ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Практикум

по выполнению расчетно-графической работы

«Геометрические характеристики плоских фигур»

Авторы
Еремин В. Д.,
Стрельников Г.П.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Геометрические характеристики плоских фигур: практикум по выполнению расчетно-графической работы.

Практикум содержит основные теоретические положения, примеры решения типовых задач и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Геометрические характеристики плоских фигур» по дисциплинам сопротивление материалов, техническая механика, архитектурно-строительная механика, теоретическая и прикладная механика, строительная механика.

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям 08.03.01 – Строительство; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям 08.05.01 – Строительство уникальных зданий и сооружений; 27.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Авторы

доцент, к.т.н., профессор кафедры «Сопротивление материалов»
Еремин В.Д.
доцент, к.ф-м.н., доцент кафедры «Сопротивление материалов»
Стрельников Г.П.

Оглавление

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР 4

Тема 1. Основные теоретические положения 4
Тема 2. Примеры решения задач 21

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Тема 1. Основные теоретические положения

1.1. Статические моменты, их свойства. Определение положения центра тяжести сложных сечений

Рассмотрим произвольную фигуру, расположенную в декартовой системе координат ***y O z*** и любую точку ***K (y, z)***, принадлежащую этой фигуре (рис. 1.1).

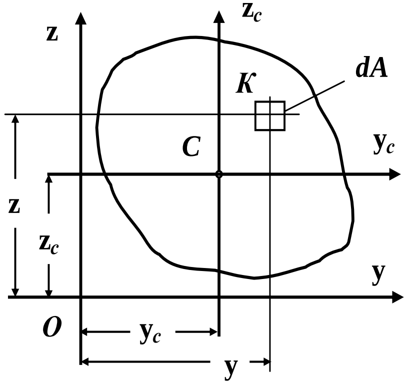


Рис. 1.1

Точку ***K (y, z)*** ограничим элементарной площадью величиной ***dA***. По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение момента элементарной площади относительно некоторой оси. Произведение элементарной площади ***dA*** на координату ***z*** точки ***K (y, z)***, принадлежащей элементарной площадке, называется статическим моментом этого элемента площади относительно оси ***y***

$$dS_y = z\,dA$$

Аналогично, $dS_z = y\,dA$ – статический момент элемента площади ***dA*** относительно оси ***z***.

Определение. Статическим моментом площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координату точки ***K (y, z)***, принадлежащей элементарной площадке,

$$S_y = \int_A z\,dA \quad ; \qquad S_z = \int_A y\,dA \quad . \qquad (1.1)$$

Единицей измерения статического момента является единица длины в третьей степени – см^3 (в системе СИ – м^3).

Статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Проводя аналогию между моментами сил и моментами площадей, на основании теоремы Вариньона о моменте равнодействующей системы сил из курса теоретической механики, можно записать следующие выражения для моментов площади

$$S_y = A z_C \;; \qquad S_z = A y_C \;,$$

где

A – площадь рассматриваемой фигуры;

y_c и z_c – координаты ее центра тяжести.

Если провести оси y_c и z_c через центр тяжести фигуры – точку **C**, то статические моменты относительно этих осей будут равны нулю, т.е.

$$S_{yc} = 0; \qquad S_{zc} = 0.$$

Определение. Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Относительно этих осей статические моменты равны нулю.

Таким образом, получаем формулы для определения координат центра тяжести фигуры

$$y_c = \frac{S_z}{A}; \qquad z_c = \frac{S_y}{A}. \qquad (1.2)$$

При вычислении статических моментов сложной составной фигуры ее разбивают на элементарные или простые части, для каждой из которых площадь и положение ее центра тяжести известны.

В этом случае статические моменты определяются как алгебраические суммы статических моментов каждой элементарной площади

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} + S_y^{III} + \ldots = A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3} + \ldots$$

$$S_z = S_z^I + S_z^{II} + S_z^{III} + ... = A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3} + ...$$

Используя последние соотношения, получаем формулы для определения координат центра тяжести сложной составной фигуры

$$y_C = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3} + ...}{A_1 + A_2 + A_3 + ...}, \quad z_C = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + A_3 z_{C_3} + ...}{A_1 + A_2 + A_3 + ...} \qquad (1.3)$$

1.2. Осевые и центробежные моменты инерции и их свойства

Определение. Осевым или экваториальным моментом инерции площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на квадрат координаты точки ***K (y, z)***, принадлежащей элементарной площадке (рис. 1.2),

$$J_y = \int_A z^2 \, dA \; ; \quad J_z = \int_A y^2 \, dA \qquad (1.4)$$

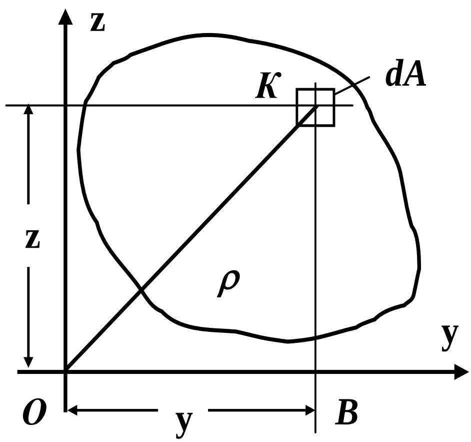


Рис. 1.2

Определение. Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса ***O***) называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на квадрат их расстояний $\boldsymbol{\rho}$ от полюса (рис. 1.2)

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 \, dA \tag{1.5}$$

Единицей измерения момента инерции является единица длины в четвертой степени – см^4, (в системе СИ – м^4, для прокатных профилей по ГОСТу – см^4).

Осевой и полярный моменты инерции всегда положительны по определению.

Определение. Центробежным моментом инерции площади фигуры называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координаты точки ***K (y, z)***, принадлежащей элементарной площадке (рис. 1.2)

$$J_{yz} = \int_A yz \, dA \tag{1.6}$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.

Если, хотя бы одна, из взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат, является осью симметрии фигуры, то центробежный момент инерции такой площади равен нулю.

1.3. Вычисление моментов инерции простейших фигур

Прямоугольник. Вычислим осевые моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей ***y*** и ***z*** (рис. 1.3).

По определению осевого момента инерции (3.15)

$$J_y = \int_A z^2 \, dA$$

где

$\boldsymbol{dA = b \cdot dz}$ – площадь элементарного прямоугольника (рис. 1.3).

Подставляя под знак интеграла вместо ***dA*** ее значение, получим

$$J_y = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz = \frac{b}{3}h^3\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\rightarrow \quad J_y = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции

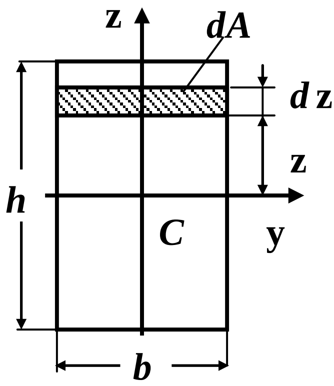


Рис. 1.3

прямоугольника относительно оси ***z***

$$J_z = \frac{hb^3}{12} \qquad (1.7)$$

Таким же образом можно получить формулы для вычисления моментов инерции треугольника и круга.

Треугольник. Моменты инерции треугольника относительно центральных осей ***y*** и ***z*** (рис. 1.4) определяются по формулам

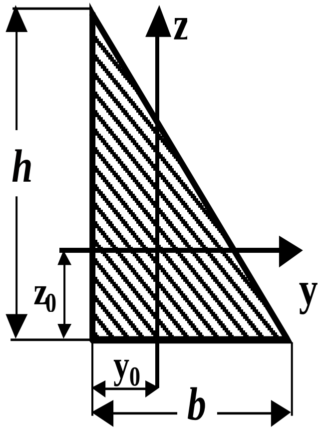


Рис. 1.4

$$J_y = \frac{bh^3}{36}; \quad J_z = \frac{hb^3}{36}; \quad J_{yz} = \frac{b^2h^2}{72}. \qquad (1.8)$$

Круг. Моменты инерции круга относительно центральных осей ***y*** и ***z*** (рис. 1.5) определяются по формулам

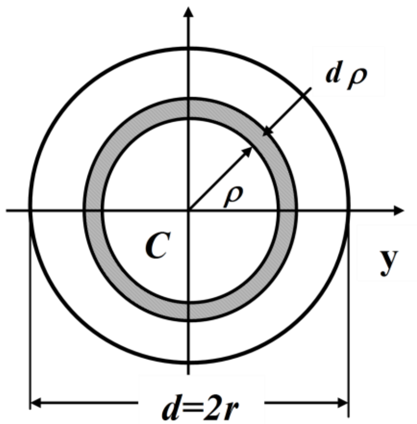


Рис. 1.5

$$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad J_{yz} = 0. \qquad (1.9)$$

1.4. Полярный момент инерции и его свойства

Вычисление полярного момента инерции круга и кольца

В задачах на кручение стержней используется понятие полярного момента инерции, который определяется по формуле (1.5)

$$J_p = \int_A \rho^2\, dA,$$

где

ρ – полярный радиус, или расстояние от начала координат до площадки dA.

