ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Техническая механика»

Методические указания

для выполнения контрольной работы №2 по дисциплине

«Теоретическая механика»

для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Авторы
Кравченко Г.М.,
Высоковский Д.А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Методические указания для самостоятельной работы и выполнения контрольной работы №2 по дисциплине «Теоретическая механика» для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

В методических указаниях представлены расчетно-графические задания. Каждое задание предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для выполнения работы, решенным типовым примером и заданием, содержащим варианты.

Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Кравченко Г.М.

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Высоковский Д.А.

Оглавление

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 4 контрольных задания.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А4. Контрольная работа должна иметь титульный лист, на котором указываются: название учебного заведение, название дисциплины, номер работы, название группы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, фамилия преподавателя, город и год.

На листе с решением сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно.* Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, h_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, h_2, r_2 – тела *2* и т. д. Аналогично, в υ_B, a_B означают скорость и ускорение точки *B*; υ_C, a_C – точки *C*; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1, ω_2, ε_2 – тела *2* и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту,* т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;* в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧА 1

Указания: Основная задача динамики: зная действующие на точку силы, определить закон движения точки,

Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке *AB,* учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке *AB* или длину этого участка, определить скорость груза в точке *B.* Эта скорость будет начальной для движения груза на участке *BC.* После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке *BC* тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *B,* и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке *AB* в случае, когда задана длина *t* участка, целесообразно перейти к переменному *x,* учтя, что

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dx}.$$

Пример 1. На вертикальном участке *AB* трубы (рис. 1) на груз *D* массой *m* действуют сила тяжести и сила сопротивления *R*; расстояние от точки *A,* где $\upsilon = \upsilon_0$, до точки *B* равно *l*. На наклонном участке *BC* на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

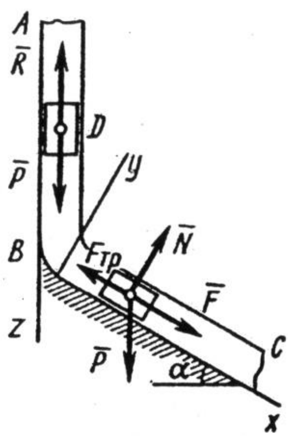

рис. 1

Д а н о: m = 2 кг, $R = \mu\upsilon^2$, где $\mu = 0{,}4$ кг/м, $\upsilon_0 = 5$ м/с, $l = 2{,}5$ м. $F_x = 16\sin(4t)$. Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке *BC.*

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке *AB,* считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $P = m\bar g$ и $\bar R$. Проводим ось *Az* и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = \sum F_{kz} \quad \text{или} \quad m\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dz} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu\upsilon^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $\upsilon_z = \upsilon$, получим

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = mg - \mu\upsilon^2 \quad \text{или} \quad \upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - \upsilon^2\right). \qquad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \ \text{м}^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50 \ \text{м}^2/\text{с}^2, \qquad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2\upsilon\cdot\frac{d\upsilon}{dz} = -2k(\upsilon^2 - n). \qquad (4)$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2\upsilon d\upsilon}{\upsilon^2 - n} = -2kdz \quad \text{и} \quad \ln(\upsilon^2 - n) = -2kz + C_1. \qquad (5)$$

По начальным условиям при $z = 0$ $\upsilon = \upsilon_0$, что дает $C_1 = \ln(\upsilon_0^2 - n)$ и из равенства (5) находим $\ln(\upsilon^2 - n) = -2kz + \ln(\upsilon_0^2 - n)$ или $\ln(\upsilon^2 - n) - \ln(\upsilon_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{\upsilon^2-n}{\upsilon_0^2-n}=-2kz \quad \text{и} \quad \frac{\upsilon^2-n}{\upsilon_0^2-n}=e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$\upsilon^2=n+(\upsilon_0^2-n)e^{-2kz}. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость υ_B груза в точке B ($\upsilon_0 = 5$ м/с, число е = 2,7):

$$\upsilon_B^2=50-25/e=40{,}7 \text{ и } \upsilon_B=6{,}4 \text{ м/с}. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке *BC;* найденная скорость υ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\upsilon_0=\upsilon_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $P = m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{тр}$ и $\bar{F}$. Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=P_x+N_x+F_{трx}+F_x$$

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=mg\sin\alpha-F_{тр}+F_x \qquad (8)$$

где $F_{тр} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By. Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр} = fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x = 16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt}=mg(\sin\alpha-f\cos\alpha)+16\sin(4t) \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на *m,* вычислим g(sinα– – *f*cosα)= *g*(sin30° – 0,2cos30°) = 3,2; 16/*m* = 8 и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на *dt* и интегрируя, найдем

$$\upsilon_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке *B,* считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0 = \upsilon_B$, где υ_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_5 = \upsilon_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4\ .$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8.4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на *dt* и снова интегрируя, найдем

$$x = \text{l},6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4\ t - 0{,}5\sin(4t), \qquad (14)$$

где *x* – в метрах, *t.* – в секундах.

Условия

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость υ_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. 1.0 –1.9, табл. 1).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости υ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют. сила трения (коэффициент трения груза о трубу f = 0,2) и переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т. t. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Таблица 1

Номер условия	m, кг	υ_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4\upsilon$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8\upsilon^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5\upsilon$	–	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6\upsilon^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4\upsilon$	–	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5\upsilon^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3\upsilon$	–	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8\upsilon^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5\upsilon$	–	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2\upsilon^2$	4	–	$-6\sin(4t)$

