ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Методические указания

для выполнения контрольной работы №1
по дисциплине

«Теоретическая механика»

для обучающихся по направлению
подготовки 08.03.01 «Строительство»

Авторы
Кравченко Г.М.,
Высоковский Д.А.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Методические указания для самостоятельной работы и выполнения контрольной работы №1 по дисциплине «Теоретическая механика» для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

В методических указаниях представлены расчетно-графические задания. Каждое задание предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для выполнения работы, решенным типовым примером и заданием, содержащим варианты.

Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»
Кравченко Г.М.

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»
Высоковский Д.А.

Оглавление

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 4 контрольных задания.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А4. Контрольная работа должна иметь титульный лист, на котором указываются: название учебного заведение, название дисциплины, номер работы, название группы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, фамилия преподавателя, город и год.

На листе с решением сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно.* Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т. д. Аналогично, в υ_B, a_B означают скорость и ускорение точки *B*; υ_C, a_C – точки *C*; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1, ω_2, ε_2 – тела *2* и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту,* т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;* в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧА 1

Указания: Задача на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

Пример 1. На угольник *ABC* ($\angle ABC = 90°$), конец *A* которого жестко заделан, в точке *C* опирается стержень *DE* (рис. 1, *а*). Стержень имеет в точке *D* неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила $\overline{F}$, а к угольнику – равномерно распределенная на участке *KB* нагрузка интенсивности *q* и пара с моментом *M.*

Дано: $F = 10$ кН, $M = 5$ кН·м, $q = 20$ кН/м, $a = 0{,}2$ м. Определить: реакции в точках *A, C, D,* вызванные заданными нагрузками.

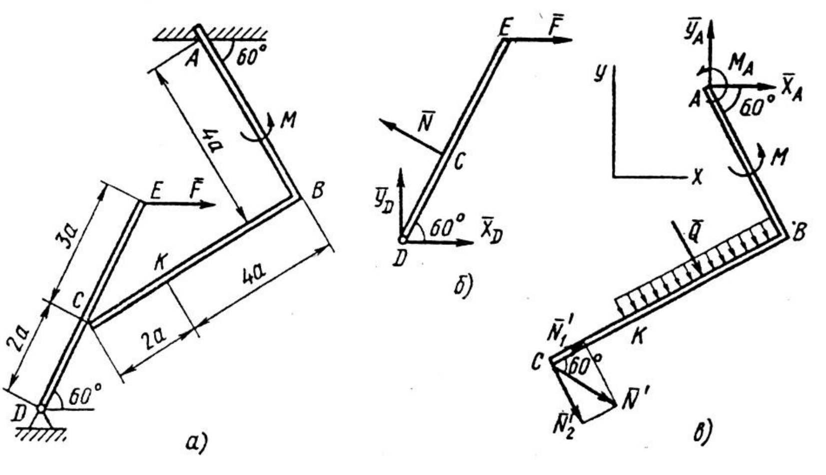


Рис. 1

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня *DE* (рис. 1, *б*). Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ реакции шарнира *D.* Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_D + F - N\sin 60° = 0; \qquad (1)$$
$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_D + N\cos 60° = 0; \qquad (2)$$
$$\Sigma m_D(\overline{F}_k) = 0,\ N \cdot 2a - F \cdot 5a\sin 60° = 0. \qquad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 1, *в*). На него действуют сила давления стержня $\overline{N}'$, направленная противоположно реакции $\overline{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка *KB* (численно $Q = q \cdot 4a = 16$ кН), пара сил с моментом *M* и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и пары с моментом M_A. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + Q\cos 60° + N\sin 60° = 0; \qquad (4)$$
$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A - Q\cos 60° - N\cos 60° = 0; \qquad (5)$$
$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0,\ M_A + M + Q \cdot 2a + N\cos 60° \cdot 4a + N\sin 60° \cdot 6a = 0. \qquad (6)$$

При вычислении момента силы $\overline{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\overline{N}'_1$ и $\overline{N}'_2$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1) – (6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N' = N$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: $N = 21{,}7$ кН, $Y_D = -10{,}8$ кН; $X_D = 8{,}8$ кН, $X_A = -26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = -42{,}6$ кН·м.

Знаки указывают, что силы $\overline{Y}_D$, $\overline{X}_A$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Условия.

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке *C* или соединены друг с другом шарнирно (рис. 1.0 – 1.5), или свободно опираются друг о друга (рис. 1.6 – 1.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке *A* или шарнир, или жесткая заделка; в точке *B* или гладкая плоскость (рис. 0 и 1), или невесомый стержень *BB′* (рис. 2 и 3), или шарнир (рис. 4–9); в точке *D* или невесомый стержень *DD′* (рис. 0, 3, 8), или шарнирная опора на катках (рис. 7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом *M* = 60 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности *q* = 20 кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. 2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\overline{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке *L*, сила $\overline{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке *E*, и нагрузка, распределенная на участке *CK*).

Определить реакции связей в точках *A, B, C* (для рис. 0, 3, 7, 8 еще и в точке *D*), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять *a* = 0,2 м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. 1а.

