



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Сопротивление материалов»

## Практикум

по выполнению расчетно-графической работы  
на тему

# «Расчет на устойчивость сжатых стержней»

Автор  
Бондаренко В.П.

Ростов-на-Дону, 2018

## Аннотация

Практикум содержит основные теоретические положения, примеры решения типовых задач и порядок выполнения студентами расчетно-графической работы на тему «Расчет на устойчивость сжатых стержней» по дисциплинам сопротивление материалов, техническая механика, архитектурно-строительная механика, теоретическая и прикладная механика, строительная механика.

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям 08.03.01 «Строительство»; 07.03.02 «Реконструкция и реставрация архитектурного наследия»; 07.03.01 «Архитектура»; 07.03.04 «Градостроительство»; 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»; 29.03.04 «Технология художественной обработки материалов» и специальностям 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»; 21.05.01 «Прикладная геодезия»; 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

## Автор

к.т.н.,                      доцент                      кафедры  
«Сопротивление                      материалов»  
Бондаренко В.П.





## Оглавление

<b>УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО ГИБКОГО СТЕРЖНЯ .....</b>	<b>4</b>
Тема 1. Основные теоретические положения .....	4
Тема 2. Примеры расчета сжатых стержней на устойчивость.....	9
Контрольные вопросы .....	20
Рекомендуемая литература.....	20

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО ГИБКОГО СТЕРЖНЯ

### Тема 1. Основные теоретические положения

Во многих случаях проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность бывает недостаточно для того, чтобы получить полное представление о работе сооружения.

Это вызвано тем, что наряду с проблемой прочности существует проблема *устойчивости* сооружения или его элементов.

Определение. Устойчивость есть свойство сооружения оказывать сопротивление посторонним случайным воздействиям и самостоятельно восстанавливать свое положение и форму равновесия в деформированном состоянии, когда случайные воздействия исчезают.

Переход сооружения из устойчивого состояния в неустойчивое часто называют потерей устойчивости. Границу этого перехода называют критическим состоянием сооружения, а соответствующие нагрузки – критическими.

Определение. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого прямого стержня называется продольным изгибом.

Определение. Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы  $F$ , при которой первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой  $F_{кр}$ .

Идеально прямой гибкий стержень из упругого материала, нагруженный центрально приложенной сжимающей силой, при постепенном возрастании этой силы может находиться в нескольких состояниях.

1. Величина сжимающей силы  $F$  меньше некоторого значения  $F_{кр}$ .

В этом случае, если стержень отклонить от прямолинейного состояния равновесия какой-либо поперечной нагрузкой (рис. 1, *а*), то после прекращения действия поперечной нагрузки, стержень под действием сил упругости вернется в исходное состояние равновесия, то есть прямолинейная форма равновесия в этом случае является устойчивой.

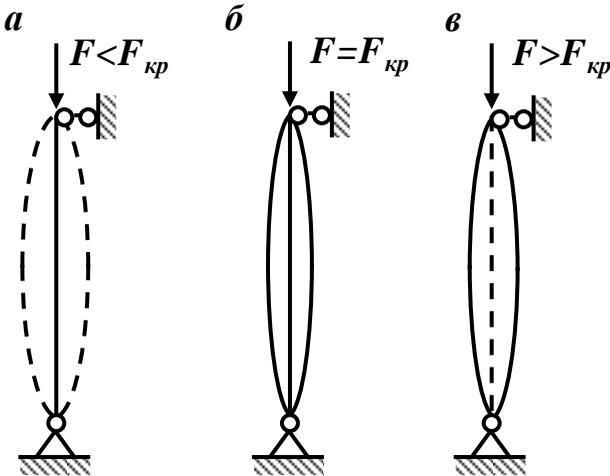


Рис. 1

2. Величина сжимающей силы  $F$  равна критической силе  $F_{кр}$ .

