}51^2}\,\frac{\sin 2{,}51\cdot sh2{,}51}{\cos 5{,}02 + ch5{,}02} = 0{,}0151.$$

3 Выражения для прогибов *w*, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и

поперечных сил Q_{zx}:

Согласно (1.13)

$$w=\frac{qa^4}{64D\beta^4}\left[1-\beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right].$$

Подставив значения исходных данных, получим:

$$w=\frac{50\cdot10^{-4}\cdot4^4\cdot10^8}{64\cdot10{,}1\cdot10^5\cdot2{,}51^4}\left[1-2{,}51^2\cdot0{,}0151\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-(-0{,}1315)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right],$$

$$w=0{,}05\left(1-0{,}0951\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x+0{,}1315\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right). \quad (1)$$

Из (з) §1 имеем:

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{qa^3}{32D\beta^3}\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos2\beta+ch2\beta}\left(\cos\dfrac{2\beta}{a}x\cdot sh\dfrac{2\beta}{a}x+\sin\dfrac{2\beta}{a}x\cdot ch\dfrac{2\beta}{a}x\right)+\\+\dfrac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos2\beta+ch2\beta}\left(-\sin\dfrac{2\beta}{a}x\cdot ch\dfrac{2\beta}{a}x+\cos\dfrac{2\beta}{a}x\cdot sh\dfrac{2\beta}{a}x\right)\end{array}\right].\rightarrow$$

С учетом (1.5) и (1.10), получим:

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{qa^3}{32D\beta^3}\left[\begin{array}{l}[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)]\cos\dfrac{2\beta}{a}x\cdot sh\dfrac{2\beta}{a}x+\\+[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)]\sin\dfrac{2\beta}{a}x\cdot ch\dfrac{2\beta}{a}x\end{array}\right].$$

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{50\cdot10^{-4}\cdot4^3\cdot10^6}{32\cdot10{,}1\cdot10^5\cdot2{,}51^3}\left[\begin{array}{l}[0{,}0951-0{,}1315]\cos\dfrac{2\beta}{a}x\cdot sh\dfrac{2\beta}{a}x+\\+[0{,}0951+0{,}1315]\sin\dfrac{2\beta}{a}x\cdot ch\dfrac{2\beta}{a}x\end{array}\right].\rightarrow$$

$$\frac{dw}{dx}=6{,}26\cdot10^{-4}\left(0{,}0364\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-0{,}2266\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right). \quad (2)$$

Из (1.8) имеем:

$$M_x=\frac{qa^2}{4\beta^2}\frac{\sin\beta sh\beta\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-\cos\beta ch\beta\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x}{\cos2\beta+ch2\beta}.\rightarrow.$$

С учетом (1.5) и (1.10), получим:

$$M_x = \frac{qa^2}{8\beta^2}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x - \varphi_0(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right].$$

$$M_x = \frac{50\cdot10^{-4}\cdot4^2\cdot10^4}{8\cdot2{,}51^2}\left[2{,}51^2\cdot0{,}0151\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x-(-0{,}1315)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right].\to$$

$$M_x = 15{,}873\left(0{,}0951\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+0{,}1315\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right). \qquad (3)$$

Из (1.11) имеем:

$$Q_{zx} = \frac{qa}{4\beta}\left[\begin{array}{l}\left[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)\right]\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a} - \\ -\left[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)\right]\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\end{array}\right]$$

$$Q_{zx} = \frac{50\cdot10^{-4}\cdot4\cdot10^2}{4\cdot2{,}51}\left[\begin{array}{l}\left[2{,}51^2\cdot0{,}0151+0{,}1315\right]\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x - \\ -\left[2{,}51^2\cdot0{,}0151-0{,}1315\right]\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\end{array}\right].\to$$

$$Q_{zx} = 0{,}1992\cdot\left(0{,}2266\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x+0{,}0364\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right). \qquad (4)$$

4 Построение эпюр *w*, dw/dx, M_x и Q_{zx}.

4.1 Определение значений тригонометрических и гиперболических функций в характерных сечениях балки-полосы. Результаты сведены в таблицу 4.

4.2 Определение значений прогибов *w*, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_{zx} в характерных сечениях балки-полосы.

Прогиб в центре балки-полосы (1.4):

$$w_{(x=0)} = \frac{50\cdot10^{-4}\cdot4^4\cdot10^8}{64\cdot10{,}1\cdot10^5\cdot2{,}51^4}\left[1-(-0{,}1315)\right] = 0{,}0499\cdot1{,}1315 = 0{,}0565см = 0{,}565мм.$$

Таблица 4

Функции	*x*								
	-a/2	*-3a/8*	*-a/4*	*-a/8*	0	*a/8*	*a/4*	*3a/8*	*a/2*

	$\alpha=2\beta x/a \quad \beta=2{,}51$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
$\cos\alpha$	-0,8071	-0,3067	0,3106	0,8095	1	0,8095	0,3106	-0,3067	-0,8071
$\sin\alpha$	-0,5904	-0,9518	-0,9505	-0,5871	0	0,5871	0,9505	0,9518	0,5904
$ch\alpha$	6,1931	3,3611	1,8965	1,2034	1	1,2034	1,8965	3,3611	6,1931
$sh\alpha$	-6,1118	-3,2089	-1,6114	-0,6695	0	0,6695	1,6114	3,2089	6,1118

Прогиб в произвольном сечении (1):

$$w=0{,}0499\left(1-0{,}0951\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x+0{,}1315\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right).$$

$$w_{\left(x=-\frac{a}{8}\right)}=0{,}0499(1-0{,}0951(-0{,}5871)(-0{,}6695)+0{,}1315\cdot 0{,}8095\cdot 1{,}2034).\to$$
$$w_{\left(x=-\frac{a}{8}\right)}=0{,}0499(1-0{,}0374+0{,}1281)=0{,}0499\cdot 1{,}0907=0{,}0544\text{см}=0{,}544\text{мм}.$$

$$w_{\left(x=-\frac{a}{4}\right)}=0{,}0499[1-0{,}0951\cdot(-0{,}9506)\cdot(-1{,}6114)+0{,}1315\cdot 0{,}3106\cdot 1{,}8965].\to$$
$$w_{\left(x=-\frac{a}{4}\right)}=0{,}0499(1-0{,}1457+0{,}0775)=0{,}0499\cdot 0{,}9318=0{,}0465\text{см}=0{,}465\text{мм}.$$

$$w_{\left(x=-\frac{3a}{8}\right)}=0{,}0499(1-0{,}0951(-0{,}9518)(-3{,}2089)+0{,}1315(-0{,}3067)3{,}3611)=$$
$$=0{,}0499(1-0{,}2904-0{,}1356)=0{,}0499\cdot 0{,}5740=0{,}0286\text{см}=0{,}286\text{мм}.$$

$$w_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)}=w_{\left(x=\frac{a}{2}\right)}=0;\quad w_{\left(x=\frac{a}{8}\right)}=w_{\left(x=-\frac{a}{8}\right)}4;\quad w_{\left(x=\frac{a}{4}\right)}=w_{\left(x=-\frac{a}{4}\right)};\quad w_{\left(x=\frac{3a}{8}\right)}=w_{\left(x=-\frac{3a}{8}\right)}.$$

Угол поворота левого края балки-полосы (1.6):

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)}=\frac{qa^3}{24D}\cdot\varphi_1(\beta)=\frac{50\cdot 10^{-4}\cdot 4^3\cdot 10^6}{24\cdot 10{,}1\cdot 10^5}\cdot 0{,}0478=6{,}31\cdot 10^{-4}\,\text{рад}.$$

Угол поворота произвольного сечения балки-полосы (2)

$$\frac{dw}{dx}=6{,}26\cdot10^{-4}\left(0{,}0364\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-0{,}2266\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right):$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{8}\right)}=6{,}26\cdot10^{-4}[0{,}0364\cdot0{,}8095(-0{,}6695)-0{,}2266(-0{,}5871)\cdot1{,}2034]=$$
$$=6{,}26\cdot10^{-4}(-0{,}0197+0{,}1601)=6{,}26\cdot10^{-4}\cdot0{,}1431=0{,}90\cdot10^{-4}\text{рад.}$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{4}\right)}=6{,}26\cdot10^{-4}\cdot[0{,}0364\cdot0{,}3106(-1{,}6114)-0{,}2266(-0{,}9506)\cdot1{,}8965]=$$
$$=6{,}26\cdot10^{-4}\cdot(-0{,}0182+0{,}4085)=6{,}26\cdot10^{-4}\cdot0{,}3903=2{,}44\cdot10^{-4}\text{рад.}$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{3a}{8}\right)}=6{,}26\cdot10^{-4}\cdot[0{,}0364(-0{,}3067)\cdot(-3{,}2089)-0{,}2266(-0{,}9518)3{,}3611]=$$
$$=6{,}26\cdot10^{-4}\cdot(0{,}0358+0{,}7249)=6{,}26\cdot10^{-4}\cdot0{,}7607=4{,}76\cdot10^{-4}\text{рад.}$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=\frac{a}{2}\right)}=-\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)};\quad\frac{dw}{dx}_{\left(x=\frac{3a}{8}\right)}=-\frac{dw}{dx}_{\left(ч=-\frac{3a}{8}\right)};\quad\frac{dw}{dx}_{\left(x=\frac{a}{4}\right)}=-\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{4}\right)};$$
$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=\frac{a}{8}\right)}=-\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{8}\right)};\quad\frac{dw}{dx}_{(x=0)}=0.$$

Результаты сведены в таблицу 5.

