ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Техническая механика»

Методические указания

для проведения практических занятий
для обучающихся по направлению
08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» по дисциплине

«Теоретическая механика»

Часть №1

Авторы
Высоковский Д.А.,
Савельева Н.А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Теоретическая механика: методические указания для проведения практических занятий для обучающихся по направлению 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений». Часть 1.

Представлены примеры решения заданий по каждой теме практических занятий разделов «Статика» и «Кинематика». Каждая тема предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для решения задач.

Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Высоковский Д.А.

ассистент кафедры «Техническая механика» Савельева Н.А.

Оглавление

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ....4
Система сходящихся сил 6
Система параллельных сил 12
Теория пар сил....14
Равновесие плоской системы сил 16
Определение усилий в стержнях плоской фермы 27
Пространственная система сил 30
Центр тяжести системы тел....36

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 5 контрольных заданий.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А4. Контрольная работа должна иметь титульный лист, на котором указываются: название учебного заведение, название дисциплины, номер работы, название группы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, фамилия преподавателя, город и год.

На листе с решением сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно.* Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т. д. Аналогично, в υ_B, a_B означают скорость и ускорение точки *B*; υ_C, a_C – точки *C*; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1, ω_2, ε_2 – тела *2* и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту,* т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;* в конце должны быть даны ответы.

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

При решении задач статики рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выбрать тело (или точку), равновесие которого должно быть рассмотрено в данной задаче.
2. Освободить выбранное тело от связей и изобразить (расставить) все действующие на это тело (и только на это тело) активные силы и силы реакций отброшенных связей. Тело, освобожденное от связей, с приложенной к нему системой активных сил и сил реакций, следует изображать отдельно.
3. Составить уравнения равновесия. Для составления уравнений равновесия необходимо сначала выбрать оси координат. Этот выбор можно производить произвольно, но полученные уравнения равновесия будут решаться проще, если одну из осей направить перпендикулярно к линии действия какой-либо неизвестной силы реакции.

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух, выбранных любым образом координатных осей, лежащих в плоскости, в которой расположены линии действия всех сил.

Задача 1. Тяжелый шар весом Р килограммов подвешен на нити (рис. 1, а) в точке А и удерживается в отклоненном на угол а от вертикали положении горизонтальной нитью, привязанной в точнее В. Найти натяжение нитей.

Решение. Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет шар. Вес $\vec{\mathrm{P}}$ шара известен. Будем рассматривать шар как материальную точку О. Эта точка несвободна. Связи, наложенные на нее, осуществляются нитями ОА и ОВ. Отбрасываем связи и заменяем их действие на точку О реакциями. Тогда точку О можно будет рассматривать как свободную и находящуюся в равновесии под действием плоской системы из трех сходящихся сил: активной $\vec{\mathrm{P}}$ и реакций $\vec{T}_1$, и $\vec{T}_2$ нитей (рис. 1, б), которые направлены вдоль нитей. Реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по модулю равны искомым натяжениям нитей. Следовательно, определение натяжений нитей можно заменить определением их реакций $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$.

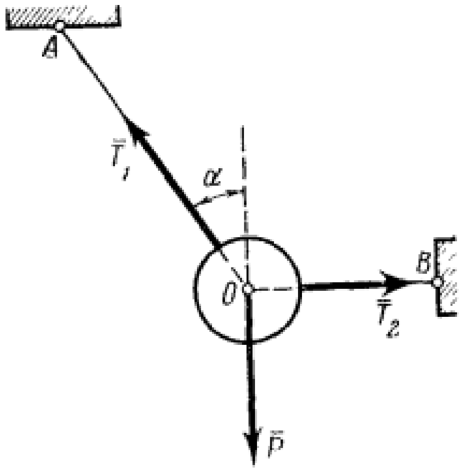


Рис. 1

Для составления уравнений равновесия необходимо выбрать оси координат. Начало координат возьмем в точке O, равновесие которой мы рассматриваем. Направим ось Ox горизонтально вправо, а ось Oy — вертикально вверх.

Из сравнения рис. а и б видно, что $\left(\widehat{\vec{T}_1,\vec{j}}\right) = \alpha$ и $\left(\widehat{\vec{T}_2,\vec{j}}\right) = 90°$. Составим теперь уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0$$

Для этого алгебраически сложим проекции всех сил на каждую координатную ось и приравняем к нулю полученные алгебраические суммы:

$$\sum X = -T_1 \sin\alpha + T_2 = 0 \qquad \sum Y = T_1 \cos\alpha - P = 0$$

Решая эти уравнения равновесия, находим

$$T_1 = \frac{P}{cos\alpha} T_2 = Ptg\alpha$$

Задача 2. Шарик B весом P (рис. 2) подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r; расстояние точки A от центра O сферы равно d. Длина нити AB=*l*. Прямая AO вертикальна. Определить натяжение нити и давление шарика на сферу.

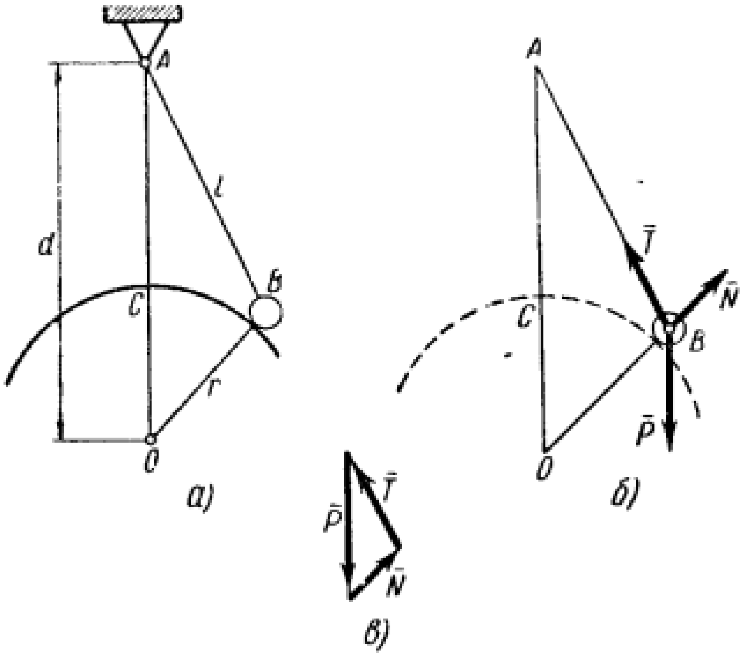


Рис. 2

Решение. Решим эту задачу геометрическим методом. Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет шарик B. На шарик действует одна активная сила — его вес $\vec{P}$. Будем рассматривать шарик как материальную точку. Эта точка несвободна. Связи, наложенные на нее, осуществляются нитью и поверхностью сферы. Отбрасываем связи и заменяем их действие на точку B соответствующими реакциями. Первую связь можно заменить реакцией $\vec{T}$, направленной по нити AB, вторую — реакцией $\vec{N}$, направленной по радиусу OB. Освободив точку B от связей и заменив их действие на точку реакциями, можно рассматривать эту точку как свободную и находящуюся в равновесии под действием плоской системы из трех сходящихся сил: активной $\vec{P}$ и реакций $\vec{T}$ и $\vec{N}$ (рис. 2, б.)

Так как точка B под действием этой системы сил находится в равновесии, то согласно геометрическому условию равновесия силовой треугольник, построенный на этих трех силах, должен быть замкнут, что и показано на рис. 2, в. Стороны этого силового треугольника параллельны соответствующим сторонам треугольника OAB (рис. 2,а). Следовательно, указанные треугольники подобны, их стороны пропорциональны, т. е.

$$\frac{P}{OA} = \frac{N}{OB} = \frac{T}{AB}$$

Отсюда получаем модули реакций сферы и нити

$$N = P\frac{r}{d} \qquad T = P\frac{l}{d}$$

Требующиеся в задаче давление шарика на сферу и натяжение нити будут согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия теми же по модулю, что $\vec{T}$ и $\vec{N}$, но противоположно направленными.