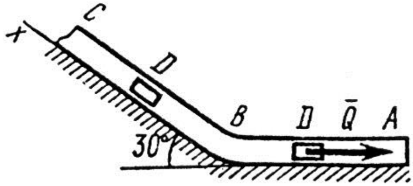

Рис. 1.0

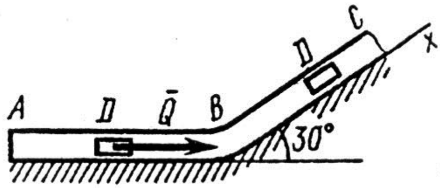

Рис. 1.1

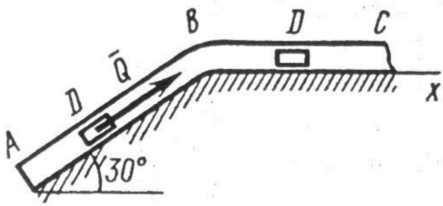

Рис. 1.2

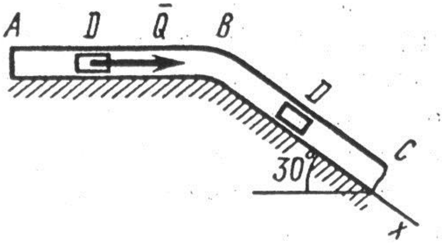

Рис. 1.3

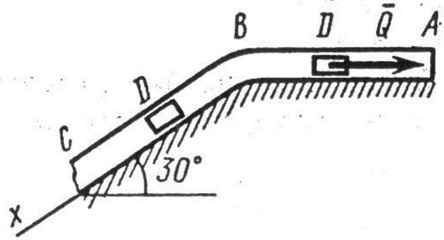

Рис. 1.4

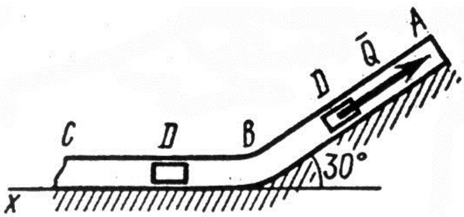

Рис. 1.5

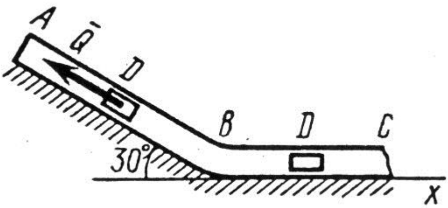

Рис. 1.6

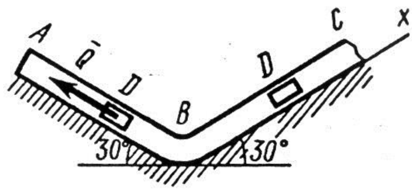

Рис. 1.7

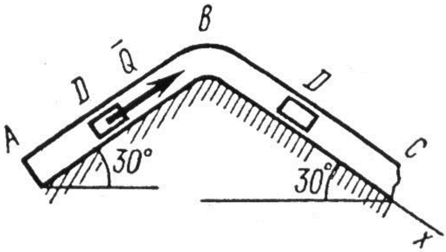

Рис. 1.8

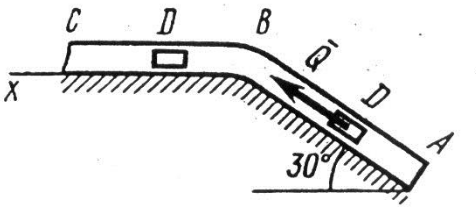

Рис. 1.9

ЗАДАЧА 2

Указания. Теорема об изменении кинетической энергии системы: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент K_z системы относительно оси z определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость груза складывается из относительной $\bar{\upsilon}_{отн}$ и переносной $\bar{\upsilon}_{пер}$ скоростей, т.е. $\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}$. Поэтому и количество движения этого груза $m\bar{\upsilon} = m\bar{\upsilon}_{отн} + m\bar{\upsilon}_{пер}$. Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой $m_z(m\bar{\upsilon}) = m_z(m\bar{\upsilon}_{отн}) + m_z(m\bar{\upsilon}_{пер})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил.

Пример 4. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами $2l$ и l), имеющая массу m_1, жестко скреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рис.2, *а*). В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий момент M, направленный противоположно ω_0; одновременно груз D массой m_2, находящийся в желобе AB в точке C, начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = F(t)$.

Д а н о: $m_1 = 16$ кг, $m_2 = 10$ кг, $l = 0{,}5$ м, $\omega_0 = 2$ с$^{-1}$, $s = 0{,}4t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), $M = kt$, где $k = 6$ Н·м/с. Определить: $\omega = f(t)$ – закон изменения угловой скорости платформы.

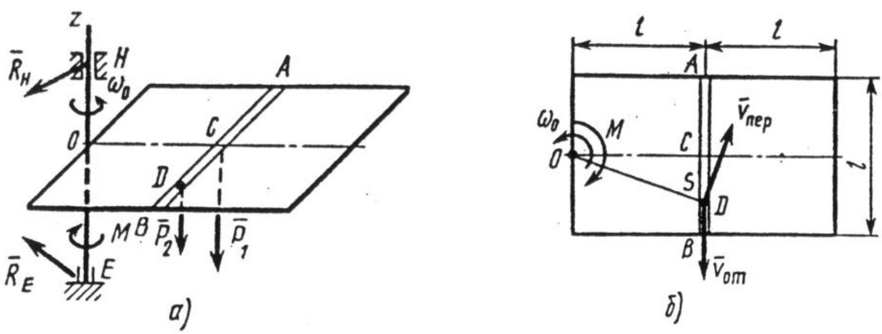

Рис. 2

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза *D.* Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e) \quad (1)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ реакции $\overline{R}_E$, $\overline{R}_H$ и вращающий момент *M.* Так как силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ параллельны оси *z,* а реакции $\overline{R}_E$ и $\overline{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси *z* равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (т.е. против хода часовой стрелки), получим $\sum m_z(\overline{F}_k^e) = -M = -kt$ и уравнение (1) примет такой вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt. \quad (2)$$

Умножая обе части этого уравнения на *dt* и интегрируя, получим

$$K_z = -\frac{k}{2}t^2 + C_1. \quad (3)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{пл} + K_z^D \quad (4)$$

где $K_z^{пл}$ и K_z^D – кинетические моменты платформы и груза *D* соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси *z*, то $K_z^{пл} = I_z\omega$. Значение I_z найдем по теореме Гюйгенса: $I_z = I_{Cz'} + m_1 l^2$ (

$I_{Cz'}$ – момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через центр C платформы).