Изгибающий момент в середине балки-полосы (1.9)

$$M_{x(x=0)}=\frac{qa^2}{8}\varphi_2(\beta)=\frac{50\cdot10^{-4}\cdot4^2\cdot10^4}{8}\cdot0{,}0151=1{,}51кНсм/см.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки-полосы (3)

$$M_x=15{,}873\left(0{,}0951\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x+0{,}1315\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right):$$

$$M_{x\left(x=-\frac{a}{8}\right)}=15{,}873\cdot[0{,}0951\cdot0{,}8095\cdot1{,}2034+0{,}1315(-0{,}5871)\cdot(-0{,}6695)].\rightarrow$$
$$M_{x\left(x=-\frac{a}{8}\right)}=15{,}873\cdot(0{,}0926+0{,}0517)=15{,}873\cdot0{,}1443=2{,}29\text{кНсм/см.}$$

$$M_{x\left(x=-\frac{a}{4}\right)}=15{,}873\cdot[0{,}0951\cdot0{,}3106\cdot1{,}8965+0{,}1315(-0{,}9506)(-1{,}6114)],\rightarrow$$
$$M_{x\left(x=-\frac{a}{4}\right)}=15{,}873\cdot(0{,}0560+0{,}2014)=15{,}873\cdot0{,}2574\approx4{,}09\text{кНсм/см.}$$

$$M_{x\left(x=-\frac{3a}{8}\right)} = 15{,}873\cdot\left[0{,}0951(-0{,}3067)\cdot 3{,}3611 + 0{,}1315(-0{,}9518)(-3{,}2089)\right]\to$$

$$M_{x\left(x=-\frac{3a}{8}\right)} = 15{,}873\cdot(-0{,}09803+0{,}40163) = 15{,}873\cdot 0{,}3036 = 4{,}82\text{кНсм/см}$$

$$M_{x\left(x=\frac{a}{8}\right)} = M_{x\left(x=-\frac{a}{8}\right)};\quad M_{x\left(x=\frac{a}{4}\right)} = M_{x\left(x=-\frac{a}{8}\right)};\quad M_{x\left(x=\frac{3a}{8}\right)} = M_{x\left(x=-\frac{3a}{8}\right)};\quad M_{x\left(x=\frac{a}{2}\right)} = M_{x\left(x=-\frac{a}{2}\right)} = 0\,.$$

Таблица 5

Перемещения	x								
	-a/2	*-3a/8*	*-a/4*	*-a/8*	0	*a/8*	*a/4*	*3a/8*	*a/2*
	$\alpha = 2\beta x / a \quad \beta = 2{,}51$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
w $[мм]$	0,00	0,286	0,465	0,544	0,565	0,544	0,465	0,286	0,00
$(dw/dx)\cdot 10^4$ *рад.*	6,31	4,76	2,44	0,90	0,00	-0,90	-2,44	-4,76	-6,31

Поперечная сила в произвольном сечении балки-полосы (4)

$$Q_{zx} = 0{,}1992\cdot\left(0{,}2266\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x + 0{,}0364\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right):$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{8}\right)} = 0{,}1992\cdot\left[0{,}2266\cdot 0{,}8095(-0{,}6695) + 0{,}0364(-0{,}5871)\cdot 1{,}2034\right]\to$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{8}\right)} = 0{,}1992\cdot(-0{,}1228-0{,}0257) = -0{,}1992\cdot 0{,}1485 \approx -0{,}030\text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{4}\right)} = 0{,}1992\cdot\left[0{,}2266\cdot 0{,}3106(-1{,}6114) + 0{,}0364(-0{,}9506)\cdot 1{,}8965\right]\to$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{4}\right)} = 0{,}1992\cdot(-0{,}1134-0{,}0656) = -0{,}1992\cdot 0{,}1790 = -0{,}036\text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\,x=-\frac{3a}{8}} = 0{,}1992\cdot\left[0{,}2266\cdot(-0{,}3067)\cdot(-3{,}2089) + 0{,}0364\cdot(-0{,}9518)\cdot 3{,}3611\right]\to$$

$$Q_{zx\,x=-\frac{3a}{8}} = 0{,}1992\cdot(0{,}2230-0{,}1164) = 0{,}1992\cdot 0{,}1066 \approx 0{,}021\text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{2}\right)} = 0{,}1992\cdot\left[0{,}2266\cdot(-0{,}8071)\cdot(-6{,}1118) + 0{,}0364\cdot(-0{,}5904)\cdot 6{,}1931\right]\to$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{2}\right)} = 0{,}1992\cdot(1{,}1178-0{,}1331) = 0{,}1992\cdot 0{,}9847 = 0{,}196\text{кН/см}.$$

Так как поперечная сила кососимметричная функция, то:

$$Q_{zx\left(x=\frac{a}{8}\right)} = -Q_{zx\left(x=-\frac{a}{8}\right)};\quad Q_{zx\left(x=\frac{a}{4}\right)} = -Q_{zx\left(x=-\frac{a}{4}\right)};\quad Q_{zx\left(x=\frac{3a}{8}\right)} = -Q_{zx\left(x=-\frac{3a}{8}\right)};\quad Q_{zx\left(x=\frac{a}{2}\right)} = -Q_{zx\left(x=-\frac{a}{2}\right)}.$$

Результаты сведены в таблицу 6.

Таблица 6

Перемещения	*x*								
	-a/2	*-3a/8*	*-a/4*	*-a/8*	0	*a/8*	*a/4*	*3a/8*	*a/2*
	$\alpha = 2\beta x/a \quad \beta = 2{,}51$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
$Q_{zx}\ 10^2$ $[KH/см]$	19,6	2,1	-3,6	-3,0	0	3,0	3,6	-2,1	-19,6
$M_x\ [KHсм/см]$	0,0	4,82	4,09	2,29	1,51	2,29	4,09	4,82	0,0

4.3 Определение сечения с экстремальным (максимальным) значением изгибающего момента. Согласно (1.16)

$$\frac{tg\beta \cdot th\beta - 1}{tg\beta \cdot th\beta + 1} \cdot \frac{th(2\beta\xi)}{tg(2\beta\xi)} = 1.$$

Из табл. 3 по параметру $\beta = 2{,}51$ находим значение $\xi = 0{,}34677$.

Тогда, согласно (1.15), сечения с максимальным значением изгибающего момента имеют координаты:

$$x_0 = \pm\xi \cdot a = \pm 0{,}34677 \cdot 4 = \pm 1{,}3871\text{м}$$

Наибольший изгибающий момент:

$$M_{x(\max)} = 15{,}873\begin{bmatrix} 0{,}0951\cos(1{,}255 \cdot 1{,}3871)ch(1{,}255 \cdot 1{,}3871) + \\ +0{,}1315\sin(1{,}255 \cdot 1{,}3871)sh(1{,}255 \cdot 1{,}3871). \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$M_{x(\max)} = 15{,}873[0{,}0951\cos(1{,}7408)ch(1{,}7408) + 0{,}1315\sin(1{,}7408)sh(1{,}7408).] \rightarrow$$

$$M_{x(\max)} = 15{,}873[0{,}0951 \cdot (-0{,}16918) \cdot 2{,}95861 + 0{,}1315 \cdot 0{,}98558 \cdot 2{,}76326] \rightarrow$$

$$M_{x(x=x_0)} = M_{x(\max)} = 15{,}873(-0{,}04760 + 0{,}35813) = 15{,}873 \cdot 0{,}31053 = 4{,}93\text{к3кНсм/с}$$

Эпюры изгибающих моментов, поперечных сил, прогибов и углов поворота:

Определение сечения с экстремальным (максимальным) значением изгибающего момента: согласно (1.16) $\dfrac{tg\beta \cdot th\beta - 1}{tg\beta \cdot th\beta + 1} \cdot \dfrac{th(2\beta\xi)}{tg(2\beta\xi)} = 1$ из табл. 3 по параметру $\beta = 2{,}51$ находим значение $\xi = 0{,}34677$.

