ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Методические указания

для самостоятельной работы и выполнения расчетно-графической работы №2 по дисциплинам

«Теоретическая механика (общий курс)» и «Теоретическая механика»

Авторы
Высоковский Д.А.,
Углич С.И.,
Кириллова Е.В.,
Кравченко Г.М.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Методические указания для самостоятельной работы и выполнения расчетно-графической работы №2 по направлениям подготовки 08.03.01 «Строительство», 07.03.02 «Реконструкция и реставрация архитектурного наследия» и специальностям 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

В методических указаниях представлены расчетно-графические задания. Каждое задание предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для выполнения работы, решенным типовым примером и заданием, содержащим варианты.

Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Высоковский Д.А.

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Углич С.И.

ст. преподаватель кафедры «Техническая механика» Кириллова Е.В.

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Кравченко Г.М.

Оглавление

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 4 контрольных задания.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А4. Контрольная работа должна иметь титульный лист, на котором указываются: название учебного заведение, название дисциплины, номер работы, название группы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, фамилия преподавателя, город и год.

На листе с решением сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно.* Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т. д. Аналогично, в υ_B, a_B означают скорость и ускорение точки *B*; υ_C, a_C – точки *C*; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1, ω_2, ε_2 – тела *2* и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту,* т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;* в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧА 1

Под номером 4 помещены две задачи 4а и 4б, которые надо решить.

Указания. Задача 1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

$$v_x = x' \quad v_y = y' \quad v_z = z' \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$a_x = x'' \quad a_y = y'' \quad a_z = z'' \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1 = 1 с.

Пример 1а. Даны уравнения движения точки в плоскости *xy:*

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(*x, y* – в сантиметрах, *t* – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени t_1 = 1 с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right) \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{3-x}{2},\quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)=\frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2}=1-2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. 1а):

$$x=(y+1)^2+1 \qquad (2)$$

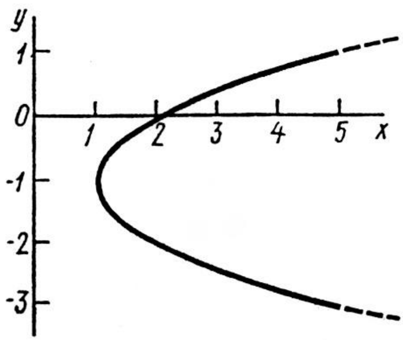

Рис. 1а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$$

и при t_1 = 1 с

$\upsilon_{1x} = 1{,}11$ см/с, $\upsilon_{1y} = 0{,}73$ см/с, $\upsilon_1 = 1{,}33$ см/с.

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при t_1 = 1 с

$a_{1x} = 0{,}87$ см/с^2, $a_{1y} = -0{,}12$ см/с^2, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2. (4)

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$. Получим

$$2\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} = 2\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt} + 2\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt},$$

Откуда

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}. \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при t_1 = 1 с $a_{1\tau}$ = 0,66 см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$ получим, что при t_1 = 1 с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \upsilon^2 / a_n$. Подставляя сюда числовые значения υ_1 и a_{1n}, найдем, что при t_1 = 1 с $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Ответ: υ_1 = 1,33 см/с, a_1 = 0,88 см/с^2, $a_{1\tau}$ = 0,66 см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Пример 1б. Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону $s = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ ($\smile{s}$ – в метрах, t – в секундах), где s = AM (рис. 4б). Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1 с.

Решение. Определяем скорость точки:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

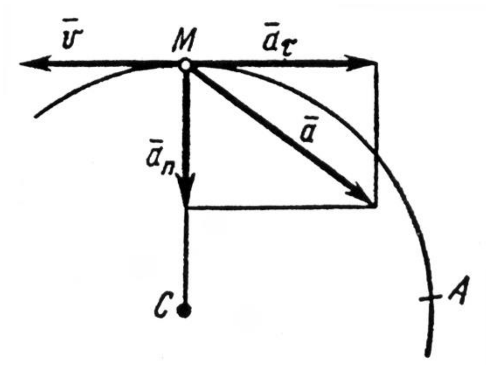

Рис. 1б

При t_1 = 1 с получим $\upsilon_1 = \pi\sqrt{2} = 1{,}11$ м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

При t_1 = 1 с получим, учтя, что R = 2 м,

$a_{1\tau} = -\pi^2\sqrt{2}/16 =$ 0,87 м/с², $a_{1n} = \upsilon_1^2/2 = \pi^2/16 =$ 0,62 м/с² .

Тогда ускорение точки при t_1 = 1 с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \pi^2\sqrt{3}/16 = 1{,}07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рис. К1б векторы $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{a}_1$, учитывая знаки υ_1 и $a_{1\tau}$ и считая положительным направление от *А* к *М.*

Условия

Задача 1а. Точка *B* движется в плоскости *xy* (рис. 4.0 – 4.9, табл. 4; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. где *x* и *y* выражены в сантиметрах, *t* – в секундах.

