ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Методические указания

для самостоятельной работы и выполнения
расчетно-графической работы №2
по дисциплине

«Теоретическая механика»

Авторы
Высоковский Д.А.,
Углич С.И.,
Кириллова Е.В.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Методические указания для самостоятельной работы и выполнения расчетно-графической работы №2 по направлениям подготовки 08.03.01 «Строительство», 07.03.02 «Реконструкция и реставрация архитектурного наследия».

В методических указаниях представлены расчетно-графические задания. Каждое задание предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для выполнения работы, решенным типовым примером и заданием, содержащим варианты.

Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Высоковский Д.А.

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Углич С.И.

ст. преподаватель кафедры «Техническая механика» Кириллова Е.В.

Оглавление

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ...4
Задача 1 6
Задача 2 12
Задача 3 19
Задача 4 26

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 5 контрольных заданий.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А4. Контрольная работа должна иметь титульный лист, на котором указываются:название учебного заведение, название дисциплины, номер работы, название группы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, фамилия преподавателя, город и год.

На листе с решением сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно.* Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т. д. Аналогично, в υ_B, a_B означают скорость и ускорение точки *B*; υ_C, a_C – точки *C*; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1, ω_2, ε_2 – тела *2* и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту,* т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;* в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧА 1

Указания. Принцип Даламбера для системы: если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.

При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\overline{R}^u$, то численно $R^u = ma_C$, где a_c – ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\overline{R}^u$ в общем случае не проходит через точку C.

Пример 1. Вертикальный вал длиной $3a$($AB = BD = DE = a$), закрепленный подпятником A и подшипником D (рис. 1, а), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей *1 и 2*, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Д а н о: $\omega = 8$ с$^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг, $m_3 = 2$ кг, $\alpha = 30°$, $\beta = 150°$, $\varphi = 60°$, $a = 0{,}3$ м, $b = 0{,}1$ м. Определить: реакции подпятника A и подшипника D, пренебрегая весом вала.

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. 1, *б*). Массы и веса частей *1* и *2* ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны $m_1 = 0{,}6m$; $m_2 = 0{,}4m$;

$$P_1 = 0{,}6mg\,;\; P_2 = 0{,}4mg\,;\; P_3 = m_3 g\,. \qquad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Axy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и реакции связей –составляющие реакции подпятника $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\overline{R}_D$.

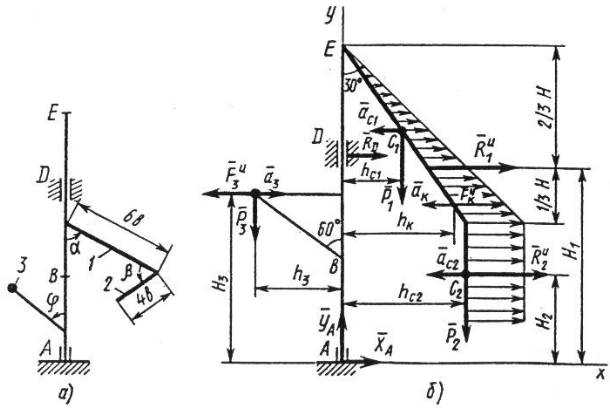

Рис. 1

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k – расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\bar{F}_k^u$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^u = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k – масса элемента. Так как все $\bar{F}_k^u$ пропорциональны h_k, то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части *1* треугольник, а для части *2* – прямоугольник (рис.1,*б*).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^и = ma_c$, где m – масса тела, a_c – ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^u = m_1 a_{C1},\ R_2^u = m_2 a_{C2}. \qquad (2)$$

Сила инерции точечной массы *3* должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3^u = m_3 a_3. \qquad (3)$$

Ускорения центров масс частей *1 и 2* стержня и груза *3* равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1},\ a_{C2} = \omega^2 h_{C2},\ a_3 = \omega^2 h_3. \qquad (4)$$

где h_{C1}, h_{C2} – расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а 6з – соответствующее расстояние груза:

$$h_{C1} = 3b\sin 30^\circ = 0{,}15 \text{ м}$$
$$h_{C2} = 6b\sin 30^\circ = 0{,}3 \text{ м}, \qquad (5)$$
$$h_3 = l\sin 60^\circ = 5b\sin 60^\circ = 0{,}43 \text{ м}.$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учтя (5), получим числовые значения R_1^u, R_2^u и F_3^u:

$$R_1^u = 0{,}6m\omega^2 h_{C1} = 57{,}6 \text{ Н},$$
$$R_2^u = 0{,}4m\omega^2 h_{C2} = 76{,}8 \text{ Н}, \qquad (6)$$
$$F_3^u = m_3\omega^2 h_3 = 55{,}0 \text{ Н}.$$

При этом линии действия равнодействующих R_1^u и R_2^u пройдут через центры тяжестей соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия R_1^u проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника *E*, где *H* =6*b* cos30°.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + R_D + R_1^u + R_2^u - F_3^u = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0;$$
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad -R_D \cdot 2a - P_1 h_{C1} - P_2 h_{C2} + P_3 h_3 - \qquad (7)$$
$$-R_1^u H_1 - R_2^u H_2 + F_3^u H_3 = 0.$$

где H_1, H_2, H_3 – плечи сил R_1^u, R_2^u, F_3^u относительно точки A, равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b\cos 30° = 0{,}52$ м)

$$H_1 = 3a - (2/3)H = 0{,}55 \text{ м}, \quad H_2 = 3a - (H + 2b) = 0{,}18 \text{ м},$$
$$H_3 = a + l\cos 60^\circ = 0{,}55 \text{ м}. \qquad (8)$$

Подставив в уравнения (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (8) и решив эту систему уравнений (7), найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33{,}7$ Н; $Y_A = 117{,}7$ Н; $R_D = -45{,}7$ Н.