Тогда, согласно (1.15), сечения с максимальным значением изгибающего момента имеют координаты: $x_0 = \pm\xi \cdot a = \pm 0{,}34677 \cdot 4 = \pm 1{,}3871\text{м}$

Наибольший изгибающий момент:

$$M_{x(\max)} = 15{,}873 \begin{bmatrix} 0{,}0951\cos(1{,}255 \cdot 1{,}3871)ch(1{,}255 \cdot 1{,}3871) + \\ + 0{,}1315\sin(1{,}255 \cdot 1{,}3871)sh(1{,}255 \cdot 1{,}3871). \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$M_{x(\max)} = 15{,}873[0{,}0951\cos(1{,}7408)ch(1{,}7408) + 0{,}1315\sin(1{,}7408)sh(1{,}7408).] \rightarrow$$

$$M_{x(\max)} = 15{,}873[0{,}0951 \cdot (-0{,}16918) \cdot 2{,}95861 + 0{,}1315 \cdot 0{,}98558 \cdot 2{,}76326]. \rightarrow$$

$$M_{x(x=x_0)} = M_{x(\max)} = 15{,}873(-0{,}04760 + 0{,}35813) = 15{,}873 \cdot 0{,}31053 = 4{,}93\text{к3кНсм/с}$$

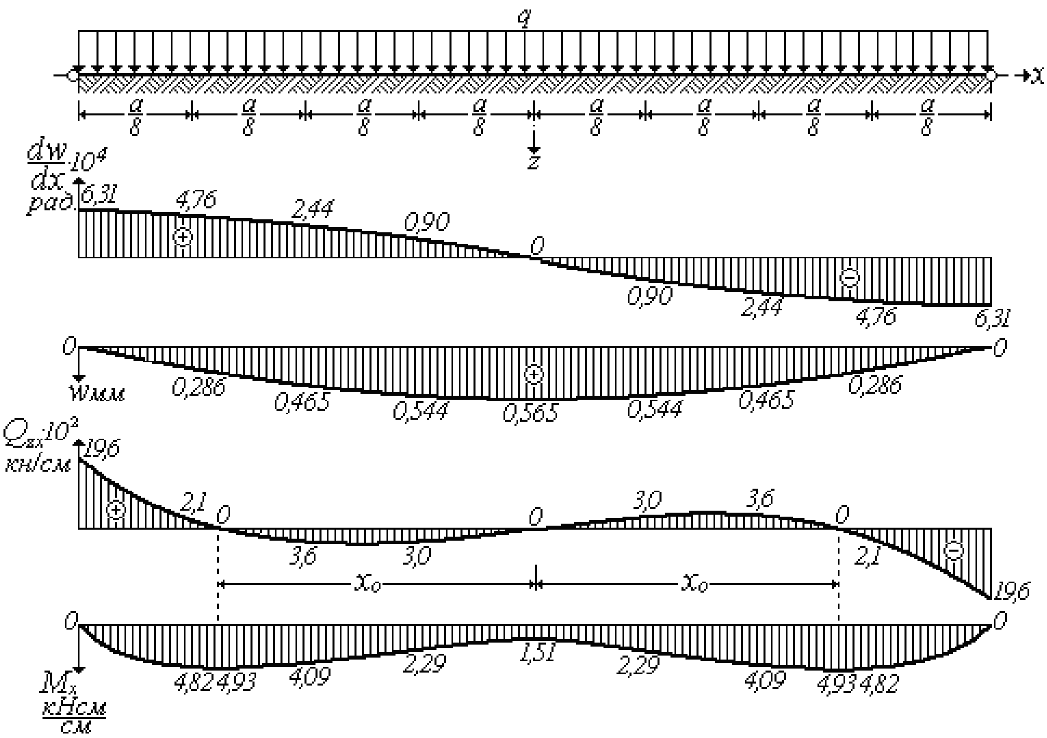

Рис. 9

5. Определение максимальных нормальных и касательных напряжений.

При использовании энергетической теории прочности, условие прочности по методу предельных состояний записывается в виде:

$$\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\cdot\sigma_y+3\tau_{xy}^2}\le\gamma_c R.$$

Для цилиндрического изгиба: $\sigma_y=\mu\sigma_x;\quad \tau_{xy}=0$.

Расчетный момент:

$$\sqrt{\left(1+\mu^2\right)M_x^2-\mu M_x^2}=\sqrt{\left(1+0{,}16^2\right)\cdot 4{,}93^2-0{,}16\cdot 4{,}93^2}=4{,}59\text{кНсм}/\text{см}.$$

Для рассматриваемой пластины принимаем: $\gamma_c=0{,}9;\quad R=1{,}7\text{МПа}$.

Тогда $\sigma_{расч.}^{IV}=\dfrac{M_{\text{расч.}}}{W_1}=\dfrac{6M_{\text{расч.}}}{h^2}=\dfrac{6\cdot 4{,}59}{15^2}=0{,}122\dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}=1{,}22\text{МПа}<0{,}9\cdot 1{,}7=1{,}53\text{МПа}$

Условие прочности выполняется.

Максимальные касательные напряжения

$$\tau_{zx(\max)}=\frac{3Q_{zx(\max)}}{2\cdot(1\cdot h)}=\frac{3\cdot 19{,}6\cdot 10^{-2}}{2\cdot 15}=1{,}96\cdot 10^{-2}\,\text{кН/см}^2\approx 0{,}2\text{МПа}.$$

Вариант *Б*. Исходные данные:

$$a=3{,}0\text{м},\quad F=100\text{кН}/\text{м},\quad k=60\text{Н}/\text{см}^3;\quad E=2{,}1\cdot 10^5\,\text{МПа};\quad h=5\text{см};\quad \mu=0{,}3$$

1. Определение цилиндрической жесткости D и коэффициента β. Согласно (1.2) имеем:

$$D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}=\frac{2{,}1\cdot 10^4\cdot 5^3}{12\left(1-0{,}3^2\right)}=2{,}4\cdot 10^5\,\text{кНсм};\quad \beta=\frac{300}{2}\sqrt[4]{\frac{60\cdot 10^{-3}}{4\cdot 2{,}4\cdot 10^5}}=2{,}37.$$

2 .Определение функций $\varphi_0(\beta);\quad \varphi_2[\beta]$:

$$\varphi_0(\beta)=\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch 2\beta}=\frac{2\cos 2{,}37\cdot ch 2{,}37}{\cos 4{,}74+ch 4{,}74}=-0{,}13511;$$

$$\varphi_2(\beta) = \frac{2}{\beta^2} \frac{\sin\beta \cdot sh\beta}{\cos 2\beta + ch2\beta} = \frac{2}{2{,}51^2} \frac{\sin 2{,}37 \cdot sh2{,}37}{\cos 4{,}74 + ch4{,}74} = 0{,}02299 .$$

3. Вычисление параметра λ. Согласно (2.3):

$$\Omega = \frac{\beta}{4}\varphi_2 \cdot \begin{bmatrix} (ch\beta + sh\beta)(\sin\beta - \cos\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(\sin\beta + \cos\beta) \end{bmatrix} + \frac{\varphi_0}{4\beta} \cdot \begin{bmatrix} (ch\beta + sh\beta)(\cos\beta + \sin\beta) + \\ +(ch\beta - sh\beta)(-\cos\beta + \sin\beta) \end{bmatrix} . \to$$

$$\Omega = \frac{2{,}37}{4} \cdot 0{,}02299 \cdot \begin{bmatrix} (5{,}3954 + 5{,}3020)(0{,}6973 + 0{,}7168) + \\ +(5{,}3954 - 5{,}3020)(0{,}6973 - 0{,}7168) \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{0{,}13511}{4 \cdot 2{,}37} \cdot \begin{bmatrix} (5{,}3954 + 5{,}3020)(0{,}6973 - 0{,}7168) + \\ +(5{,}3954 - 5{,}3020)(0{,}7168 + 0{,}6973) \end{bmatrix} = 207{,}1 \cdot 10^{-3}$$