Таблица 1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0–2	рис. 3–6	рис. 7–9	
1	2	3	4	5
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t-2t^2$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-10t$
7	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. 4 (для рис. 0–2 в столбце 2, для рис. 3–6 в столбце 3, для рис. 7–9 в столбце 4).

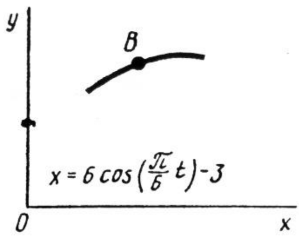

Рис. 1.0

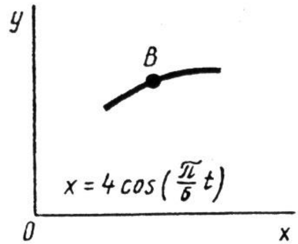

Рис. 1.1

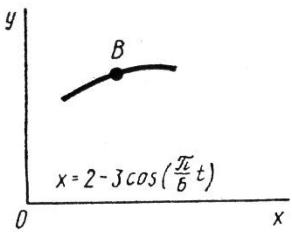

Рис. 1.2

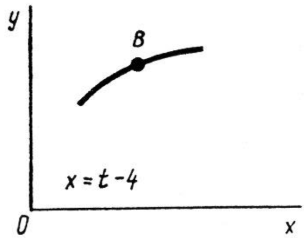

Рис. 1.3

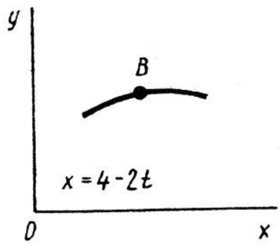

Рис. 1.4

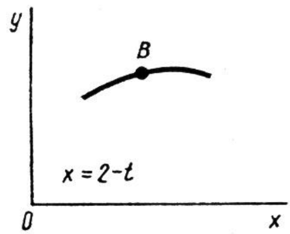

Рис. 1.5

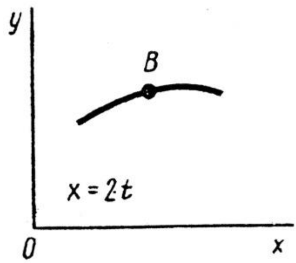

Рис. 1.6

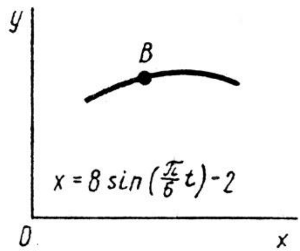

Рис. 1.7

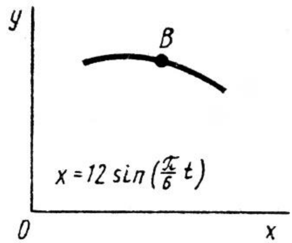

Рис. 1.8

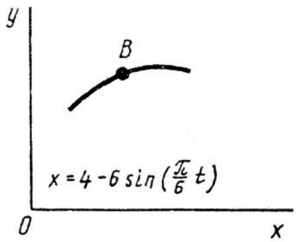

Рис. 1.9

Задача 1б. Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону $s = f_1(t)$, заданному в табл. 1 в столбце 5 (s – в метрах, t – в секундах), где $s = AM$ – расстояние точки от некоторого начала *A,* измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Изобразить на рисунке векторы $\overline{\upsilon}$ и $\overline{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении *M,* а положительное направление отсчета s – от A к *M.*

ЗАДАЧА 2

Указания. Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: $\varphi = f(t)$. Угловая скорость: $\omega = \varphi'$. Угловое ускорение: $\varepsilon = \omega' = \varphi''$.

При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример 2. Рейка *1*, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 2). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Д а н о: R_2 = 6 см, r_2 = 4 см, R_3 = 8 см, r_3 = 3 см, $s_1 = 3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), A – точка обода колеса 3, t_1=3 с. Определить: ω_3, υ_4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

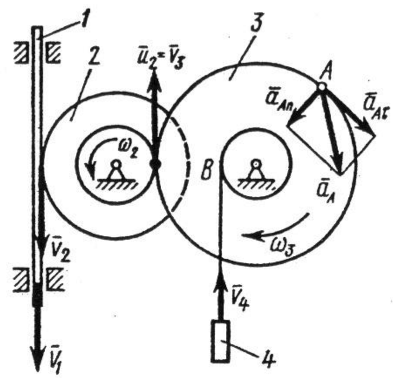

Рис. 2

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через υ_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки *1*, находим ее скорость:

$$\upsilon_1 = \dot{s}_1 = 9t^2 . \qquad (1)$$

Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то $\upsilon_2 = \upsilon_1$ или $\omega_2 R_2 = \upsilon_1$. Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = \upsilon_3$ или $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2 . \qquad (2)$$

Тогда для момента времени t_1 = 3 с получим ω_3 = 6,75 с$^{-1}$.