Но, как известно,

$$I_{Cz'} = m_1[(2t)^2 + l^2]/12.$$

Тогда

$$I_z = 5m_1 l^2/12 + m_1 l^2 = 17 m_1 l^2/12.$$

Следовательно,

$$K_z^{пл} = (17 m_1 l^2/12)\omega. \qquad (5)$$

Для определения K_z^D обратимся к рис. 2, *б* и рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси z переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}$. Так как груз D движется по закону s = CD = 0,4t^2, то $\upsilon_{отн} = \dot{s} = 0{,}8t$; изображаем вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ на рис. 2, *б* с учетом знака $\dot{s}$ (при s<0 направление $\bar{\upsilon}_{отн}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω, изображаем вектор $\bar{\upsilon}_{пер}\,(\bar{\upsilon}_{пер} \perp OD)$; численно $\upsilon_{пер} = \omega \cdot OD$. Тогда, по теореме Вариньона,

$$K_z^D = m_z(m_2\bar{\upsilon}) = m_z(m_2\bar{\upsilon}_{отн}) + m_z(m_2\bar{\upsilon}_{пер}) = -m_2\upsilon_{отн}\cdot OC + m_2\upsilon_{пер}\cdot OD =$$

$$= -m_2 \cdot 0{,}8tl + m_2\omega(OD)^2. \qquad (6)$$

Но на рис. 2, *б* видно, что $OD^2 = l^2 + s^2 = t^2 + 0{,}16t^4$. Подставляя эту величину в равенство (6), а затем значения K_z^D и

$K_z^{пл}$ из (6) и (5) в равенство (4), получим с учетом данных задачи

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega + m_2 \omega (t^2 + 0{,}16t^4) - m_2 (0{,}8t) l =$$

$$= (8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t. \tag{7}$$

Тогда уравнение (3), где $k = 6$, примет вид

$$(8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t = -3t^2 + C_1. \tag{8}$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $\omega = \omega_0$. Получим $C_1 = 8{,}17\omega_o = 16{,}34$. При этом значении C_1 из уравнения (8) находим искомую зависимость ω_o от t. Ответ: $\omega_o = (16{,}34 + +4t - 3t^2)/(8{,}17 + 1{,}6t^4)$, где t – в секундах, ω – в $с^{-1}$.

Условия

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R или прямоугольная со сторонами R и $2R$, где R = 1,2 м) массой m_1 =24 кг вращается с угловой скоростью ω_0 = 10 $с^{-1}$ вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстоянии $OC = b$ (рис. 2.0 –2.9, табл. 2); размеры для всех прямоугольных платформ выбрать самостоятельно.

В момент времени t_0 = 0 по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз D массой m_2 = 8 кг по закону $s = AD = = F(t)$, где s выражено в метрах, t – в секундах. Одновременно на платформы начинает действовать пара сил с моментом M (задан в ньютонометрах; при М < 0 его направление противоположно показанному на рисунках).

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость $\omega = f(t)$, т. е. угловую скорость платформы, как функцию времени.

На всех рисунках груз D показан в положении, при котором $s > 0$ (когда $s < 0$, груз находится по другую сторону от точки A). Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось z на заданном расстоянии $OC = b$ от центра С.

Таблица 2

Номер условия	b	$s = f(t)$	M
0	R	$-0{,}4t^2$	6
1	$R/2$	$0{,}6t^2$	$4t$
2	R	$-0{,}8t^2$	-6
3	$R/2$	$10t$	$-8t$
4	R	$0{,}4t^3$	10
5	$R/2$	$-0{,}5t$	$-9t^2$
6	R	$-0{,}6t$	8
7	$R/2$	$0{,}8t$	$6t^2$
8	R	$0{,}4t^3$	$-10t$
9	$R/2$	$0{,}5t^2$	$12t^2$