Поскольку

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \rightarrow \quad J_\rho = \int_A \left(y^2 + z^2\right) dA = \int_A y^2\, dA + \int_A z^2\, dA = J_z + J_y,$$

то есть

$$J_\rho = J_y + J_z = const. \qquad (1.10)$$

Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции.

<u>Круг</u>. Вычислим полярный момент инерции круга относительно центра тяжести. В качестве элементарной площадки рассмотрим площадь заштрихованного кольца с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ (рис. 1.5).

Площадь этого кольца

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Тогда

$$I_\rho = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \rho^2 = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \cdot d\rho$$

После интегрирования и подстановки пределов полярный момент инерции круга относительно его центра тяжести C найдем по формуле

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1 \cdot d^4. \qquad (1.11)$$

Кольцо. Полярный момент инерции в этом случае равен разности полярных моментов инерции внешнего и внутреннего кругов (рис. 1.6)

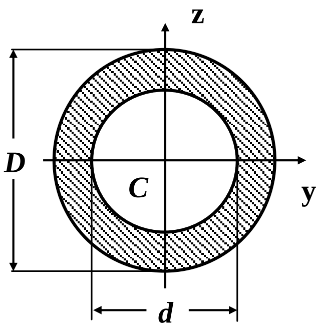


Рис. 1.6

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right), \qquad (1.12)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Осевые моменты инерции кольца по аналогии будут равны

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right).$$

1.5. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых – центральная

Для произвольной фигуры, площадь которой равна A, известны моменты инерции J_{y_C}, J_{z_C} и $J_{y_C z_C}$ относительно центральных осей y_C, z_C.

Необходимо определить моменты инерции J_{y_1}, J_{z_1} и $J_{y_1 z_1}$ относительно новых осей y_1 и z_1, которые параллельны центральным осям y_C и z_C (рис. 1.7).

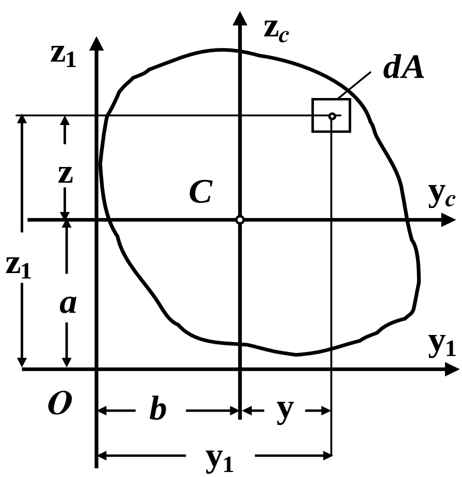


Рис. 1.7

Формулы параллельного переноса осей в этом случае будут иметь вид

$$J_{y_1} = J_{y_C} + a^2 A; \quad J_{z_1} = J_{z_C} + b^2 A;$$
$$J_{y_1 z_1} = J_{y_C z_C} + abA \qquad (1.13)$$

Первые две зависимости формулируются следующим образом:

Момент инерции фигуры относительно любой оси, параллельной центральной, равен моменту инерции фигуры относительно центральной оси, плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь фигуры.

Третья зависимость читается так:

Центробежный момент инерции фигуры относительно произвольных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции фигуры относительно центральных осей плюс произведение координат центра тяжести фигуры относительно произвольных осей на площадь фигуры.

Необходимо помнить, что вышеприведенные формулы параллельного переноса осей (1.13) справедливы только в том случае, когда оси y_C и z_C – центральные оси.

1.6. Зависимость между моментами инерции при повороте осей

Рассмотрим некоторую фигуру, отнесенную к первоначальной декартовой системе координат y_0, z_0 (рис. 1.8).

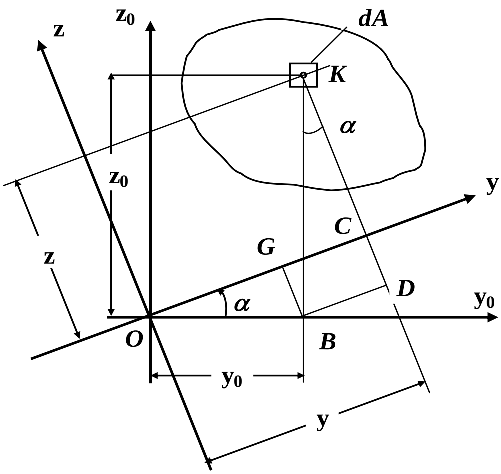


Рис. 1.8

Относительно осей центральных ***y₀*** и ***z₀*** моменты инерции фигуры J_{y_0}, J_{z_0}, $J_{y_0z_0}$ известны.

Ставится задача по определению осевых и центробежного моментов инерции относительно новых осей ***y*** и ***z***, которые получены поворотом первоначальных центральных осей ***y₀*** и ***z₀*** *против хода часовой стрелки* на угол $\alpha > 0$.

То есть необходимо найти значения J_y, J_z и J_{yz}, выразив их через J_{y_0}, J_{z_0} и $J_{y_0z_0}$, а также положительный угол α.

Формулы повернутых осей имеют вид

$$J_y = J_{y_0}\cos^2\alpha + J_{z_0}\sin^2\alpha - J_{y_0z_0}\sin 2\alpha$$

$$J_z = J_{y_0}\sin^2\alpha + J_{z_0}\cos^2\alpha + J_{y_0z_0}\sin 2\alpha \qquad (1.14)$$

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2}\sin 2\alpha + J_{y_0z_0}\cos 2\alpha$$

<u>Правило знаков</u>. Положительный угол ***α*** откладывается от первоначальных осей ***y₀*** и ***z₀*** против хода часовой стрелки.

Эти формулы являются основными для расчетов, связанных с определением моментов инерции относительно любых повернутых осей.

Складывая первое и второе выражения, получим

$$J_y + J_z = J_{y_0} + J_{y_0} = const. \qquad (1.15)$$

Следовательно, *при повороте центральных осей сумма соответствующих осевых моментов инерции не изменяется.*

1.7. Главные оси и главные моменты инерции. Определение положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений

Определение. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (относительно одной – максимум, относительно другой – минимум), называются главными осями.

Определение. Главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются главными центральными осями.

Замечание. *Ось симметрии всегда является главной центральной осью.*

Анализируя формулы повернутых осей (1.14), приходим к заключению о том, что при изменении угла поворота α осевые моменты инерции изменяются так, что их сумма остается неизменной (1.15). Это приводит к выводу о том, что можно найти такое значение угла α_0, при котором один из осевых моментов инерции достигнет минимального значения, а второй – максимального, то есть возникает постановка задачи на нахождение экстремума функции по переменной α.

Вычисляя производную от J_y или J_z по переменной α, получим

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = 2J_{y_0}\cos\alpha(-\sin\alpha) + 2J_{z_0}\sin\alpha\cos\alpha - 2J_{y_0z_0}\cos 2\alpha =$$

$$= -2\left(\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2}\sin 2\alpha + J_{y_0z_0}\cos 2\alpha\right).$$

Учитывая, что

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha$$

выражение для производной принимает вид

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = -2\left(\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha\right) = -2J_{yz}.$$

Приравнивая производную нулю, получаем уравнение, позволяющее найти угол α_0

$$\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$tg\, 2\alpha_0 = -\frac{2J_{y_0 z_0}}{J_{y_0} - J_{z_0}} \quad \text{и} \quad J_{yz} /^{\alpha=\alpha_0} = 0. \qquad (1.16)$$

Таким образом, эта формула определяет положение экстремальных осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, то есть положение главных осей.

Определение. Осевые моменты относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Для определения численных значений главных моментов инерции можно использовать формулы повернутых осей, подставляя в них значение угла α_0.

Выполняя эту операцию в общем виде, после некоторых алгебраических преобразований тригонометрических выражений, получим формулы для определения главных моментов инерции, не содержащие угла α_0

$$J_{\substack{max\\min}} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_y - J_z\right)^2 + 4J_{yz}^2}. \qquad (1.17)$$

Следовательно, для определения положения главных центральных осей и численных значений главных центральных моментов инерции несимметричных поперечных сечений рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Проводят произвольные оси. Вычисляют статические моменты инерции относительно этих осей (разбив предварительно сложное поперечное сечение на ряд простых фигур) и находят положение центра тяжести сложного сечения.

2. Проводят через центр тяжести всего сечения оси, параллельные первоначально выбранным произвольным осям, и находят с помощью формул параллельного переноса осей центробежный и осевые моменты инерции сечения относительно этих новых центральных осей.

3. Находят положение главных центральных осей $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ по формуле (1.16).

4. Находят численные значения главных центральных моментов инерции по формулам (1.14) или (1.17).

5. Для проверки правильности вычисления J_u и J_v используют равенства

$$J_u + J_v = J_y + J_z \quad \text{и} \quad J_{uv} = 0$$

Примечание. Следует иметь в виду, что с помощью этих равенств можно проверить только правильность вычисления положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции.

Соблюдение этих равенств не гарантирует правильности вычисления положения центра тяжести сечения, а также осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно центральных осей.

Для симметричных фигур положение главных центральных осей определяется достаточно просто.

Для фигуры, имеющей одну ось симметрии, одна из главных центральных осей совпадает с этой осью симметрии, а вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести перпендикулярно к ней.

Для фигуры, имеющей две оси симметрии, главные оси совпадают с этими осями симметрии.