2. Определяем υ_4. Так как $\upsilon_4 = \upsilon_B = \omega_3 r_3$, то при t_1 = 3 с υ_4 = 20,25 см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3$ = =1,5 *t*. Тогда при t_1 = 3 с ε_3 = 4,5 с$^{-2}$.

4. Определяем a_4. Для точки *A* $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$, где численно $\bar{a}_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 с имеем

$$\bar{a}_{A\tau} = 36 \text{ см/с}^2, \; a_{An} = 364{,}5 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. 2.

Ответ: ω_3 = 6,75 с$^{-1}$; υ_4 = 20,25 см/с; ε_3 = 4,5 с$^{-2}$; a_A = 366,3 см/с^2.

Условия.

Механизм состоит из ступенчатых колес *1–3,* находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. 2.0 – 2.9, табл. 2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса *1* – r_1 = =2см, R_1 = 4 см, у колеса 2 – r_2 = 6 см, R_2 = 8 см, у колеса *3* – r_3 = 12 см, R_3 = =16 см. На ободьях колес расположены точки *A, B* и С.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса *1*, $s_4(t)$ – закон движения рейки *4*, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса *2*, $\upsilon_5(t)$ – закон изменения скорости груза *5* и т. д. (везде φ выражено в радианах, *s* – в сантиметрах, *t* – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и υ_4, υ_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1 = 2 с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (υ – линейные, ω – угловые) и ускорения (*a* – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (υ_5 – скорость груза *5* и т. д.).

Таблица 5

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	υ_B, υ_C	ε_2, a_A, a_5
1	$\upsilon_5 = 2(t^2 - 3)$	υ_A, υ_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	υ_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	υ_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	υ_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	υ_5, υ_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	υ_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$\upsilon_4 = 3t^2 - 8$	υ_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 8t - 3t^2$	υ_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	υ_5, ω_B	ε_2, a_A, a_4