В идеальном случае стержень может оставаться прямолинейным, но при отклонении его дополнительной поперечной нагрузкой, он остается в изогнутом положении после прекращения действия этой нагрузки. Таким образом, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и стержень легко может перейти в другую, криволинейную форму равновесия (рис. 1, б).

3. Величина сжимающей силы  $F$  больше  $F_{кр}$ .

Стержень искривляется без какого-либо дополнительного воздействия на него. Прямолинейная форма устойчивого равновесия сменяется криволинейной, то есть стержень теряет устойчивость исходной (первоначально заданной) формы равновесия (рис. 1, в). При этом происходит резкое нарастание прогибов и возникают значительные дополнительные деформации и напряжения изгиба.

Величина критической силы в стержнях, материал которых работает в пределах пропорциональности, то есть подчиняется закону Гука, определяется по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}, \quad (1)$$

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

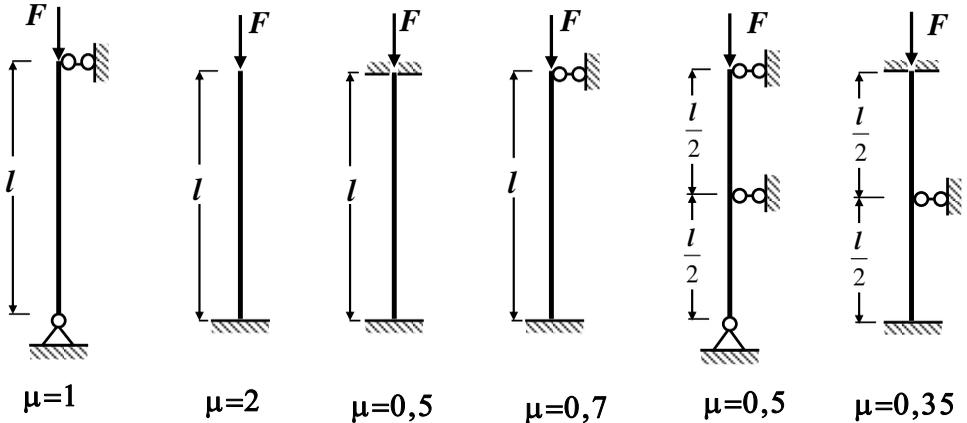
где

$E$  – модуль продольной упругости;

$J_{min}$  – минимальный момент инерции;

$l_0 = \mu \cdot l$  называется приведенной длиной стержня;

$\mu$  – коэффициент приведения длины, величина которого зависит от типа и расположения опор (рис. 2).



**Рис. 2**

При одинаковом способе закрепления концов стержня в главных плоскостях инерции и неодинаковых значениях моментов инерции относительно главных центральных осей, стержень теряет устойчивость в плоскости наименьшей жесткости.

Нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня от действия критической силы, также называются критическими. Величина критического напряжения, материал которого работает в пределах упругости (подчиняется закону Гука), определяется по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (2)$$

называемой формулой Эйлера для определения критического напряжения.

Здесь

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

$A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Величина  $\lambda$  называется гибкостью стержня и для стержней, имеющих одинаковый способ закрепления концов в главных плоскостях инерции, определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}, \quad (3)$$

где

$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

Формулы (1) и (2) называются формулами Эйлера для определения критической силы и критического напряжения.

Они применимы при условии  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{шт}$  (критическое напряжение не превышает предела пропорциональности), что эквивалентно условию

$$\lambda \geq \lambda_{пред},$$

где

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{шт}}} \text{ – предельная гибкость материала.}$$

Если при потере устойчивости материал стержня работает за пределом упругости, то есть  $\lambda < \lambda_{пред}$ , то величина критического напряжения и критической силы определяется по эмпирическим формулам Ф.С. Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b \lambda; \quad F_{кр} = A(a - b \lambda), \quad (4)$$

где

$a$  и  $b$  – коэффициенты Ясинского, значения которых для различных материалов определяются опытным путем.