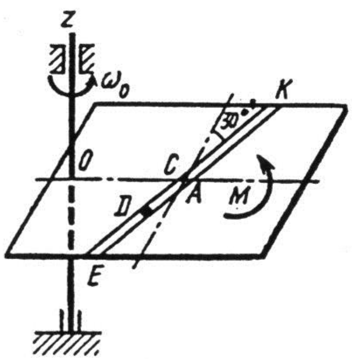

Рис. 2.0

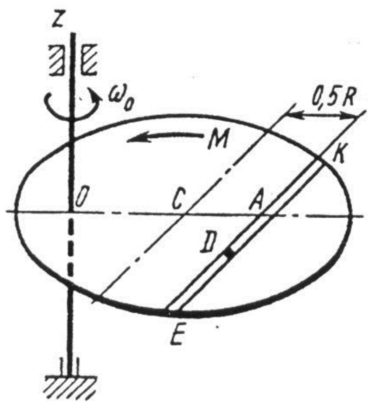

Рис. 2.1

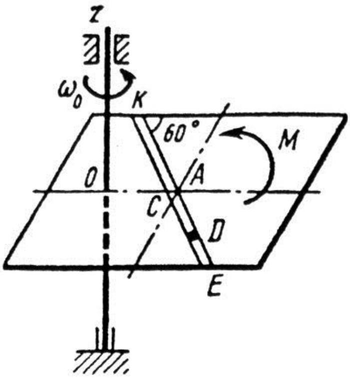

Рис. 2.2

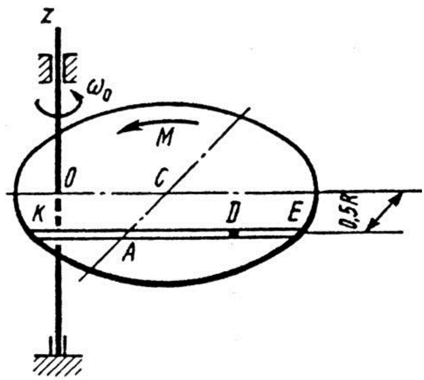

Рис. 2.3

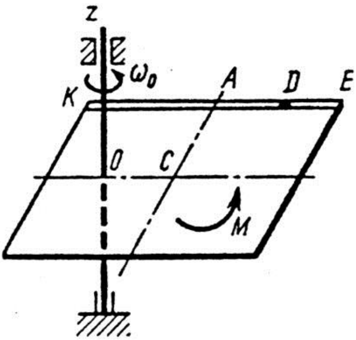

Рис. 2.4

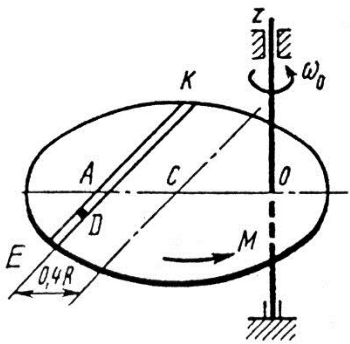

Рис. 2.5

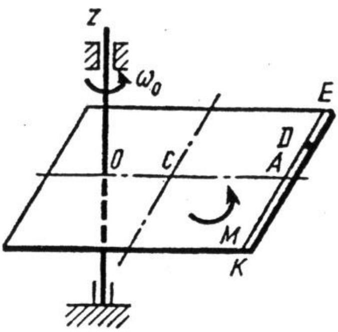

Рис. 2.6

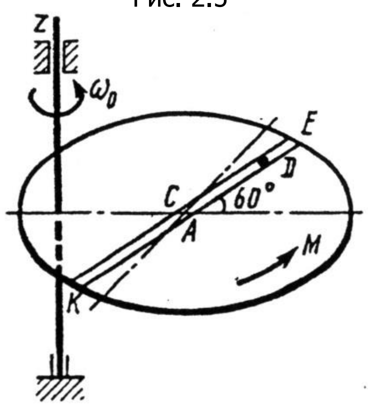

Рис. 2.7

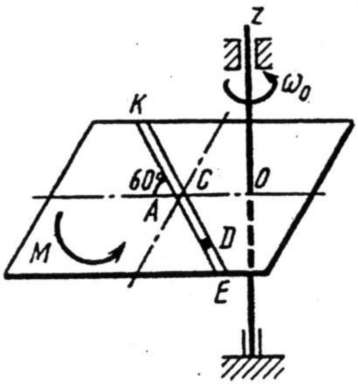

Рис. 2.8

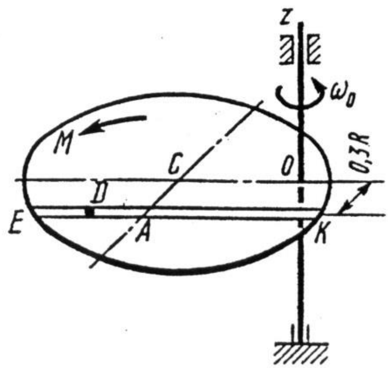

Рис. 2.9

ЗАДАЧА 3

Указания.

Теорема об изменении кинетической энергии: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия *T* системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении *T* для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример 3. . Механическая система (рис. 3, *а)* состоит из сплошного однородного цилиндрического катка *1*, подвижного блока *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока *4* и груза *5* (коэффициент трения груза о плоскость равен *f*). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3.* К центру *E* блока *2* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*; ее начальная деформация равна нулю. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения *s* точки ее приложения. На шкив *3* при движении действует постоянный момент *M* сил сопротивления.

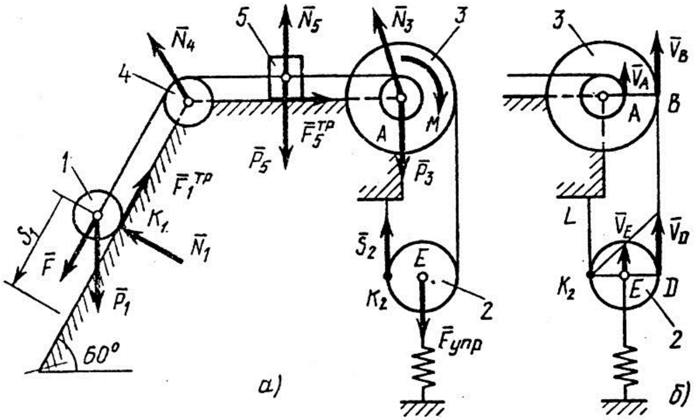

Рис. 3

Д а н о: m_1 = 8 кг, m_2 = 0, m_3 = 4 кг, m_4 = 0, m_6 = 10 кг, R_3 = 0,3 м, r_3 = = 0,1 м, ρ_3 = 0,2 м, f = 0,1, c = 240 Н/м, M = 0,6 Н·м, F = 20(3 + 2s) Н, s_1 = =0,2м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *1,3, 5* и невесомых тел *2, 4,* соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_1^{тр}$, $\overline{F}_5^{тр}$ и момент *M.*

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e . \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и *T.* Так как в начальный момент система находилась в покое, то T_0 = 0. Величина *T* равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 . \qquad (2)$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *5* – поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2;$$
$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2; \; T_5 = \frac{1}{2} m_5 \upsilon_5^2. \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо, выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $\upsilon_{C1} = \upsilon_5 = \upsilon_A$, где *А* – любая точка обода радиуса r_3 шкива *3* и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка *1*, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$\upsilon_{C1} = \upsilon_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{\upsilon_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{\upsilon_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2; \; I_3 = m_3 \rho_3^2. \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_5^2 \right) \omega_3^2. \qquad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка *1* пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза *5* ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива *3*, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3+2s)ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^{\circ};$$

$$A(\overline{F}_5^{mp}) = -F_5^{mp} s_5 = -fP_5 s_1;$$

$$A(M) = -M\varphi_3;$$

$$A(\overline{F}_{ynp}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1^{mp}$ и $\overline{S}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ и $\overline{P}_4$ – неподвижны; а реакция $\overline{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $\omega_3 = \upsilon_A/r_3 = \upsilon_{C1}/r_3$ (равенство $\upsilon_{C1} = \upsilon_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = s_1 / r_3$.

Далее, из рис. Д6, *б* видно, что $\upsilon_D = \upsilon_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока *2* (он как бы «катится» по участку нити K_2L), то $\upsilon_E = 0{,}5\upsilon_D = 0{,}5\omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0{,}5\varphi_3 R_3 = 0{,}5 s_1 R_3/r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

$$\sum A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^{\circ} - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0=0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1r_3^2+\frac{1}{2}m_3\rho_3^2+\frac{1}{2}m_5r_3^2\right)\omega_3^2=20(3s_1+s_1^2)+P_1s_1\sin 60^{\circ}-$$

$$-fP_5s_1-\frac{M}{r_3}s_1-\frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \quad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3. Ответ: $\omega_3 = 8{,}1$ с$^{-1}$.