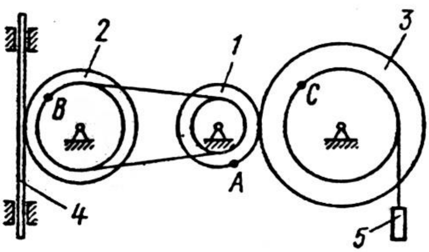

Рис. 2.0

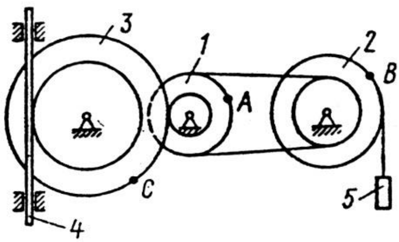

Рис. 2.1

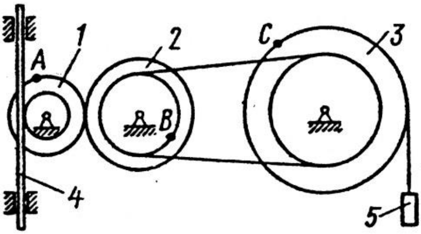

Рис. 2.2

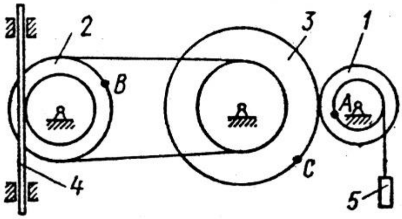

Рис. 2.3

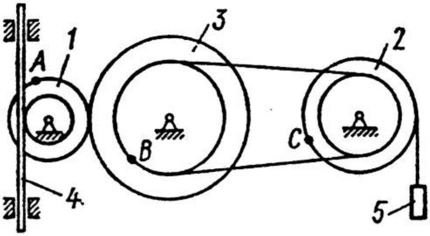

Рис. 2.4

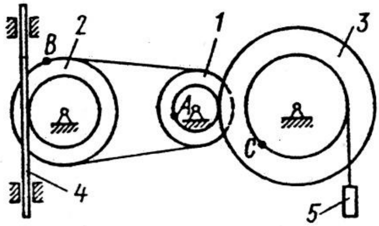

Рис. 2.5

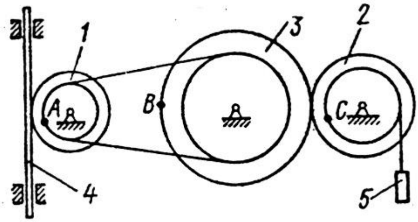

Рис. 2.6

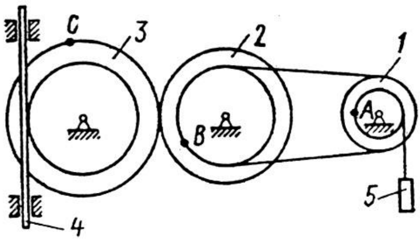

Рис. 2.7

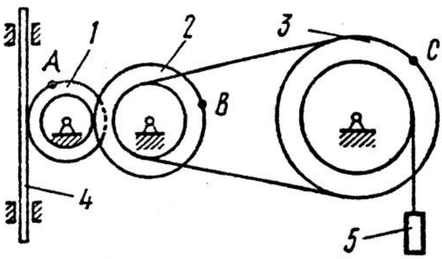

Рис. 2.8

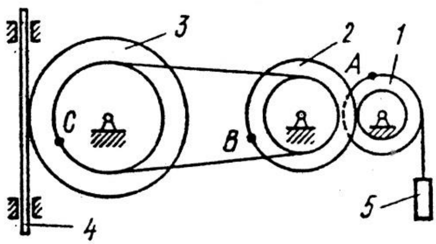

Рис. 2.9

ЗАДАЧА 3

Указания: Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела: $x_A = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$,. Скорость при плоскопараллельном движении твердого тела: $v = v_{\text{пост}} + v_{\text{вращ}}$.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

При решении задачи для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому** звену **механизма в отдельности.**

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$, где A – точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка A движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$); B– точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить.

Пример 3. Механизм (рис.3а) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна *B,* соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Д а н о: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки). Определить: v_B, v_E, ω_2, a_B, ε_3.

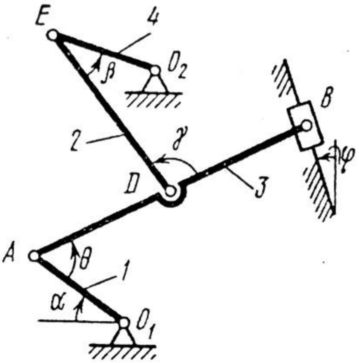

Рис. 3а

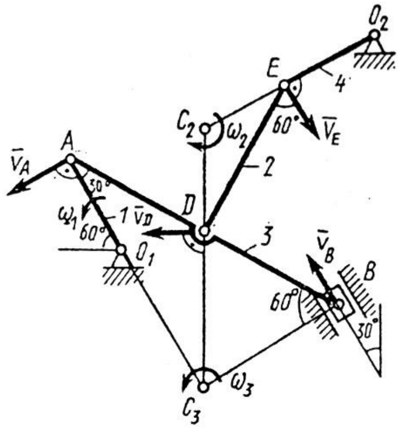

Рис. 3б

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 6б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем υ_B. Точка *B* принадлежит стержню *AB.* Чтобы найти υ_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{\upsilon}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{\upsilon}_A$; численно

$$\upsilon_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \ \bar{\upsilon}_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\bar{\upsilon}_B$ найдем, учтя, что точка *B* принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{\upsilon}_A$ и направление $\bar{\upsilon}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня *AB*) на прямую, соединяющую эти точки (прямая *AB*). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{\upsilon}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$\upsilon_B \cos 30° = \upsilon_A \cos 60° \text{ и } \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем $\overline{\upsilon}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{\upsilon}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, восставленных из точек A и B (к $\overline{\upsilon}_A$ перпендикулярен стержень *1*). По направлению вектора $\overline{\upsilon}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\overline{\upsilon}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину $\overline{\upsilon}_D$ найдем из пропорции

$$\frac{\upsilon_D}{C_3D} = \frac{\upsilon_B}{C_3B} \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$\upsilon_D = \upsilon_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \quad \overline{\upsilon}_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{\upsilon}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\overline{\upsilon}_E$ и $\overline{\upsilon}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\overline{\upsilon}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\overline{\upsilon}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{\upsilon_E}{C_2E} = \frac{\upsilon_D}{C_2D}, \quad \upsilon_E = \upsilon_D = 0{,}46 \text{ м/с}; \qquad (5)$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня *2* известен (точка C_2) и $C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \qquad (6)$$

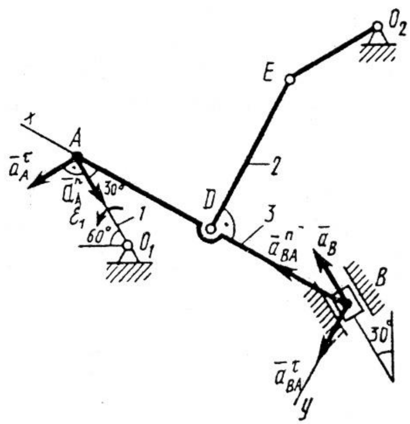

Рис. 3в

5. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. 3в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка *B* принадлежит стержню *AB*. Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня *AB* и траекторию точки *B*. По данным задачи можем определить $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \qquad (7)$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. 3в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\overline{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{\upsilon}_B$.

Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^n. \tag{8}$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a}_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A) и $\overline{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $\overline{a}_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня *3*, получим

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_A}{C_3A} = \frac{\upsilon_A}{l_3\cos 30^\circ} = 0{,}66\ \text{с}^{-1} \quad \text{и} \quad a_{BA}^n = 0{,}61\ \text{м/с}^2. \tag{9}$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B спроектируем обе части равенства (8) на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cos 30° = a_A^\tau \cos 60° - a_A^n \cos 30° + a_{BA}^n \tag{10}$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar{a}_B$ направлен как показано на рис. 3в.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a^{τ}_{BA}. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное *AB* (ось *y*). Тогда получим

$$-a_B \sin 30° = a^{\tau}_A \sin 60° + a^n_A \sin 30° + a^{\tau}_{BA} \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a^{\tau}_{BA} = -3{,}58$ м/с². Знак указывает, что направление $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ противоположно показанному на рис. К3в.

Теперь из равенства $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a^{\tau}_{BA}\right|}{l_3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}$$

Ответ: $\upsilon_B = 0{,}46$ м/с; $\upsilon_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с⁻¹; $a_B = 0{,}72$ м/с²; $\varepsilon_3 = =2{,}56$ с⁻².

Примечание. Если точка *B,* ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. 6.0 – 6.4, где *B* движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\bar{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\bar{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^n_A$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}^{\tau}_B + \bar{a}^n_B = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^n_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^n_{BA} \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}_B^n$ (см., например, рис. 3.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\bar{a}_B$ – перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_B^τ, a_B^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть a_A^τ = 0 или a_A^n = 0, если точка *A* движется прямолинейно).

Значение a_B^n также вычисляется по формуле $a_B^n = \upsilon_B^2 / \rho = \upsilon_B^2 / l$ *а*, где *l* – радиус окружности O_2B, а υ_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^τ? можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$. Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Условия

Плоский механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4 и* ползуна *B* или *E* (рис. 3.0 – 3.7) или из стержней *1, 2, 3* и ползунов *B* и *E* (рис. 3.8, 3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка *D* находится в середине стержня *AB.* Длины стержней равны соответственно l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. 6а (для рис. 0–4) или в табл. 3б (для рис. 5–9); при этом в табл. 3а ω_1 и ω_4 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие, углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от *DB* по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 – против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере 3 (см. рис. 3б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{\upsilon}_B$ и ускорение a_B – от точки *B* к *b* (на рис. 5–9).

Таблица 3а (к рис. 3.0 – 3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	υ точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
1	90	120	150	0	30	–	4	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
2	30	60	30	0	120	5	–	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
3	60	150	150	90	30	–	5	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
4	30	30	60	0	150	4	–	*D, E*	*AB*	*B*	*AB*
5	90	120	120	90	60	–	6	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
6	90	150	120	90	30	3	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
7	0	60	60	0	120	–	2	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
8	60	150	120	90	30	2	–	*D, E*	*AB*	*B*	*AB*
9	30	120	150	0	60	–	8	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*

Таблица 36 (к рис. 3.5 – 3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с^2	υ_B, м/с	a_B, м/с^2	υ точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	*D, E*	*DE*	*A*	*AB*
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
9	60	60	60	90	30	–	–	5	4	*D, E*	*AB*	*A*	*AB*