Задача 3. Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD. Крепления A, C и D — шарнирные. Определим реакции опор A и D, если на конец балки действует вертикальная сила F=5 Н. Размеры указаны на рис. 3, а. Весом балки пренебречь.

Решение. Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет балка AB. Отбрасываем наложенные на балку связи (стержень CD и шарнир A) и заменяем их реакциями. Реакция стержневой связи $\vec{R}_c$ направлена

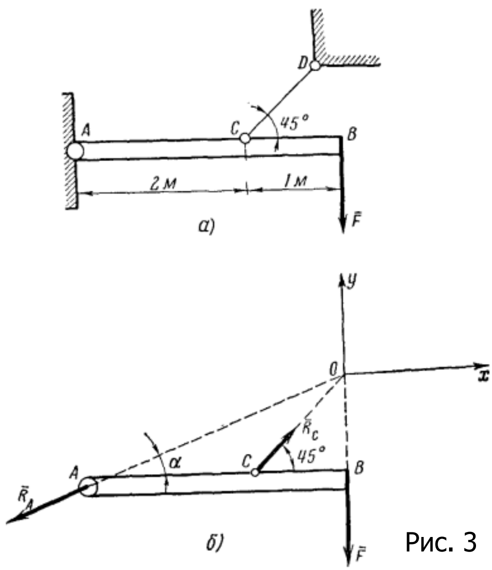


Рис. 3

вдоль стержня от С к D (рис. 3, б). К точке В балки АВ приложена известная по модулю и направлению активная сила $\vec{F}$. Направление реакции неподвижного шарнира А, вообще говоря, неопределенно. Но так как балка АВ под действием трех приложенных к ней непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих трех сил должны пересекаться в одной точке. Продолжаем линию действия вертикальной силы $\vec{F}$ до ее пересечения в точке О с линией действия реакции $\vec{R}_c$ стержневой связи. Соединяя точку О с точкой А, получаем линию действия реакции $\vec{R}_A$ шарнира А. Примем точку О за начало координат хОу и проведем координатные оси так, как показано на рис. 3, б. Определим угол, который образует реакция $\vec{R}_A$ с осью x; (ось х параллельна балке АВ);

$$\mathrm{OB} = CB, OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{10};$$
$$cos\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{\sqrt{10}};\ sin\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Составим теперь уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0$$

Для этого алгебраически сложим проекции всех сил на каждую координатную ось и приравняем к нулю полученные алгебраические суммы:

$$\sum X = R_c cos45° - R_A cos\alpha = 0$$
$$\sum Y = R_c sin45° - R_A sin\alpha - F = 0$$

Решая эти уравнения, находим $R_A = 7{,}9\ \text{т}$ $R_C = 10{,}6\ \text{т}$ $R_D = R_C$

Задача 4. Из трех прикрепленных к вертикальной стене стержней АО, ВО и СО стержни АО и ВО расположены в горизонтальной плоскости и образуют со стеной угол α=60°, а стержень СО образует со стеной угол β=30° (рис. 4, а). Стержни прикреплены к стене шарнирами и скреплены шарниром в точке О, к которой прикреплен груз Q весом P=300 Н. Определить усилия, действующие вдоль стержней АО, ВО и СО.

Решение. Выбираем тело, равновесие которого будем рассматривать. Таким телом будет узел, или точка, О. Эта точка несвободна; связями служат стержни АО, ВО и СО. Отбросим эти стержневые связи и заменим их действие на точку О силами реакций $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B \vec{S}_C$, линии действия которых направлены вдоль стержней АО, ВО и СО. Кроме этих трех сил, к узлу О приложена еще реакция $\vec{\mathrm{T}}$ веревки, на которой подвешен груз Q, равная по модулю весу $\vec{\mathrm{P}}$ груза Q. В точке О, таким образом, сходятся четыре силы: $\vec{\mathrm{T}}$, $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$ и $\vec{S}_C$.

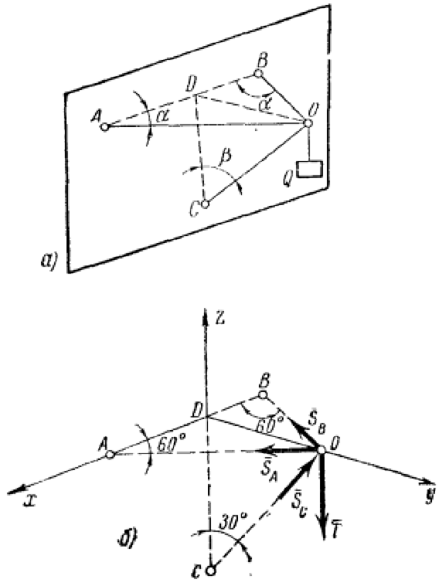


Рис. 4

Выберем оси координат, как показано на рис. 4, б, совместив плоскость yOz с плоскостью, в которой действуют силы $\vec{\mathrm{T}}$ и $\vec{S}_C$. При этом силы $\vec{S}_A$ и $\vec{S}_B$ будут лежать в координатной плоскости xOy.

Составим теперь уравнения равновесия пространственной системы сходящихся сил: $\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum Z = 0$

Для этого алгебраически сложим проекции всех сил на каждую координатную ось и приравняем к нулю полученные алгебраические суммы:

$$\sum X = S_B cos60° - S_A cos60° = 0$$

$$\sum Y = -(S_A + S_B) cos30° + S_C cos60° = 0$$

$$\sum Z = -T + S_C cos30° = 0$$

Откуда $S_C = \frac{T}{cos30°} = 346\text{Н} \quad S_A = S_B = \frac{S_C cos60°}{cos30°} = 100\text{Н}$

СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону.

Линия действия равнодействующей двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных модулям этих сил.

Равнодействующая двух антипараллельных сил равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных модулям сил.

Задача 5. К телу в точках A и B (рис. 5) приложены две параллельные и направленные в одну сторону силы F_1=6 Н и F_2=3 Н. Определить модуль и линию действия равнодействующей, если расстояние между линиями действия данных сил l=6 м.

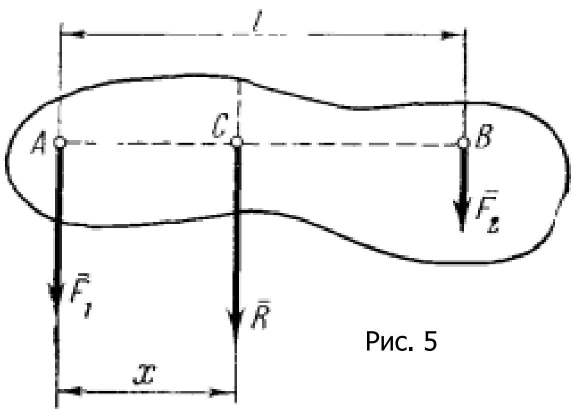


Рис. 5

Решение. Определим модуль равнодействующей:
$R=F_1+F_2=6+3=9$Н

Расстояние линии действия равнодействующей $\vec{R}$ от линии действия силы $\vec{F}_1$ обозначим через x. Тогда имеем

$$\frac{F_2}{x}=\frac{R}{l}$$

откуда находим

$$x = \frac{F_2 l}{R} = 2м$$

Задача 6. На твердое тело действуют две антипараллельные силы (рис. 6), причем известна одна из составляющих $\vec{F}_2$ и их равнодействующая $\vec{R}$. Определить модуль и точку приложения второй составляющей силы $\vec{F}_1$, если F_2=12Н, R=4Н и BC=6 м.