Условия

Вертикальный вал AK (рис. 1.0 – 1.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с⁻¹, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д8 в столбце 2 ($AB = BD == DE = EK = a$). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10$ кг, состоящий из частей *1* и *2* (размеры частей стержня показаны на рисунках, где $b = 0{,}1$ м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой $m_3 = 3$ кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α, β, γ, φ даны в столбцах 5–8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять $a = 0{,}6$ м.

Таблица 1

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке		α, град	β, град	γ, град	φ, град
		ломанного стержня	невесомого стержня		Рис. 0–4	Рис. 5–9	
1	2	3	4	5	6	7	8
0	*B*	*D*	*K*	45	135	225	60
1	*K*	*B*	*D*	60	240	150	45
2	*K*	*E*	*B*	30	210	120	60
3	*D*	*K*	*B*	60	150	240	30
4	*K*	*D*	*E*	30	120	210	60
5	*E*	*B*	*K*	45	225	135	60
6	*E*	*D*	*K*	60	60	150	30
7	*K*	*D*	*E*	30	30	120	60
8	*D*	*E*	*K*	60	150	60	30
9	*E*	*K*	*D*	30	120	210	60

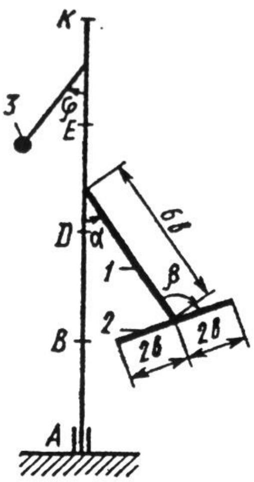

Рис. 1.0

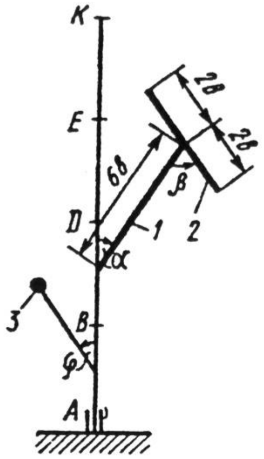

Рис. 1.1

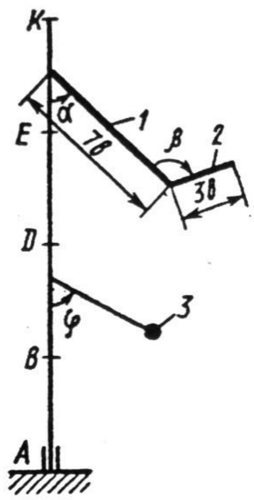

Рис. 1.2

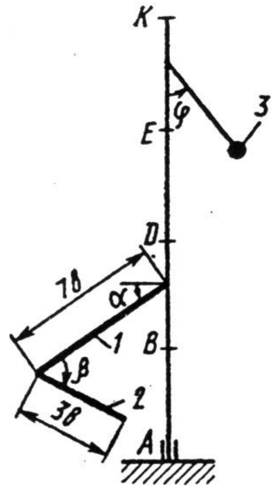

Рис. 1.3

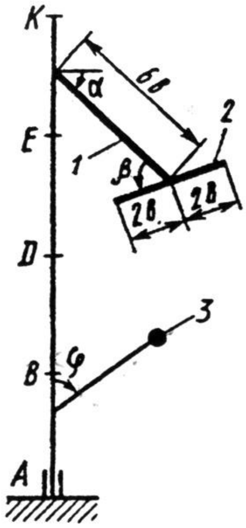

Рис. 1.4

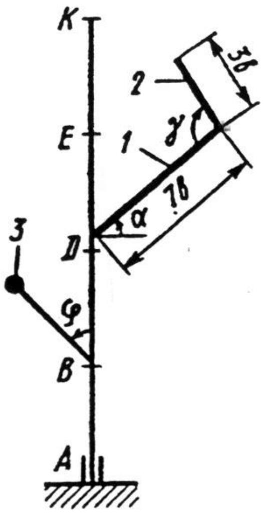

Рис. 1.5

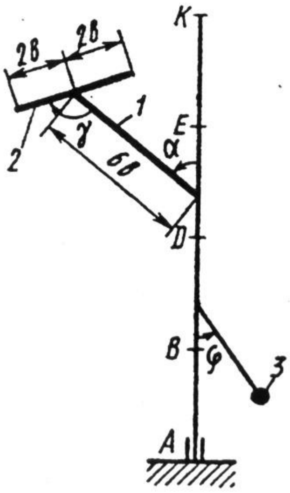

Рис. 1.6

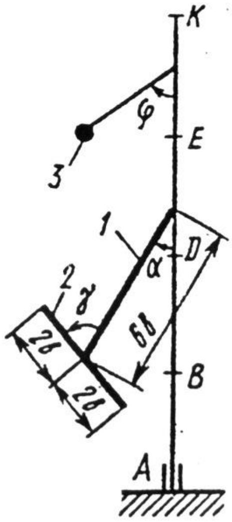

Рис. 1.7

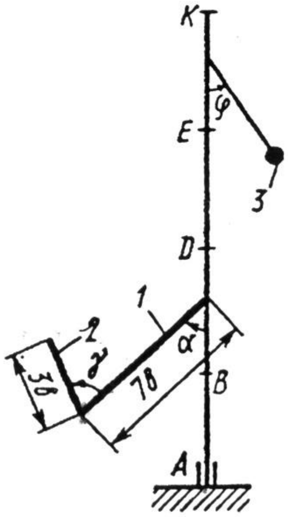

Рис. 1.8

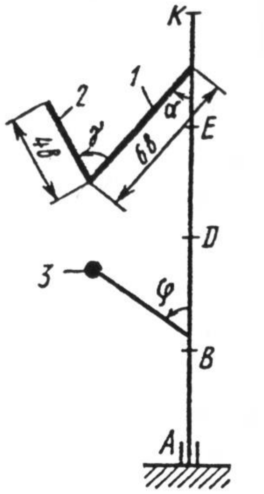

Рис. 1.9

ЗАДАЧА 2

Указание. Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т.е. одно независимое свободное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Чтобы найти λ, надо из полученного условия равновесия определить силу упругости *F*. На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т.е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление, укажет знак.

Пример 2. Механизм (рис. 2, а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней *1, 2,* 3 и ползунов *B, D,* соединенных друг с другом и с неподвижной опорой *O* шарнирами. К ползуну *B* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*, к ползуну *D* приложена сила $\overline{Q}$, а к стержню *1* (кривошипу) – пара сил с моментом *M*.