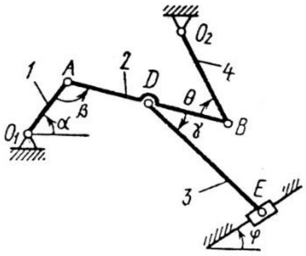

Рис. 3.0

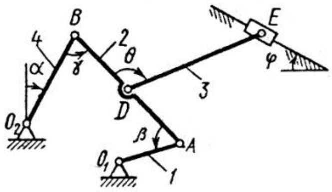

Рис. 3.1

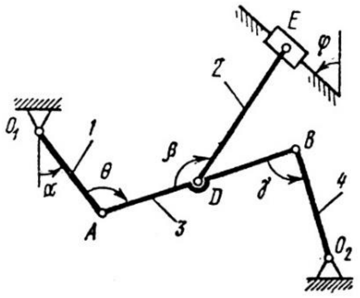

Рис. 3.2

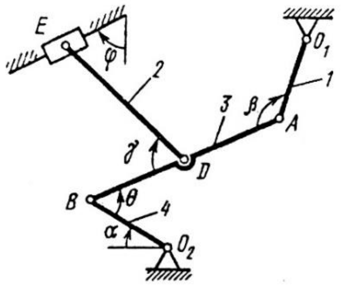

Рис. 3.3

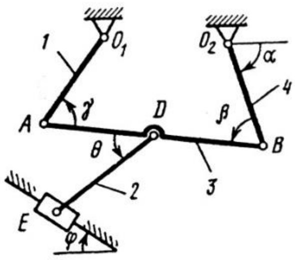

Рис. 3.4

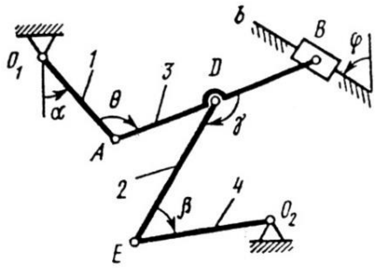

Рис. 3.5

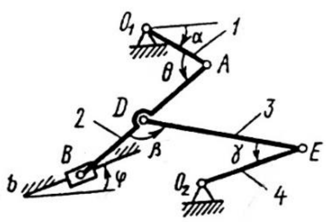

Рис. 3.6

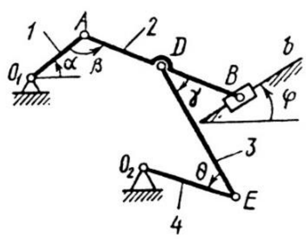

Рис. 3.7

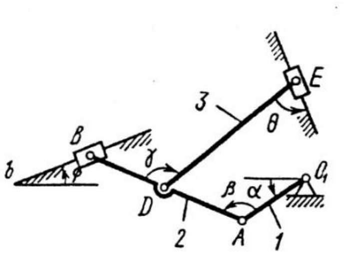

Рис. 3.8

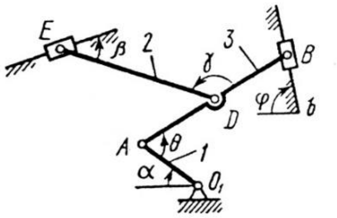

Рис. 3.9

ЗАДАЧА 4

Указания. Задача К4 – на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка *М* на пластине в момент времени t_1 = 1 с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5–9, при решении задачи не подставлять числового значения *R,* пока не будут определены положение точки *М* в момент времени t_1 = 1 с и угол между радиусами *СМ* и *СА* в этот момент.

Рассмотрим два примера решения этой задачи.

Пример 4а. Пластина $OEAB_1D$ ($OE = OD$, рис. 4а) вращается вокруг оси, проходящей через точку *О* перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса *R* движется точка *В* по закону s = $\breve{AB}$ = $f_2(t)$ (положительное направление отсчета s – от *А* к *В*).

Д а н о: R = 0,5 м, $\varphi = t^2 – 0{,}5t^3$, $s = \pi R\cos(\pi t/3)$ (φ – в радианах, *s* – в метрах, *t* – в секундах). Определить: $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени t_1 = 2 с.

Решение. Рассмотрим движение точки *В* как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины –переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{\upsilon}_{авс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}$$

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор} \qquad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн}, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$$

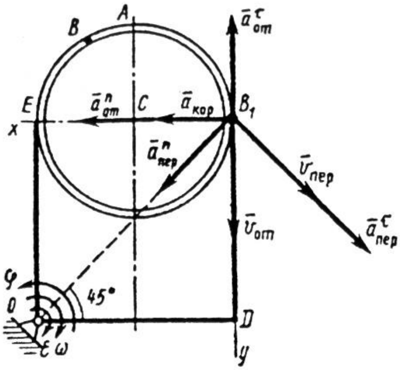

Рис. 4а

Определим все, входящие в равенства (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \breve{AB} = \pi R \cos(\pi t/3). \qquad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) t_1 = 2 с, получим

$$s_1 = \pi R \cos(\pi 2/3) = -0{,}5\pi R.$$

Тогда

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -0{,}5\pi$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка B в момент t_1 = 2 с находится справа от точки Л. Изображаем ее на рис. 4а в этом положении (точка B_1).

Теперь находим числовые значения $\upsilon_{отн}$, $a^{\tau}_{отн}$, $a^{n}_{отн}$

$$\upsilon_{отн} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(\pi t/3),$$

$$a^{\tau}_{отн} = \dot{\upsilon}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(\pi t/3), \quad a^{n}_{отн} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{\rho_{отн}} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{R},$$

где $\rho_{отн}$ – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности *R*. Для момента $t_1 = 2$ с, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим

$$\upsilon_{отн} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12} = -1{,}42 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0{,}86 \text{ м/с}^2,$$

$$a^{n}_{отн} = \frac{\pi^4}{24} = 4{,}06 \text{ м/с}^2. \qquad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}^{\tau}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния *s*, а вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ – в противоположную сторону; вектор $\bar{a}^{n}_{отн}$ направлен к центру С окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К4а.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1{,}5t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при $t_1 = 2$ с

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = -4 \text{ с}^{-2}. \qquad (4)$$

Знаки указывают, что в момент t_1 = 2 с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ; отметим это на рис. 4а.