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

Так, для низкоуглеродистой стали с пределом пропорциональности  $\sigma_{\text{шт}} = 200 \text{ МПа}$ ,  $a = 310 \text{ МПа}$  и  $b = 1,14 \text{ МПа}$ ; а для дерева  $a = 40 \text{ МПа}$  и  $b = 0,203 \text{ МПа}$ .

Расчет сжатых стержней на устойчивость по методу допускаемых напряжений ведется по условию устойчивости

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma], \quad (5)$$

где

$\sigma_{\text{расч}}$  – расчетное напряжение;

$\varphi$  – коэффициент продольного изгиба, величина которого определяется по таблицам СНиПа в зависимости от гибкости и материала стержня.

Подбор размеров сечения сжатого стержня ведется по формуле

$$A \geq \frac{F}{\varphi [\sigma]} \quad (6)$$

методом последовательных приближений, задаваясь первоначально произвольным значением коэффициента  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 1$ ).

Обычно в первом приближении принимается  $\varphi = 0.5$ .

Допускаемая нагрузка ( $[F]$ ) на стержень определяется из условия устойчивости (5)

$$[F] = \varphi A [\sigma], \quad (7)$$

Коэффициент запаса устойчивости стержня можно определить как отношение критической силы к допускаемой силе

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]}. \quad (8)$$

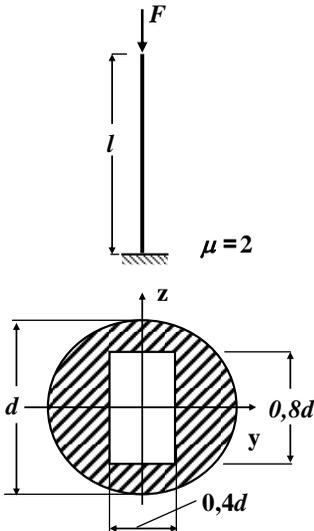
## Тема 2. Примеры расчета сжатых стержней на устойчивость

### 2.1. Задача 1. Расчет на устойчивость деревянного стержня

Исходные данные:

$$F = 110 \text{ кН}; \quad l = 1,7 \text{ м} = 170 \text{ см}; \quad [\sigma] = 10 \text{ МПа} = 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

кН



**Требуется:**

1. Подобрать размеры поперечного сечения деревянного стержня

(рис. 3) из условия устойчивости при допуссаемом нормальном напряжении на сжатие  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .

Расчет производить по коэффициенту продольного изгиба  $\varphi$  методом последовательных приближений.

Если при расчете деревянной стойки ее гибкость в первом приближении окажется меньше **20**, необходимо проектную длину стойки увеличить в два раза, а при гибкости более **150** – уменьшить в два раза.

Окончательные размеры сечения деревянных стоек округлить в большую сторону до размеров кратных **0,5 см**.

**Рис.3**

2. Определить величину критической силы по соответствующим формулам. Принять модуль упругости для дерева  $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ , а коэффициенты Ясинского для дерева:  $a = 40 \text{ МПа}$ ;  $b = 0,203 \text{ МПа}$ .

3. Найти значения допускаемой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости.

**Решение**

**1. Подбор размеров поперечного сечения стержня методом последовательных приближений**

Зададим в I приближении значение коэффициента  $\varphi_1 = 0,5$ , так как  $0 < \varphi \leq 1$

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

**I приближение:**  $\varphi_1 = 0,5$ .

Площадь поперечного сечения стержня из условия устойчивости

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{110 \text{ кН}}{0,5 \cdot 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 220 \text{ см}^2$$

Выразим площадь поперечного сечения стержня через диаметр  $d$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} - 0,8d \cdot 0,4d = 0,465d^2$$

Тогда

$$d = \sqrt{\frac{A}{0,465}} = \sqrt{\frac{220 \text{ см}^2}{0,465}} = 21,751 \text{ см} = 21,8 \text{ см}$$

Определим моменты инерции поперечного сечения стержня и выберем минимальный момент инерции

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{0,4d \cdot (0,8d)^3}{12} = 0,0320d^4 ;$$

$$J_z = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{(0,4d)^3 \cdot 0,8d}{12} = 0,0448d^4 \rightarrow J_{\min} = J_y$$