Д а н о: $\alpha = 60°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 60°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 120°$, $l = 0{,}4$ м, *AE=ED*, *c* = =125 Н/см, *M* = 150 Н·м, *Q* = 350 Н. Определить: деформацию λ пружины при равновесии механизма.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 2, б); при этом согласно последнему из указаний к задаче Д9 прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было $\beta = 180°$).

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k = 0, \qquad (1)$$

где δA_k – элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях.

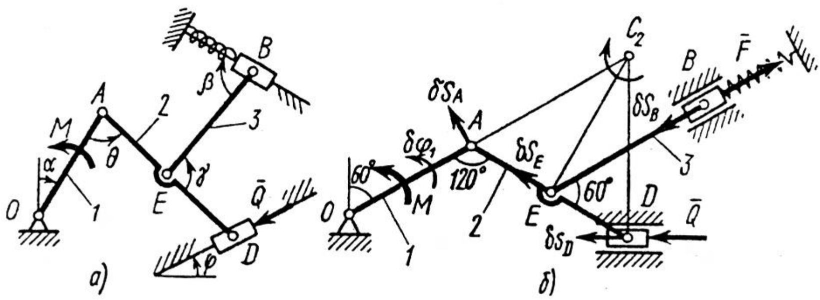

Рис. 2

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу $\overline{Q}$, силу упругости $\overline{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом *M.* Неизвестную силу $\overline{F}$ найдем с помощью уравнения (1), а зная *F* и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ – поворот стержня *1* вокруг оси *O*, δs_D и δs_B – перемещения ползунов (точек) *D* и *B.* Из перемещений $\delta\varphi_1$, δs_D, δs_B независимое от других – одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, какими тогда будут δs_D и δs_B, выразив их через $\delta\varphi_1$; при этом важно верно определить и направления δs_D, δs_B, так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и воспользуемся известными из кинематики соотношениями (ход расчетов такой же, как в примере К3).

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$); получим

$$\delta s_A = l_1\delta\varphi_1;\ \delta s_A \perp OA. \qquad (2)$$

Теперь определим и изобразим δs_D, учитывая, что проекции δs_D и δs_A на прямую *AD* должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули и знаки). Тогда

$$\delta s_D \cos 30° = \delta s_A \cos 30° \text{ и } \delta s_D = \delta s_A = l_1 \delta\varphi_1 . \qquad (3)$$

Чтобы определить δs_B, найдем сначала δs_E. Для этого построим мгновенный центр вращения (скоростей) C_2 стержня *2* (на пересечении перпендикуляров к δs_A и δs_D, восставленных из точек *A* и *D*) и покажем направление поворота стержня *2* вокруг C_2, учтя направление δs_A или δs_D. Так как $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60°$, то ΔAC_2D– равносторонний и C_2E в нем высота, поскольку $AE = ED$. Тогда перемещение δs_E, перпендикулярное C_2E, будет направлено по прямой *EA* (при изображении δs_E учитываем направление поворота вокруг центра C_2).

Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_E и δs_A на прямую *EA* должны быть равны друг другу, получим (значение δs_E можно найти и составив соответствующую пропорцию)

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 30° = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30°. \qquad (4)$$

Наконец, из условия равенства проекций δs_B и δs_E на прямую *BE* находим и изображаем δs_B. Численно

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 60° = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30° \cdot \cos 60° = 0{,}43\ l_1 \delta\varphi_1. \qquad (5)$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1); получим

$$M\delta\varphi_1 . + Q\ \delta s_D - F\delta s_B = 0, \qquad (6)$$

заменяя здесь δs_D и $8\delta s_B$ их значениями (3) и (5) и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки,

$$(M + l_1 Q - 0{,}43\ l_1 F)\ \delta\varphi_1 = 0 . \qquad (7)$$

Так как $\delta\varphi 1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M + l_1 Q - 0{,}43\ l_1 F = 0. \qquad (8)$$

Из уравнения (8) находим значение *F* и определяем $\lambda = F/c$. Ответ: $\lambda = 13{,}5$ см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

Условия

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами α, β, γ, φ, θ (рис. 2.0 – 2.9, табл. 2а я 2б). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: l_1 = 0,4 м, l_2 = 0,6 м (размеры l_1 и l_2 произвольны); точка *E* находится в середине соответствующего стержня.

На ползун *B* механизма действует сила упругости пружины $\overline{F}$; численно $F = c\lambda$, где *c* – коэффициент жесткости пружины, λ – ее деформация. Кроме того, на рис. 0 и 1 на ползун *D* действует сила $\overline{Q}$, а на кривошип O_1A – пара сил с моментом *M;* на рис. 2–9 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в табл. 2а для рис. 0–4 и в табл. 2б для рис. 5–9, где *Q* выражено в ньютонах, а *M*, M_1, M_2 – в ньютонометрах.

Замечание. Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере 2 (см. рис. 2, а также рис. 2.10, *б*). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну *B* стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. 2.10, *а*), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. 2,10 б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Таблица 2а (к рис. 2.0 – 2.4)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	Для рис.0–1		Для рис.2–4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	90	90	180	100	400	120	460
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	350	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблица 2б (к рис. 2.5 – 2.9)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