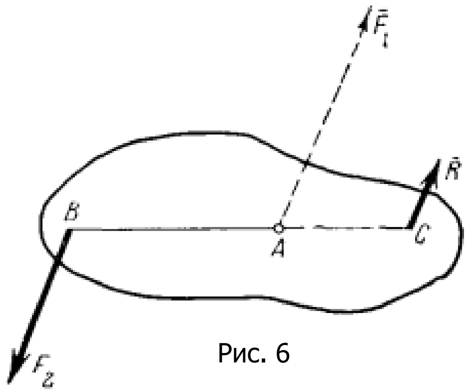


Рис. 6

Решение. Пусть А — точка приложения неизвестной нам силы $\vec{F}_1$, тогда найдем ее модуль и точку приложения:

$R=F_1 - F_2$, или $F_1 = R + F_2 = 16$ Н, и

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{R}{AB} \quad AB = \frac{R \cdot BC}{F_1} = 1{,}5м$$

ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

Пара сил – система двух равных по модулю параллельных друг другу и направленных в разные стороны сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, линии действия которых не совпадают

Вращательное действие пары на тело измеряется моментом пары. Численное значение момента пары определяется как произведение модуля одной из сил пары на плечо этой пары.

Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любой точки, лежащей в плоскости ее действия, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

Задача 7. На невесомую балку АВ длиной *l*, лежащую на двух опорах А и В, действует пара сил с заданным моментом М (рис. 7, а). Определить опорные реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$.

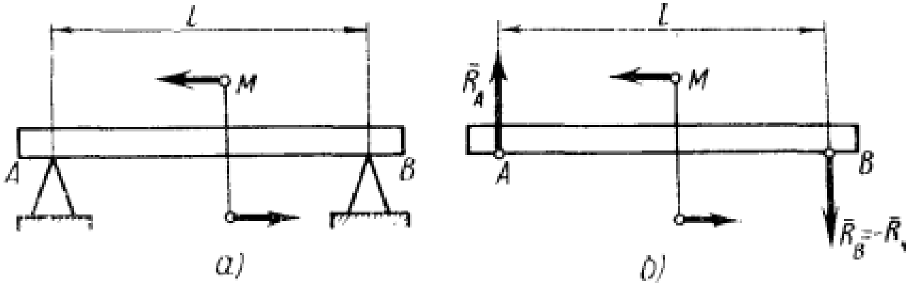


Рис. 7

Решение. Рассмотрим равновесие балки, заменив действие наложенных на нее связей реакциями связей (рис. 7, б). На балку действует пара сил с заданным моментом М, стремящаяся повернуть балку против часовой стрелки. Так как балка находится в равновесии, а пара может быть уравновешена только парой, то реакции опор $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ должны составлять пару $(\vec{R}_A, \vec{R}_B)$, вращающую балку в противоположную сторону, т. е. по часовой стрелке. Момент этой реактивной пары m $(\vec{R}_A, \vec{R}_B)$ =—$R_A l$. Согласно условию равновесия пар имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m(\vec{F}_i, \vec{F}_i') = M - R_A l = 0$$

Откуда

$$R_A = R_B = \frac{M}{L}$$

Задача 8. К валу приложена пара $(\vec{F}, \vec{F}')$ с моментом, стремящимся повернуть вал по часовой стрелке, равным 100 кН (рис. 8). К тормозному колесу диаметром 2r=50 см, которое заклинено на валу, прижаты тормозные колодки силами $\vec{Q}$ и $\vec{Q}'$, равными по величине. Найти величину этих сил, если известно, что между колодками и колесом возникают силы трения $F_{тр}$=kQ, где k=0,25 (коэффициент трения скольжения).

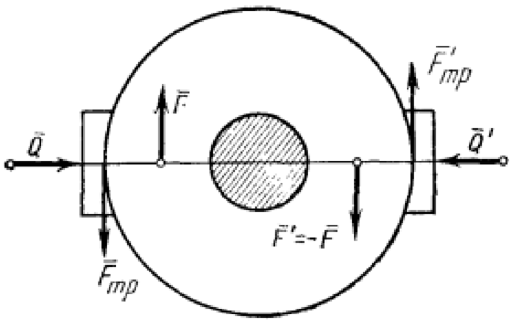


Рис. 8

Решение. Рассмотрим равновесие вала. Силы $\vec{Q}$ и $\vec{Q}'$ как взаимно уравновешенные можно отбросить. Тогда на вал будут действовать две пары $(\vec{F}, \vec{F}')$ и $(\vec{F}_{тр}, \vec{F}'_{тр})$. Так как вал находится в равновесии, то пара $(\vec{F}, \vec{F}')$должна быть уравновешена парой $(\vec{F}_{тр}, \vec{F}'_{тр})$ стремящейся повернуть вал против часовой стрелки. Момент этой реактивной пары m$(\vec{F}_{тр}, \vec{F}'_{тр})$=$F_{тр}$2r. Согласно условию равновесия пар

$$\sum m(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) = m(\vec{F}, \vec{F}') + m(\vec{F}_{тр}, \vec{F}'_{тр}) = -100 + F_{тр}2r = 0$$

Откуда $F_{тр} = \frac{100}{0,5} = 200\text{Н}$, но по условию $F_{тр}$=kQ, поэтому Q=800Н

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и .достаточно, чтобы одновременно и главный вектор, и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра приведения равнялись нулю.

Задача 9. На мостовую ферму (рис. 9) действуют вертикальные силы F_1=20 т и F_2=40 т соответственно на расстоянии 10 м и 40 м от левого конца фермы и горизонтальная сила F_3=30 т на уровне верхнего пояса фермы, высота фермы равна 6 м. Привести систему сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ к простейшему виду.

Решение. Проводим оси координат так, как показано на рис.9, взяв начало координат в точке А. Найдем проекции главного вектора заданной системы сил на оси выбранной системы координат:

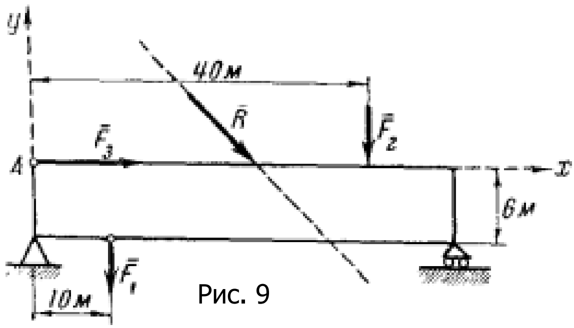


Рис. 9

$$R'_x = \sum X_i = F_3 = 30\text{т}\; R'_y = \sum Y_i = -F_1 - F_2 = -60\text{т}$$

откуда находим модуль главного вектора $\vec{R}'$:

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2} = 67{,}08\text{т} \neq 0$$

Найдем теперь главный момент заданной системы сил относительно начала координат А:

$$M_A = \sum m_A(\vec{F}_i) = \sum (x_i Y_i - y_i X_{i)} = -1800\text{тм} \neq 0$$

Теперь найдем линию действия равнодействующей. Момент равнодействующей $\vec{R}$ относительно начала координат А определится по формуле

$$m_A(\vec{R}) = xR_y - yR_x = -60ч - 30н$$

где x и y — координаты точки, лежащей на линии действия равнодействующей.

С другой стороны, по теореме Вариньона о моменте равнодействующей имеем

$$m_A(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_i) = -1800тм$$

Следовательно, — 60x — 30y = — 1800 т-м, или 2 x + y = 60.

Это и есть уравнение линии действия равнодействующей.

Полагая в этом уравнении y=0, находим, что точка пересечения линии действия равнодействующей R с верхним поясом фермы находится на расстоянии x=30 м от левого конца фермы. Полагая же y=—6 м, находим, что точка пересечения линии действия равнодействующей $\vec{R}$ с нижним поясом фермы находится на расстоянии x=33 м от левого конца фермы. Соединяя определенные таким образом точки пересечения линии действия равнодействующей $\vec{R}$ с верхним и нижним поясами фермы прямой линией, находим линию действия равнодействующей $\vec{R}$.