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,0320d^4}{0,465d^2}} = 0,262d$$

Гибкость стержня в плоскости наименьшей жесткости

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 170 \text{ см}}{0,262d} = \frac{1297,70 \text{ см}}{d} = \frac{1300 \text{ см}}{d} = \frac{1300 \text{ см}}{21,8 \text{ см}} = 59,633 = 59,6$$

Значение  $\varphi$  для дерева можно определить по формулам СНиП II-25-80

$$\varphi = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad \text{если } \lambda \leq 70; \quad \varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \quad \text{если } \lambda \geq 70.$$

Так как  $\lambda = 59,6 \leq 70$ , то

$$\varphi_1' = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2 = 1 - 0,8 \left( \frac{59,6}{100} \right)^2 = 0,7158 = 0,716$$

Поскольку  $|\varphi_1' - \varphi_1| = |0,716 - 0,5| = 0,216 > 0,02$ , то переходим к следующему приближению.

**II приближение:**

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,716}{2} = 0,608$$

$$A \geq \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{110 \text{ кН}}{0,608 \cdot 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 180,92 \text{ см}^2 = 181 \text{ см}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{A}{0,465}} = \sqrt{\frac{181 \text{ см}^2}{0,465}} = 19,729 \text{ см} = 19,7 \text{ см}$$

$$\lambda = \frac{1300 \text{ см}}{d} = \frac{1300 \text{ см}}{19,7 \text{ см}} = 65,9898 = 66,0$$

Так как  $\lambda = 66,0 \leq 70$ , то

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

$$\varphi'_2 = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2 = 1 - 0,8 \left( \frac{66,0}{100} \right)^2 = 0,6515 = 0,652$$

Поскольку  $|\varphi'_2 - \varphi_2| = |0,652 - 0,608| = 0,044 > 0,02$  ;  
переходим к следующему приближению.

**III приближение:**

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,608 + 0,652}{2} = 0,63$$

$$A \geq \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{110 \text{ кН}}{0,63 \cdot \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 174,603 \text{ см}^2 = 175 \text{ см}^2 ;$$

$$d = \sqrt{\frac{A}{0,465}} = \sqrt{\frac{175 \text{ см}^2}{0,465}} = 19,3996 \text{ см} = 19,4 \text{ см} ;$$

$$\lambda = \frac{1300 \text{ см}}{d} = \frac{1300 \text{ см}}{19,4 \text{ см}} = 67,010 = 67,0$$

Так как  $\lambda = 67,0 \leq 70$  , то

$$\varphi'_3 = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2 = 1 - 0,8 \left( \frac{67,0}{100} \right)^2 = 0,64088 = 0,641$$

Поскольку  $|\varphi'_3 - \varphi_3| = |0,641 - 0,63| = 0,0011 < 0,02$  ,  
расчет заканчиваем и проверяем выполнение условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{\varphi'_3 A} = \frac{110 \text{ кН}}{0,641 \cdot 175 \text{ см}^2} = 0,9806 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 0,981 \cdot 10 \text{ МПа} = 9,81 \text{ МПа} < [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Стержень недогружен. Определяем величину недогрузки

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{10 - 9,81 \text{ МПа}}{10 \text{ МПа}} \cdot 100\% = 1,9\% < 5\%$$

Недогрузка в пределах 5%, поэтому подбор размеров сечения окончен.

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

Принимаем  $d \approx 19,5\text{см}$ ;  $A = 175\text{ см}^2$ ;  $\lambda = 67, 0$ ;  
 $\varphi = \varphi'_3 = 0, 641$ .