Подставив значение Ω в выражение (2.4), получим:

$$\lambda = \frac{Fa^3}{32\beta^4 D \cdot \Omega} = \frac{100 \cdot 10^{-2} \cdot 3^3 \cdot 10^6}{32 \cdot 2{,}37^4 \cdot 2{,}4 \cdot 10^5 \cdot 207{,}1 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}538\text{см} = 5{,}38\text{мм} .$$

4. Выражения для прогибов *w*, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_{zx}. Согласно (2.5), (2.7), (2.9), (2.11) имеем:

$$w = \frac{Fa^3}{32\beta^4 D \cdot \Omega} \cdot \left[1 - \beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x - \varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right] . \to$$

$$w = \frac{100 \cdot 10^{-2} 3^3 \cdot 10^6}{32 \cdot 2{,}37^4 \cdot 2{,}4 \cdot 10^5 \cdot 207{,}1 \cdot 10^{-3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 - 2{,}37^2 \cdot 0{,}02299\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x + \\ +0{,}13511\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x \end{bmatrix} . \to$$

$$w = 0{,}538 \cdot \left[1 - 0{,}12913\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x + 0{,}13511\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right] . \qquad (1)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{100 \cdot 10^{-2} \cdot 3^2 \cdot 10^4}{16 \cdot 2{,}37^3 \cdot 2{,}4 \cdot 10^5 \cdot 207{,}1 \cdot 10^{-3}} \begin{Bmatrix} [0{,}12913 - 0{,}13511]\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x + \\ +[0{,}12913 + 0{,}13511]\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x \end{Bmatrix} \to$$

$$\frac{dw}{dx} = -8{,}5\cdot 10^{-3}\left\{-0.00597\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x + 0{,}26424\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right\}. \quad (2)$$

$$M_x = \frac{100\cdot 10^{-2}\cdot 300}{4\cdot 2{,}37^2\cdot 207{,}1\cdot 10^{-3}}\left[2{,}37^2\cdot 0{,}02299\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x + 0{,}13511\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right]\rightarrow$$

$$M_x = 64{,}474\left[0{,}12913\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x + 0{,}13511\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x\right]. \quad (3)$$

$$Q_{zx} = \frac{100\cdot 10^{-2}}{2\cdot 2{,}37\cdot 207{,}1\cdot 10^{-3}}\left\{\begin{matrix}[0{,}12913+0{,}13511]\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x - \\ -[0{,}12913-0{,}13511]\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\end{matrix}\right\}.\rightarrow$$

$$Q_{zx} = 1{,}0187\left\{0{,}26424\cos\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x + 0{,}00598\sin\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right\}. \quad (4)$$

5. Построение эпюр *w*, dw/dx, M_x и Q_{zx}.

5.1. Определение значений тригонометрических и гиперболических функций в характерных сечениях балки-полосы. Результаты сведены в таблицу 7.

Таблица 7

Функции	x								
	-a/2	-3a/8	-a/4	-a/8	0	a/8	a/4	3a/8	a/2
	$\alpha = 2\beta x/a \quad \beta = 2{,}37$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
$\cos\alpha$	-0,7168	-0,2052	0,3763	0,8295	1	0,8295	0,3763	-0,2052	-0,7168
$\sin\alpha$	-0,6973	-0,9787	-0,9265	-0,5584	0	0,5584	0,9265	0,9787	0,6973
$ch\alpha$	5,3954	3,0421	1,7882	1,1807	1	1,1807	1,7882	3,0421	5,3954
$sh\alpha$	-5,3020	-2,8730	-1,4825	-0,6278	0	0,6278	1,4825	2,8730	5,3020

5.2 .Определим значения прогибов *w*, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов

M_x и поперечных сил Q_{zx} в характерных сечениях балки-полосы.

Прогиб в центре балки-полосы (2.6):

$$w_{(x=0)}=\frac{Fa^3}{32\beta^4 D\cdot\Omega}\cdot(1-\varphi_0)=\frac{100\cdot10^{-2}\cdot3^3\cdot10^6}{32\cdot2{,}37^4\cdot2{,}4\cdot10^5\cdot207{,}1\cdot10^{-3}}(1+0{,}13511)=$$
$$=0{,}538\cdot1{,}1351=0{,}6107\,см\approx6{,}11\,мм$$

Прогиб в произвольном сечении (1):

$$w=0{,}538\cdot\left[1-0{,}12913\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x+0{,}13511\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right].$$

$$w_{\left(x=\frac{a}{8}\right)}=0{,}538\cdot[1-0{,}12913\cdot0{,}5584\cdot0{,}6278+0{,}13511\cdot0{,}8295\cdot1{,}1807]=$$
$$=0{,}538\cdot(1-0{,}04527+0{,}14277)=0{,}538\cdot1{,}0975=0{,}590\,см=5{,}90\,мм.$$

$$w_{\left(x=\frac{a}{4}\right)}=0{,}538\cdot[1-0{,}12913\cdot0{,}9265\cdot1{,}4825+0{,}13511\cdot0{,}3763\cdot1{,}7882]=$$
$$=0{,}538\cdot(1-0{,}17736+0{,}09092)=0{,}538\cdot0{,}91356=0{,}491\,см=4{,}91\,мм.$$

$$w_{\left(x=\frac{3a}{8}\right)}=0{,}538\cdot[1-0{,}12913\cdot0{,}9787\cdot2{,}8730+0{,}13511\cdot(-0{,}2052)\cdot3{,}0421]=$$
$$=0{,}538\cdot(1-0{,}36309-0{,}08434)=0{,}538\cdot0{,}55257=0{,}297\,см=2{,}97\,мм.$$

Угол поворота левого края балки-полосы (2.8):

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)}=\frac{Fa^3}{16\beta^3 D}\{[\beta^2\varphi_2(\beta)+\varphi_0(\beta)]\cos\beta sh\beta+[\beta^2\varphi_2(\beta)-\varphi_0(\beta)]\sin\beta ch\beta\}=$$
$$=8{,}5\cdot10^{-3}\cdot[-0{,}00597\cdot(-0{,}7168)\cdot5{,}3020+0{,}26424\cdot0{,}6973\cdot5{,}3954]=$$
$$=8{,}5\cdot10^{-3}\cdot(0{,}022689+0{,}994127)=8{,}5\cdot10^{-3}\cdot1{,}0168=8{,}64\cdot10^{-3}\,рад.$$

Угол поворота произвольного сечения балки-полосы (2)

$$\frac{dw}{dx}=-8{,}5\cdot10^{-3}\left\{-0.00597\cos\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x+0{,}26424\sin\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right\}$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{\left(x=-\frac{3a}{8}\right)}=-8{,}5\cdot10^{-3}\{-0.00597\cdot(-0{,}2052)\cdot(-2{,}8730)+0{,}26424\cdot(-0{,}9787)\cdot3{,}0421\}=$$
$$=-8{,}5\cdot10^{-3}\cdot(-0{,}0035196-0{,}7867226)=8{,}5\cdot10^{-3}\cdot0{,}79024=6{,}72\cdot10^{-3}\,рад.$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{4}\right)}=-8{,}5\cdot10^{-3}\{-0.00597\cdot0{,}3763\cdot(-1{,}4825)+0{,}26424\cdot(-0{,}9265)\cdot1{,}7882\}=$$

$$=-4{,}18\cdot10^{-3}\cdot(0{,}00330-0{,}43778)=8{,}5\cdot10^{-3}\cdot0{,}43448=3{,}69\cdot10^{-3}\text{рад.}$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{8}\right)}=-8{,}5\cdot10^{-3}\{-0.00597\cdot0{,}8295\cdot(-0{,}6278)+0{,}26424\cdot(-0{,}5584)\cdot1{,}1807\}=$$

$$=-8{,}5\cdot10^{-3}\cdot(0{,}00311-0{,}17421)=8{,}5\cdot10^{-3}\cdot0{,}17111=1{,}45\cdot10^{-3}\text{рад.}$$

Результаты сведены в таблицу 8.