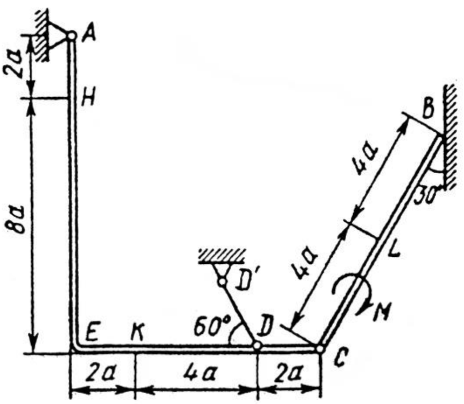


Рис. 1.0

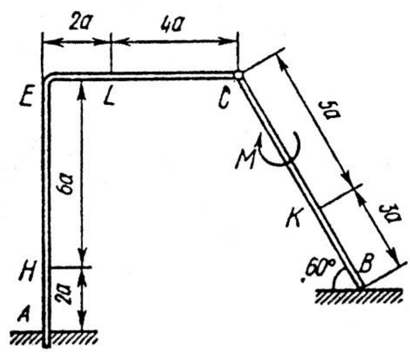


Рис. 1.1

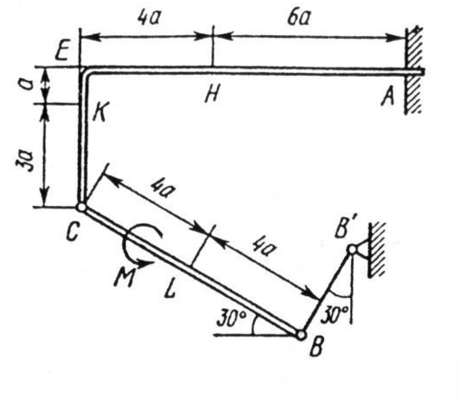


Рис. 1.2

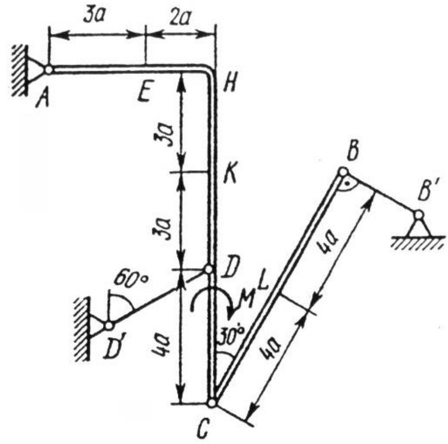


Рис. 1.3

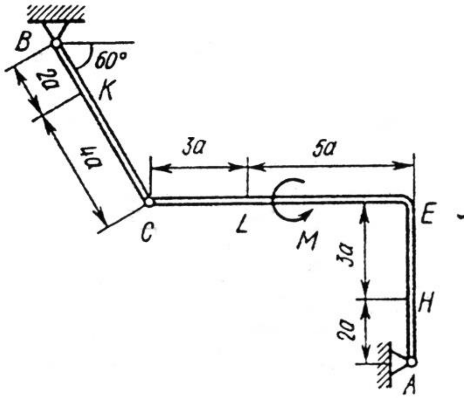


Рис. 1.4

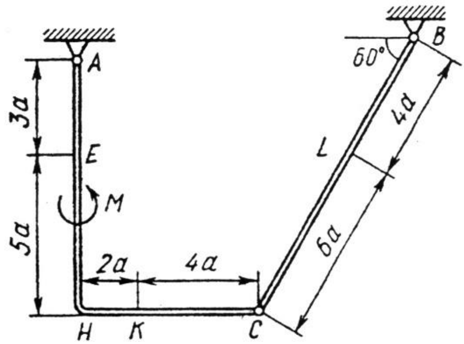


Рис. 1.5

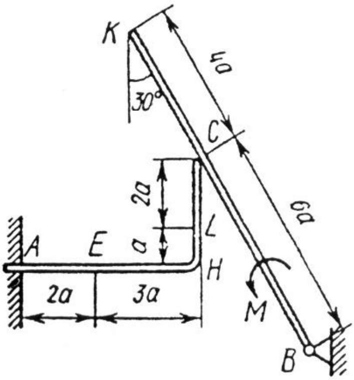


Рис. 1.6

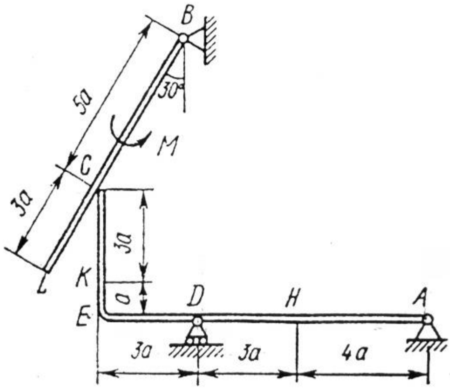


Рис. 1.7

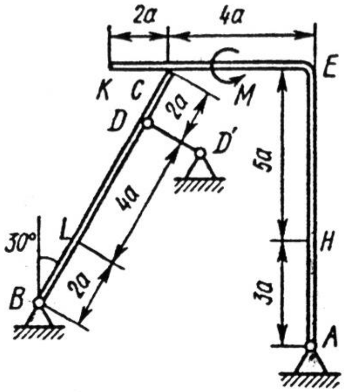


Рис. 1.8

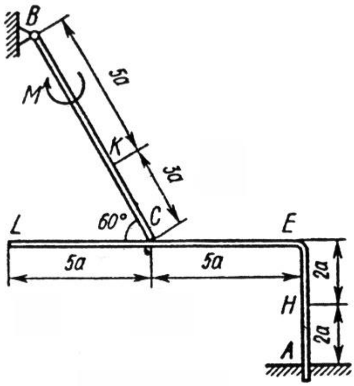


Рис. 1.9

Таблица 1

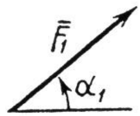
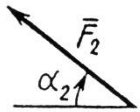
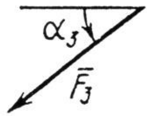
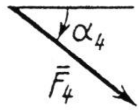
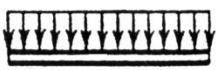
Силы									Нагруженный участок
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН		
	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град	
0	*K*	*60*	–	–	*H*	*30*	–	–	*CL*
1	–	–	*L*	*60*	–	–	*E*	*30*	*CK*
2	*L*	*15*	–	–	*K*	*60*	–	–	*AE*
3	–	–	*K*	*30*	–	–	*H*	*60*	*CL*
4	*L*	*30*	–	–	*E*	*60*	–	–	*CK*
5	–	–	*L*	*75*	–	–	*K*	*30*	*AE*
6	*E*	*60*	–	–	*K*	*75*	–	–	*CL*
7	–	–	*H*	*60*	*L*	*30*	–	–	*CK*
8	–	–	*K*	*30*	–	–	*E*	*15*	*CL*
9	*H*	*30*	–	–	–	–	*L*	*60*	*CK*

Таблица 1а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 0, 3, 5, 7, 8	рис. 1, 2, 4, 6, 9
			

ЗАДАЧА 2

Указания: Усилия в стернях фермы можно определить двумя способами: методом вырезания узлов и методом сечения (метод Риттера).

Метод вырезания узлов состоит в следующем: последовательно рассматривается равновесие всех узлов фермы, находящихся под действием внешних сил и реакций перерезанных стержней. К каждому узлу приложена плоская система сходящихся сил, для которой можно составить два уравнения равновесия. Расчёт целесообразно начинать с того узла, где сходятся два стержня. При этом одно уравнение равновесия предпоследнего узла и два уравнения последнего узла являются проверочными.

Метод Риттера состоит в следующем: ферма, к которой приложены внешние силы, включая реакции опор, рассекается на две части по трём стержням, если это возможно. В число перерезанных стержней должны входить те усилия, которые требуется определить. Одна из частей фермы отбрасывается. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяется неизвестными реакциями. Рассматривается равновесие оставшейся части. Уравнения равновесия составляются так, чтобы в каждое из них входило только одно неизвестное. Это достигается специальным выбором уравнений: при составлении уравнения моментов моментная точка выбирается там, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий, которые в данный момент не определяются. При составлении уравнения проекций ось проекций выбирается перпендикулярно двум параллельным усилиям.