Можно сказать, что, если для какой – либо фигуры два главных осевых момента равны между собой, тогда любая центральная ось является главной (круг, квадрат, правильный треугольник, правильный шестиугольник и т.д.).

1.8. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга

Иногда при расчетах бывает математически удобно представить момент инерции как произведение площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции

$$J_y = A \cdot i_y^2,$$

где

i_y^2 – радиус инерции относительно оси y.

Откуда следует, что

$$i_y = \pm\sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad i_z = \pm\sqrt{\frac{J_z}{A}}. \tag{1.18}$$

Радиус инерции круга будет равен

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{4\cdot\pi d^4}{64\cdot\pi d^2}} = \pm\frac{d}{4}. \tag{1.19}$$

1.9. Моменты сопротивления и их свойства

Определение. Моментом сопротивления плоской фигуры относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости фигуры, называется отношение осевого момента инерции относительно той же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_y = \frac{J_y}{|z_{max}|}; \quad W_z = \frac{J_z}{|y_{max}|}. \tag{1.20}$$

Здесь

W_y и W_z – соответственно моменты сопротивления фигуры относительно осей y и z;

$|z_{max}|$ и $|y_{max}|$ – расстояния от осей до наиболее удаленных точек фигуры.

Определение. Полярным моментом сопротивления плоской фигуры относительно какого-либо центра (полюса), лежащего в плоскости фигуры, называется отношение полярного момента инерции плоской фигуры относительно того же центра к расстоянию от центра до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{|\rho_{\max}|} \qquad (1.21)$$

где

W_{ρ} – полярный момент сопротивления фигуры относительно центра ***O***;

J_{ρ} – полярный момент инерции фигуры;

$|\rho_{max}|$ – расстояние от центра до наиболее удаленной точки фигуры.

Моменты сопротивления измеряются единицами длины в третьей степени – см^3, (в системе СИ – м^3).

Сложные сечения, встречающиеся в различных конструкциях, часто включают элементы стандартных прокатных профилей стали (двутавры, швеллера, уголки и др.).

Расчет геометрических характеристик таких сечений сложен и трудоемок, поэтому в справочных таблицах для этих профилей (в сортаментах) приводятся не только их геометрические размеры, но и такие важные сведения, как положение центра тяжести, моменты инерции, моменты сопротивления и др.

Эти табличные данные намного облегчают вычисление геометрических характеристик сложных составных сечений.

1.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Геометрические характеристики плоских фигур»

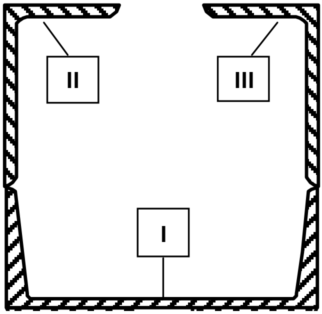
1. Какие оси называются центральными?
2. Что называется статическим моментом площади фигуры относительно некоторой оси?
3. Как определяется статический момент фигуры относительно некоторой оси, координаты центра тяжести которой известны?
4. Как вычисляется положение центра тяжести сложных фигур (для симметричных и несимметричных сечений)?
5. Дайте определение осевого и центробежного моментов инерции фигуры.
6. Приведите формулы моментов инерции простейших фигур относительно собственных главных центральных осей (прямоугольник, треугольник, круг).
7. Дайте определение полярного момента инерции.
8. Приведите формулы полярного момента инерции круга и кольца.

9. Как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей, если исходные оси – центральные?
10. Формулы для моментов инерции при повороте осей.
11. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
12. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
13. Как определяется положение главных центральных осей инерции для симметричных сечений?
14. Формула для определения положения главных осей инерции для несимметричных сечений?
15. Определение численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений.
16. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга и кольца.
17. Моменты сопротивления и их свойства.

После изучения этой темы можно приступить к решению задач, включенных в расчетно-графическую работу.

Тема 2. Примеры решения задач

2.1. Задача 1.



Исходные данные:
швеллер – № 30;
2 неравнополочных уголка – 125×80×8.

Рис. 2.1

Для плоской сложной фигуры с одной осью симметрии, состоящей из элементов I, II и III (рис. 2.1), требуется:

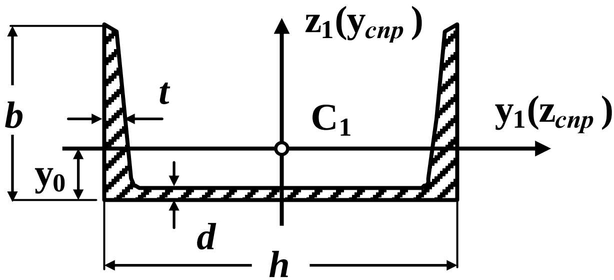
1. Выписать (вычислить) для элементов, входящих в состав заданной фигуры, исходные данные из справочных таблиц (сортаментов).
2. Определить положение центра тяжести заданной фигуры. Построить главные центральные оси.
3. Найти значения главных центральных моментов инерции заданной фигуры.
4. Сделать проверку правильности выполненной части работы.
5. Вычислить значения главных радиусов инерции и момента сопротивления относительно оси симметрии заданной фигуры.
6. Вычертить сечение в масштабе на миллиметровке формата А 4 и указать все оси и все размеры в числах.

Решение

Выпишем и подсчитаем геометрические характеристики отдельных элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения (исходные данные возьмем из справочных таблиц /сортаментов/).

Будем считать, что швеллер № 30 – фигура ***I***, первый неравнополочный уголок 125×80×8 – фигура ***II***, второй неравнополочный уголок 125×80×8 – фигура ***III.***

<u>Фигура I</u> – швеллер – № 30



$\boldsymbol{h}$ = 300мм = 30см; $\boldsymbol{b}$ = 100мм = 10см; $\boldsymbol{d}$ = 6,5мм = 0,65см;
$\boldsymbol{t}$ = 11мм = 1см; $\boldsymbol{A_1}$ = 40,5см^2; $\mathbf{y_0}$ = 2,52см;

$$J^{\mathrm{I}}_{y_1}\,(J_{z_{\text{спр}}}) = 327\text{см}^4;\quad J^{\mathrm{I}}_{z_1}\,(J_{y_{\text{спр}}}) = 5810\text{см}^4;\quad J^{\mathrm{I}}_{y_1 z_1} = 0.$$

<u>Замечание.</u> На рисунке швеллера:

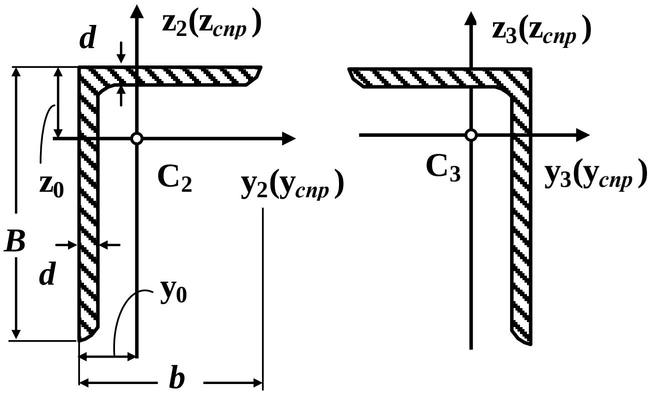
$\mathbf{y}_{спр}$, $\mathbf{z}_{спр}$ – обозначение собственных центральных осей этой фигуры в справочных таблицах (сортаментах);

$\boldsymbol{A_1}$ – площадь первой фигуры (швеллера).

Верхний индекс **I** у моментов инерции соответствует номеру фигуры:

$J^{\mathrm{I}}_{y_1}$ – момент инерции первой фигуры относительно оси $\boldsymbol{y_1}$, который выбираем в справочных таблицах (сортаментах) в колонке $J_{z_{\text{спр}}}$.

<u>Фигуры II и III</u> – неравнополочные уголки 125×80×8.



B = 125мм = 12,5см; ***b*** = 80мм = 8см; ***d*** = 8мм = 0,8см;
A_2 = A_3 = 16см^2; y_0 = 1,84см; z_0 = 4,05см;

$$J_{y_3}^{III} = J_{y_2}^{II}\,(J_{z_{спр}}) = 256см^4;\ J_{z_3}^{III} = J_{z_2}^{II}\,(J_{y_{спр}}) = 83см^4;$$

$$J_{y_2z_2}^{II}\,(J_{yz_{спр}}) = 84{,}1см^4;\ J_{y_3z_3}^{III}\,(J_{yz_{спр}}) = -84{,}1см^4;$$

Здесь и в дальнейшем

A₁, **A₂**, **A₃** – соответственно площади первой, второй и третьей фигур;

A – площадь составной фигуры (общая площадь заданного сложного поперечного сечения).

Верхние индексы ***I, II, III*** у моментов инерции соответствуют номерам фигур, их отсутствие означает, что определяется момент инерции всего сечения. Например,

$J_{y_1}^{I}$ – момент инерции первой фигуры относительно оси y_1;

$J_{y_2z_2}^{II}$ – центробежный момент инерции второй фигуры относительно осей y_2, z_2.

<u>Замечание.</u> В справочных таблицах (сортаментах) значения центробежного момента инерции уголка относительно центральных осей приводятся без учета знака. Знак центробежного момента инерции заданного уголка (равнобокого или неравнобокого) можно выбрать в соответствии с рис. 2.2.