## 2. Вычисление величины критической силы

Так как гибкость стержня ( $\lambda = 67$ ) меньше предельной гибкости для дерева ( $\lambda_{\text{пред}} = 70$ ), то критическую силу определяем по формуле Ф.С. Ясинского

$$F_{\text{кр}} = A(a - b\lambda) = 175\text{ см}^2 \left( 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} - 0, 0203 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 67 \right) = 461, 983\text{кН} = 462\text{кН}$$

Напоминаем, что для дерева

$$a = 40\text{ МПа} = 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \quad b = 0, 203\text{ МПа} = 0, 0203 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

## 3. Определение допустимой нагрузки и коэффициента запаса на устойчивость

Допускаемая нагрузка  $[F]$  на стержень будет равна

$$[F] = \varphi A[\sigma] = 0, 641 \cdot 175\text{ см}^2 \cdot 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 112, 175\text{ кН} = 112\text{ кН}$$

Коэффициент запаса на устойчивость по допустимой нагрузке равен

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{462\text{ кН}}{112\text{ кН}} = 4, 13$$

## 2.2. Задача 2. Расчет на устойчивость стального стержня

### Исходные данные:

$$F = 300 \text{ кН}; \quad l = 7,0 \text{ м}; \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа} =$$

$$\frac{\text{кН}}{16 \text{ см}^2}.$$

### Требуется:

1. Подобрать сечение стального стержня, составленного из прокатных профилей (рис. 4), из условия устойчивости при допустимом нормальном напряжении на сжатие  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Расчет производить по коэффициенту продольного изгиба  $\varphi$  методом последовательных приближений.

Если при расчете стальной стойки её гибкость в первом приближении окажется меньше **40**, необходимо проектную длину стойки увеличить в два раза, а при гибкости более **200** – уменьшить в два раза.

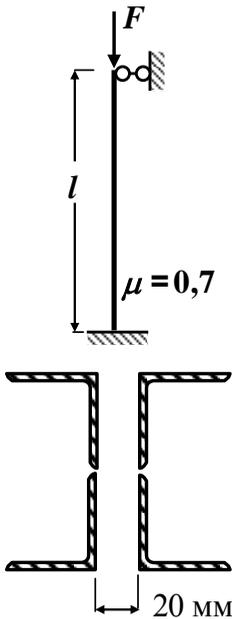


Рис.4

2. Определить величину критической силы по соответствующим формулам. Принять модуль упругости для стали  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , а коэффициенты Ясинского для стали:  $a = 310 \text{ МПа}$ ;  $b = 1.14 \text{ МПа}$ .

3. Найти значения допустимой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости.

### Решение

1. **Подбор размеров поперечного сечения стержня методом последовательных приближений**

Зададим в I приближении значение коэффициента  $\varphi_1 = 0,5$ , так как  $0 < \varphi \leq 1$ .

**I приближение:**  $\varphi_1 = 0,5$ .

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

Площадь поперечного сечения стержня, состоящего из четырех равнополочных уголков, из условия устойчивости будет равна

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{300 \text{ кН}}{0,5 \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 37,5 \text{ см}^2$$

Площадь сечения одного уголка

$$A_1 = \frac{A}{4} = \frac{37,5 \text{ см}^2}{4} = 9,375 \text{ см}^2$$

По сортаменту прокатных профилей подбираем равнополочный уголок с площадью, наиболее близко подходящей к расчетной. Выбираем уголок  $70 \times 70 \times 7$ , так как его площадь

$$A_1 = 9,42 \text{ см}^2; \quad b = 7 \text{ см}; \quad J_{z_1}^{yr} = J_{y_1}^{yr} = 42,98 \text{ см}^4; \\ z_0 = 1,99 \text{ см}$$

Вычислим моменты инерции сечения относительно главных центральных осей (рис.5).