При составлении уравнений равновесия обоими методами предполагается, что все стержни растянуты. Если результат получается со знаком минус, стержень сжат.

Пример 2. Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если F=20 kH, P=20 kH, α=60°, Q=30 kH.(рис. 2, 2.a).

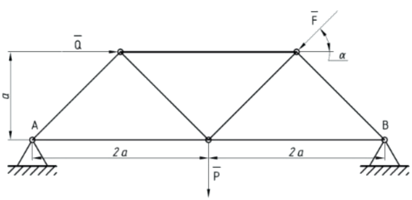


Рис. 2

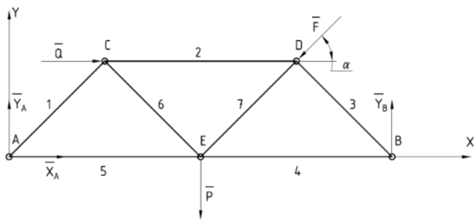


Рис. 2.a

Определяем опорные реакции, рассматривая равновесие системы в целом (Рис.3.а).

$$\sum X = 0 : X_A - F \cdot \cos \alpha + Q = 0;$$
$$\sum H = 0 : Y_A + Y_B - P - F \cdot \sin \alpha = 0;$$
$$\sum MA = 0 : -Q \cdot a - P \cdot 2a - F \cdot \sin \alpha \cdot 3a + F \cdot \cos \alpha \cdot a + Y_B \cdot 4a = 0.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$X_A = -20 \text{ кН}; \; Y_A = 9.33 \text{ кН}; \; Y_B = 28 \text{ кН}.$$

Проверим правильность полученных результатов. Для этого составим сумму моментов сил относительно точки С.

$$\sum M_C = X_A \cdot a - Y_A \cdot a - P \cdot a - F \cdot \sin \alpha \cdot 2a + Y_B \cdot 3a =$$
$$= (-20 - 9.33 - 20 - 20 \cdot 1.73 + 28 \cdot 3) \cdot a = 0.$$

Переходим к определению усилий в стержнях фермы.

Метод вырезания узлов.

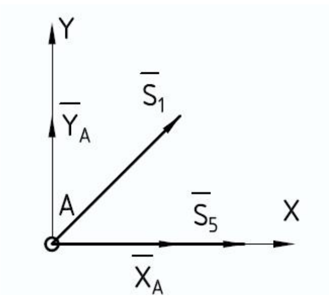


Рис. 2.6

Начинаем расчёт с узла А, где сходятся два стержня. Следует изобразить тот узел, равновесие которого рассматривается (рис. 2.6). Так как мы предполагаем, что все стержни растянуты, реакции стержней направляем от узла (S_1 и S_5). Тогда усилия в стержнях (реакции шарнира) будут направлены в противоположную сторону.

Для узла А составляем два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 : +X_A + S_5 + S1 \cdot \cos 45° = 0;$$
$$\sum Y = 0 : Y_A + S_1 \cdot \cos 45° = 0.$$

Получаем: *S_1=-13.2kH; S_2=29.32kH*

Далее рассматриваем равновесие узла С

Уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 : Q + S_2 + S_6 \cdot \cos 45° - S1 \cdot \cos 45° = 0;$$
$$\sum Y = 0 : - S_1 \cdot \cos 45° - S_6 \cdot \cos 45° = 0.$$

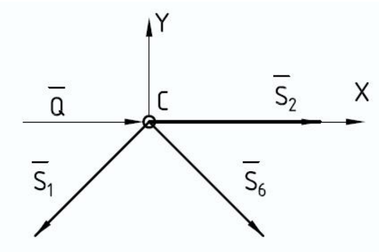


Рис. 2.в

При подстановке значения S_1 учитываем, что усилие отрицательное.