Задача 10. На концы прямолинейного рычага AB длиной *l*, закрепленного на шарнире O, действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, образующие с рычагом углы α_1 и α_2. Найти расстояние AO при равновесии рычага (рис. 10).

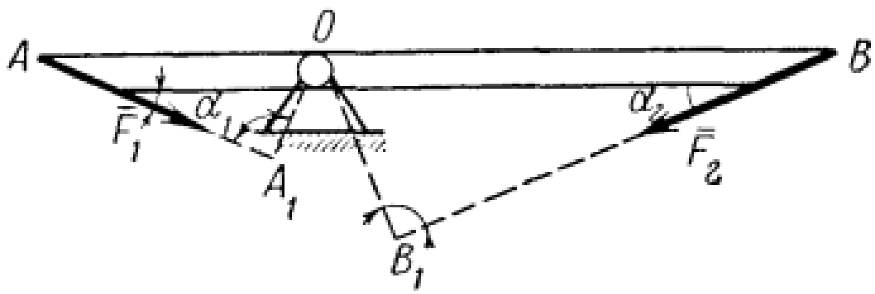


Рис. 10

Решение. Так как рычаг АВ находится в равновесии под действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, то алгебраическая сумма моментов этих сил относительно опоры О равна нулю, т. е.

$$m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2) = F_1 \cdot OA_1 - F_2 \cdot OB_1 = 0$$

где OA_1—плечо силы $\vec{F}_1$ относительно точки О, а OB_1— плечо силы $\vec{F}_2$ относительно той же точки О. Из треугольников OBB_1 и OAA_1 находим

$OA_1=OA\sin\alpha_1$ и $OB_1=OB\sin\alpha_2=(l-OA)\sin\alpha_2$

Подставив в уравнение равновесия, получим

$$OA = \frac{\vec{F}_2 l sin\alpha_2}{\vec{F}_1 sin\alpha_1 + \vec{F}_2 sin\alpha_2}$$

Задача 11. Литейный кран АВС имеет вертикальную ось вращения MN. Расстояние MN=5 м, АС=5 м, вес P_1 крана 2 т, центр тяжести его D находится от оси вращения на расстоянии 2 м, вес P_2 груза, подвешенного в точке С, равен 3 т. Найти реакции подшипника М и подпятника N (рис. 11, а).

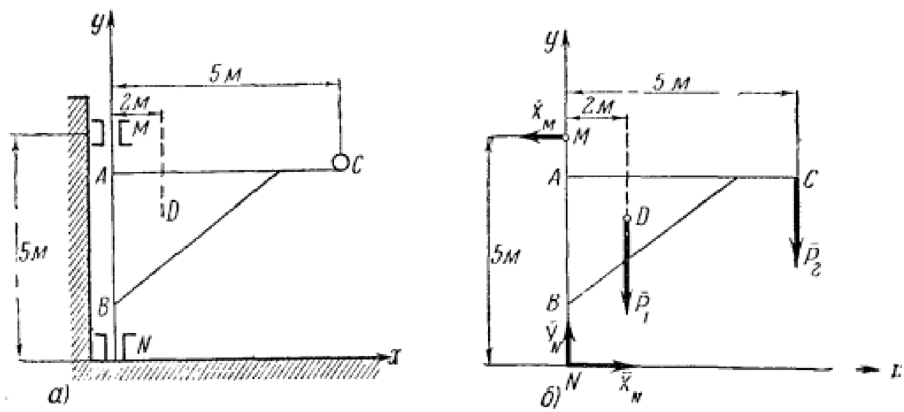


Рис. 11

Решение. Кран АВС является тем твердым телом, равновесие которого мы должны рассмотреть. Связями, наложенными на кран, являются подпятник N и подшипник M. Так как подпятник препятствует всякому поступательному перемещению крана, то его реакцию разложим на горизонтальную $\vec{X}_N$ и вертикальную $\vec{Y}_N$ составляющие. Подшипник, не препятствующий перемещению крана вдоль его оси, дает только одну горизонтальную реакцию $\vec{X}_M$, перпендикулярную к оси вращения крана. Так как давление крана на подшипник направлено, вправо, то реакция $\vec{X}_M$ направлена влево. Отбросим связи и заменим их действие на кран реакциями $\vec{X}_N, \vec{Y}_N, \vec{X}_M$(рис. 11 ,б).

Рассмотрим теперь равновесие крана как свободного твердого тела, на которое действуют активные силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ и силы реакций $\vec{X}_N$, $\vec{Y}_N$,$\vec{X}_M$. За центр моментов удобно взять точку N, так как через нее проходят линии действия двух неизвестных сил $\vec{X}_N$, $\vec{Y}_N$, и, следовательно, их моменты относительно этой точки будут равны нулю. При таком выборе центра моментов уравнение моментов будет содержать только одно неизвестное.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил в форме

$$\sum X_i = X_N - X_M = 0$$

$$\sum Y_i = Y_N - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum m_N(\vec{F}_i) = X_M \cdot 5 - P_1 \cdot 5 = 0$$

Из уравнений $Y_N = 5\text{т}$ $X_M = X_N = 3.8\text{т}$

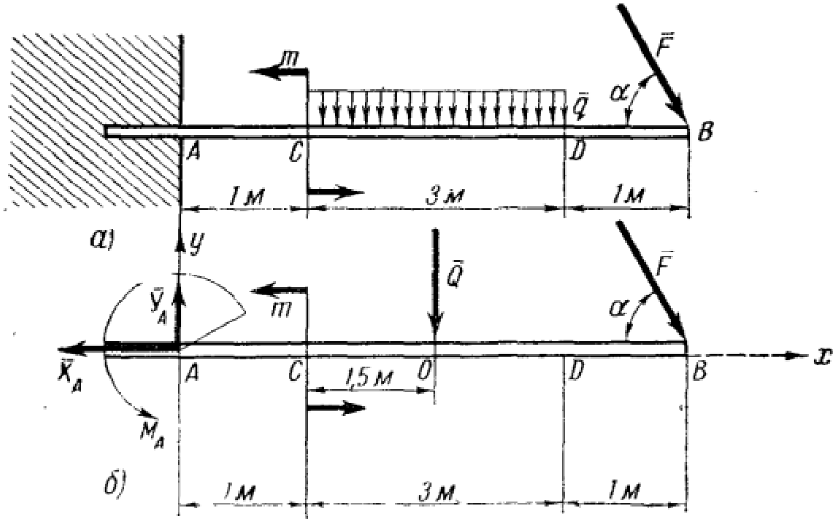


Рис. 12

Задача 12. На балку с защемленным концом действует на участке CD равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q=0,8т/м, в точке B действует сила F=2 т под углом α=45° к балке, кроме того, на балку действует пара сил с моментом m=1,2 тм. Определить реакции заделки. Размеры указаны на рис. 12, а.

Решение. Балка AB является тем телом, равновесие которого мы должны рассмотреть. К ней приложена сосредоточенная сила $\vec{F}$, пара сил с моментом m и силы, равномерно распределенные вдоль отрезка CD балки AB. Эта плоская система равномерно распределенных сил характеризуется ее интенсивностью q, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. В рассматриваемом случае интенсивность является величиной постоянной. При статических расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей $\vec{Q}$, т. е. сосредоточенной силой. По модулю эта равнодействующая равна Q = qCD = 0,8·3 = 2,4 т. При этом сила $\vec{Q}$ приложена в середине O отрезка CD.