Условия

Механическая система состоит из грузов *1* и *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0{,}2$ м, блока *4* радиуса $R_4 = 0{,}2$ м и катка (или подвижного блока) *5* (рис. 3.0 – 3.9, табл. 3); тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока *4* – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив *3* (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив *3* действует постоянный момент *M* сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным $s_1 = 0{,}2$ м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено: υ_1, υ_2, υ_3 – скорости грузов *1*, *2* и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел *3* и *4*.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток *5* на рис. 2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз *2*, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица 3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н·м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4 + 5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8 + 3s)$	υ_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6 + 5s)$	υ_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5 + 6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9 + 4s)$	υ_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7 + 8s)$	υ_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8 + 9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8 + 5s)$	υ_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9 + 2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6 + 7s)$	υ_{C5}

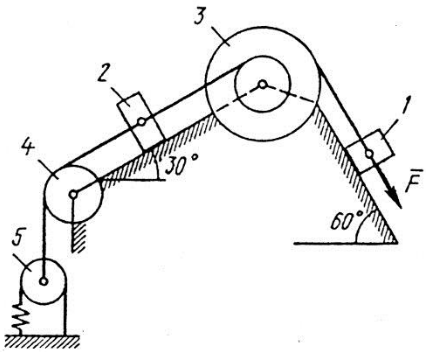

Рис. 3.0

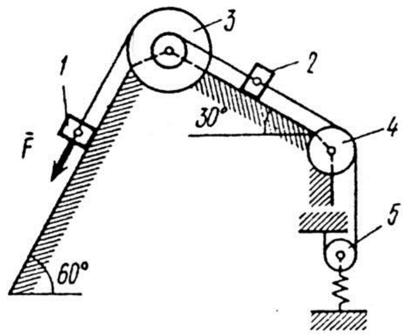

Рис. 3.1

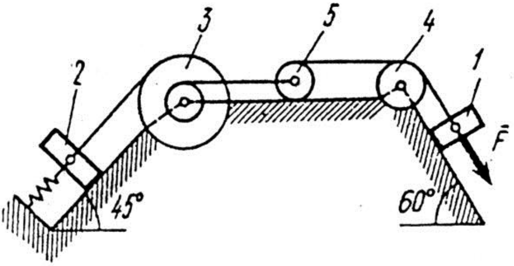

Рис. 3.2

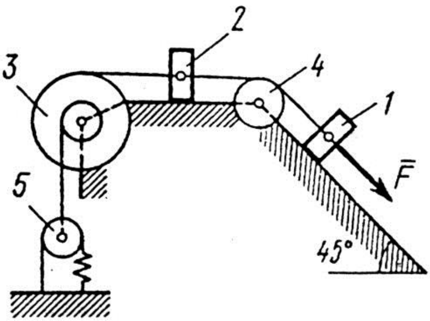

Рис. 3.3

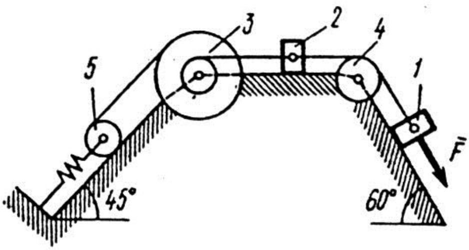

Рис. 3.4

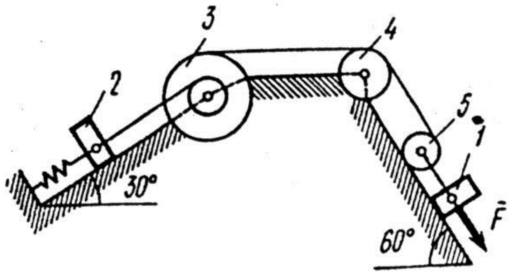

Рис. 3.5

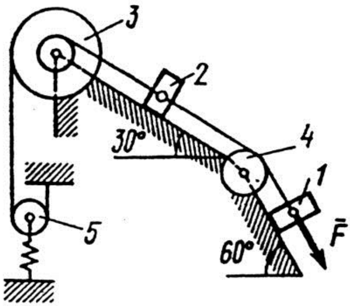

Рис. 3.6

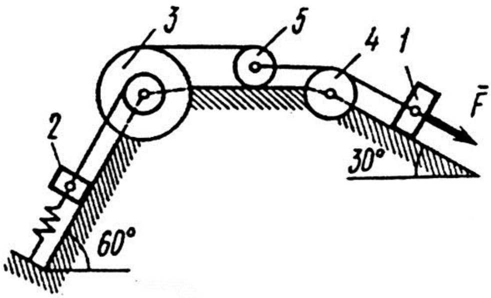

Рис. 3.7

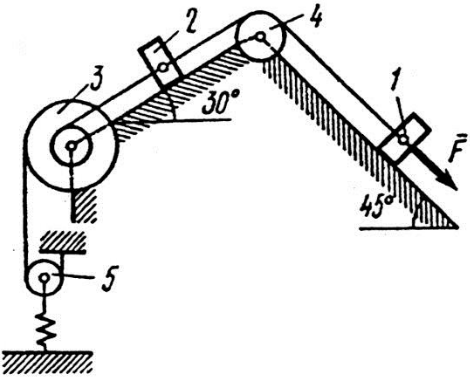

Рис. 3.8

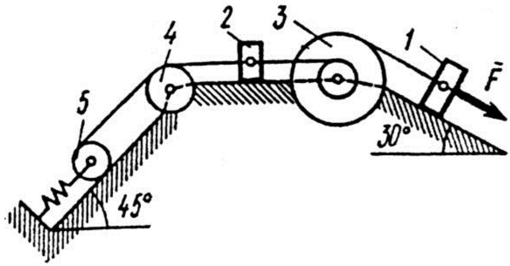

Рис. 3.9

ЗАДАЧА 4

Указание. Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т.е. одно независимое свободное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Чтобы найти λ, надо из полученного условия равновесия определить силу упругости *F*. На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т.е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление, укажет знак.

Пример 4. Механизм (рис. 4, а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней *1, 2,* 3 и ползунов *B, D,* соединенных друг с другом и с неподвижной опорой *O* шарнирами. К ползуну *B* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*, к ползуну *D* приложена сила $\overline{Q}$, а к стержню *1* (кривошипу) – пара сил с моментом *M*.

Д а н о: $\alpha = 60°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 60°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 120°$, $l = 0{,}4$ м, *AE=ED*, *c* = =125 Н/см, *M* = 150 Н·м, *Q* = 350 Н. Определить: деформацию λ пружины при равновесии механизма.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 4, б); при этом согласно последнему из указаний к задаче 4 прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было $\beta = 180°$).