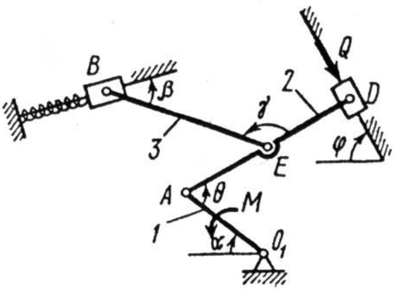

Рис. 2.0

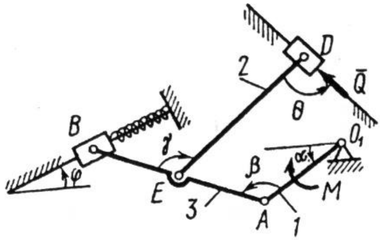

Рис. 2.1

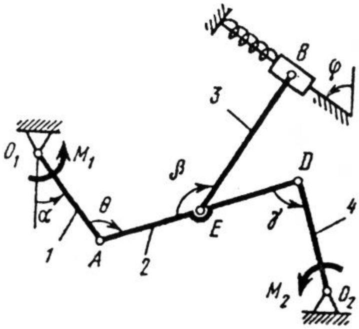

Рис. 2.2

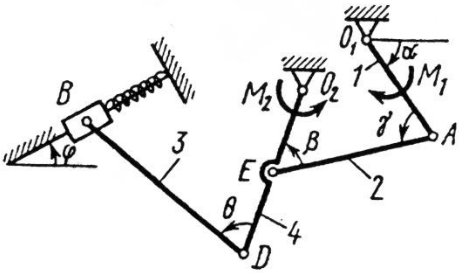

Рис. 2.3

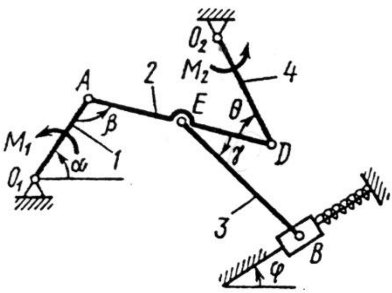

Рис. 2.4

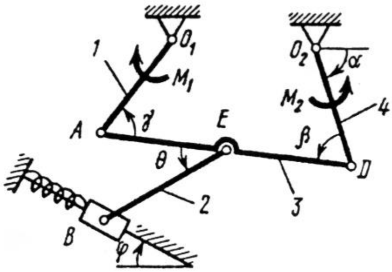

Рис. 2.5

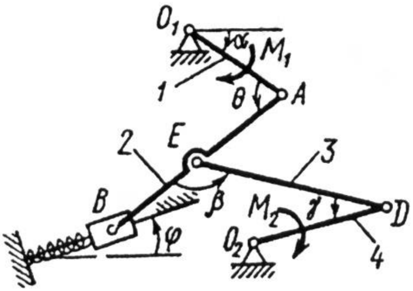

Рис. 2.6

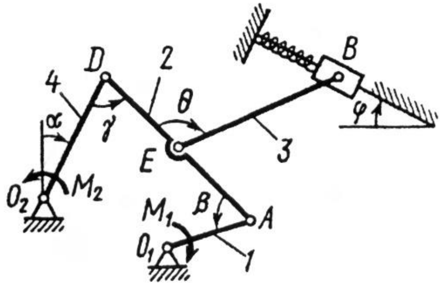

Рис. 2.7

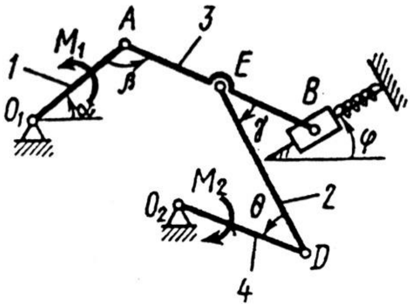

Рис. 2.8

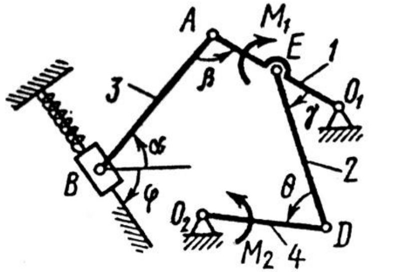

Рис. 2.9

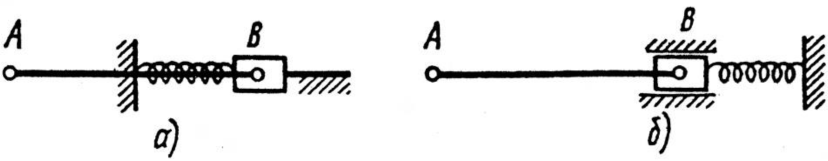

Рис. 2.10

ЗАДАЧА 3

Указания. Теорема о движении центра масс системы: произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил. Или: центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

$$Mx_C'' = \sum F_{kx}^e, \quad My_C'' = \sum F_{ky}^e, \quad Mz_C'' = \sum F_{kz}^e$$

Задача – на применение теоремы о движении центра масс. При этом для определения $x_3 = f_3(t)$ составить уравнение в проекции на горизонтальную ось x, а для определения N – на вертикальную ось y.

Пример 3. Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. 3). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r и R, по законам $\varphi_1 = f_1(t)$и $\varphi_2 = f_2(t)$.

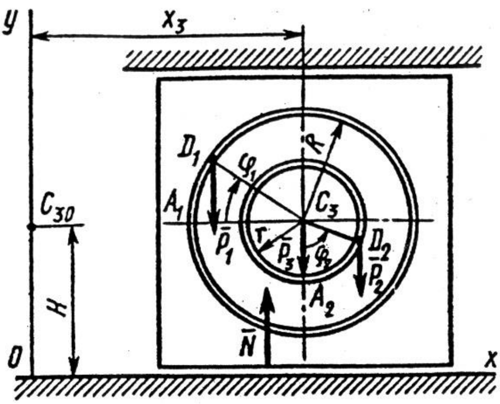

Рис. 3

Д а н о: m_1 = 6 кг, m_2 = 8 кг, m_3 = 12 кг, r = 0,6 м, R = 1,2 м, $\varphi_1 = \pi t$ рад, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}(1-t)$ рад (t – в секундах). Определить: $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты, $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2, в произвольном положении (рис. 3). Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и реакцию направляющих $\overline{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени t_0 = 0.

а) Определение перемещения x_3. Для определения $x_3 = f_3(t)$ воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x. Получим

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \text{ или } M\ddot{x}_C = 0, \qquad (1)$$

так как $\sum F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение (1), найдем, что $M\dot{x}_C = C_1$, т.е. проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени $\upsilon_{cx} = 0$, то $C_1 = 0$.

Интегрируя уравнение $M\dot{x}_C = 0$, получим

$$Mx_c = \text{const}, \qquad (2)$$

т. е. центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Определим значение Mx_c. Из рис. 3 видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 - R\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 + r\sin\varphi_2$. Так как по формуле, определяющей координату x_c центра масс системы, $Mx_c = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$, то

$$Mx_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1 R\cos(\pi t) + m_2 r\sin(\pi/2 - \pi t/2). \quad (3)$$

В соответствии с равенством (2) координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положениях будут равны. Следовательно, учитывая, что при $t_0 = 0$ $x_3 = 0$, получим

$$-m_1 R + m_2 r = (m_1 + m_2 + \text{т}_3)x_3 - m_1 R\cos(\pi t) + m_2 r\cos(\pi t/2). \quad (4)$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3.

Ответ: $x_3 = 0{,}09[3\cos(\pi t) - 2\cos(\pi t/2) - 1]$м, где t – в секундах.

б) **Определение реакции** N. Для определения $N = f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось y (см. рис. 3):

$$M\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} \quad \text{или} \quad M\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3. \quad (1)$$

Отсюда получим, учтя, что $P_1 = m_1 g$, и т. д.:

$$N = M\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)g \quad (2)$$

По формуле, определяющей ординату y_c центра масс системы,

$My_c = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$, где $y_1 = H + R\sin\varphi_1$,

$y_2 = H - r\cos\varphi_2$, $y_2 = H = OC_{30} = \text{const}$, получим

$$My_c = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin(\pi t) - m_2 r\cos(\pi/2 - \pi t/2)$$

или

$$My_c = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin(\pi t) - m_2 r\sin(\pi t/2).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдем

$$M\dot{y}_C = m_1 R\pi\cos(\pi t) - m_2 r(\pi/2)\cos(\pi t/2);$$

$$M\ddot{y}_C = -m_1 R\pi^2\sin(\pi t) + m_2 r(\pi^2/4)\sin(\pi t/2).$$

Подставив это значение $M\ddot{y}_C$ в уравнение (2), определим искомую зависимость N от t.