Получаем: S_6*=13.2kH;* S_2*=-48.7kH*

Аналогично рассчитываются остальные узлы.

Метод сечения (метод Риттера).

Метод Риттера удобно использовать, если требуется определить усилия не во всех стержнях, и как проверочный, так как он позволяет определить каждое усилие независимо от остальных.

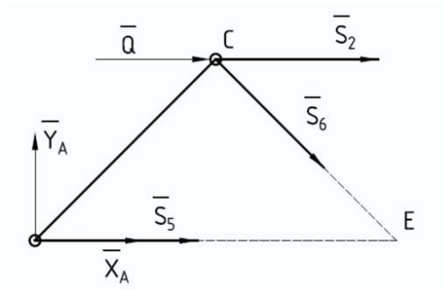


Рис. 2.г

Определим усилия в стержнях 2, 6, 5. Разрезаем ферму на две части по стержням 2, 6, 5. Отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой

Для определения усилия S5 составляем уравнение моментов относительно точки, где пересекаются силы S_2 и S_6 (точка C).

$$\sum M_C = 0: X_A \cdot a - Y_A \cdot a + S_5 \cdot a = 0;.$$
$$S_5 = 29.32 \text{ kH}.$$

Для определения усилия S_2 составляем уравнение моментов относительно точки E:

$$\sum M_E = 0: - Q \cdot a - S_2 \cdot a - Y_A \cdot 2a = 0;$$
$$S_2 = 48.64 \text{kH}.$$

Для определения усилия S_6 следует составить уравнение проекций на ось Y:

$$\sum Y = 0: -S_6 \cdot \cos 45° + Y_A = 0;$$
$$S_6 = 13.2 \text{kH}.$$

Условия

Найти реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также усилия во всех стержнях.

Таблица 2

№ варианта	P1 ,кН	P2,кН	P3,кН	a, м	h, м
1	50	60	100	2,4	3,0
2	60	80	]20	3,0	3,6
3	80	100	50	3,6	4,0
4	100	120	60	4,0	4,2
5	120	50	80	4,2	3,0
6	100	100	60	3,0	3,0
7	80	80	120	3,0	4,0
8	60	60	120	4,2	4,0
9	50	100	100	4,0	3,6
0	100	50	50	3,5	4,0