Таблица 8

Перемещения	x								
	-a/2	-3a/8	-a/4	-a/8	0	a/8	a/4	3a/8	a/2
	$\alpha=2\beta x/a\quad\beta=2{,}37$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
$w[\text{мм}]$	0,00	2,97	4,91	5,90	6,11	5,90	4,91	2,97	0,00
$(\lambda-w)\ [\text{мм}]$	5,38	2,41	0,47	-0,52	-0,73	-0,52	0,47	2,41	5,38
$(dw/dx)\cdot10^3$ *рад.*	8,64	6,72	3,69	1,45	0,00	-1,45	-3,69	-6,72	-8,64

Изгибающий момент в середине балки-полосы (2.10)

$$M_{x(x=0)}=\frac{Fa}{4\beta^2\Omega}\left[\beta^2\cdot\varphi_2\right]=\frac{Fa}{4\Omega}\cdot\varphi_2=\frac{100\cdot10^{-2}\cdot300}{4\cdot207{,}1\cdot10^{-3}}\cdot0{,}02299\approx8{,}33\text{кНсм}/\text{см}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки-полосы (3)

$$M_x=64{,}474\left[0{,}12913\cos\frac{2\beta}{a}x\,ch\frac{2\beta}{a}x+0{,}13511\sin\frac{2\beta}{a}x\,sh\frac{2\beta}{a}x\right].$$

$$M_{x\left(x=-\frac{3a}{8}\right)}=64{,}474\cdot[0{,}12913\cdot(-0{,}2052)\cdot3{,}0491+0{,}13511\cdot(-0{,}9787)\cdot(-2{,}8730)]=$$

$$=64{,}474(-0{,}08079+0{,}37990)=64{,}474\cdot0{,}2991=19{,}28\text{кНсм/см.}$$

$$M_{x\left(x=-\frac{a}{4}\right)}=64{,}474\cdot[0{,}12913\cdot0{,}3763\cdot1{,}7882+0{,}13511\cdot(-0{,}9265)\cdot(-1{,}4825)]=$$

$$=64{,}474(0{,}086892+0{,}185578)=64{,}474\cdot0{,}27247=17{,}57\text{кНсм/см..}$$

$$M_{x\left(x=-\frac{a}{8}\right)} = 64{,}474\cdot\left[0{,}12913\cdot 0{,}8295\cdot 1{,}1807 + 0{,}13511\cdot(-0{,}5584)\cdot(-0{,}6278)\right] =$$
$$= 64{,}474(0{,}12647 + 0{,}04736) = 64{,}474\cdot 0{,}1738 = 11{,}21\text{кНсм/см}..$$

Поперечная сила в произвольном сечении балки-полосы (4)

$$Q_{zx} = 1{,}0187\left\{0{,}26424\cos\frac{2\beta}{a}x\,sh\frac{2\beta}{a}x + 0{,}00598\sin\frac{2\beta}{a}x\,ch\frac{2\beta}{a}x\right\}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{2}\right)} = 1{,}0187\{0{,}26424\cdot(-0{,}7168)\cdot(-5{,}3020) + 0{,}00598\cdot(-0{,}6973)\cdot 5{,}3954\} =$$
$$= 1{,}0187(1{,}004237 - 0{,}022498) = 1{,}0187\cdot 0{,}98174 = 1{,}00\text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{3a}{8}\right)} = 1{,}0187\{0{,}26424\cdot(-0{,}2052)\cdot(-2{,}8730) + 0{,}00598\cdot(-0{,}9787)\cdot 3{,}0421\} =$$
$$= 1{,}0187(0{,}15578 - 0{,}017804) = 1{,}0187\cdot 0{,}13798 = 0{,}14\text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{4}\right)} = 1{,}0187\{0{,}26424\cdot 0{,}3763\cdot(-1{,}4825) + 0{,}00598\cdot(-0{,}9265)\cdot 1{,}7882\} =$$
$$= 1{,}0187(-0{,}14741 - 0{,}00991) = -1{,}0187\cdot 0{,}15732 \approx -0{,}16\text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{8}\right)} = 1{,}0187\{0{,}26424\cdot 0{,}8295\cdot(-0{,}6278) + 0{,}00598\cdot(-0{,}5584)\cdot 1{,}1807\} =$$
$$= 1{,}0187(-0{,}13761 - 0{,}00394) = -1{,}0187\cdot 0{,}14155 \approx -0{,}14\text{кН/см}.$$

Результаты сведены в таблицу 9.

Таблица 9

Перемещения	*x*								
	-a/2	*-3a/8*	*-a/4*	*-a/8*	0	*a/8*	*a/4*	*3a/8*	*a/2*
	$\alpha = 2\beta x / a \quad \beta = 2{,}37$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
Q_{zx} $[КН/см]$	1,00	0,14	-0,16	-0,14	0	0,14	0,16	-0,14	-1,00
M_x $[КНсм/см]$	0,0	19,28	17,57	11,21	8,33	11,21	17,57	19,28	0,0

3.2.5.3 Определение сечения с экстремальным (максимальным) значением изгибающего момента. Согласно (1.16)

$$\frac{tg\beta\cdot th\beta-1}{tg\beta\cdot th\beta+1}\cdot\frac{th(2\beta\xi)}{tg(2\beta\xi)}=1.$$

Из табл. 3 по параметру $\beta=2{,}37$ находим значение $\xi=0{,}336545$.

Тогда, согласно (1.15), сечения с максимальным значением изгибающего момента имеют координаты: $x_0=\pm\xi\cdot a=\pm 0{,}336545\cdot 3=\pm 1{,}0096\text{м}$

Наибольший изгибающий момент:

$$M_{x(x=x_0)}=64{,}474\left[0{,}12913\cos\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x+0{,}13511\sin\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x\right]=$$

$$=64{,}474\left[\begin{array}{l}0{,}12913\cos\left(\frac{2\cdot 2{,}37}{3}\cdot 1{,}0096\right)ch\left(\frac{2\cdot 2{,}37}{3}\cdot 1{,}0096\right)+\\ +0{,}13511\sin\left(\frac{2\cdot 2{,}37}{3}\cdot 1{,}0096\right)sh\left(\frac{2\cdot 2{,}37}{3}\cdot 1{,}0096\right)\end{array}\right].$$

$$M_{x(x=1{,}0096)}=64{,}474[0{,}12913\cos(1{,}595)ch(1{,}595)+0{,}13511\sin(1{,}595)sh1{,}595],$$

$$M_{x(x=1{,}0096)}=64{,}474[0{,}12913\cdot(-0{,}02420)\cdot 2{,}56562+0{,}13511\cdot 0{,}99971\cdot 2{,}36271],$$

$$M_{x(x=1{,}0096)}=64{,}474[-0{,}00792+0{,}31913]=64{,}474\cdot 0{,}31121=20{,}06\text{кНсм/см}.$$

Эпюры изгибающих моментов, поперечных сил, прогибов и углов поворота представлены на рис. 10.

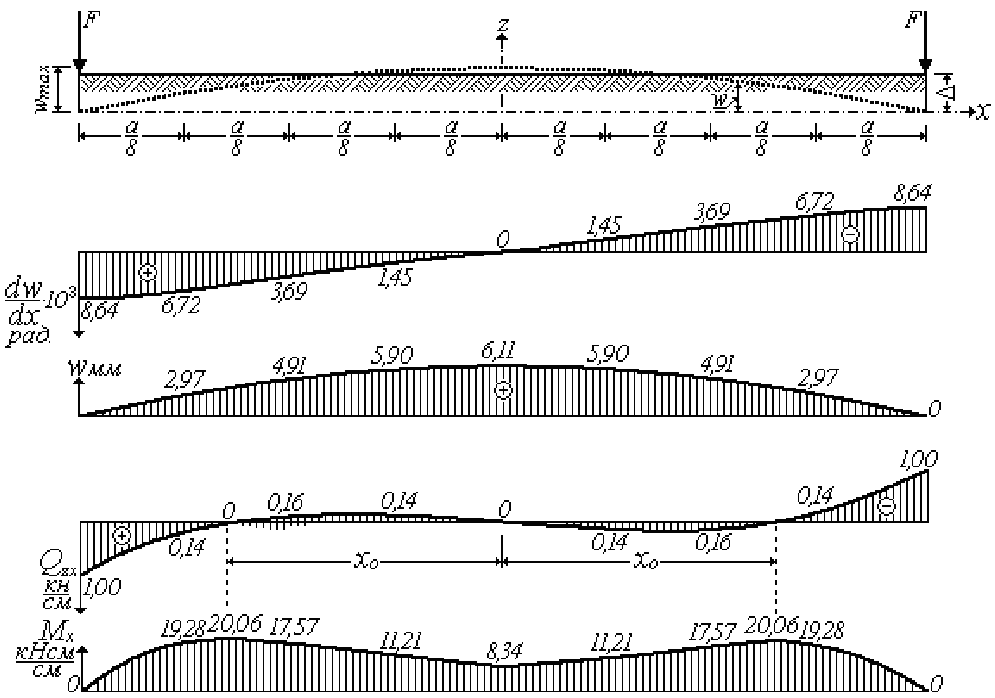

Рис. 10

3.2.6. Определение максимальных нормальных и касательных напряжений.