Ответ: N = 254,8 – 1,2π^2 [6 sin (πt) – sin (πt/2)], где t – в секундах, N – в ньютонах.

Условия.

Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 = 2 кг и D_2 массой m_2 = 6 кг и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3 = =12кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. 3.0– 3.9, табл. 3). В момент времени t_0 = 0, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r = 0,4 м и R = 0,8 м.

При движении грузов угол $\varphi_1 = \angle A_1C_1D_1$ изменяется по закону $\varphi_1 = f_1(t)$, а угол $\varphi_2 = \angle A_2C_3D_2$ – по закону $\varphi_2 = f_2(t)$. В табл. 3 эти зависимости даны отдельно для рис. 0–4 и 5–9, где φ выражено в радианах, t – в секундах.

Считая грузы материальными точками и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить закон изменения со временем величины, указанной в таблице в столбце «Найти», т. е. $x_3 = f_3(t)$ и $N = f(t)$. где x_3 – координата центра C_3 плиты (зависимость $x_3 = f_3(t)$ определяет закон движения плиты), N – полная нормальная реакция направляющих.

Таблица 3

Номер условия	Рис. 0–4		Рис. 5–9		Найти
	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	
0	$\frac{\pi}{3}(t^2+1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2+2)$	x_3
1	$\pi(2-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+3)$	$\frac{\pi}{4}(2t-1)$	$\frac{\pi t}{6}$	N
2	$\frac{\pi}{4}(t^2+2)$	$\frac{\pi}{6}(5-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	πt^2	x_3
3	$\frac{\pi t}{3}$	$\frac{\pi}{2}(t-2)$	$\frac{\pi}{6}(3t-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t)$	N
4	$\frac{\pi}{4}(1-3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2-4)$	$\frac{\pi t^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}(2-t^2)$	x_3
5	$\frac{\pi}{6}(t+2)$	$\frac{\pi}{4}(1-t)$	$\pi(3-t)$	$\frac{\pi}{6}(t-1)$	N
6	πt^2	$\frac{\pi}{6}(1-2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(2t^2-3)$	$\frac{\pi}{3}(2-t^2)$	x_3
7	$\frac{\pi}{3}(5-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+4)$	$\frac{\pi t}{6}$	$\frac{\pi}{4}(4-t)$	N
8	$\frac{\pi}{6}(t^2+3)$	$2(2-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	$\pi(t^2+2)$	x_3
9	$\frac{\pi}{2}(4-t)$	$\pi(t+5)$	$\frac{\pi}{6}(2t-1)$	$\frac{\pi}{2}(2-t)$	N