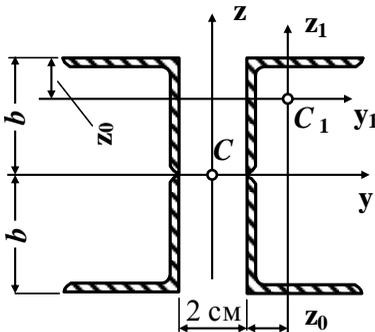


Рис. 5

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

$$J_y = 4(J_{y_1}^{yT} + A_1(\mathbf{b} - \mathbf{z}_0)^2) = 4(42,98 + 9,42(7 - 1,99)^2) = 1118$$

$$J_z = 4(J_{z_1}^{yT} + A_1(1 + \mathbf{z}_0)^2) = 4(42,98 + 9,42(1 + 1,99)^2) = 509$$

 см<sup>4</sup>;

$$J_{min} = J_z = 509 \text{ см}^4$$

Вычисляем минимальный радиус инерции сечения

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{J_z}{4A_1}} = \sqrt{\frac{509 \text{ см}^4}{4 \cdot 9,42 \text{ см}^2}} = 3,68 \text{ см}$$

Гибкость стержня в плоскости наименьшей жесткости

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 700 \text{ см}}{3,68 \text{ см}} = 133,152 = 133$$

Определим фактическое значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$  методом линейной итерации (см. справочные таблицы [4], с. 14)

$$\varphi'_1 = \varphi_{\lambda=133} = \varphi_{\lambda=130} - \frac{\varphi_{\lambda=130} - \varphi_{\lambda=140}}{10} \cdot 3 = 0,4 - \frac{0,4 - 0,36}{10} \cdot 3 = 0,388$$

Поскольку  $|\varphi'_1 - \varphi_1| = |0,388 - 0,5| = 0,112 > 0,02$ , переходим к следующему приближению.

**II приближение:**

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,388}{2} = 0,444$$

Повторим весь расчет с новым коэффициентом  $\varphi_2$ .

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

$$A \geq \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{300 \text{ кН}}{0,444 \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 42,2 \text{ см}^2$$

Площадь сечения одного равнополочного уголка

$$A_1 = \frac{A}{4} = \frac{42,2 \text{ см}^2}{4} = 10,55 \text{ см}^2$$

По сортаменту прокатных профилей принимаем уголок  $70 \times 70 \times 8$ ,

$$A_1 = 10,67 \text{ см}^2; \quad b = 7 \text{ см}; \quad J_{z_1}^{\text{гр}} = J_{y_1}^{\text{гр}} = 48,16 \text{ см}^4; \quad z_0 = 2,02 \text{ см}.$$

$$J_{\min} = J_z = 4(J_{z_1}^{\text{гр}} + A_1(1 + z_0)^2) = 4(48,16 + 10,67 \cdot (1 + 2,02)^2) = 582 \text{ см}^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{J_z}{4A_1}} = \sqrt{\frac{582 \text{ см}^4}{4 \cdot 10,67 \text{ см}^2}} = 3,69 \text{ см}$$

Гибкость стержня в плоскости наименьшей жесткости

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 700 \text{ см}}{3,69 \text{ см}} = 132,791 = 133$$

$$\varphi'_2 = \varphi'_1 = 0,388$$

Поскольку  $|\varphi'_2 - \varphi'_1| = |0,388 - 0,444| = 0,056 > 0,02$ , переходим к следующему приближению.

**III приближение:**  $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,444 + 0,388}{2} = 0,416$ ;

$$A \geq \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{300 \text{ кН}}{0,416 \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 45,072 \text{ см}^2 = 45,1 \text{ см}^2$$

Площадь сечения одного равнополочного уголка

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

$$A_1 = \frac{A}{4} = \frac{45,1 \text{ см}^2}{4} = 11,275 \text{ см}^2 = 11,3 \text{ см}^2$$

По сортаменту прокатных профилей принимаем уголок  $75 \times 75 \times 8$

$$A_1 = 11,3 \text{ см}^2; \quad b = 7,5 \text{ см}; \quad J_{z_1}^{y_1} = J_{y_1}^{y_1} = 59,8 \text{ см}^4; \\ z_0 = 2,15 \text{ см}$$

$$J_{\min} = J_z = 4(J_{z_1}^{y_1} + A_1(1 + z_0)^2) = 4(59,8 + 11,3 \cdot (1 + 2,15)^2) = 696 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{696 \text{ см}^4}{46 \text{ см}^2}} = 3,89 \text{ см}; \quad A = 4A_1 = 4 \cdot 11,3 \text{ см}^2 = 46 \text{ см}^2$$