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k = 0, \qquad (1)$$

где δA_k – элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях.

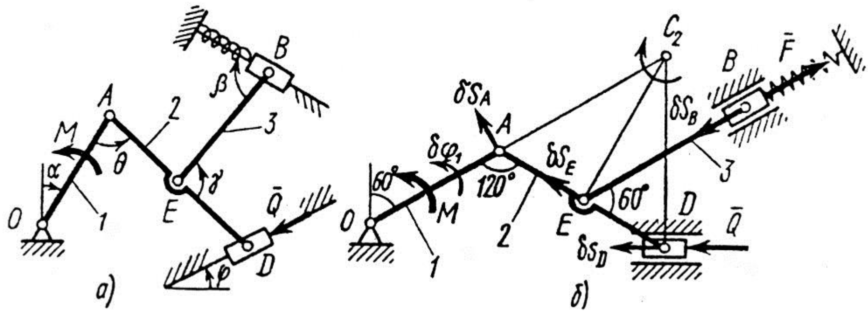

Рис. 4

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу $\overline{Q}$, силу упругости $\overline{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом *M.* Неизвестную силу $\overline{F}$ найдем с помощью уравнения (1), а зная F и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ – поворот стержня *1* вокруг оси *O*, δs_D и δs_B – перемещения ползунов (точек) *D* и *B.* Из перемещений $\delta\varphi_1$, δs_D, δs_B независимое от других – одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, какими тогда будут δs_D и δs_B, выразив их через $\delta\varphi_1$; при этом важно верно определить и направления δs_D, δs_B, так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и воспользуемся известными из кинематики соотношениями.

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$); получим

$$\delta s_A = l_1\delta\varphi_1;\ \delta s_A \perp OA. \qquad (2)$$

Теперь определим и изобразим δs_D, учитывая, что проекции δs_D и δs_A на прямую *AD* должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули и знаки). Тогда

$$\delta s_D \cos 30° = \delta s_A \cos 30° \text{ и } \delta s_D = \delta s_A = l_1 \delta\varphi_1 . \qquad (3)$$

Чтобы определить δs_B, найдем сначала δs_E. Для этого построим мгновенный центр вращения (скоростей) C_2 стержня *2* (на пересечении перпендикуляров к δs_A и δs_D, восставленных из точек *A* и *D*) и покажем направление поворота стержня *2* вокруг C_2, учтя направление δs_A или δs_D. Так как $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60°$, то ΔAC_2D– равносторонний и C_2E в нем высота, поскольку $AE = ED$. Тогда перемещение δs_E, перпендикулярное C_2E, будет направлено по прямой *EA* (при изображении δs_E учитываем направление поворота вокруг центра C_2).

Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_E и δs_A на прямую *EA* должны быть равны друг другу, получим (значение δs_E можно найти и составив соответствующую пропорцию)

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 30° = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30°. \qquad (4)$$

Наконец, из условия равенства проекций δs_B и δs_E на прямую *BE* находим и изображаем δs_B. Численно

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 60° = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30° \cdot \cos 60° = 0{,}43\, l_1 \delta\varphi_1. \qquad (5)$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1); получим

$$M\delta\varphi_1 + Q\, \delta s_D - F\delta s_B = 0, \qquad (6)$$

заменяя здесь δs_D и $8\delta s_B$ их значениями (3) и (5) и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки,

$$(M + l_1 Q - 0{,}43\, l_1 F)\, \delta\varphi_1 = 0 . \qquad (7)$$

Так как $\delta\varphi 1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M + l_1 Q - 0{,}43\, l_1 F = 0. \qquad (8)$$

Из уравнения (8) находим значение *F* и определяем $\lambda = F/c$. Ответ: λ = 13,5 см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

Условия

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами α, β, γ, φ, θ (рис. 4.0 – 4.9, табл. 4а я 4б). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: l_1 = 0,4 м, l_2 = 0,6 м (размеры l_1 и l_2 произвольны); точка *E* находится в середине соответствующего стержня.

На ползун *B* механизма действует сила упругости пружины $\overline{F}$; численно $F = c\lambda$, где *c* – коэффициент жесткости пружины, λ – ее деформация. Кроме того, на рис. 0 и 1 на ползун *D* действует сила $\overline{Q}$, а на кривошип O_1A – пара сил с моментом *M;* на рис. 2–9 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в табл. 4а для рис. 0–4 и в табл. 4б для рис. 5–9, где *Q* выражено в ньютонах, а *M*, M_1, M_2 – в ньютонометрах.

Замечание. Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере 2 (см. рис. 4, а также рис. 4.10, *б*)*.* Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну *B* стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. 4.10, *а*), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. 4,10 б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Таблица 4а (к рис. 4.0 – 4.4)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	Для рис.0–1		Для рис.2–4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	90	90	180	100	400	120	460
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	350	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблица 4б (к рис. 4.5 – 4.9)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