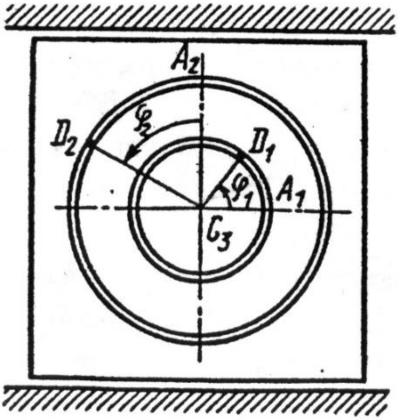

Рис. 3.0

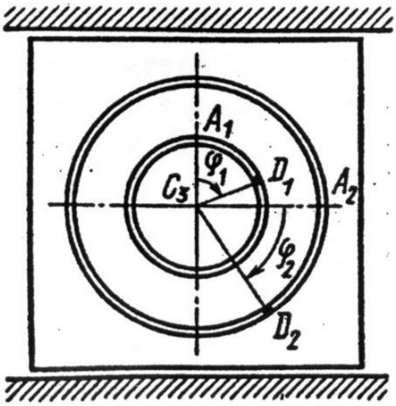

Рис. 3.1

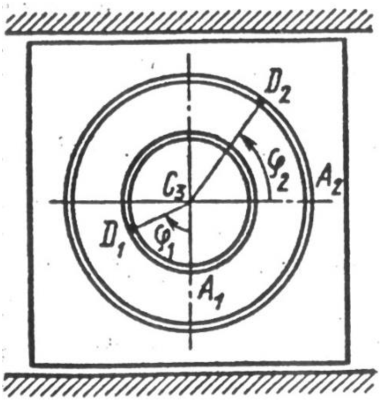

Рис. 3.2

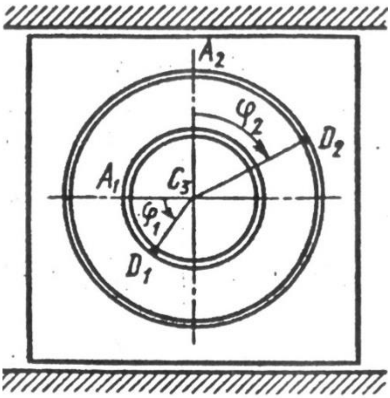

Рис. 3.3

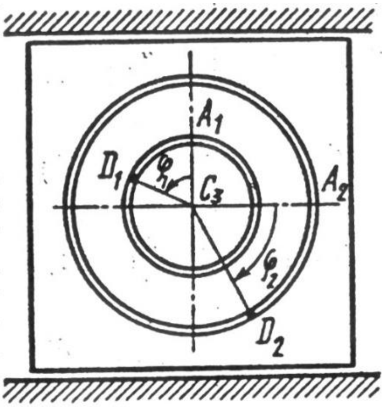

Рис. 3.4

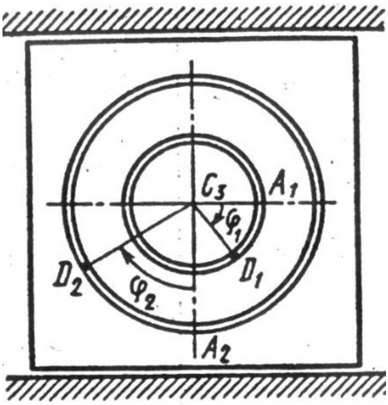

Рис. 3.5

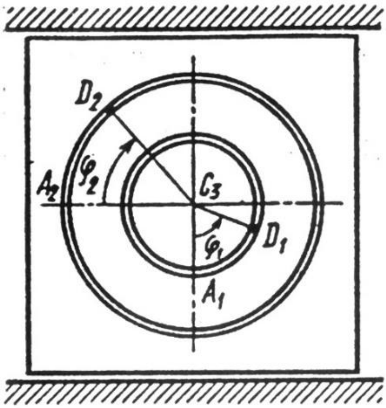

Рис. 3.6

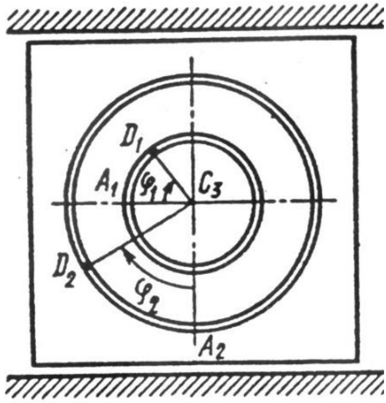

Рис. 3.7

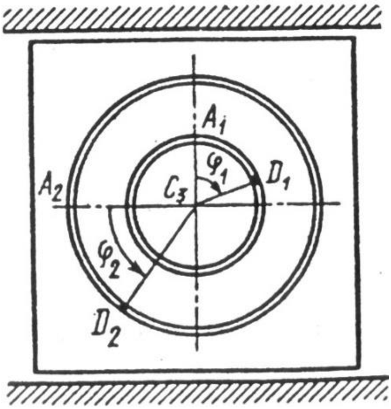

Рис. 3.8

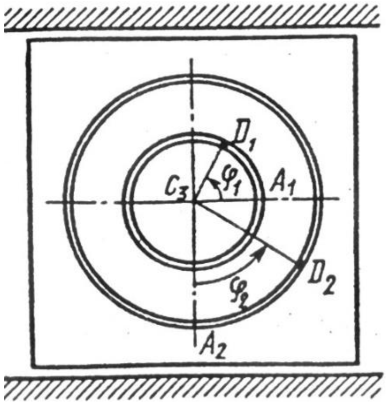

Рис. 3.9

ЗАДАЧА 4

Указания. Принцип Даламбера — Лагранжа: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю. При решении задачи предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^И = I_z\varepsilon$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела; направление $M^И$ противоположно направлению ε.

Пример 4. Механическая система (рис. 4) состоит из обмотанных нитями блока *1* радиуса R_1 и ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_1 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов *3 к 4,* прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом М, приложенной к блоку *1.*

Д а н о: $P_1 = 0$, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м, $\rho_2 = 0{,}2$ м. Определить: ускорение груза *3*, пренебрегая трением.

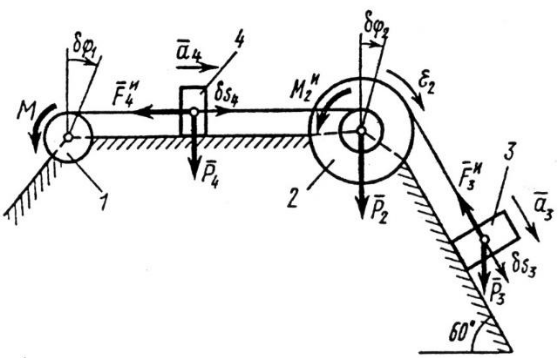

Рис. 4

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел *1, 2, 3, 4,* соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные.

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0, \qquad (1)$$

где $\sum \delta A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил; $\sum \delta A_k^u$ – сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ и пару сил с моментом *М.* Задавшись направлением ускорения a_3, изображаем на чертеже силы инерции $\overline{F}_3^u$, $\overline{F}_4^u$ и пару сил инерции с моментом M_2^u, величины которых равны:

$$\overline{F}_3^u = \frac{P_3}{g} a_3; \quad \overline{F}_4^u = \frac{P_4}{g} a_4;$$

$$M_2^u = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \qquad (2)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3 \sin 60° - F_3^u)\delta s_3 - M_2^u \delta\varphi_2 - F_4^u \delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0. \qquad (3)$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2 \delta\varphi_2; \; \delta s_4 = r_2 \delta\varphi_2;$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1} \delta\varphi_2. \qquad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3\left(\sin 60^o - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \frac{P_4}{g}a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2 = 0 . \qquad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2};\ a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2}a_3 .$$

Затем, учтя, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^o - M(r_2/R_1)}{P_3 R_2 + P_2\rho_2^2/R_2 + P_4(r_2^2/R_2)}g.$$

Вычисления дают следующий ответ: $a_3 = -0{,}9$ м/с^2. Знак указывает, что ускорение груза *3* и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рис. 4.