Связью, наложенной на балку AB, является жесткая заделка A. Применяя принцип освобождаемости от связей к балке AB, заменим действие этой заделки на балку силами реакций $\vec{X}_A$,$\vec{Y}_A$ и реактивным моментом M_A (рис. 12, б). Рассмотрим теперь равновесие балки AB как свободного твердого тела, на которое действуют заданные силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментомm, а также неизвестные силы реакций $\vec{X}_A$,$\vec{Y}_A$ и пара сил в заделке с реактивным моментом M_A. Для составления уравнений равновесия этой произвольной плоской системы сил выбираем оси координат, как показано на рис. 72, б, и принимаем за центр моментов точку А.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил в форме

$$\sum X_i = Fcos\alpha - X_A = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - Fsin\alpha = 0$$

$$\sum m_N(\vec{F}_i) = M_A + m - Q \cdot OA - Fsin\alpha \cdot AB = 0$$

Из уравнений $X_A = 1.41\text{т}$ $Y_A = 3{,}81\text{т}$ $M_A = 11{,}87\text{т}$

Задача 13. Между опорами двухконсольной горизонтальной балки CD (рис. 13, а) приложена пара $(\vec{\text{P}}, \vec{\text{P}}')$, к левой консоли — равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q, а в точке D правой консоли — вертикальная нагрузка Q=4,6 т. Определить реакции опор, если P=P'=4 т, q=4т/м, a=2,5 м.

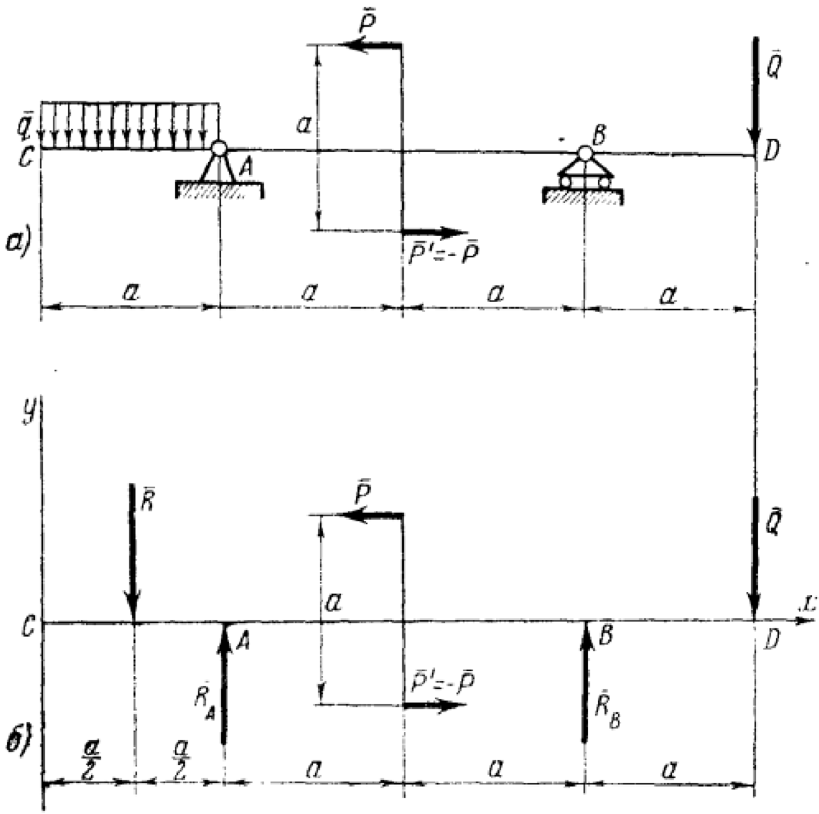


Рис. 13

Решение. Двухконсольная балка CD является тем телом, равновесие которого мы должны рассмотреть. К ней приложена пара сил $(\vec{P}, \vec{P}')$ с моментом m=Pa и две активные силы: в точке D сила $\vec{Q}$ и на середине левой консоли сила $\vec{R} = \vec{q} \cdot CA$, являющаяся равнодействующей равномерно распределенной нагрузки. Следовательно, все приложенные к балке CD активные силы являются вертикальными, так как пару сил $(\vec{P}, \vec{P}')$, не изменяя ее действия на балку, можно повернуть в плоскости рисунка так, чтобы составляющие пару $(\vec{P}, \vec{P}')$ силы $\vec{P}$ и $\vec{P}' = -\vec{P}$ были вертикальны.

Связями, наложенными на балку CD, являются подвижная шарнирная опора B и неподвижная шарнирная опора A. Отбросим эти связи и заменим их действие на балку CD силами реакций. Реакция $\vec{R}_B$ подвижной шарнирной опоры B нормальна к плоскости опоры. Так как все действующие на балку CD активные силы вертикальны, то реакция $\vec{R}_A$ неподвижной шарнирной опоры A также вертикальна. Рассмотрим теперь равновесие двухконсольной балки CD как свободного твердого тела, на которое действует указанная плоская система параллельных сил (рис. 13, б). Составим уравнений равновесия этой системы сил в форме равенств нулю суммы всех моментов относительно точек A и B

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = qa \cdot \frac{a}{2} + m + R_B \cdot 2a - Q \cdot 3a = 0$$

$$\sum m_N(\vec{F}_i) = qa\left(\frac{a}{2} + 2a\right) - R_{\text{А}} \cdot 2a + m - Qa = 0$$

Откуда $R_{\text{А}} = 11{,}5\text{т}$ $R_{\text{В}} = 2{,}5\text{т}$

Задача 14. На гладкой горизонтальной плоскости стоит переносная лестница, состоящая из двух частей AC и BC длиной 12 м, весом P=18 кГ каждая, соединенных шарниром C и веревкой EF. Расстояние BF=AE=2 м. Центр тяжести каждой из частей AC и BC находится в ее середине. В точке D на расстоянии CD = 1 м стоит человек, весящий Q=72 кГ. Определить реакции пола и шарнира C, а также напряжение T веревки EF, если ABAC=AABC=45° (рис. 14, а).

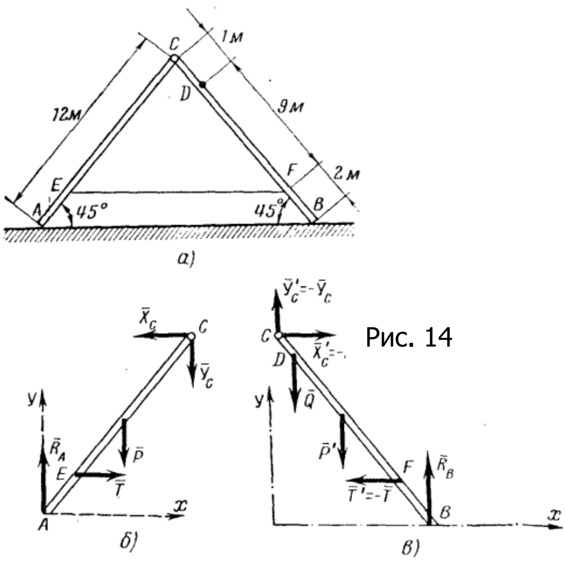


Рис. 14

Решение. Расчленяя сочлененную систему на две части, рас-

рассматриваем равновесие левой и правой половин лестницы в отдельности. Для этого освобождаем каждую часть от внешних и внутренних связей и намечаем реакции связей. На левую часть лестницы, если ее рассматривать как свободное тело (рис. 14, б), действуют активная сила $\vec{P}$, реакции $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$ шарнира С, реакция $\vec{T}$ веревки EF и реакция $\vec{R}_A$ горизонтальной плоскости. Составим уравнения равновесия для левой половины лестницы:

$$\sum X_i = -X_C + T = 0$$

$$\sum Y_i = R_A - Y_A - P = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = X_C \cdot ACsin45° - Y_C \cdot ACcos45° - P\frac{AC}{2}cos45°$$
$$-T \cdot AEsin45° = 0$$

На правую часть лестницы, если ее рассматривать как свободное тело (рис. 14, в), действуют активные силы $\vec{P}'$ и $\vec{Q}$, реакции $\vec{X}_C'$ и $\vec{Y}_C'$ шарнира С, реакция $\vec{T}'$ веревки EF и реакция $\vec{R}_B$ горизонтальной плоскости. При этом они должны быть направлены противоположно и равны по модулю.