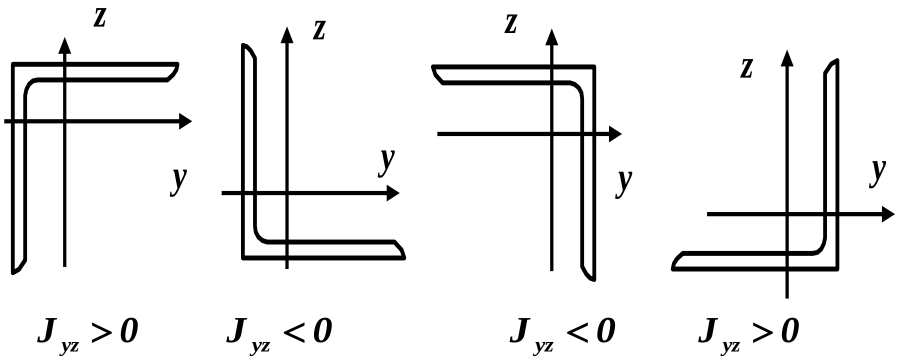


Рис. 2.2

Если в справочных таблицах (сортаментах) значение центробежного момента инерции уголка (равнобокого или неравнобокого) относительно собственных центральных осей отсутствует, то найти это значение можно с помощью третьей формулы повернутых осей (1.14)

$$J_{yz} = \frac{J_{max} - J_{min}}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

где

J_{max} и J_{min} – главные центральные моменты инерции уголка, значения которых приведены в таблицах сортамента.

Используя приведенные выше справочные данные, на миллиметровке вычерчиваем сечение, состоящее из элементов ***I, II*** и ***III*** в масштабе с указанием всех осей и необходимых размеров в сантиметрах (рис. 2.3).

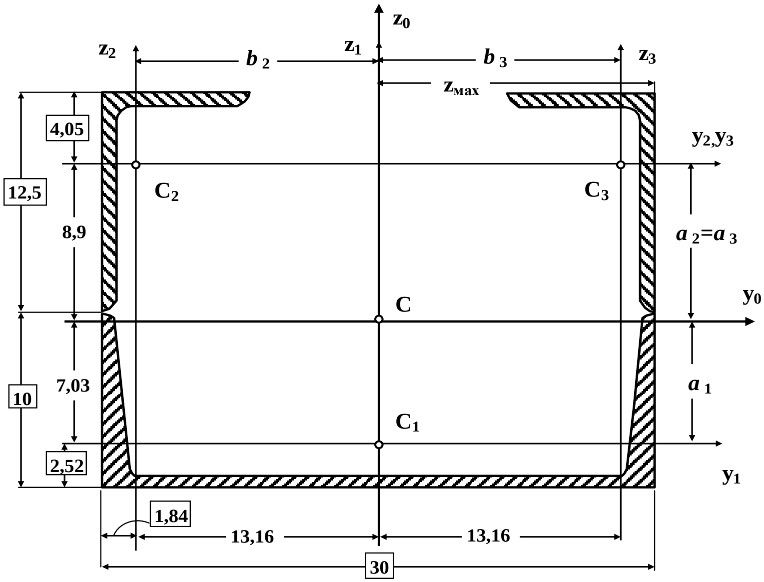


Рис. 2.3

На рис. 2.3 в рамках показаны размеры, взятые из справочных данных, остальные получены в ходе расчета.

Замечание. Заданное сложное поперечное сечение имеет одну ось симметрии.

Определение положения центра тяжести
Построение главных центральных осей

Заданное сложное поперечное сечение (рис. 2.3) имеет одну ось симметрии, которая является главной центральной осью – ось z_0.

Вторая главная центральная ось y_0 пройдет через центр тяжести перпендикулярно оси z_0.

Очевидно, что центр тяжести составной фигуры будет находиться на оси симметрии, поэтому определяем только по одной координате для точек C_1, C_2 и C_3.

В качестве вспомогательной координатной системы выбираем – $y_1 C_1 z_0$.

Точка C_1: $z_{C_1} = 0$.

Точка C_2 : $z_{C_2} = +(10 + 12{,}5 - 2{,}52 - 4{,}05) = 15{,}93$ см.

Точка C_3 : $z_{C_3} = z_{C_2} = 15{,}93$ см.

Тогда координата центра тяжести составной фигуры (точка C) вычисляется по формуле

$$z_C = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C2} + A_3 z_{C3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{A_1 z_{C_1} + 2 A_2 z_{C2}}{A_1 + 2 A_2} =$$

$$= \frac{(40{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot 16 \cdot 15{,}93)\text{см}^3}{(40{,}5 + 2 \cdot 16)\text{см}^2} = \frac{509{,}8}{72{,}5}\text{см} = 7{,}03\text{см}$$

.

Общая площадь фигуры $A = 72{,}5\text{см}^2$.

По полученным значениям координат центра тяжести составной фигуры y_c и z_c на рис. 2.3 показываем положение точки C.

Замечание. Центр тяжести составной фигуры (точка C) всегда должен лежать внутри треугольника, полученного соединением точек C_1, C_2 и C_3.

Через центр тяжести составной фигуры (точка C) проводим вторую главную центральную ось y_0 (рис. 2.3).

Теперь главные центральные оси y_0, z_0 – основная система координат.

Определение величин осевых моментов инерции относительно главных центральных осей

На основании свойства о том, что момент инерции сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции отдельных элементов этого сечения, вычисленных относительно той же оси, имеем

$$J_{y_0} = J_{y_0}^{\mathrm{I}} + J_{y_0}^{\mathrm{II}} + J_{y_0}^{\mathrm{III}}.$$

Для вычисления моментов инерции отдельных элементов заданного сложного сечения относительно главной центральной оси $\mathbf{y_0}$, воспользуемся формулами моментов инерции при параллельном переносе осей.

Таким образом, момент инерции I-й фигуры заданного сложного сечения относительно главной центральной оси $\mathbf{y_0}$ будет равен

$$J_{y_0}^{\mathrm{I}} = J_{y_1}^{\mathrm{I}} + A_1 a_1^2,$$

где

$J_{y_1}^{\mathrm{I}}$ – момент инерции I-й фигуры относительно собственной центральной оси $\mathbf{y_1}$ (справочная величина);

$\mathbf{A_1}$ – площадь I-й фигуры (справочная величина);

a_1 – величина, которая определяет расстояние между осями y_0 и y_1 (координата центра тяжести I-й фигуры относительно главной центральной оси $\mathbf{y_0}$).

Следовательно,

$$a_1 = z_{C1} - z_C = 0 - 7{,}03 = -7{,}03 \text{ см (рис. 2.3);}$$

$$J_{y_0}^{\mathrm{I}} = 327 + 40{,}5 \cdot (-7{,}03)^2 = 2328{,}546 \text{см}^4 = 2329 \text{см}^4.$$

Аналогично, момент инерции второй фигуры относительно главной оси $\mathbf{y_0}$ будет равен

$$a_2 = z_{C_2} - z_C = 15{,}93 - 7{,}03 = 8{,}9 \text{ см.}$$

$$J_{y_0}^{\mathrm{II}} = J_{y_2}^{\mathrm{II}} + A_2 a_2^2 = 256 + 16 \cdot 8{,}9^2 = 1523{,}36 \text{см}^4 = 1523 \text{см}^4.$$

Момент инерции третьей фигуры относительно главной оси $\mathbf{y_0}$ будет равен моменту инерции второй фигуры относительно этой оси $\mathbf{y_0}$, так как центры тяжести фигуры II и фигуры III находятся на одинаковом расстоянии от оси $\mathbf{y_0}$

$$J_{y_0}^{\mathrm{III}} = J_{y_0}^{\mathrm{II}} = 1523 \text{ см}^4.$$

Окончательно, момент инерции заданной составной фигуры относительно главной оси **y₀** будет равен

$$J_V = J_{y_0} = 2329 + 2 \cdot 1523 = 5375 \text{см}^4 = 5380 \text{см}^4.$$

Аналогично, момент инерции заданного сложного сечения относительно второй главной оси **z₀** будет равен

$$J_{z_0} = J_{z_0}^{\mathrm{I}} + J_{z_0}^{\mathrm{II}} + J_{z_0}^{\mathrm{III}}.$$

Момент инерции первой фигуры относительно главной оси **z₀** равен

$$J_{z_0}^{\mathrm{I}} = J_{z_1}^{\mathrm{I}} = 5810 \text{ см}^4,$$

так как оси **z₀** и **z₁** совпадают.

Для вычисления моментов инерции II и III фигур сечения относительно главной центральной оси **z₀** , воспользуемся формулами моментов инерции при параллельном переносе осей.

Таким образом, момент инерции II-й фигуры заданного сложного сечения относительно главной центральной оси **z₀** будет равен

$$J_{z_0}^{\mathrm{II}} = J_{z_2}^{\mathrm{II}} + A_2 b_2^2,$$

где

$J_{z_2}^{\mathrm{II}}$ – момент инерции II-й фигуры относительно собственной центральной оси **z₂** (справочная величина);

A₂ – площадь II-й фигуры (справочная величина);

b_2 – величина, которая определяет расстояние между осями **z₀** и **z₂** (координата центра тяжести II-й фигуры относительно главной центральной оси **z₀**).