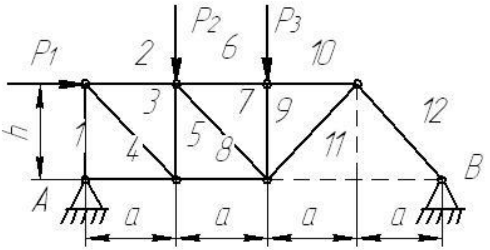


Рис. 2.0

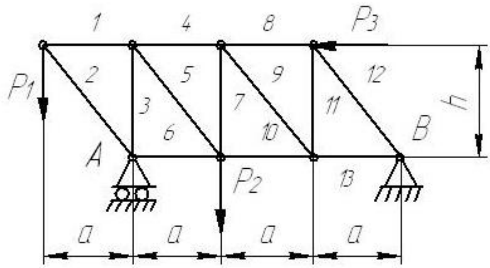


Рис. 2.1

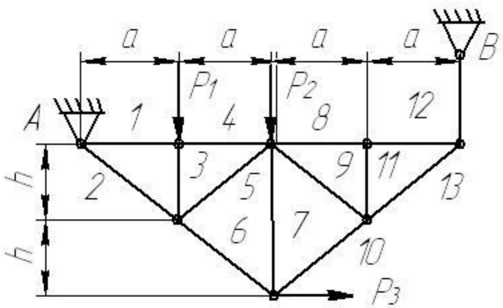


Рис. 2.2

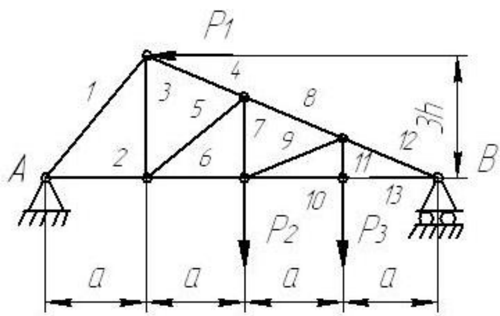


Рис. 2.3

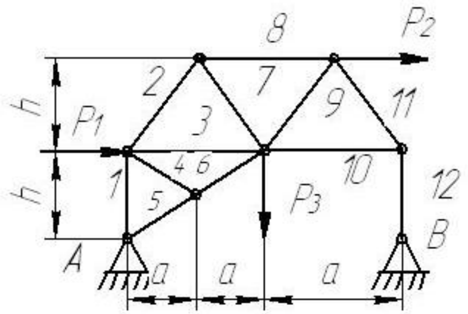


Рис. 2.4

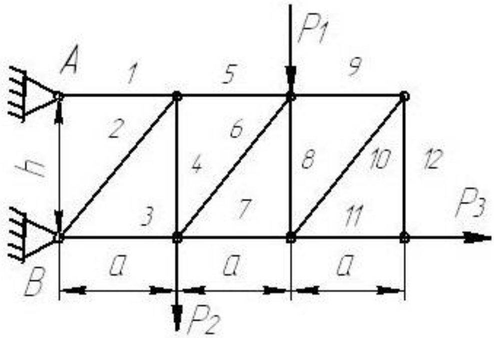


Рис. 2.5

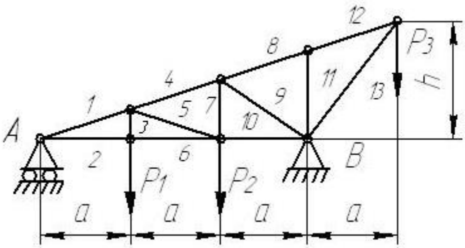


Рис. 2.6

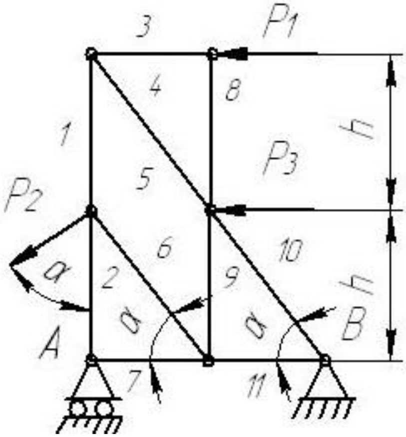


Рис. 2.7

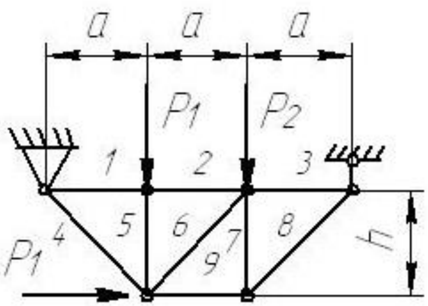


Рис. 2.8

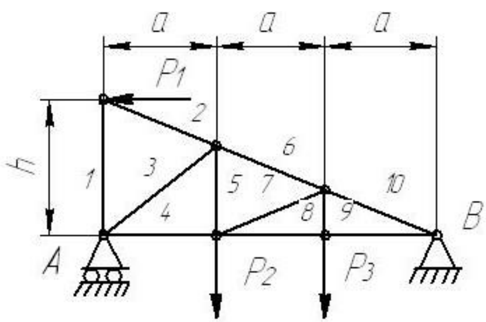


Рис. 2.9

ЗАДАЧА 3

Указания. Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: $\varphi = f(t)$. Угловая скорость: $\omega = \varphi'$. Угловое ускорение: $\varepsilon = \omega' = \varphi''$.

При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример 3. Рейка *1*, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 3). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Д а н о: R_2 = 6 см, r_2 = 4 см, R_3 = 8 см, r_3 = 3 см, $s_1 = 3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), A – точка обода колеса 3, t_1=3 с. Определить: ω_3, υ_4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

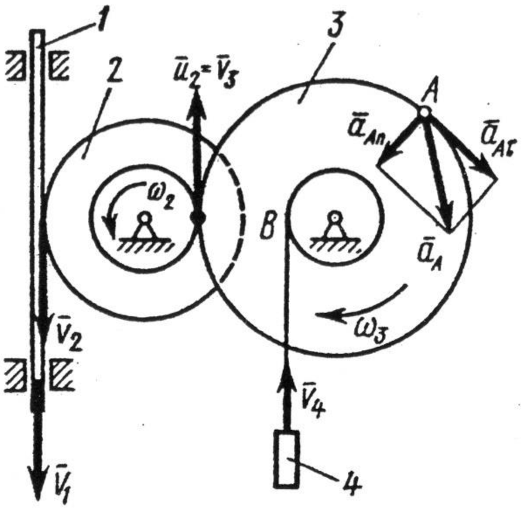


Рис. 3

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через υ_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$\upsilon_1 = \dot{s}_1 = 9t^2 . \qquad (1)$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $\upsilon_2 = \upsilon_1$ или $\omega_2 R_2 = \upsilon_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = \upsilon_3$ или $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2 . \qquad (2)$$

Тогда для момента времени t_1 = 3 с получим ω_3 = 6,75 с$^{-1}$.

2. Определяем υ_4. Так как $\upsilon_4 = \upsilon_B = \omega_3 r_3$, то при t_1 = 3 с υ_4 = 20,25 см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (2), получим ε_3 = $\dot{\omega}_3$ = =1,5 t. Тогда при t_1 = 3 с ε_3 = 4,5 с$^{-2}$.

4. Определяем a_A. Для точки A $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$, где численно $\bar{a}_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 с имеем

$$\bar{a}_{A\tau} = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_{An} = 364{,}5 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. 3.

Ответ: ω_3 = 6,75 с$^{-1}$; υ_4 = 20,25 см/с; ε_3 = 4,5 с$^{-2}$; a_A = 366,3 см/с^2.

Условия.

Механизм состоит из ступенчатых колес *1–3,* находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. 3.0 – 3.9, табл. 3). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса *1* – r_1 = =2см, R_1 = 4 см, у колеса 2 – r_2 = 6 см, R_2 = 8 см, у колеса *3* – r_3 = 12 см, R_3 = =16 см. На ободьях колес расположены точки *A, B* и С.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса *1*, $s_4(t)$ – закон движения рейки *4*, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса *2*, $\upsilon_5(t)$ – закон изменения скорости груза *5* и т. д. (везде φ выражено в радианах, *s* – в сантиметрах, *t* – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и υ_4, υ_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1 = 2 с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (υ – линейные, ω – угловые) и ускорения (*a* – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (υ_5 – скорость груза *5* и т. д.).