Для определения $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O. Из рисунка видно, что h_1 = $2R\sqrt{2}$ = 1,41 м. Тогда в момент времени t_1 = 2 с, учитывая равенства (4), получим

$$\upsilon_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = \text{ 2,82 м/с },$$

$$\bar{a}^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = \text{5,64 м/с}^2, \quad \bar{a}^{n}_{пер} = \omega^2 h_1 = \text{5,64 м/с}^2. \quad (5)$$

Изображаем на рис. К4а векторы $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ с учетом направлений ω и ε вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Модуль кориолиесова ускорения определяем по формуле $a_{кор} = 2|\upsilon_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между вектором $\bar{\upsilon}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$). В нашем случае этот угол равен 90°, так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$.

Численно в момент времени t_1 = 2 с, так как в этот момент $|\upsilon_{отн}|$ = =1,42 м/с и $|\omega|$ = 2 $с^{-1}$, получим

$$a_{кор} = \text{5,68 м/с}^2. \quad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского: так как вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$, лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω, т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\bar{a}_{кор}$ на рис. К4а. [Иначе направление $\bar{a}_{кор}$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \bar{\upsilon}_{отн})$.]

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. Определение $\upsilon_{абс}$. Проведем координатные оси B_1xy (см. рис. 4а) и спроектируем почленно обе части равенства $\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}$ на эти оси. Получим для момента времени t_1 = 2 с:

$$\upsilon_{абс\ x} = \upsilon_{отн\ x} + \upsilon_{пер\ x} = 0 - |\upsilon_{пер}| \cos 45^\circ = -1{,}99 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_{абс\ y} = \upsilon_{отн\ y} + \upsilon_{пер\ y} = |\upsilon_{отн}| + |\upsilon_{пер}| \cos 45^\circ = 3{,}41 \text{ м/с}.$$

После этого находим

$$\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{абс\ x} + \upsilon^2_{абс\ y}} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\bar{\upsilon}_{отн}$ и $\bar{\upsilon}_{пер}$ равен 45°, значение $\upsilon_{абс}$ можно еще определить по формуле

$$\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{отн} + \upsilon^2_{пер} + 2|\upsilon_{отн}| \cdot |\upsilon_{пер}| \cdot \cos 45^\circ} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

5. Определение $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн} + \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{абс}$ спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси B_1xy. Получим

$$a_{абс\ x} = a^{n}_{отн} + a_{кор} + a^{n}_{пер} \cos 45^\circ - |a^{\tau}_{пер}| \cos 45^\circ,$$

$$a_{абс\ y} = a^{n}_{пер} \cos 45^\circ + |a^{\tau}_{пер}| \cos 45^\circ - |a^{\tau}_{отн}|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени t_1 = 2 с, найдем, что в этот момент

$$a_{абс\ x} = 9{,}74 \text{ м/с}^2; \quad a_{абс\ y} = 7{,}15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абс\ x} + a^2_{абс\ y}} = 12{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{абс}$ = 3,95 м/с, $a_{абс}$ = 12,08 м/с^2.

Пример 4б. Треугольная пластина *ADE* вращается вокруг оси *z* по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. 4б дуговой стрелкой). По гипотенузе *AD* движется точка *B* по закону s = *AB* = $f_2(t)$; положительное направление отсчета *s* – от *A* к *D*.

Д а н о: $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$, s = *AB* = $2 + 15t - 3t^2$; (φ – в радианах, *s* – в сантиметрах, *t* – в секундах). Определить: $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени t_1=2 с.

Решение. Рассмотрим движение точки *B* как сложное, считая её движение по прямой *AD* относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость $\upsilon_{абс}$ и абсолютное ускорение $a_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \qquad (1)$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}$.

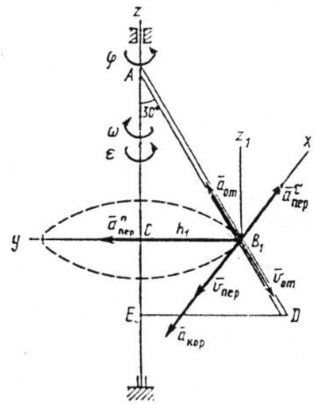

Рис. 4б

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2+15t-3t^2. \qquad (2)$$

Поэтому

$$\upsilon_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t,\ a_{отн} = \dot{\upsilon}_{отн} = -6.$$

В момент времени t_1 = 2 с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см},\ \upsilon_{отн} = 3 \text{ см/с},\ a_{отн} = -6 \text{ см/с}^2. \qquad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\overline{\upsilon}_{отн}$, направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\overline{a}_{отн}$ – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. 4.б.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = 0{,}3t^2 - 2{,}2$; $\varepsilon = \omega = 0{,}6t$ и при t_1 = 2 с,

$$\omega = -1 \text{ с}^{-1},\ \varepsilon = 1{,}2 \text{ с}^{-2}. \qquad (4)$$

Знаки указывают, что в момент t_1 = 2 с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; Отметим это на рис. 4*б* соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения z: $h_1 = AB_1\sin 30° = 10$ см. Тогда в момент t_1 = 2 с, учитывая равенства (4), получим

$$\upsilon_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с},$$

$$a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2, \quad a^{n}_{пер} = \omega^2 h_1 = 10 \text{ см/с}^2 \qquad (5)$$