Следовательно,

$$b_2 = -\left(\frac{30}{2} - 1{,}84\right) = -13{,}16 \text{ см.}$$

$$J_{z_0}^{\mathrm{II}} = J_{z_2}^{\mathrm{II}} + A_2 b_2^2 = 83 + 16 \cdot 13{,}16^2 = 2853{,}9696 \text{ см}^4 = 2854 \text{ см}^4.$$

Момент инерции третьей фигуры относительно главной оси **z₀** будет равен моменту инерции второй фигуры относительно этой оси $\mathbf{z_0}$, так как центры тяжести фигуры II и фигуры III находятся на одинаковом расстоянии от оси $\mathbf{z_0}$

$$J_{z_0}^{\mathrm{III}} = J_{z_0}^{\mathrm{II}} = 2854 \text{ см}^4.$$

Следовательно, момент инерции заданной составной фигуры относительно главной оси $\mathbf{z_0}$ будет равен

$$J_u = J_{z_0} = 5810 + 2 \cdot 2854 = 11518 \text{см}^4 = 11500 \text{см}^4.$$

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Таким образом, главные центральные моменты инерции заданной фигуры будут равны

$$\mathbf{J_u = J_{max} = J_{z_0} = 11500 см^4; \quad J_v = J_{min} = J_{y_0} = 5380 см^4.}$$

Контроль (проверки) правильности вычисления главных моментов инерции

Для проверки правильности вычисления главных моментов инерции J_u и J_v можно использовать равенство

$$J_{uv} = 0,$$

то есть, центробежный момент инерции заданной фигуры относительно главных центральных осей должен быть равен нулю.

Для вычисления центробежного момента инерции заданной фигуры относительно главных центральных осей y_0 и z_0 воспользуемся третьей формулой моментов инерции при параллельном переносе осей

$$J_{uv} = J_{y_0 z_0}^{I} + J_{y_0 z_0}^{II} + J_{y_0 z_0}^{III} = (J_{y_1 z_1}^{I} + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1) + (J_{y_2 z_2}^{II} +$$
$$+ A_2 \cdot a_2 \cdot b_2) + (J_{y_3 z_3}^{III} + A_3 \cdot a_3 \cdot b_3) = [0 + 40{,}5 \cdot (-7{,}03) \cdot 0] +$$
$$+ [(+84{,}1) + 16 \cdot (+8{,}9) \cdot (-13{,}16)] + [(-84{,}1) +$$
$$+ 16 \cdot (+8{,}9) \cdot (+13{,}16)] = 0 + (-1790) + (+1790) = 0 \ (\pm 5\%).$$

Проверка выполняется.

Вычисление значения главных радиусов инерции сечения и момента сопротивления относительно оси симметрии

Радиусы инерции относительно главных центральных осей определяются по следующим формулам

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{5380\text{см}^4}{72{,}5\text{см}^2}} = 8{,}6143\text{см} = 8{,}61\text{см};$$

$$i_{z_0} = \sqrt{\frac{J_{z_0}}{A}} = \sqrt{\frac{11500\text{см}^4}{72{,}5\text{см}^2}} = 12{,}5940\text{см} = 12{,}6\text{см}.$$

Момент сопротивления сечения относительно оси **z_0** вычисляем по формуле

$$W_{z_0} = \frac{J_{z_0}}{|y_{max}|}$$

где

y_{max} – максимальное расстояние от оси **z_0** до наиболее удаленной точки сечения.

В нашей задаче

$$y_{max} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см},$$

поэтому

$$W_{z_0} = \frac{J_{z_0}}{|y_{max}|} = \frac{11500\text{см}^4}{15} = 766{,}667\text{см}^4 \approx 767\text{см}^4.$$

2.2. Задача 2.

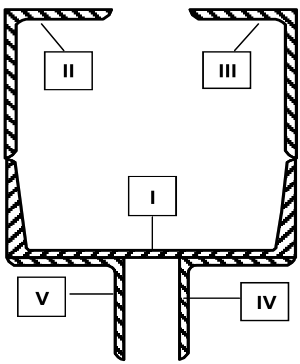


Рис. 2.4

Исходные данные:

швеллер – № 30;

2 неравнополочных уголка – 125×80×8;

2 равнополочных уголка – 100×100×8.

Для плоской фигуры с одной осью симметрии, состоящей из элементов *I, II, III, IV* и *V* (рис. 2.4), требуется:

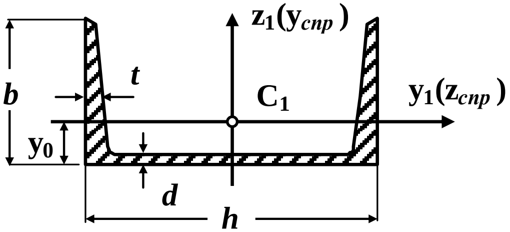
1. Выписать (вычислить) для элементов, входящих в состав заданной фигуры, исходные данные из справочных таблиц (сортаментов).
2. Определить положение центра тяжести заданной фигуры. Построить главные центральные оси.
3. Найти значения главных центральных моментов инерции заданной фигуры.
4. Сделать проверку правильности выполненной части работы.
5. Вычислить значения главных радиусов инерции и момента сопротивления относительно оси симметрии заданной фигуры.
6. Вычертить сечение в масштабе на миллиметровке формата А 4 и указать все оси и все размеры в числах.

Решение

Выпишем и подсчитаем геометрические характеристики отдельных элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения (исходные данные возьмем из справочных таблиц /сортаментов/).

Будем считать, что швеллер № 30 – фигура ***I***, первый неравнополочный уголок 125×80×8 – фигура ***II***, второй неравнополочный уголок 125×80×8 – фигура ***III***, первый равнополочный уголок 100×100×8– фигура ***IV***, второй равнополочный уголок 100×100×8– фигура ***V***.

<u>Фигура I</u> – швеллер – № 30



h = 300мм = 30см;
b = 100мм = 10см;
d = 6,5мм = 0,65см;
t = 11мм = 1см;
$\boldsymbol{A_1}$ **=** 40,5см^2;
y_0 = 2,52см;

$$J_{y_1}^{\mathrm{I}}\,(J_{z_{спр}}) = 327\,\text{см}^4;\quad J_{z_1}^{\mathrm{I}}\,(J_{y_{спр}}) = 5810\,\text{см}^4;\quad J_{y_1 z_1}^{\mathrm{I}} = 0.$$

<u>Замечание.</u> На рисунке швеллера:

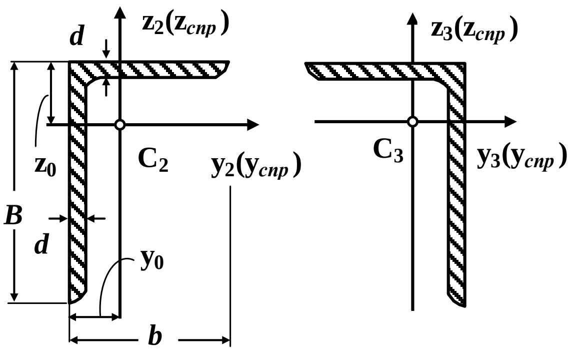
$y_{спр}$, $z_{спр}$ – обозначение собственных центральных осей этой фигуры в справочных таблицах (сортаментах);

A_1 – площадь первой фигуры (швеллера).

Верхний индекс **I** у моментов инерции соответствует номеру фигуры:

$J^{\mathrm{I}}_{y_1}$ – момент инерции первой фигуры относительно оси y_1, который выбираем в справочных таблицах (сортаментах) в колонке $J_{z_{спр}}$.

<u>Фигуры II и III</u> – неравнополочные уголки 125×80×8.

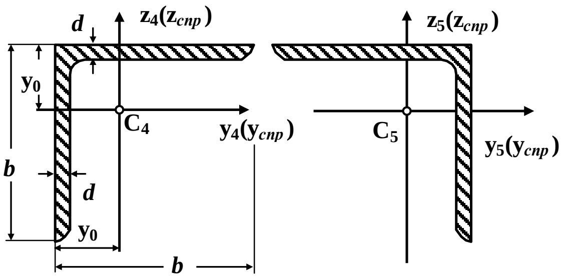


B = 125мм = 12,5см;
b = 80мм = 8см;
d = 8мм = 0,8см;
A_2 = A_3 = 16см^2;
y_0 = 1,84см; z_0 = 4,05см;

$$J^{\mathrm{III}}_{y_3} = J^{\mathrm{II}}_{y_2}\,(J_{z_{спр}}) = 256\text{см}^4; \qquad J^{\mathrm{III}}_{z_3} = J^{\mathrm{II}}_{z_2}\,(J_{y_{спр}}) = 83\text{см}^4;$$

$$J^{\mathrm{II}}_{y_2 z_2}\,(J_{yz_{спр}}) = 84{,}1\text{см}^4; \qquad J^{III}_{y_3 z_3}\,(J_{yz_{спр}}) = -84{,}1\text{см}^4.$$

<u>Фигуры IV и V</u> – равнополочные уголки 100×100×8



b = 100мм = 10см;
d = 8мм = 0,8см;
b=80 мм =8см;
A_4 = A_5 = 15,6см^2;
d=7 мм =0,7 см;
z_0 = 2,75см;

$$J_{y_4z_4}^{IV}\,(J_{yz_{спр}}) = 86{,}3см^4;\ J_{y_5z_5}^{V} = -86{,}3см^4.$$

$$J_{y_4}^{IV}\,(J_{y_{спр}}) = 147см^4;\ J_{z_4}^{IV} = J_{y_4}^{IV} = 147см^4;$$

$$J_{z_5}^{V} = J_{y_5}^{V} = J_{z_4}^{IV} = J_{y_4}^{IV} = 147см^4;$$

Здесь и в дальнейшем

A$_1$, A$_2$, A$_3$, A$_4$, A$_5$ – соответственно площади первой, второй, третьей, четвертой и пятой фигур;

A – площадь составной фигуры (общая площадь заданного сложного поперечного сечения).