Таблица 3

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	υ_B, υ_C	ε_2, a_A, a_5
1	$\upsilon_5 = 2(t^2 - 3)$	υ_A, υ_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	υ_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	υ_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	υ_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	υ_5, υ_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	υ_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$\upsilon_4 = 3t^2 - 8$	υ_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 8t - 3t^2$	υ_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	υ_5, ω_B	ε_2, a_A, a_4

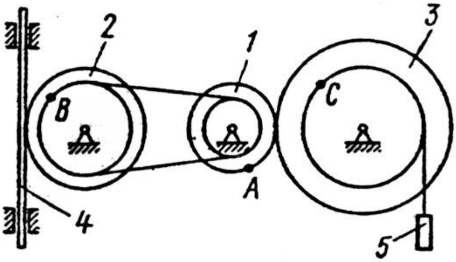


Рис. 3.0

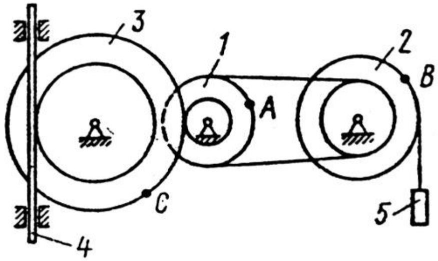


Рис. 3.1

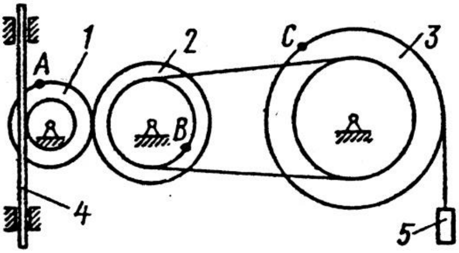


Рис. 3.2

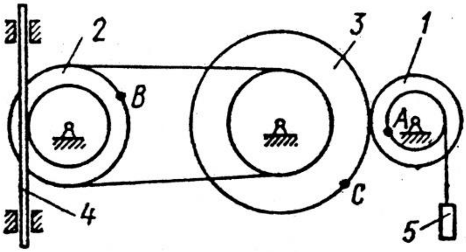


Рис. 3.3

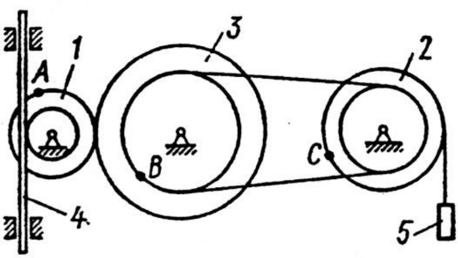


Рис. 3.4

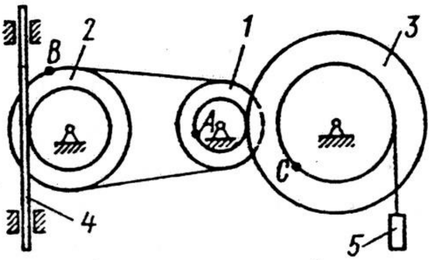


Рис. 3.5

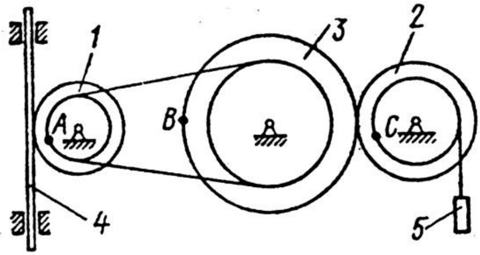


Рис. 3.6

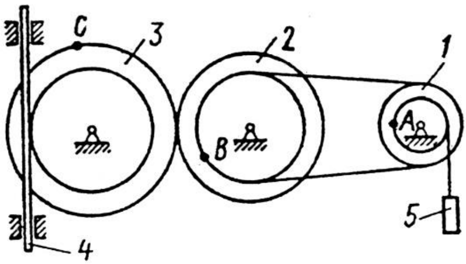


Рис. 3.7

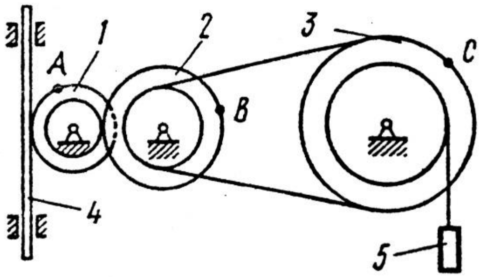


Рис. 3.8

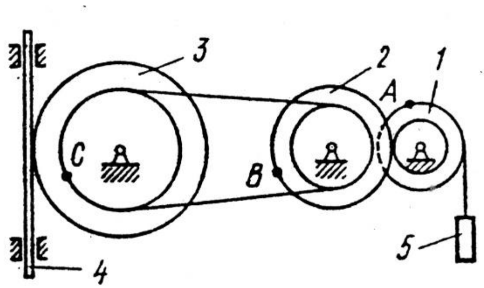


Рис. 3.9

ЗАДАЧА 4

Указания: Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела: $x_A = f_1(t),\ \ y = f_2(t),\ \ \varphi = f_3(t)$,. Скорость при плоскопараллельном движении твердого тела: $v = v_{\text{пост}} + v_{\text{вращ}}$.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

При решении задачи для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому** звену **механизма в отдельности.**

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$, где *A* – точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка *A* движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$); *B*– точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить.

Пример 4. Механизм (рис. 4а) состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Д а н о: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки). Определить: υ_B, υ_E, ω_2, a_B, ε_3.