Гибкость стержня в плоскости наименьшей жесткости

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 700 \text{ см}}{3,89 \text{ см}} = 125,96 = 126$$

$$\varphi'_3 = \varphi_{\lambda=126} = \varphi_{\lambda=120} - \frac{\varphi_{\lambda=120} - \varphi_{\lambda=130}}{10} \cdot 6 = 0,45 - \frac{0,45 - 0,4}{10} \cdot 6 = 0,42$$

Поскольку  $|\varphi'_3 - \varphi_3| = |0,42 - 0,416| = 0,004 < 0,02$ , расчет заканчиваем и проверяем выполнение условия устойчивости.

$$\sigma = \frac{F}{\varphi'_3 A} = \frac{300 \text{ кН}}{0,42 \cdot 46 \text{ см}^2} = 15,53 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 15,5 \cdot 10 \text{ МПа} = 155 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Стержень недогружен. Определяем величину недогрузки

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{160 - 155}{160} \cdot 100\% = 3,13\% < 5\%$$

Недогрузка в пределах 5% (возможна недогрузка более 5%, если нет подходящего прокатного профиля), поэтому подбор размеров сечения окончен.

## Расчет на устойчивость сжатых стержней

Принимаем сечение, состоящее из четырех равнополочных уголков  $75 \times 75 \times 8$ ,

$$A = 46 \text{ см}^2; \quad \lambda = 126; \quad \varphi = \varphi'_3 = 0,42.$$

## 2. Вычисление величины критической силы

Так как гибкость стержня ( $\lambda = 126$ ) больше предельной гибкости для стали ( $\lambda_{\text{пред}} = 100$ ), то критическую силу определяем по формуле Эйлера

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 696 \text{ см}^4}{(0,7 \cdot 700 \text{ см})^2} = 600,20 \text{ кН} = 600 \text{ кН}$$

Напоминаем, что для стали

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

## 3. Определение допускаемой нагрузки и коэффициента запаса на устойчивость

Допускаемая нагрузка  $[F]$  на стержень будет равна

$$[F] = \varphi A [\sigma] = 0,42 \cdot 46 \text{ см}^2 \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 309,12 \text{ кН} = 309 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса на устойчивость по допускаемой нагрузке равен

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{600 \text{ кН}}{309 \text{ кН}} = 1,94$$

### Контрольные вопросы

1. Что означает выражение «сжатый стержень потерял устойчивость»?
2. Какое равновесное состояние гибкого стержня является устойчивым, а какое – неустойчивым?
3. Какая сила называется критической?
4. Как определяется приведённая длина стержня?
5. Как определяется гибкость стержня?
6. Запишите формулу Эйлера с учетом условий закрепления стержня.
7. Что такое предельная гибкость и как она вычисляется? Чему равна предельная гибкость для стали?
8. Сформулируйте условие применимости формулы Эйлера по напряжениям и по гибкости.
9. Формула Ясинского для вычисления критического напряжения. Условия её применимости по напряжениям и по гибкости.
10. Условие устойчивости сжатого гибкого стержня и какие задачи решаются с помощью этого условия?
11. Как определяется коэффициент продольного изгиба и от чего он зависит?
12. Что такое коэффициент запаса на устойчивость и как он определяется?
13. Как выглядит график зависимости критического напряжения от гибкости для пластичной (низкоуглеродистой) стали.

### Рекомендуемая литература

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736с.
2. Андреев В.И., Паушкин А.Г., Леонтьев А.Н. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов). – М., Издательство АСВ, 2012. – 251с.
3. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивлению материалов с основами теории упругости и пластичности. – М., Издательство АСВ, 1995. – 658с.
4. Справочные таблицы по сопротивлению материалов. – Ростов н/Д: РГСУ, 2004. – 16с.