Составим уравнения равновесия правой половины лестницы:

$$\sum X_i = X_C' - T' = 0$$

$$\sum Y_i = R_B + Y_C' - Q - P' = 0$$

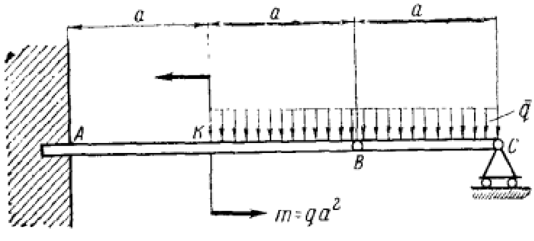
$$\sum m_B(\vec{F}_i) = -X_C' \cdot CBsin45° - Y_C' \cdot CBcos45° + Q \cdot BDcos45° + P'\frac{BC}{2}cos45°$$
$$-T' \cdot FBsin45° = 0$$

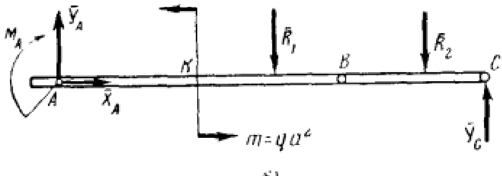
где $X_c = X_c',\ \ Y_c = Y_c',\ \ T = T',\ \ P = P'$

Решая систему этих шести уравнений равновесия, найдем

$$Y_C = 33\text{кГ},\ \ X_C = 50.4\text{кГ},\qquad T = 50.4\text{кГ},$$
$$R_A = 51\text{кГ},\ \ R_B = 57\text{кГ}$$

Задача 15. Дана сочлененная с помощью шарнира В система двух тел (рис. 15, а). Балка АВ имеет заделку в точке А, а балка ВС закреплена в точке С с помощью шарнирно-подвижной опоры. На сочлененную систему действуют силы, равномерно распределенные вдоль прямого отрезка СК, постоянной интенсивности q т/м и пара сил с моментом m=qa^2. Размеры тел указаны на рис. 15, а. Весом тел пренебречь. Определить реакции опор А и С.





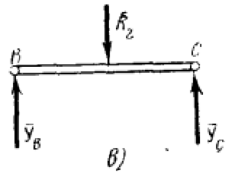


Рис. 15

Решение. Рассмотрим равновесие всей данной сочлененной системы в целом как свободного твердого тела. Для этого заменим распределенные силы сосредоточенными, а также отбросим все внешние связи и заменим их действие на сочлененную систему реакциями связей (рис. 15, б). Силы, равномерно распределенные вдоль прямолинейных отрезков КВ и ВС, соответственно заменим равнодействующими $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$.

По модулю $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$равны

$$R_1 = KB \cdot q = qa \quad R_2 = BC \cdot q = qa$$

а приложены силы $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ соответственно в середине отрезков КВ и ВС.

Таким образом, на сочлененную систему будут действовать заданные вертикальные силы $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, заданная пара с моментом m и реакции связей: силы реакции $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$и реактивная пара с моментом M_A заделки А, а также вертикальная реакция $\vec{Y}_C$ шарнирно-подвижной опоры С.

Всего будет четыре неизвестных $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, МА, $\vec{Y}_C$, а независимых уравнений равновесия для их определения можно составить только три. Поэтому данную сочлененную с помощью шарнира В систему двух тел расчленим по шарниру В, прикладывая к балке ВС в точке В внутреннюю вертикальную силу реакции $\vec{Y}_B$ (рис. 15, б). Таким образом, на правую часть будут действовать три вертикальные силы $\vec{Y}_B$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{R}_2$, из которых первая сила является новой неизвестной.

Составим уравнения равновесия для всей сочлененной системы в целом (рис. 15, б) в форме

$$\sum X_i = X_A = 0$$
$$\sum Y_i = Y_A - R_1 - R_2 + Y_C = 0$$
$$\sum m_A(\vec{F}_i) = -M_A + m - R_1 \cdot 1.5a - R_2 \cdot 2.5a + Y_C \cdot 3a = 0$$

Составим одно уравнение равновесия для балки ВС (рис. 15, в) в форме

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = Y_C\, a - R_2 \frac{a}{2} = 0$$

Решая систему, получим $Y_C = \frac{qa}{2}$, $X_A = 0$, $Y_A = 1.5qa$, $M_A = -1.5qa^2$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Задача 16. Определить реакции опор фермы и усилия в ее стержнях. К ферме приложена одна активная вертикальная сила $\vec{F}_1=2\vec{F}$.

Решение. Прежде чем приступить к определению усилий в стержнях фермы по способу вырезания узлов, определяют сначала опорные реакции. Это можно сделать или аналитически из трех уравнений равновесия, в которые, кроме заданных сил, войдут и опорные реакции, или графически — построением замкнутых силового и веревочного многоугольников. В данном случае горизонтальная составляющая реакции в неподвижной опоре равна нулю. Вертикальные реакции этого шарнира и подвижной опоры, вследствие полной симметрии, очевидно, равны между собой, и, следовательно, каждая из них равна по модулю $0,5F_1$илиF. Обозначим эти реакции через $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ (рис. 16, б).

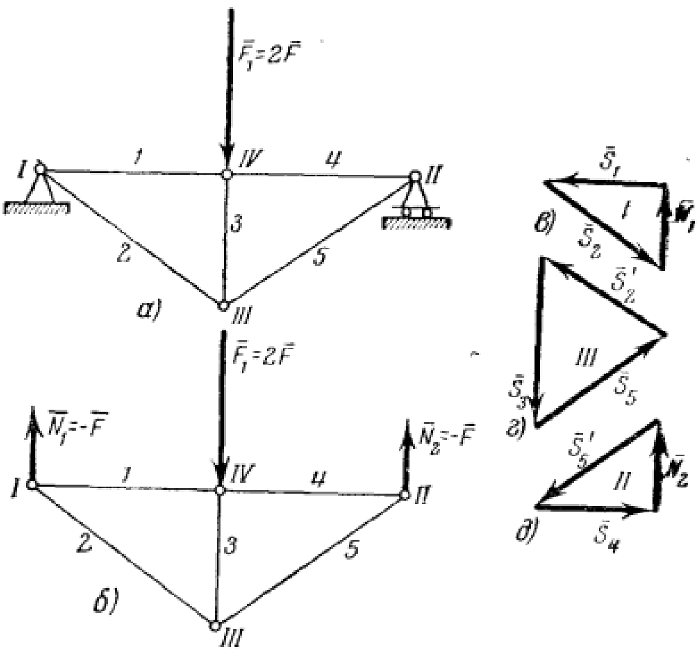


Рис. 16

Определив опорные реакции, переходим к вырезанию узлов. Вырежем сначала узел I. К этому узлу приложены три силы: известная опорная реакция $\vec{N}_1$ и две реакции $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ перерезанных стержней 1 и 2. Рассматривая эти силы как находящиеся в равновесии, строим для них замкнутый силовой треугольник (рис. 16, в). Для этого выбираем определенный масштаб сил и в этом масштабе из произвольно выбранной точки проводим вектор, изображающий известную силу $\vec{N}_1$. Из концов этого вектора проводим прямые, параллельные стержням 1 и 2, до их пересечения. Точка пересечения этих прямых определяет третью вершину силового треугольника, а длины его сторон определяют модули S_1 и S_2 реакций $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ стержней 1 и 2, равные искомым усилиям в этих стержнях (рис. 16, в). Так как направление силы $\vec{N}_1$ нам известно, то, обходя треугольник по периметру в направлении силы $\vec{N}_1$, расставим в нем стрелки и определим тем самым направление искомых реакций $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$. Если мысленно перенести векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ на стержни 1 и 2, сходящиеся в узле I, то заметим, что реакция $\vec{S}_1$ направлена по стержню 1 к этому узлу, следовательно, стержень 1 сжат; реакция же $\vec{S}_2$ направлена по стержню 2 от узла, следовательно, стержень 2 растянут. Обычно принято растягивающим усилиям условно приписывать знак «плюс», а сжимающим — знак «минус».