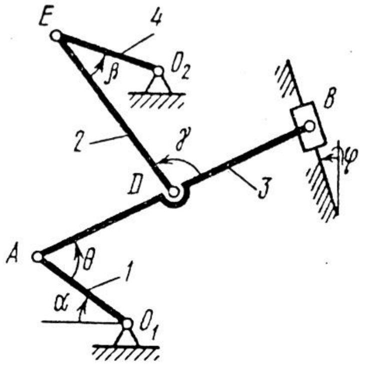


Рис. 4а

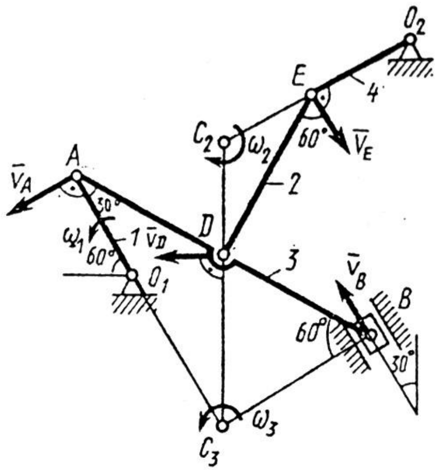


Рис. 4б

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 6б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем υ_B. Точка *B* принадлежит стержню *AB*. Чтобы найти υ_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{\upsilon}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{\upsilon}_A$; численно

$$\upsilon_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \quad \bar{\upsilon}_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\bar{\upsilon}_B$ найдем, учтя, что точка *B* принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{\upsilon}_A$ и направление $\bar{\upsilon}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня *AB*) на прямую, соединяющую эти точки (прямая *AB*). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{\upsilon}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$\upsilon_B \cos 30° = \upsilon_A \cos 60° \text{ и } \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем $\overline{\upsilon}_E$. Точка *E* принадлежит стержню *DE*. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{\upsilon}_E$, надо сначала найти скорость точки *D*, принадлежащей одновременно стержню *AB*. Для этого, зная $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня *AB*; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, восставленных из точек *A* и *B* (к $\overline{\upsilon}_A$ перпендикулярен стержень *1*). По направлению вектора $\overline{\upsilon}_A$ определяем направление поворота стержня *AB* вокруг МЦС C_3. Вектор $\overline{\upsilon}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки *D* и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину $\overline{\upsilon}_D$ найдем из пропорции

$$\frac{\upsilon_D}{C_3D} = \frac{\upsilon_B}{C_3B} \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$\upsilon_D = \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \quad \overline{\upsilon}_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка *E* принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{\upsilon}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек *E* и *D* перпендикуляры к скоростям $\overline{\upsilon}_E$ и $\overline{\upsilon}_D$, построим МЦС C_2 стержня *DE*. По направлению вектора $\overline{\upsilon}_D$ определяем направление поворота стержня *DE* вокруг центра C_2. Вектор $\overline{\upsilon}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{\upsilon_E}{C_2E} = \frac{\upsilon_D}{C_2D}, \quad \upsilon_E = \upsilon_D = 0{,}46 \text{ м/с}; \qquad (5)$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня *2* известен (точка C_2) и $C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \qquad (6)$$

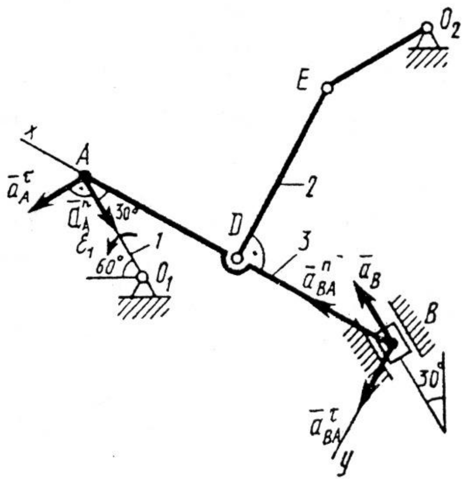


Рис. 4в

5. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. 4в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка *B* принадлежит стержню *AB.* Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня *AB* и траекторию точки *B.* По данным задачи можем определить $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \qquad (7)$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\bar{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. 4в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar{\upsilon}_B$.

Для определения $\bar{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar{a}_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A) и $\bar{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $\bar{a}_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_A}{C_3A} = \frac{\upsilon_A}{l_3\cos 30^\circ} = 0{,}66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0{,}61 \text{ м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B спроектируем обе части равенства (8) на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\bar{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось a_B > 0, то, следовательно, вектор $\overline{a}_B$ направлен как показано на рис. 4в.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a^{τ}_{BA}. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное *AB* (ось *y*). Тогда получим

$$-a_B \sin 30° = a^{\tau}_A \sin 60° + a^{n}_A \sin 30° + a^{\tau}_{BA} \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что a^{τ}_{BA} = –3,58 м/с^2. Знак указывает, что направление $\overline{a}^{\tau}_{BA}$ противоположно показанному на рис. 4в.

Теперь из равенства $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a^{\tau}_{BA}\right|}{l_3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}$$

Ответ: υ_B = 0,46 м/с; υ_E = 0,46 м/с; ω_2 = 0,67 с$^{-1}$; a_B = 0,72 м/с^2; ε_3 = =2,56 с$^{-2}$.

Примечание. Если точка *B,* ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. 4.0 – 4.4, где *B* движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\overline{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\overline{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\overline{a}_B = \overline{a}^{\tau}_A + \overline{a}^{n}_A$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\overline{a}^{\tau}_B + \overline{a}^{n}_B = \overline{a}^{\tau}_A + \overline{a}^{n}_A + \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{BA} \qquad (13)$$

При этом вектор $\overline{a}^{n}_B$ (см., например, рис. 6.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\overline{a}_B$ – перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_B^τ, a_B^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть a_A^τ = 0 или a_A^n = 0, если точка *A* движется прямолинейно).