Верхние индексы ***I, II, III, IV, V*** у моментов инерции соответствуют номерам фигур, их отсутствие означает, что определяется момент инерции всего сечения. Например,

$J_{y_1}^{I}$ – момент инерции первой фигуры относительно собственной центральной оси y_1;

$J_{y_2z_2}^{II}$ – центробежный момент инерции второй фигуры относительно собственных центральных осей y_2, z_2.

<u>**Замечание.**</u> В справочных таблицах (сортаментах) значения центробежного момента инерции уголка относительно центральных осей приводятся без учета знака. Знак центробежного момента инерции заданного уголка (равнобокого или неравнобокого) можно выбрать в соответствии с рис. 2.5.

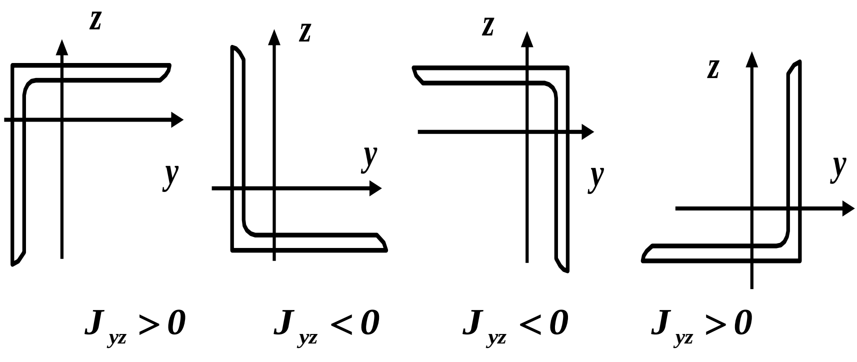


Рис. 2.5

Если в справочных таблицах (сортаментах) значение центробежного момента инерции уголка (равнобокого или неравнобокого) относительно собственных центральных осей отсутствует, то найти это значение можно с помощью третьей формулы повернутых осей (1.14)

$$J_{yz} = \frac{J_{max} - J_{min}}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

где

J_{max} и J_{min} – главные центральные моменты инерции уголка, значения которых приведены в таблицах сортамента.

Используя приведенные выше справочные данные, на миллиметровке вычерчиваем сечение, состоящее из элементов ***I, II, III, IV*** и ***V*** в масштабе с указанием всех осей и необходимых размеров в сантиметрах (рис. 2.6). На

рис. 2.6 в рамках показаны размеры, взятые из справочных данных, остальные получены в ходе расчета.

Определение положения центра тяжести. Построение главных центральных осей

Заданное сложное поперечное сечение (рис. 2.6) имеет одну ось симметрии, которая является главной центральной осью – ось z_0. Вторая главная центральная ось y_0 пройдет через центр тяжести фигуры перпендикулярно оси z_0.

Очевидно, что центр тяжести составной фигуры (точка ***C***) будет находиться на оси симметрии, поэтому определяем только по одной координате для точек C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5. В качестве вспомогательной координатной системы выбираем – $y_1 C_1 z_0$.

Точка **C_1**: $z_{C_1} = 0.$

Точка **C_2**: $z_{C_2} = +(10 + 12{,}5 - 2{,}52 - 4{,}05) = 15{,}93$ см.

Точка **C_3**: $z_{C_3} = z_{C_2} = 15{,}93$ см.

Точка **C_4**: $z_{C_4} = -(2{,}52 + 2{,}75) = -5{,}27$ см.

Точка **C_5**: $z_{C_5} = z_{C_4} = -5{,}27$ см.

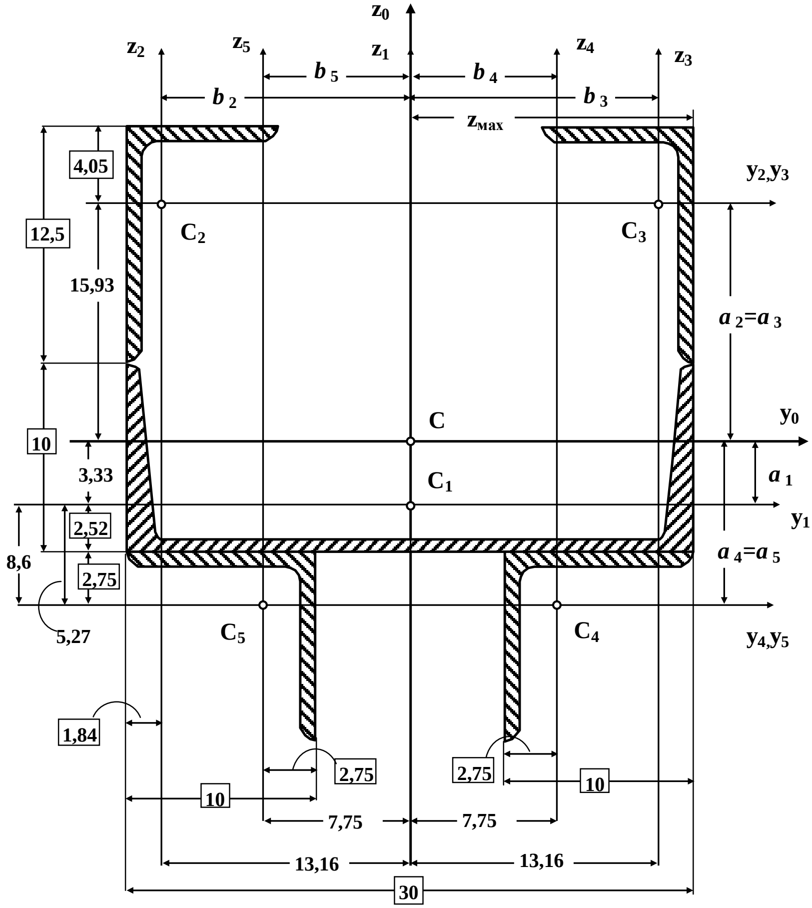


Рис. 2.6

Координату центра тяжести составной фигуры (точка ***С***) вычислим по формуле

$$\mathbf{z}_C = \frac{A_1 \mathbf{z}_{C_1} + A_2 \mathbf{z}_{C2} + A_3 \mathbf{z}_{C3} + A_4 \mathbf{z}_{C4} + A_5 \mathbf{z}_{C_5}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} = \frac{A_1 \mathbf{z}_{C_1} + 2A_2 \mathbf{z}_{C2} + 2A_4 \mathbf{z}_{C4}}{A_1 + 2A_2 + 2A_4} =$$

$$= \frac{(40{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot 16 \cdot 15{,}93 + 2 \cdot 15{,}6 \cdot (-5{,}27))\text{см}^3}{(40{,}5 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 15{,}6)\text{см}^2} = \frac{345{,}3}{103{,}7}\text{см} = 3{,}33\text{см}$$

.

Общая площадь фигуры $A = 103{,}7\text{см}^2$.

По полученным значениям координат центра тяжести составной фигуры **y_c** и ***z_c*** на рис. 2.3 показываем положение точки ***C***.

Через центр тяжести составной фигуры (точка ***C***) проводим вторую главную центральную ось ***y_0*** (рис. 2.6).

Теперь главные центральные оси ***y_0, z_0*** – основная система координат.