При использовании энергетической теории прочности, условие прочности по методу предельных состояний для цилиндрического изгиба записывается в виде: $\sqrt{\left(1+\mu^2\right)\sigma_x^2-\mu\sigma_x^2}\le\gamma_c R$.

Расчетный момент:

$$\sqrt{\left(1+\mu^2\right)M_x^2-\mu M_x^2}=\sqrt{\left(1+0{,}3^2\right)\cdot 20{,}06^2-0{,}3\cdot 20{,}06^2}=$$
$$=\sqrt{438{,}62-120{,}72}=\sqrt{317{,}90}=17{,}83\,кНсм/см.$$

Для рассматриваемой пластины принимаем: $\gamma_c=0{,}9;\quad R=230\text{МПа}$.

Тогда

$$\sigma_{расч}^{IV}=\frac{M_{\text{расч.}}}{\text{W}_1}=\frac{6\cdot M_{\text{расч}}}{h^2}=\frac{6\cdot 17{,}83}{5^2}=4{,}28\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}=42{,}8\,МПа<0{,}9\cdot 230=207\text{МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{zx(\max)}=\frac{3Q_{zx(\max)}}{2\cdot(1\cdot h)}=\frac{3\cdot 1{,}00}{2\cdot 5}=0{,}30\text{кН/см}^2=3\,МПа.$$

Вариант *В.* Исходные данные: $\gamma_c=0{,}9;\quad R=1{,}7\text{МПа}.$

$$a=4{,}0\,м,\quad q=65\,кН/м^2,\quad k=50\,Н/см^3;\quad E=35\cdot 10^3\,МПа;\quad h=15\,см;\quad \mu=0{,}16$$

1. Определение цилиндрической жесткости D и коэффициента β.

Согласно (1.2) имеем:

$$D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}=\frac{35\cdot 10^2\cdot 15^3}{12\left(1-0{,}16^2\right)}=10{,}1\cdot 10^5\,\text{кНсм};\quad \beta=\frac{400}{2}\sqrt[4]{\frac{50\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10{,}1\cdot 10^5}}=2{,}1095.$$

2. Определение функций $\varphi_0(\beta);\quad \varphi_2[\beta]$:

$$\varphi_0(\beta)=\frac{2\cos\beta\cdot ch\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}=\frac{2\cos 2{,}1095\cdot ch2{,}1095}{\cos 4{,}219+ch4{,}219}=$$
$$=\frac{2\cdot(-0{,}51302)\cdot 4{,}18271}{-0{,}47361+33{,}99010}=-\frac{4{,}29163}{33{,}51649}=-0{,}1280;$$

$$\varphi_2(\beta)=\frac{2}{\beta^2}\frac{\sin\beta\cdot sh\beta}{\cos 2\beta+ch2\beta}=\frac{2}{2{,}109^2}\frac{\sin 2{,}1095\cdot sh2{,}1095}{\cos 4{,}219+ch4{,}219}$$
$$=\frac{2}{2{,}1095^2}\frac{0{,}85837\cdot 4{,}06141}{33{,}51649}=\frac{6{,}97182}{149{,}14805}=0{,}0467.$$

3. Вычисление параметра λ. Согласно (3.3):

$$\Omega=2-\frac{\beta}{4}\varphi_2\cdot\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta+\cos\beta)\end{bmatrix}+\frac{\varphi_0}{4\beta}\cdot\begin{bmatrix}(ch\beta+sh\beta)(\sin s\beta+\cos\beta)+\\+(ch\beta-sh\beta)(\sin\beta-\cos\beta)\end{bmatrix}.=$$
$$=2-\frac{2{,}1095}{4}0{,}0467\begin{bmatrix}(4{,}18271+4{,}06141)\cdot(0{,}85837+0{,}51302)+\\+(4{,}18271-4{,}06141)\cdot(0{,}85837-0{,}51302)\end{bmatrix}-$$
$$-\frac{0{,}1280}{4\cdot 2{,}1095}\begin{bmatrix}(4{,}18271+4{,}06141)\cdot(0{,}85837-0{,}51302)+\\+(4{,}18271-4{,}06141)\cdot(0{,}85837+0{,}51302)\end{bmatrix},$$

или $\Omega=2-0{,}02463\cdot 11{,}34790-0{,}01517\cdot 3{,}01346=2-0{,}27950-0{,}04571=1{,}67478.$

Подставив значение Ω в выражение (3.4), получим:

$$\lambda=\frac{qa^4}{64\beta^4D\cdot\Omega}=\frac{65\cdot 10^{-4}\cdot 4^4\cdot 10^8}{64\cdot 2{,}1095^4\cdot 10{,}1\cdot 10^5\cdot 1{,}67478}=0{,}078\text{см}=0{,}78\,мм.$$

4. Выражения для прогибов *w*, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_{zx}. Согласно (3.5), (3.7), (3.9), (3.11) имеем:

$$w=\frac{qa^4}{64\beta^4D\cdot\Omega}\cdot\left[1-\beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right].$$

С учетом (3.4), получим:

$$w=\lambda\cdot\left[1-\beta^2\varphi_2(\beta)\sin\frac{2\beta}{a}xsh\frac{2\beta}{a}x-\varphi_0(\beta)\cos\frac{2\beta}{a}xch\frac{2\beta}{a}x\right].$$

Подставив исходные данные, получим:

$$w = 0{,}078 \cdot \begin{bmatrix} 1 - 2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 \sin\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x + \\ + 0{,}1280 \cos\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x \end{bmatrix}.$$

или $$w = 0{,}078 \cdot \left[1 - 0{,}20781 \sin\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x + 0{,}1280 \cos\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x\right]. \qquad (1)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{qa^3}{32\beta^3 D\Omega} \begin{Bmatrix} [\beta^2\varphi_2(\beta) + \varphi_0(\beta)] \cos\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x + \\ + [\beta^2\varphi_2(\beta) - \varphi_0(\beta)] \sin\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x \end{Bmatrix} =$$

$$= -\frac{65 \cdot 10^{-4} \cdot 4^3 \cdot 10^6}{32 \cdot 2{,}1095^3 \cdot 10{,}1 \cdot 10^5 \cdot 1{,}67478} \begin{Bmatrix} [2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 - 0{,}1280] \cos\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x + \\ + [2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 + 0{,}1280] \sin\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x \end{Bmatrix},$$

или $$\frac{dw}{dx} = -8{,}19 \cdot 10^{-4} \left\{0{,}07981 \cos\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x + 0{,}33581 \sin\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x\right\}. \qquad (2)$$

$$M_x = \frac{qa^2}{8\beta^2\Omega}\left[\beta^2 \cdot \varphi_2(\beta) \cos\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x - \varphi_0(\beta) \sin\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x\right] =$$
$$= \frac{65 \cdot 10^{-4} \cdot 4^2 \cdot 10^4}{8 \cdot 2{,}1095^2 \cdot 1{,}67478}\left(2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 \cos\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x + 0{,}1280 \sin\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x\right),$$

или $$M_x = 17{,}443\left(0{,}20781 \cos\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x + 0{,}1280 \sin\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x\right). \qquad (3)$$

$$Q_{zx} = \frac{qa}{4\beta\Omega} \begin{Bmatrix} [\beta^2\varphi_2(\beta) - \varphi_0(\beta)] \cos\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x - \\ - [\beta^2\varphi_2(\beta) + \varphi_0(\beta)] \sin\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x \end{Bmatrix}. =$$

$$= \frac{65 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^2}{4 \cdot 2{,}1095 \cdot 1{,}67478} \begin{bmatrix} (2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 + 0{,}1280) \cos\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x - \\ - (2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 - 0{,}1280) \sin\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x \end{bmatrix},$$

или $$Q_{zx} = 0{,}184 \cdot \left(0{,}33581 \cos\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} - 0{,}07981 \sin\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x\right). \qquad (4)$$

5. Построение эпюр *w*, dw/dx, M_x и Q_{zx}.