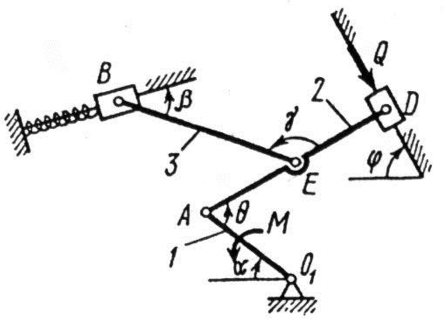

Рис. 4.0

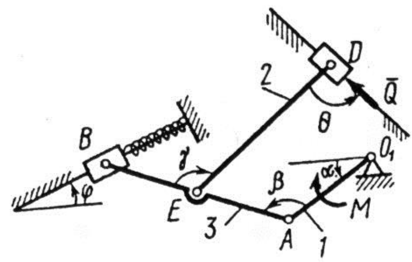

Рис. 4.1

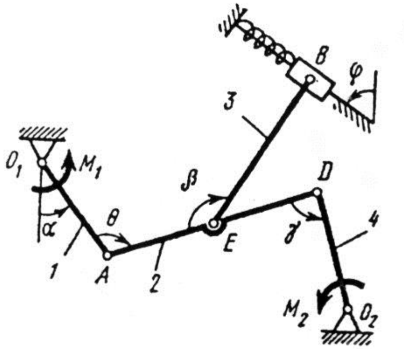

Рис. 4.2

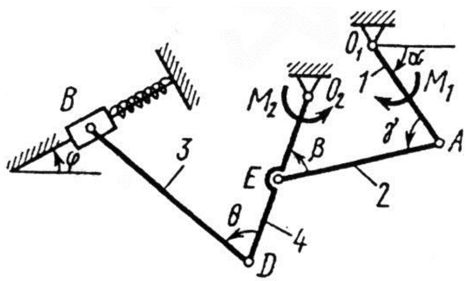

Рис. 4.3

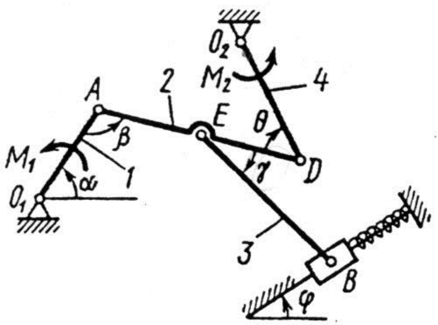

Рис. 4.4

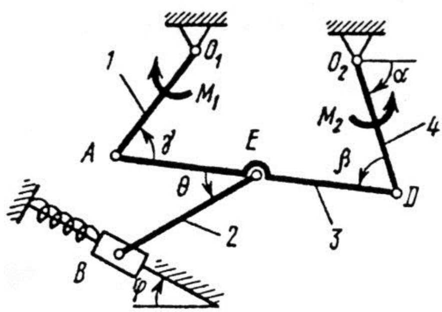

Рис. 4.5

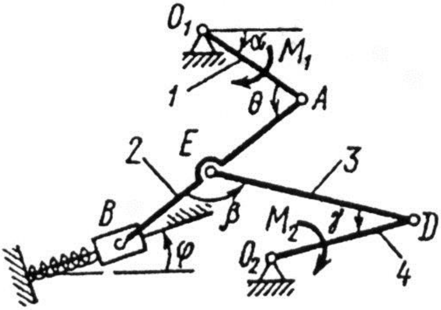

Рис. 4.6

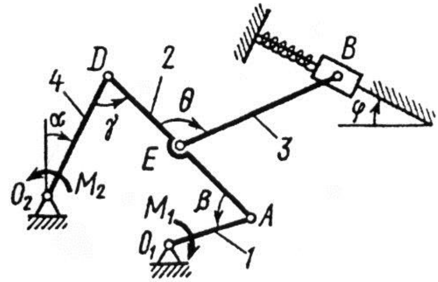

Рис. 4.7

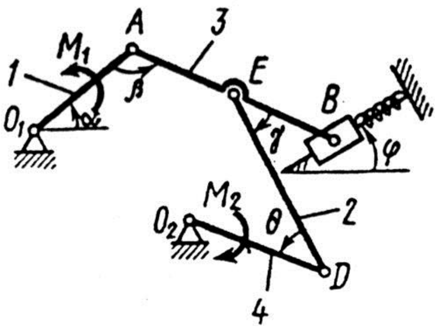

Рис. 4.8

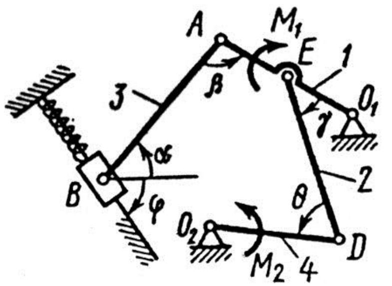

Рис. 4.9

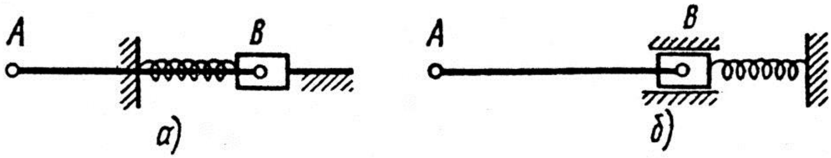

Рис. 4.10

ЗАДАЧА 5

Указания. Принцип Даламбера — Лагранжа: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю. При решении задачи предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^{и} = I_z\varepsilon$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела; направление $M^{и}$ противоположно направлению ε.

Пример 5. Механическая система (рис. 5) состоит из обмотанных нитями блока *1* радиуса R_1 и ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_1 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов *3 к 4,* прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом М, приложенной к блоку *1.*

Д а н о: $P_1 = 0$, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м, $\rho_2 = 0{,}2$ м. Определить: ускорение груза *3*, пренебрегая трением.

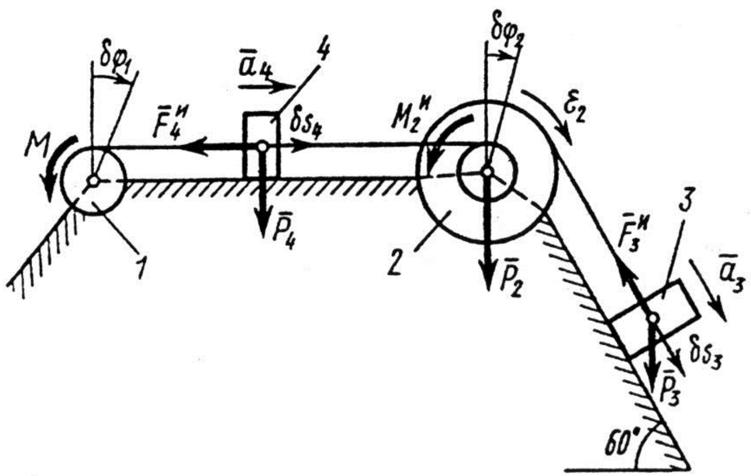

Рис. 5

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел *1, 2, 3, 4,* соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные.