Значение a_B^n также вычисляется по формуле $a_B^n = \upsilon_B^2 / \rho = \upsilon_B^2 / l$ а, где *l* – радиус окружности O_2B, а υ_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^τ? можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$. Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Условия

Плоский механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4 и* ползуна *B* или *E* (рис. 4.0 – 4.7) или из стержней *1, 2, 3* и ползунов *B* и *E* (рис. 4.8, 4.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка *D* находится в середине стержня *AB.* Длины стержней равны соответственно l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. 4а (для рис. 0–4) или в табл. 4б (для рис. 5–9); при этом в табл. 4а ω_1 и ω_4 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие, углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от *DB* по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 – против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере 4 (см. рис. 4б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\overline{\upsilon}_B$ и ускорение a_B – от точки *B* к *b* (на рис. 5–9).

Таблица 4а (к рис. 4.0 – 4.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c	υ точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
1	90	120	150	0	30	–	4	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
2	30	60	30	0	120	5	–	*B*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
3	60	150	150	90	30	–	5	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
4	30	30	60	0	150	4	–	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
5	90	120	120	90	60	–	6	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
6	90	150	120	90	30	3	–	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
7	0	60	60	0	120	–	2	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
8	60	150	120	90	30	2	–	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
9	30	120	150	0	60	–	8	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*

Таблица 4б (к рис. 4.5 – 4.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1 1/с^2	υ_B, м/с	a_B, м/с^2	υ точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	*D, E*	*DE*	*A*	*AB*
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
9	60	60	60	90	30	–	–	5	4	*D, E*	*AB*	*A*	*AB*

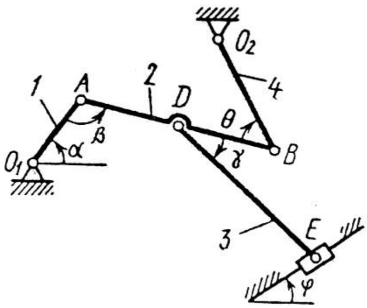


Рис. 4.0

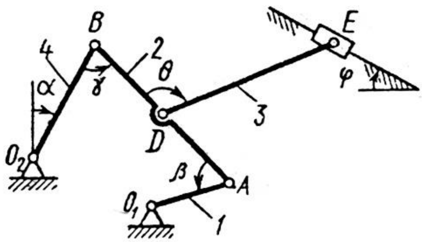


Рис. 4.1

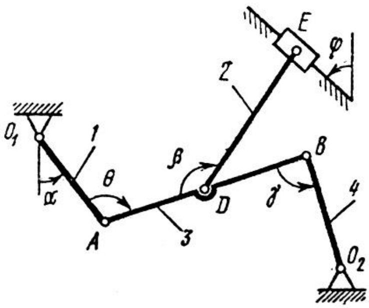


Рис. 4.2

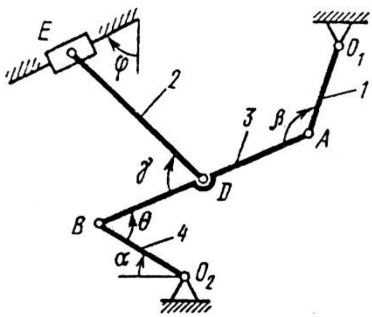


Рис. 4.3

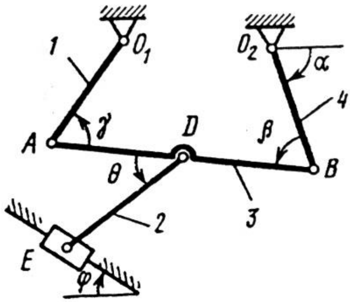


Рис. 4.4

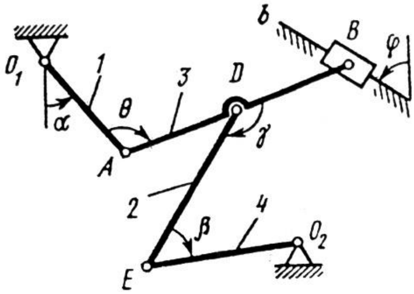


Рис. 4.5

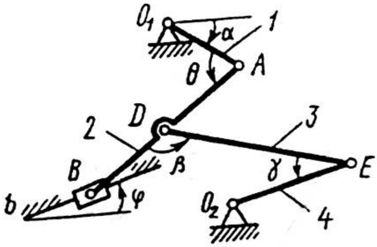


Рис. 4.6

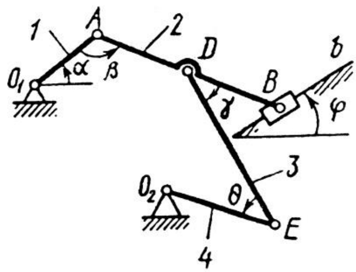


Рис. 4.7

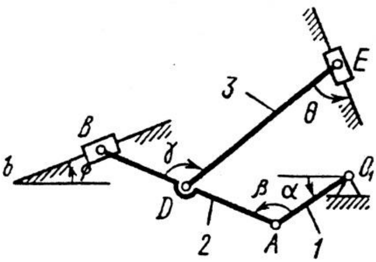


Рис. 4.8

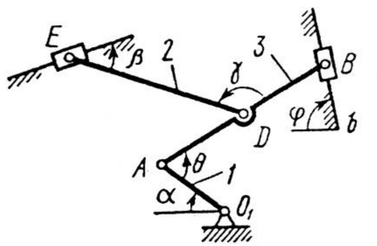


Рис. 4.9