Условия

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов *1* и *2,* обмотанных нитями, грузов *3*–*6,* прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. 4.0 – 4.9, табл. 4). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом *M*, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива *1* равны: $R_1 = 0{,}2$ м, $r_1 = 0{,}1$ м, а шкива *2* – $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно $\rho_1 = 0{,}1$ м и $\rho_2 = 0{,}2$ м. Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса P_1, ..., P_6 шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы *1*, *2* изображать всегда как части системы).

Таблица 4

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	M, Н·м
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

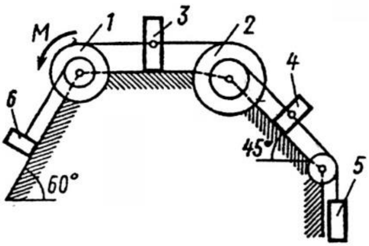

Рис. 4.0

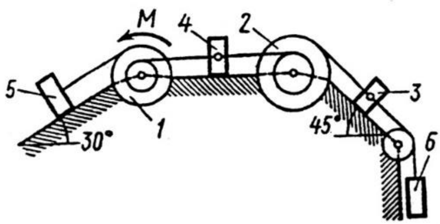

Рис. 4.1

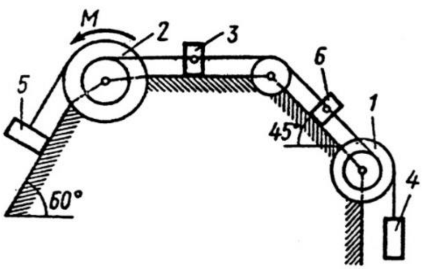

Рис. 4.2

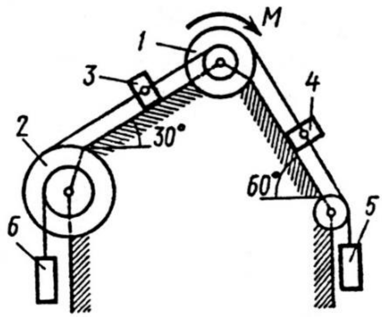

Рис. 4.3

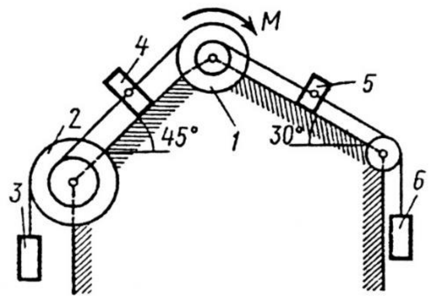

Рис. 4.4

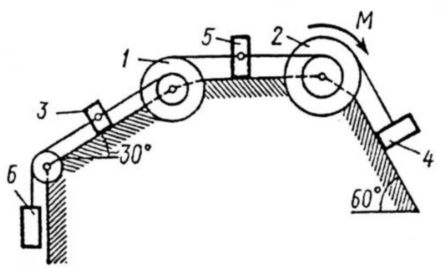

Рис. 4.5

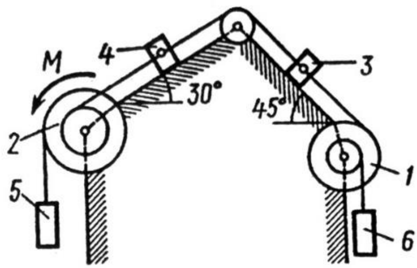

Рис. 4.6

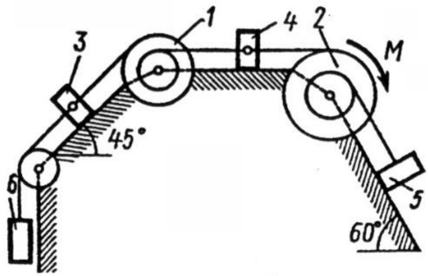

Рис. 4.7

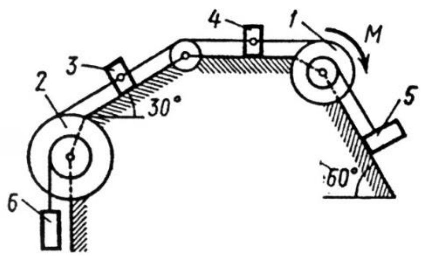

Рис. 4.8

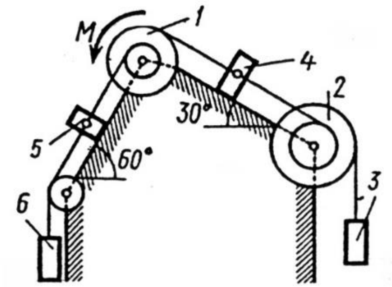

Рис. 4.9