После узла I вырежем узел III. В этом узле сходятся стержни 3 и 5, реакции в которых еще неизвестны, и стержень 2, реакция которого уже найдена. Строим для этих трех сходящихся сил замкнутый силовой треугольник в том же масштабе (рис. 16, г). Построение этого силового треугольника нужно начинать с построения известных сил. При этом необходимо обратить внимание на то, что реакция $\vec{S}_2{}'$ стержня 2, приложенная к узлу III, очевидно, равна по модулю и направлена противоположно реакции $\vec{S}_2$ этого же стержня, приложенной к узлу I, т. е. $\vec{S}_2' = -\vec{S}_2$. Чтобы построить теперь силовой треугольник для узла III, проводим из произвольной точки вектор, изображающий известную силу $\vec{S}_2{}'$, далее из начала и конца вектора $\vec{S}_2{}'$ проводим прямые, параллельные стержням 5 и 3, до их пересечения. Длины сторон полученного замкнутого силового треугольника, параллельных стержням 3 и 5, определяют модули искомых усилий $\vec{S}_3$ и $\vec{S}_5$ в этих стержнях. Обходя этот силовой треугольник по его периметру в направлении известной силы$\vec{S}_2{}'$, находим направление сил $\vec{S}_3$ и $\vec{S}_5$. Так как вектор $\vec{S}_3$, как видим из чертежа, направлен к узлу III, то отсюда заключаем, что стержень 3 сжат. Вектор $\vec{S}_5{}'$ направлен от узла III, следовательно, стержень 5 растянут.

Остается рассмотреть узел II, в котором уравновешиваются известная опорная реакция $\vec{N}_2 = -\vec{F}$, известная реакция $\vec{S}_5'$ стержня 5 и неизвестная еще реакция $\vec{S}_4$ стержня 4. Строим для этих трех сходящихся сил замкнутый силовой треугольник (рис. 16, д) в том же масштабе и по тем же правилам, что и ранее. Так как вектор $\vec{S}_4$ направлен от узла II, то отсюда заключаем, что стержень 4 сжат. Вектор $\vec{S}_5'$ направлен от узла II, следовательно, стержень 5 растянут. Построением этих силовых треугольников заканчивается определение усилий во всех стержнях данной фермы.

К последнему узлу IV приложена заданная сила F_1и уже найденные реакции $\vec{S}_1'$, $\vec{S}_3'$и $\vec{S}_4'$стержней 1,3 и 4. Рекомендуется в целях контроля строить силовой треугольник и для последнего узла. При правильности произведенных ранее построений этот силовой треугольник, построенный для известных уже сил, должен получаться замкнутым.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Задача 17. Сила $\vec{F}$ расположена в плоскости ABCD, параллельной координатной плоскости Oxz, и наклонена к горизонту под углом α; при этом CB=a, OC=b (рис. 17). Определить момент силы $\vec{F}$ относительно каждой оси координат.

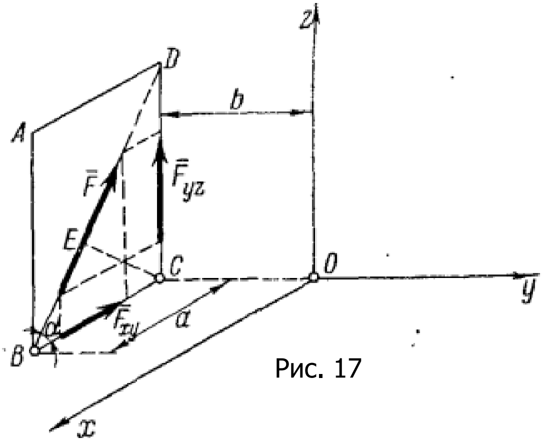


Рис. 17

Решение. Найдем момент $m_x(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси x. Для вычисления $m_x(\vec{F})$ проектируем силу $\vec{F}$ на плоскость Oyz; получаем $F_{xy} = Fsin\alpha$.

Плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки O равно Ь, а поворот ее с конца оси x виден происходящим по ходу часовой стрелки, следовательно $m_x(\vec{F}) = -bFsin\alpha$

Найдем теперь момент $m_y(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси y. Так как сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси y, то $m_y(\vec{F}) = -F \cdot asin\alpha$

Найдем момент $m_z(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси z. Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость xy равна $F_{xy} = Fcos\alpha$, а ее плечо относительно точки O равно Ь. Поворот силы $\vec{F}_{xy}$ с конца оси z виден происходящим по ходу часовой стрелки, следовательно: $m_z(\vec{F}) = -F \cdot bcos\alpha$.

Задача 18. В плоскости ABCD, параллельной координатной оси z, расположена сила F, образующая с вертикалью угол φ (рис. 18). При этом AE=n; DE=m. Определить моменты силы $\vec{F}$ относительно координатных осей.

Решение. Момент $m_x(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси x равен нулю, так как линия действия силы F пересекает ось x.

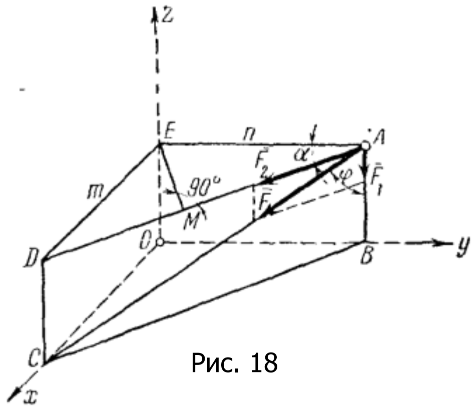


Рис. 18

Найдем момент $m_y(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси y. Получим результат аналитически по формуле $m_y(\vec{F}) = zX - xZ$.

Проекция Z силы $\vec{F}$ на ось z$Z = — Fcos\varphi$-

Однако проекцию X силы $\vec{F}$ на ось Ox определить значительно труднее, поэтому нужно стремиться к тому, чтобы в формуле исчез член, содержащий X. Для этого выбираем на линии действия силы $\vec{F}$ точку C, для которой x=m, z=0. Тогда $m_y(\vec{F}) = -m(-Fcos\varphi) = Fmcos\varphi$

Найдем теперь момент $m_z(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно оси Oz. Для нахождения $m_z(\vec{F})$ воспользуемся разложением силы $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. При этом $m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_1) + m_z(\vec{F}_2)$

Так как сила $\vec{F}_1$ параллельна оси Oz, то $m_z(\vec{F}_1) = 0$. Сила $\vec{F}_2$ лежит в плоскости ADE, перпендикулярной к оси Oz, а потому $m_z(\vec{F}) = -Fsin\varphi\frac{nm}{\sqrt{n^2+m^2}}$.

Задача 19. Систему двух сил .F_1=8 кГ, направленную по оси Oz, и F_2=12 кГ, направленную параллельно оси Oy, как указано на рис. 19, где OB = 1,3м, требуется привести к простейшему виду, определив главный вектор $\vec{R}'$ и вектор-момент динамы $\overrightarrow{\mathrm{M}}$. Найти координаты x и y точки пересечения центральной оси с плоскостью Oxy.