5.1 Определение значений тригонометрических и гиперболических функций в характерных сечениях балки-полосы. Результаты сведены в таблицу 10.

Таблица 10

Функции	*x*								
	-a/2	-3a/8	-a/4	-a/8	0	a/8	a/4	3a/8	a/2
	$\alpha = 2\beta x/a$. $\beta = 2{,}1095$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
$\cos\alpha$	-0,5130	-0,0113	0,4934	0,8641	1	0,8641	0,4934	-0,0113	-0,5130
$\sin\alpha$	-0,8584	-0,9999	-0,8698	-0,5033	0	0,5033	0,8698	0,9999	0,8584
$ch\alpha$	4,1827	2,5354	1,6098	1,1423	1	1,1423	1,6098	2,5354	4,1827
$sh\alpha$	-4,0614	-2,3299	-1,2615	-0,5522	0	0,5522	1,2615	2,3299	4,0614

5.2 Определим значения прогибов *w*, углов поворота dw/dx, изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_{zx} в характерных сечениях балки-полосы.

Прогиб в центре балки-полосы (3.6):

$$w_{(x=0)} = \lambda \cdot [1 - \varphi_0(\beta)] = 0{,}11942(1 + 0{,}12380) = 0{,}078 \cdot 1{,}1280 = 0{,}088 см \approx 0{,}88 мм.$$

Прогиб в произвольном сечении (1):

$$w = 0{,}078 \cdot \left[1 - 0{,}20781 \sin\frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} x + 0{,}1280 \cos\frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x\right].$$

$$w_{\left(x=\frac{a}{8}\right)} = 0{,}078 \cdot [1 - 0{,}20781 \cdot 0{,}5033 \cdot 0{,}5522 + 0{,}1280 \cdot 0{,}8641 \cdot 1{,}1423] =$$
$$= 0{,}078 \cdot (1 - 0{,}05776 + 0{,}12634) = 0{,}078 \cdot 1{,}0686 = 0{,}083 см = 0{,}83 мм.$$

$$w_{\left(x=\frac{a}{4}\right)} = 0{,}078 \cdot [1 - 0{,}20781 \cdot 0{,}8698 \cdot 1{,}2615 + 0{,}1280 \cdot 0{,}4934 \cdot 1{,}6098] =$$
$$= 0{,}078 \cdot (1 - 0{,}2280 + 0{,}10167) = 0{,}078 \cdot 0{,}87367 = 0{,}068 см = 0{,}68 мм.$$

$$w_{\left(x=\frac{3a}{8}\right)} = 0{,}078 \cdot [1 - 0{,}20781 \cdot 0{,}9999 \cdot 2{,}3299 + 0{,}1280 \cdot (-0{,}0113) \cdot 2{,}5354] =$$
$$= 0{,}078 \cdot (1 - 0{,}48413 - 0{,}00340) = 0{,}078 \cdot 0{,}51247 = 0{,}04 см = 0{,}40 мм.$$

Угол поворота левого края балки-полосы (3.8):

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)} = \frac{qa^3}{32\beta^3 D\Omega}\{[\beta^2\varphi_2(\beta) + \varphi_0(\beta)]\cos\beta sh\beta + [\beta^2\varphi_2(\beta) - \varphi_0(\beta)]\sin\beta ch\beta\} =$$
$$= \frac{65 \cdot 10^{-4} \cdot 4^3 \cdot 10^6}{32 \cdot 2{,}1095^3 \cdot 10{,}1 \cdot 10^5 \cdot 1{,}67478}\left[\begin{matrix}(2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 - 0{,}1280) \cdot (-0{,}5130) \cdot 4{,}0614 + \\ + (2{,}1095^2 \cdot 0{,}0467 + 0{,}1280) \cdot 0{,}8584 \cdot 4{,}1827\end{matrix}\right]'$$

или $\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{2}\right)} = 8{,}19 \cdot 10^{-4}(-0{,}16629 + 1{,}18966) = 8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}02337 = 8{,}38 \cdot 10^{-4}$ рад.

Угол поворота произвольного сечения балки-полосы (2)

$$\frac{dw}{dx} = -8{,}19 \cdot 10^{-4}\left\{0{,}07981\cos\frac{2\beta}{a}x sh\frac{2\beta}{a}x + 0{,}33581\sin\frac{2\beta}{a}x ch\frac{2\beta}{a}x\right\}$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{3a}{8}\right)} = -8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot \{0.07981 \cdot (-0{,}0113) \cdot (-2{,}3299) + 0{,}33581 \cdot (-0{,}9999) \cdot 2{,}5354\} =$$
$$= -8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot (0{,}00210 - 0{,}85133) = 8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}84923 = 6{,}96 \cdot 10^{-4} рад.$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{4}\right)} = -8{,}19 \cdot 10^{-4}\{0.07981 \cdot 0{,}4934 \cdot (-1{,}2615) + 0{,}33581 \cdot (-0{,}8698) \cdot 1{,}60982\} =$$
$$= -8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot (-0{,}04968 - 0{,}47021) = 8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}51989 = 4{,}26 \cdot 10^{-4} рад.$$

$$\frac{dw}{dx}_{\left(x=-\frac{a}{8}\right)} = -8{,}19 \cdot 10^{-4}\{0.07981 \cdot 0{,}8641 \cdot (-0{,}5522) + 0{,}33581 \cdot (-0{,}5033) \cdot 1{,}1423\} =$$
$$= -8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot (-0{,}03808 - 0{,}19306) = 8{,}19 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}23114 = 1{,}89 \cdot 10^{-4} рад.$$

Результаты сведены в таблицу 11.

Таблица 11

Перемеще-ния	*x*								
	-a/2	*-3a/8*	*-a/4*	*-a/8*	0	*a/8*	*a/4*	*3a/8*	*a/2*
	$\alpha = 2\beta x / a \quad \beta = 2{,}37$								

	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
$w\,[мм]$	0,00	0,40	0,68	0,83	0,88	0,83	0,68	0,40	0,00
$\lambda + w\ [мм]$	0,78	1,18	1,46	1,61	1,66	1,61	1,46	1,18	0,78
$(dw/dx)\cdot 10^4$ *рад.*	8,38	6,96	4,26	1,89	0,00	-1,89	-4,26	-6,96	-8,38

Изгибающий момент в середине балки-полосы (3.10)

$$M_{x(x=0)} = \frac{qa^2}{8\Omega}\cdot\varphi_2(\beta) = \frac{65\cdot 10^{-4}\cdot 4^2\cdot 10^4}{8\cdot 1{,}67478}\cdot 0{,}0467 \approx 3{,}62\,\frac{\text{кНсм}}{\text{см}}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки-полосы (3)

$$M_x = 17{,}443\left(0{,}20781\cos\frac{2\beta}{a}x\,ch\frac{2\beta}{a}x + 0{,}1280\sin\frac{2\beta}{a}x\,sh\frac{2\beta}{a}x\right)$$

$$M_{x\left(x=-\frac{3a}{8}\right)} = 17{,}443\cdot[0{,}20781\cdot(-0{,}0113)\cdot 2{,}5354 + 0{,}1280\cdot(-0{,}9999)\cdot(-2{,}3299)] =$$
$$= 17{,}443(-0{,}00595 + 0{,}29808) = 17{,}443\cdot 0{,}29213 \approx 5{,}10\text{кНсм/см}.$$

$$M_{x\left(x=-\frac{a}{4}\right)} = 17{,}443\cdot[0{,}20781\cdot 0{,}4934\cdot 1{,}6098 + 0{,}1280\cdot(-0{,}8698)\cdot(-1{,}2615)] =$$
$$= 17{,}443\cdot(0{,}16506 + 0{,}14045) = 17{,}443\cdot 0{,}30551 \approx 5{,}33\text{кНсм/см}..$$

$$M_{x\left(x=-\frac{a}{8}\right)} = 17{,}443\cdot[0{,}20781\cdot 0{,}8641\cdot 1{,}1423 + 0{,}1280\cdot(-0{,}5033)\cdot(-0{,}5522)] =$$
$$= 17{,}443\cdot(0{,}20512 + 0{,}03557) = 17{,}443\cdot 0{,}24069 \approx 4{,}20\text{кНсм/см}..$$