Изобразим на рис. К4б векторы $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ (с учетом знаков ω и ε) и $\bar{a}^{n}_{пер}$; направлены векторы $\bar{\upsilon}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ перпендикулярно плоскости *ADE*, а вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ – по линии B_1C к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{\upsilon}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 30°, то численно в момент времени t_1 = 2 с

$$a_{кор} = 2 \cdot |\upsilon_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30° = 3 \text{ см/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского. Для этого вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $a^{n}_{пер}$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки; Получим направление вектора $\bar{a}_{кор}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\bar{\upsilon}_{пер}$ (см. рис. 4б).

4. Определение $\upsilon_{абс}$. Так как $\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}$, а векторы $\bar{\upsilon}_{отн}$ и $\bar{\upsilon}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то

$\overline{\upsilon}_{абс} = \sqrt{\upsilon_{отн}^2 + \upsilon_{пер}^2}$; в момент времени t_1= 2 с $\upsilon_{абс}$ = 10,44 см/с.

5. Определение $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{отн} + \overline{a}_{пер}^{\tau} + \overline{a}_{пер}^{n} + \overline{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{абс}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\overline{a}_{абс}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\overline{a}_{пер}^{\tau}$ и $\overline{a}_{кор}$ лежат на оси x, а векторы $\overline{a}_{пер}^{n}$ и $\overline{a}_{отн}$ расположены в плоскости B_1yz_1, т. е. в плоскости пластины. Тогда, проектируя обе части равенства (7) на оси B_1xyz_1 и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени t_1 = 2 с:

$$a_{абс\,x} = \left|a_{пер}^{\tau}\right| - a_{кор} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{абс\,y} = a_{пер}^{n} + \left|a_{отн}\right| \sin 30° = 13 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{абс z1} = \left|a_{отн}\right| \cos 30° = 5{,}20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{абс}$

$$a_{абс} = \sqrt{a_{абс\,x}^2 + a_{абс\,y}^2 + a_{абс\,z1}^2} = 16{,}64 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{абс}$ = 10,44 см/с, $a_{абс}$ = 16,64 см/с^2.

Условия.

Прямоугольная пластина (рис. 4.0 – 4.4) или круглая пластина радиуса R = 60 см (рис. 4.5 – 4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$. заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0–4) или по окружности радиуса R (рис. 5–9) движется точка M; закон ее относительного движения, т. е. зависимость $s = AM = f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0–4 и для рис. 5–9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Таблица 4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0–4		Для рис. 5–9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \breve{AM} = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

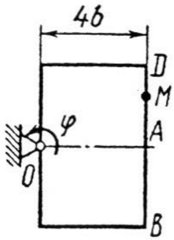

Рис. 4.0

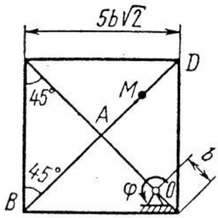

Рис. 4.1

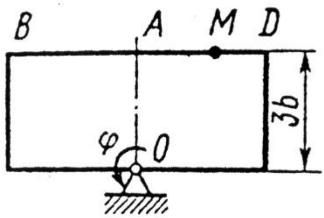

Рис. 4.2

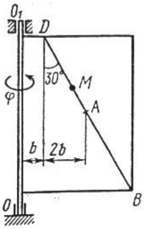

Рис. 4.3

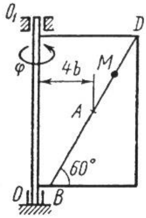

Рис. 4.4

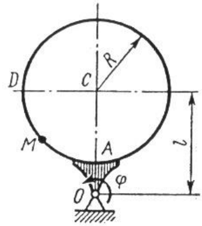

Рис. 4.5

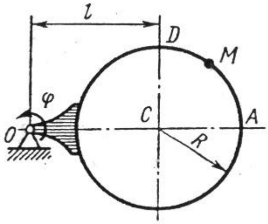

Рис. 4.6

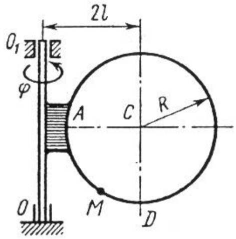

Рис. 4.7

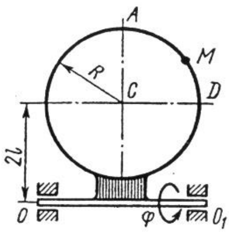

Рис. 4.8

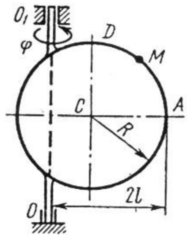

Рис. 4.9