Решение. За центр приведения возьмем точку O, которую примем за начало координат; координатные оси Ox, Oy, Oz направим так, как показано на рис. 19. Чтобы определить для данной системы сил главный вектор $\vec{R}'$ и главный вектор-момент $\overrightarrow{\mathrm{M}_O}$ относительно точки O, найдем проекции этих векторов на координатные оси. Для проекций главного вектора $\vec{R}'$ на координатные оси имеем

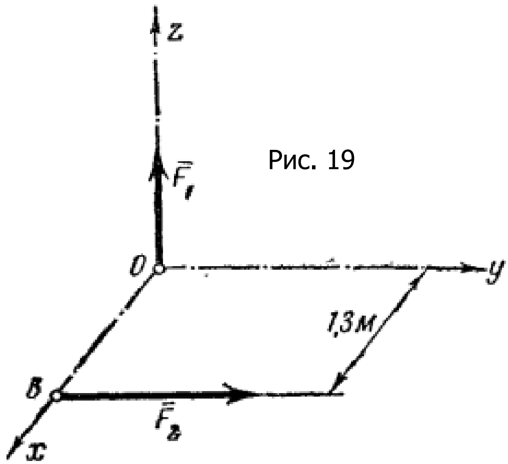


Рис. 19

$$R'_x = \sum X_i = 0\; R'_y = \sum Y_i = 12\; R'_z = \sum Z_i = 8$$

Так как точка приложения силы $\vec{F}_2$ лежит на оси Ox и сила $\vec{F}_2$ параллельна оси Oy , а точка приложения силы $\vec{F}_1$ лежит на осях Ox и Oy и сила $\vec{F}_1$ направлена вдоль оси Oz, то

$$m_x(\vec{F}_2) = m_y(\vec{F}_2) = 0 \quad m_z(\vec{F}_2) = 12 \cdot 1.3 = 15.6$$
$$m_x(\vec{F}_1) = m_y(\vec{F}_1) = m_z(\vec{F}_1) = 0$$

а поэтому для проекций главного вектора-момента $\overrightarrow{\mathrm{M}_O}$ на координатные оси имеем

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_i) = 0\; M_y = \sum m_y(\vec{F}_i) = 0$$
$$M_z = \sum m_z(\vec{F}_i) = 15.6$$

По найденным проекциям главного вектора $\vec{R}'$ определим его модуль и направляющие косинусы:

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 15.6$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M}}_o, \vec{\mathrm{i}}}\right) = \frac{M_x}{M_o} = 0 \quad \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M}}_o, \vec{\mathrm{j}}}\right) = \frac{M_y}{M_o} = 0$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M}}_o, \vec{\mathrm{k}}}\right) = \frac{M_z}{M_o} = 1$$

Так как главный вектор $\vec{R}'$ данной системы сил не равен нулю, то эта система не может быть приведена к одной паре. Поэтому остается установить, приводится ли система, состоящая из главного вектора $\vec{R}'$, приложенного в точке O, и пары с вектором-моментом, равным главному вектору-моменту $\overrightarrow{\mathrm{M}}_o$ к равнодействующей или к динаме. Для этого составим выражение для второго инварианта:

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_o = R_x'^{M_x} + R_y'^{M_y} + R_z'^{M_z} = 8 \cdot 15.6 = 124.8 \neq 0$$

Так как второй инвариант нулю не равен, то главный вектор-момент $\overrightarrow{\mathrm{M}}_o$ не перпендикулярен к главному вектору $\vec{R}'$, и, следовательно, данная система из двух сил приводится к динаме (рис. 20, а).

Чтобы найти положение центральной оси, составим уравнения

$$\frac{-8y + 12z}{0} = \frac{8x}{12} =$$
$$= \frac{15.6 - 12x}{8}$$

или

3y - 2z = 0 x=0.9

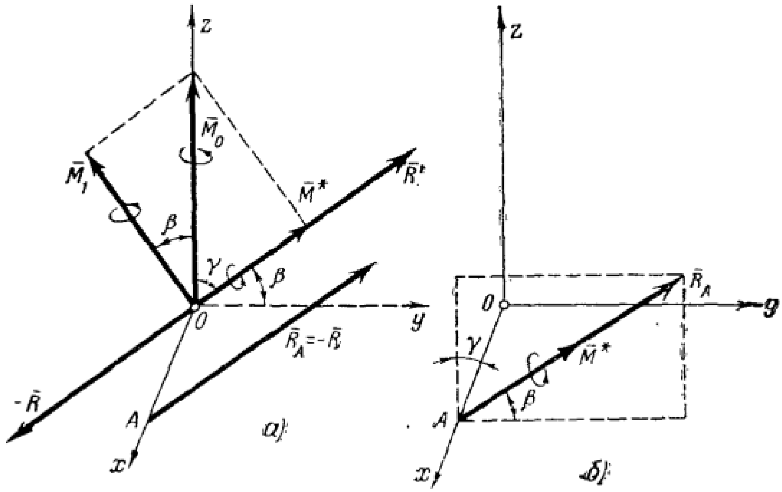


Рис. 20

Если положим в этих уравнениях z=0, то найдем координаты точки А пересечения центральной оси с координатной плоскостью xOy (рис. 20, а) :

x = 0,9; y = 0; z = 0.

Найдем модуль М вектора-момента $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ данной системы сил относительно любой точки, лежащей на центральной оси (наименьший главный вектор-момент). Разложим по правилу параллелограмма главный вектор-момент $\overrightarrow{\mathrm{M}}_o$ относительыоточки О на две составляющие (рис. 20, а): $\overrightarrow{\mathrm{M}}$, параллельную$\vec{R}'$, и $\overrightarrow{M}_1$,перпендикулярную $\vec{R}'$. Первая составляющая является искомым наименьшим главным вектором-моментом. Проекция главного вектора, момента $\overrightarrow{\mathrm{M}}_o$ на направления главного вектора $\vec{R}'$ определяется по формуле

$$M = M_o \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M}}_o, \vec{R}'}\right) = \frac{R' M_o \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M}}_o, \vec{R}'}\right)}{R'} = \frac{\vec{R}' \cdot \overrightarrow{M}_o}{R'}$$

Подставляя сюда найденное значение второго инварианта $\vec{R}' \cdot \vec{M}_o$ и модуля главного вектора, получим

$$M = \frac{124.8}{14.4} = 8.65\text{кГм}$$

Так как в данном случае $\vec{R}' \cdot \vec{M}_o > 0$, то параллельные векторы $\vec{R}' = \vec{R}_A$ и $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ направлены в одну сторону.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Центр тяжести твердого тела обладает тем свойством, что через него проходит линия действия равнодействующей параллельных сил тяжести отдельных его частиц, независимо от расположения тела в пространстве.

Координаты центра тяжести тела массы M

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Задача 20. Определить положение центра тяжести площади круглой пластины радиуса R, с вырезом в виде прямоугольника со сторонами a и b (рис. 21).

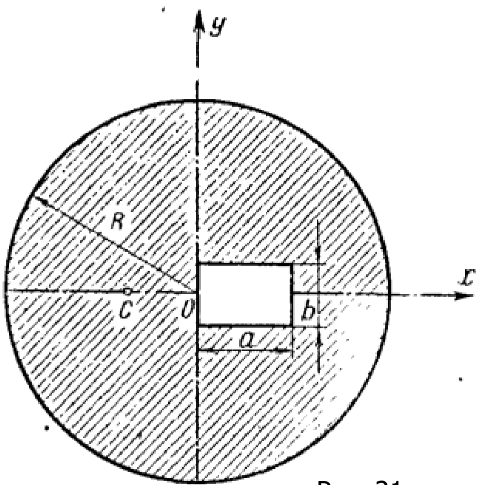


Рис. 21

Решение. Так как пластина с вырезом имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси. Выбираем начало координат в точке O (рис. 21) и направляем ось Ox по оси симметрии. Для нахождения координаты x_c центра тяжести площади пластины с вырезом дополняем площадь этой пластины до полного круга.

Площадь полного круга $S_o = \pi R^2$; центр тяжести этого круга совпадает с началом координат O, следовательно, абсцисса этого центра x_o=0.

Площадь вырезанного прямоугольника $S_1 = ab$; абсцисса центра тяжести площади этого прямоугольника $x_1 = \frac{a}{2}$. Найдем абсциссу центра тяжести площади данной круглой пластины с вырезом:

$$x_c = \frac{S_o x_o - S_1 x_1}{S_o - S_1} = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - ab\frac{a}{2}}{\pi R^2 - ab} = -\frac{a^2 b}{2(\pi R^2 - ab)}$$