Поперечная сила на левом конце балки-полосы (3.12)

$$Q_{zx(x=-a/2)} = -\frac{qa}{4\beta\Omega}\left\{\begin{matrix}[\beta^2\varphi_2(\beta) - \varphi_0(\beta)]\cos\beta sh\beta - \\ -[\beta^2\varphi_2(\beta) + \varphi_0(\beta)]\sin\beta ch\beta\end{matrix}\right\} =$$
$$= -\frac{65\cdot 10^{-4}\cdot 400}{4\cdot 2{,}1095\cdot 1{,}67478}\left[\begin{matrix}(2{,}1095^2\cdot 0{,}0467 + 0{,}1280)\cdot(-0{,}5130)\cdot 4{,}0614 - \\ -(2{,}1095^2\cdot 0{,}0467 - 0{,}1280)\cdot 0{,}8584\cdot 4{,}1827\end{matrix}\right] =$$
$$= -0{,}184\cdot(-0{,}69967 - 0{,}28657) = 0{,}184\cdot 0{,}98624 \approx 0{,}181\,\frac{\text{кН}}{\text{см}}.$$

Поперечная сила в произвольном сечении балки-полосы (7.4)

$$Q_{zx} = 0{,}184 \cdot \left(0{,}33581 \cos \frac{2\beta}{a} x sh \frac{2\beta}{a} - 0{,}07981 \sin \frac{2\beta}{a} x ch \frac{2\beta}{a} x \right)$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{3a}{8}\right)} = 0{,}184 \cdot \{0{,}33581 \cdot (-0{,}0113) \cdot (-2{,}3299) - 0{,}07981 \cdot (-0{,}9999) \cdot 2{,}5354\} =$$

$$= 0{,}184 \cdot (0{,}00884 + 0{,}20233) = 0{,}184 \cdot 0{,}21117 = 0{,}039 \text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{4}\right)} = 0{,}184 \cdot \{0{,}33581 \cdot 0{,}4934 \cdot (-1{,}2615) - 0{,}07981 \cdot (-0{,}8698) \cdot 1{,}6098\} =$$

$$= 0{,}184 \cdot (-0{,}21044 + 0{,}11175) = -0{,}184 \cdot 0{,}09869 \approx -0{,}018 \text{кН/см}.$$

$$Q_{zx\left(x=-\frac{a}{8}\right)} = 0{,}184 \cdot \{0{,}33581 \cdot 0{,}8641 \cdot (-0{,}5522) - 0{,}07981 \cdot (-0{,}5033) \cdot 1{,}1423\} =$$

$$= 0{,}184 \cdot (-0{,}16023 + 0{,}04588) = -0{,}184 \cdot 0{,}11434 \approx -0{,}021 \text{кН/см}.$$

Результаты сведены в таблицу 12.

Таблица 12

Перемещения	*x*								
	-a/2	*-3a/8*	*-a/4*	*-a/8*	0	*a/8*	*a/4*	*3a/8*	*a/2*
	$\alpha = 2\beta x / a \quad \beta = 2{,}37$								
	$-\beta$	$-\frac{3}{4}\beta$	$-\frac{1}{2}\beta$	$-\frac{1}{4}\beta$	0	$\frac{1}{4}\beta$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{3}{4}\beta$	β
Q_{zx} $[КН/см]$	0,181	0,039	-0,018	-0,021	0,000	0,021	0,018	-0,039	-0,181
M_x $[КНсм/см]$	0,00	5,10	5,33	4,20	3,62	4,20	5,33	5,10	0,00

5.3 Определение сечения с экстремальным (максимальным) значением изгибающего момента. Согласно (1.16)

$$\frac{tg\beta \cdot th\beta - 1}{tg\beta \cdot th\beta + 1} \cdot \frac{th(2\beta\xi)}{tg(2\beta\xi)} = 1.$$

Из табл. 3 по параметру $\beta = 2{,}1095$ находим значение $\xi = 0{,}30845$.

Тогда, согласно (1.15), сечения с максимальным значением изгибающего момента имеют координаты: $x_0 = \pm\xi \cdot a = \pm 0{,}30845 \cdot 4 \approx \pm 1{,}233 \text{м}$

Наибольший изгибающий момент:

$$M_{x(x=x_0)}=17{,}443\cdot[0{,}20781\cos(1{,}3014)ch(1{,}3014)+0{,}1280\sin(1{,}3014)sh(1{,}3014)]=$$
$$=17{,}443\cdot[0{,}20781\cdot 0{,}26615\cdot 1{,}97329+0{,}1280\cdot 0{,}96393\cdot 1{,}70114]=$$
$$=17{,}443\cdot(0{,}10912+0{,}20989)=17{,}443\cdot 0{,}31901=5{,}56\,\frac{\text{кНсм}}{\text{см}}.$$

Эпюры изгибающих моментов, поперечных сил, прогибов и углов поворота представлены на рис. 11.

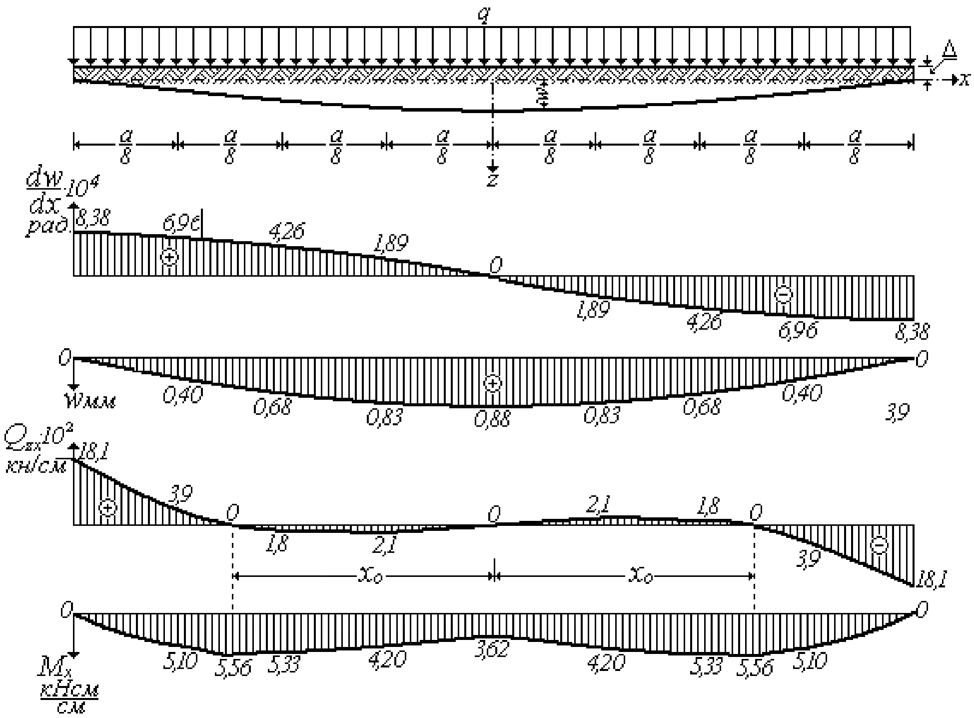

Рис. 11

6. Определение максимальных нормальных напряжений. Условие прочности по методу предельных состояний имеет вид: $\sqrt{(1+\mu^2)\sigma_x^2-\mu\sigma_x^2}\le\gamma_c R$.

Расчетный момент

$$\sqrt{(1+\mu^2)M_x^2-\mu M_x^2}=\sqrt{(1+0{,}16^2)\cdot 5{,}56^2-0{,}16\cdot 5{,}56^2}=5{,}17\,кНсм/см.$$

Тогда $\sigma_{расч}^{IV}=\dfrac{M_{\text{расч.}}}{W_1}=\dfrac{6\cdot M_{\text{расч}}}{h^2}=\dfrac{6\cdot 5{,}17}{15^2}\cdot 10=1{,}38МПа<0{,}9\cdot 1{,}7=1{,}53МПа.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

1. Сущность модели Винклера.
2. Что называют коэффициентом постели, и в чем он измеряется?
3. Для каких грунтов можно применять модель Винклера?

4. Дифференциальное уравнение изгиба балки-полосы на упругом основании.

5. Формула цилиндрической жесткости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1.Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 640 с.

2. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Издательствово МГУ, 1969. – 695 с.

3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.

4. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. Теория пластин и оболочек. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2012. – 114 с.

5. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т. – 2011.

6. Демченко Б.М., Маяцкая И.А. Теория упругости с основами пластичности и ползучести. Часть 3. Балки, пластины, оболочки. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2015. – 169 с.