Определение величин осевых моментов инерции относительно главных центральных осей

На основании свойства о том, что момент инерции сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции элементов этого сечения, вычисленного относительно той же оси, имеем

$$J_{y_0} = J_{y_0}^{\mathrm{I}} + J_{y_0}^{\mathrm{II}} + J_{y_0}^{\mathrm{III}} + J_{y_0}^{\mathrm{IV}} + J_{y_0}^{\mathrm{V}}.$$

Для вычисления моментов инерции элементов сечения относительно главной центральной оси **y_0**, воспользуемся формулами моментов инерции при параллельном переносе осей

$$J_{y_0}^{\mathrm{I}} = J_{y_1}^{\mathrm{I}} + A_1 a_1^2,$$

где

$J_{y_1}^{\mathrm{I}}$ – момент инерции I-й фигуры относительно собственной центральной оси **y_1** (справочная величина),

A_1– площадь I-й фигуры (справочная величина),

a_1 – величина, которая определяет расстояние между осями **y_0** и **y_1** (координата центра тяжести I-й фигуры относительно главной центральной оси **y_0**).

$$a_1 = z_{C1} - z_C = 0 - 3{,}33 = -3{,}33 \text{ см (рис. 2.6):}$$

$$J_{y_0}^{\mathrm{I}} = 327 + 40{,}5 \cdot (-3{,}33)^2 = 776 \text{ см}^4.$$

Аналогично, момент инерции второй фигуры относительно главной оси **y_0** будет равен

$$a_2 = z_{C_2} - z_C = 15{,}93 - 3{,}33 = 12{,}6 \text{ см;}$$

$$J_{y_0}^{\mathrm{II}} = J_{y_2}^{\mathrm{II}} + A_2 a_2^2 = 256 + 16 \cdot 12{,}6^2 = 2796 \text{ см}^4.$$

Момент инерции третьей фигуры относительно главной оси **y₀** будет равен моменту инерции второй фигуры относительно этой оси **y₀,** так как центры тяжести фигуры II и фигуры III находятся на одинаковом расстоянии от оси **y₀**

$$J_{y_0}^{III} = J_{y_0}^{II} = 2796 \text{ см}^4$$

Момент инерции четвертой фигуры относительно оси **y₀** равен

$$a_4 = z_{C_4} - z_C = -5{,}27 - 3{,}33 = -8{,}6 \text{ см};$$

$$J_{y_0}^{IV} = J_{y4}^{IV} + A_4 a_4^2 = 147 + 15{,}6 \cdot (-8{,}6)^2 = 1300{,}776 = 1301 \text{ см}^4.$$

Момент инерции пятой фигуры относительно главной оси **y₀** будет равен моменту инерции четвертой фигуры относительно этой оси **y₀,** так как центры тяжести фигуры IV и фигуры V находятся на одинаковом расстоянии от оси **y₀**

$$J_{y_0}^{V} = J_{y_0}^{IV} = 1301 \text{ см}^4.$$

Окончательно, момент инерции заданной составной фигуры относительно главной оси ***y₀*** будет равен

$$J_V = J_{y_0} = 776 + 2 \cdot 2796 + 2 \cdot 1301 = 8970 \text{ см}^4.$$

Аналогично, момент инерции заданного сложного сечения относительно второй главной оси ***z₀*** будет равен

$$J_{z_0} = J_{z_0}^{I} + J_{z_0}^{II} + J_{z_0}^{III} + J_{z_0}^{IV} + J_{z_0}^{V}.$$

Момент инерции первой фигуры относительно главной оси **z₀** равен

$$J_{z_0}^{I} = J_{z_1}^{I} = 5810 \text{ см}^4,$$

так как оси ***z₀*** и ***z₁*** совпадают.

Для вычисления моментов инерции ***II, III, IV*** и ***V*** фигур относительно главной центральной оси ***z₀*** , воспользуемся формулами моментов инерции при параллельном переносе осей.

Момент инерции второй фигуры относительно главной оси ***z₀*** равен

$$J_{z_0}^{II} = J_{z_2}^{II} + A_2 b_2^2,$$

где

$J_{z_2}^{II}$ – момент инерции II-й фигуры относительно собственной центральной оси **z₂** **(**справочная величина);

A_2– площадь II-й фигуры **(**справочная величина);

b_2 – величина, которая определяет расстояние между осями z_0 и z_2 (координата центра тяжести II-й фигуры относительно главной центральной оси z_0).

$$b_2 = -(\frac{30}{2} - 1{,}84) = -13{,}16$$ см (рис. 2.5);

$$J_{z_0}^{II} = J_{z_2}^{II} + A_2 b_2^2 = 83 + 16 \cdot 13{,}16^2 = 2853{,}9696$$ см^4=2854 см^4.

Момент инерции третьей фигуры относительно главной оси z_0 будет равен моменту инерции второй фигуры относительно этой оси z_0, так как центры тяжести фигуры ***II*** и фигуры ***III*** находятся на одинаковом расстоянии от оси z_0

$$J_{z_0}^{III} = J_{z_0}^{II} = 2854$$ см^4.

Момент инерции четвертой фигуры относительно главной оси z_0 равен

$$b_4 = (\frac{30}{2} - 10 + 2{,}75) = 7{,}75$$ см;

$$J_{z_0}^{IV} = J_{z_4}^{IV} + A_4 b_4^2 = 147 + 15{,}6 \cdot 7{,}75^2 = 1083{,}975 = 1084$$ см^4.

Момент инерции пятой фигуры относительно главной оси z_0 будет равен моменту инерции четвертой фигуры относительно этой оси z_0, так как центры тяжести фигуры ***IV*** и фигуры ***V*** находятся на одинаковом расстоянии от оси z_0

$$J_{z_0}^{V} = J_{z_0}^{IV} = 1084$$ см^4.

Следовательно, момент инерции заданной составной фигуры относительно главной оси z_0 будет равен

$$J_u = J_{z_0} = 5810 + 2 \cdot 2854 + 2 \cdot 1084 = 13686$$ см^4 = 13700 см^4.

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Таким образом, главные центральные моменты инерции заданной фигуры будут равны

$$J_u = J_{max} = J_{z_0} = 13700 \text{см}^4; \quad J_v = J_{min} = J_{y_0} = 8970 \text{см}^4.$$

Контроль (проверки) правильности вычисления главных моментов инерции

Для проверки правильности вычисления главных моментов инерции J_u и J_v можно использовать равенство

$$J_{uv} = 0,$$

то есть, центробежный момент инерции заданной фигуры относительно главных центральных осей должен быть равен нулю.

Для вычисления центробежного момента инерции заданной фигуры относительно главных центральных осей y_0 и z_0 воспользуемся третьей формулой моментов инерции при параллельном переносе осей

$$J_{uv} = J^{I}_{y_0z_0} + J^{II}_{y_0z_0} + J^{III}_{y_0z_0} = (J^{I}_{y_1z_1} + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1) + (J^{II}_{y_2z_2} + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2) + (J^{III}_{y_3z_3} + A_3 \cdot a_3 \cdot b_3) + (J^{IV}_{y_4z_4} + A_4 \cdot a_4 \cdot b_4) + (J^{V}_{y_5z_5} + A_5 \cdot a_5 \cdot b_5) =$$

$$= [0 + 40{,}5 \cdot (-3{,}33) \cdot 0] + [(+84{,}1) + 16 \cdot (+12{,}6) \cdot (-13{,}16)] + [(-84{,}1) + 16 \cdot (+12{,}6) \cdot (+13{,}16)] + [(+86{,}3) + 15{,}6 \cdot (-8{,}6) \cdot (+7{,}75)] + [(-86{,}3) + 15{,}6 \cdot (-8{,}6) \cdot (-7{,}75)] =$$
$$= 0 + (-2570) + (+2570) + (-953) + (+953) = 0 \ (\pm 5\%).$$

Проверка выполняется.

Вычисление значения главных радиусов инерции сечения и момента сопротивления относительно оси симметрии

Радиусы инерции относительно главных центральных осей определяются по следующим формулам

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{8970\text{см}^4}{103{,}7\text{см}^2}} = 9{,}30\text{см};$$

$$i_{z_0} = \sqrt{\frac{J_{z_0}}{A}} = \sqrt{\frac{13700\text{см}^4}{103{,}7\text{см}^2}} = 11{,}4940\text{см} = 11{,}5\text{см}.$$

Момент сопротивления сечения относительно оси симметрии z_0 вычисляем по формуле

$$W_{z_0} = \frac{J_{z_0}}{|y_{max}|}$$

где

y_{max} – максимальное расстояние от оси z_0 до наиболее удаленной точки сечения.

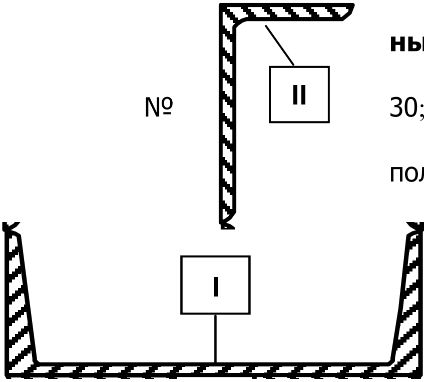
В нашей задаче

$$y_{max} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см},$$

поэтому

$$W_{z_0} = \frac{J_{z_0}}{|y_{max}|} = \frac{13700\text{см}4}{15\text{см}} = 913{,}333\text{см}^3 \approx 913\text{см}^3.$$

2.3. Задача 3.



Исходные данные:

№ 30;

швеллер –

неравнополочный уголок – 125×80×8.

Рис. 2.7

Для заданной плоской сложной фигуры, состоящей из элементов *I* и *II* (рис. 2.7), требуется:

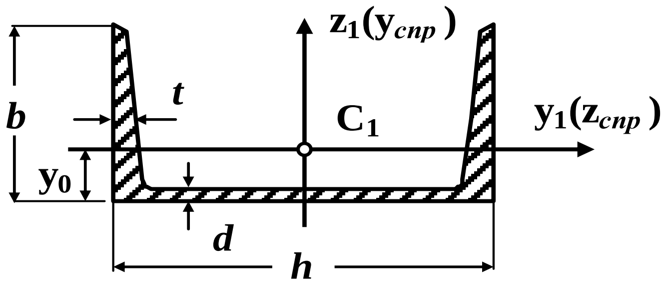
1. Определить положение центра тяжести. Построить центральные оси.
2. Найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей.
3. Определить положение главных центральных осей.
4. Найти значения главных центральных моментов инерции заданной фигуры.
5. Сделать проверку правильности выполненной части работы.
6. Вычислить значения главных радиусов инерции сечения.
7. Вычертить сечение в масштабе на миллиметровке формата А 4 с указанием всех осей и размеров.