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0, \qquad (1)$$

где $\sum \delta A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил;

$\sum \delta A_k^u$ – сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ и пару сил с моментом *M.* Задавшись направлением ускорения a_3, изображаем на чертеже силы инерции $\overline{F}_3^u$, $\overline{F}_4^u$ и пару сил инерции с моментом M_2^u, величины которых равны:

$$\overline{F}_3^u = \frac{P_3}{g} a_3; \quad \overline{F}_4^u = \frac{P_4}{g} a_4;$$

$$M_2^u = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \qquad (2)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3 \sin 60° - F_3^u)\delta s_3 - M_2^u \delta\varphi_2 - F_4^u \delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0. \qquad (3)$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2 \delta\varphi_2; \; \delta s_4 = r_2 \delta\varphi_2;$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1} \delta\varphi_2. \qquad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3\left(\sin 60^o - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \frac{P_4}{g}a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2 = 0 \qquad .(5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; \;\; a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2}a_3 .$$

Затем, учтя, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^o - M(r_2 / R_1)}{P_3 R_2 + P_2\rho_2^2 / R_2 + P_4(r_2^2 / R_2)} g.$$

Вычисления дают следующий ответ: a_3 = – 0,9 м/с^2. Знак указывает, что ускорение груза *3* и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рис. 5.

Условия

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов *1* и *2,* обмотанных нитями, грузов *3–6,* прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. 3.0 – 3.9, табл. 3). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом *M*, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива *1* равны: R_1 = 0,2 м, r_1 = 0,1 м, а шкива *2* – R_2 = 0,3 м, r_2 = 0,15 м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно ρ_1 = 0,1 м и ρ_2 = 0,2 м. Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса P_1, ..., P_6 шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы *1*, *2* изображать всегда как части системы).

Таблица 5

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	M, Н·м
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

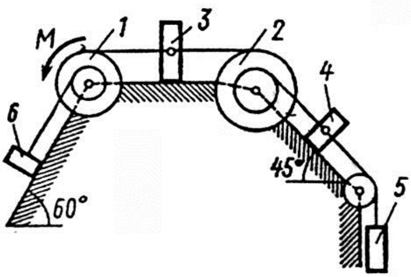

Рис. 5.0

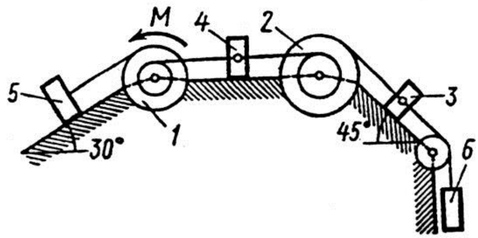

Рис. 5.1

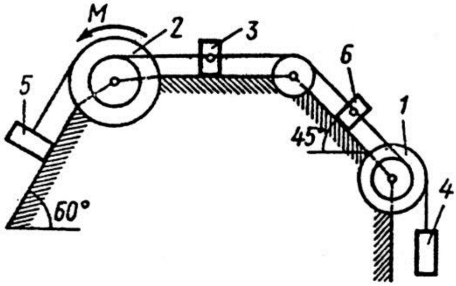

Рис. 5.2

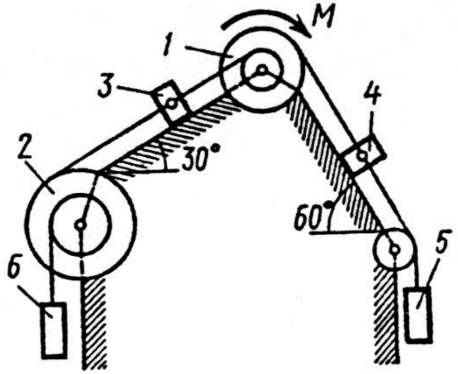

Рис. 5.3

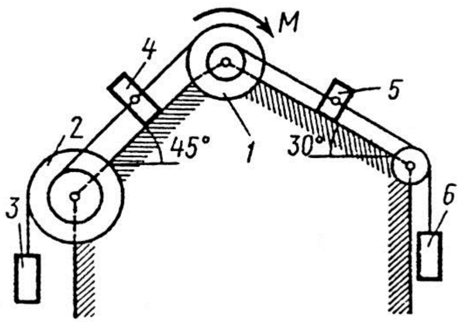

Рис. 5.4

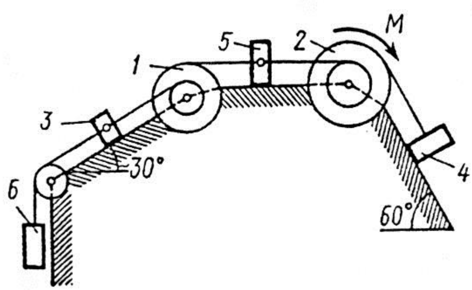

Рис. 5.5

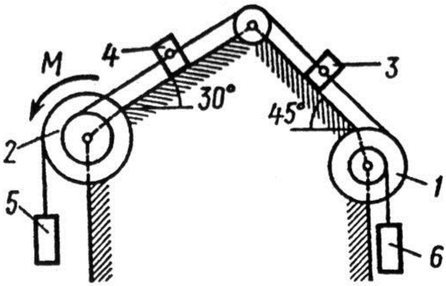

Рис. 5.6

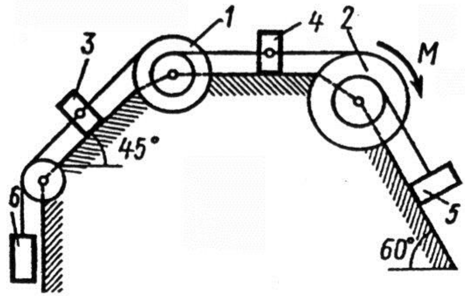

Рис. 5.7

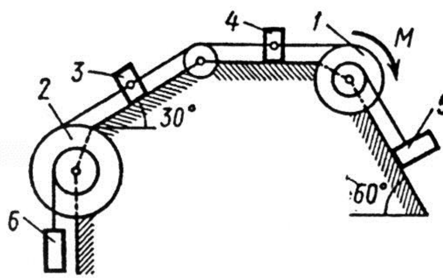

Рис. 5.8

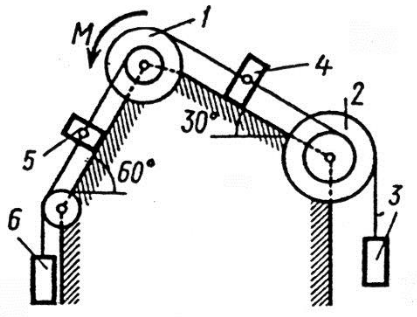

Рис. 5.9