Решение

Выпишем и подсчитаем геометрические характеристики отдельных элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения (исходные данные возьмем из справочных таблиц /сортаментов/).

Будем считать, что швеллер № 30 – фигура ***I***, неравнополочный уголок 125×80×8 – фигура ***II***.

<u>Фигура I</u> – швеллер – № 30



h = 300мм = 30см; ***b*** = 100мм = 10см; ***d*** = 6,5мм = 0,65см; ***t*** = 11мм = 1см;

$$J^{\mathrm{I}}_{y_1}\,(J_{z_{\text{спр}}}) = 327\text{см}^4;$$

$\boldsymbol{A}_1$ = 40,5см²; $\mathbf{y_0}$ = 2,52см;

$$J^{\mathrm{I}}_{z_1}\,(J_{y_{\text{спр}}}) = 5810\text{см}^4; \quad J^{\mathrm{I}}_{y_1 z_1} = 0.$$

Замечание. На рисунке швеллера:

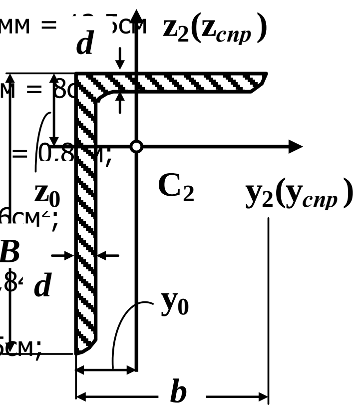
yспр, zспр – обозначение собственных центральных осей этой фигуры в справочных таблицах (сортаментах);

A1 – площадь первой фигуры (швеллера).

Верхний индекс **I** у моментов инерции соответствует номеру фигуры:

$J^{\mathrm{I}}_{y_1}$ – момент инерции первой фигуры относительно оси **y**1, который выбираем в справочных таблицах (сортаментах) в колонке $J_{z_{\text{спр}}}$.

Фигура II – **неравнополочный уголок 125×80×8.**



B = 125мм = 12,5см;

b = 80мм = 8см;

d = 8мм = 0,8см;

$\boldsymbol{A}_2$ = 16см²;

$\mathbf{y_0}$ = 1,84

$\mathbf{z_0}$ = 4,05см;

$J_{y_2}^{II} = (J_{y_{спр}}) = 256$см^4; $J_{z_2}^{II} = (J_{z_{спр}}) = 83$см^4;

$J_{y_2 z_2}^{II} (J_{y_{спр} z_{спр}}) = +\ 84{,}1$см^4.

Здесь и в дальнейшем

A_1, A_2 – соответственно площади первой и второй фигур;

A – площадь составной фигуры (общая площадь заданного сложного поперечного сечения).

Верхние индексы ***I*, *II*** у моментов инерции соответствуют номерам фигур, их отсутствие означает, что определяется момент инерции всего сечения.

Например,

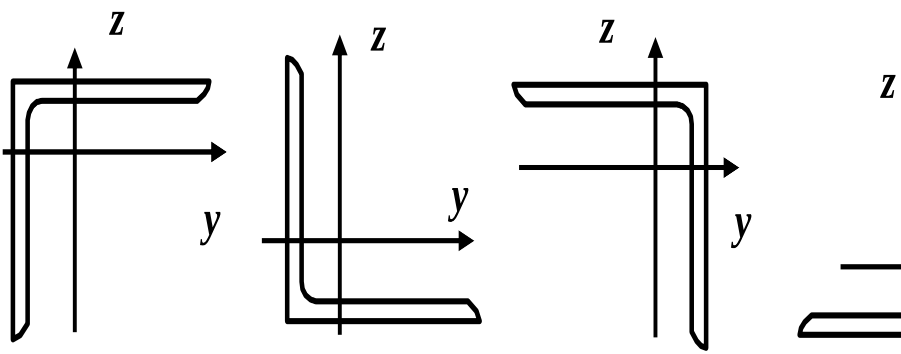
$J_{y_1}^{I}$ – момент инерции первой фигуры относительно оси y_1;

$J_{y_2 z_2}^{II}$ – центробежный момент инерции второй фигуры относительно осей

y_2, z_2.

Замечание. В справочных таблицах (сортаментах) значения центробежного момента инерции уголка относительно центральных осей приводятся без учета знака. Знак центробежного момента инерции заданного уголка (равнобокого или неравнобокого) можно выбрать в соответствии с

рис. 2.8.



$J_{yz} > 0$ $J_{yz} < 0$ $J_{yz} < 0$ $J_{yz} > 0$

Рис. 2.8

Если в справочных таблицах (сортаментах) значение центробежного момента инерции уголка (равнобокого или неравнобокого) относительно собственных центральных осей отсутствует, то найти это значение можно с помощью третьей формулы повернутых осей (1.14)

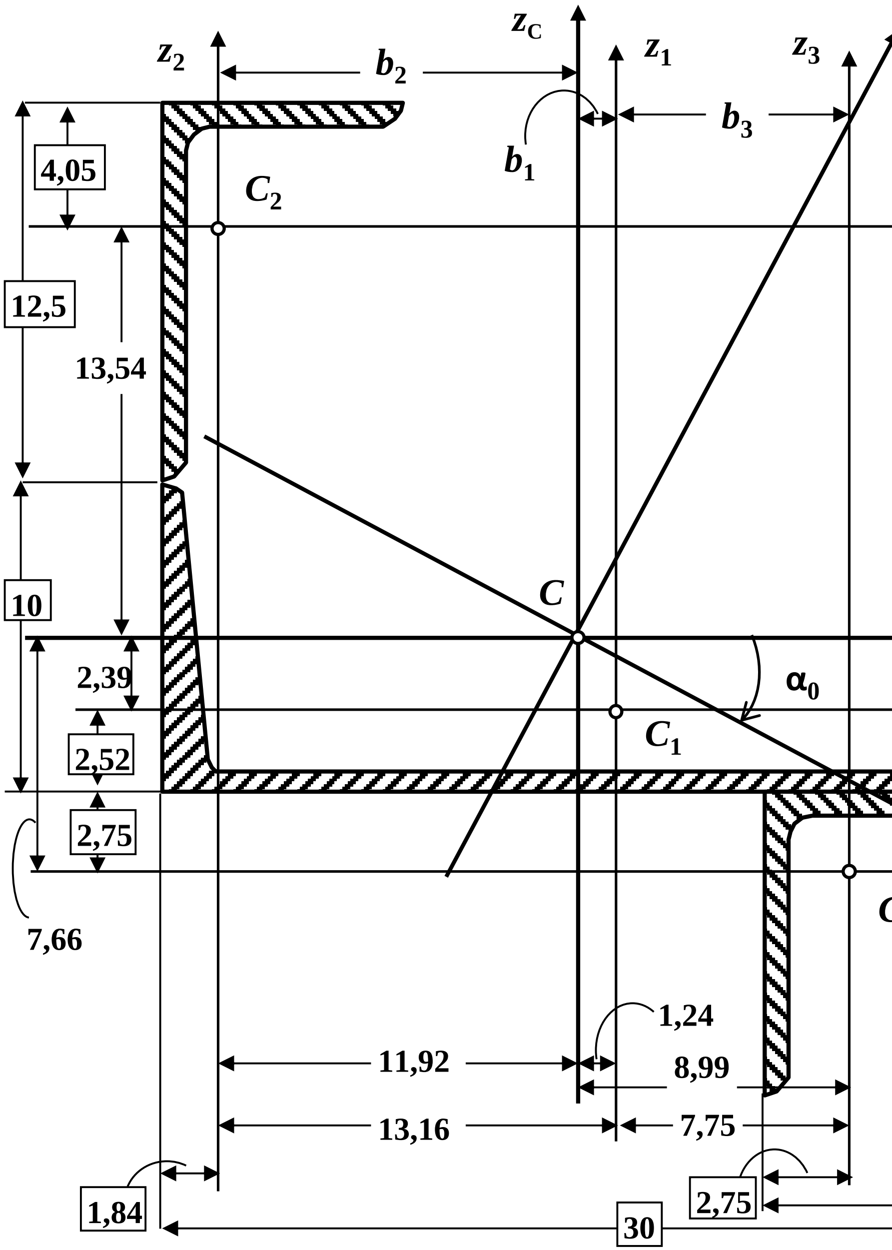
$$J_{yz} = \frac{J_{max} - J_{min}}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

где

J_{max} и J_{min} – главные центральные моменты инерции уголка, значения

которых приведены в таблицах сортамента.

Используя приведенные выше справочные данные, на миллиметровке вычерчиваем сечение, состоящее из элементов ***I*** и ***II*** в масштабе с указанием всех осей и необходимых размеров в сантиметрах (рис. 2.9).


z2
zC
z1
z3
b2
b1
b3
C2
C
C1
α0
4,05
12,5
13,54
10
2,39
2,52
2,75
7,66
1,24
11,92
8,99
13,16
7,75
1,84
2,75
30