ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Техническая механика»

# Учебное пособие

# «Теоретическая механика. Кинематика»

Авторы
Высоковский Д.А.,
Кириллова Е.В.

Ростов-на-Дону, 2018

## Аннотация

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» очной и заочной форм обучения.

## Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика» Высоковский Д.А.

ст.преподаватель кафедры «Техническая механика» Кириллова Е.В.

# Оглавление

# 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

## 1.1. Способы задания движения точки

Всякое движение точки можно задать одним из трех способов: естественным, координатным, векторным.

1. Естественный способ

Если известно, что точка должна двигаться по заданной траектории, то надо задать: уравнение траектории, систему отсчета (рис. 1) и закон движения вдоль траектории

$$S = f(t).$$

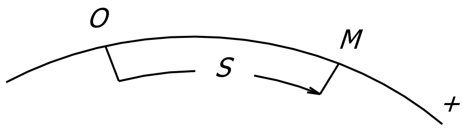


Рис. 1

2. Координатный способ

Чтобы описать движение точки относительно некоторой системы координат *x*,*y*,*z*, надо задать уравнения движения

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t).$$

3. Векторный способ

В этом способе надо задать вектор-функцию движения точки M

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}.$$

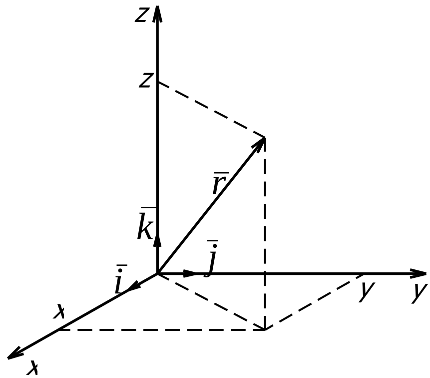


Рис. 2

Этот способ удобно применять для вывода формул скорости и ускорения движения точки.

## 1.2. Скорость движения точки и ускорение

Пусть положение точки $M$ в момент $t$ определяется радиус-вектором $\bar{r}$, а в момент $t+\Delta t$ радиус вектором $\bar{r}+\Delta\bar{r}$ (рис. 3).

Тогда средняя скорость $\bar{V}_{cp}$ за время $\Delta t$ будет равна

$$\bar{V}_{cp}=\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу, получим мгновенную скорость

$$\bar{V}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\dot{\bar{r}}.$$

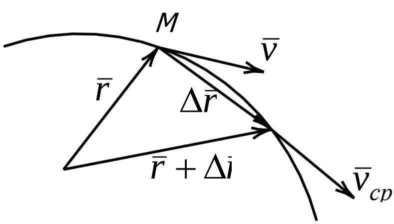


Рис. 3

Скорость движения точки – векторная величина, равная первой производной от радиуса-вектора по времени. Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения в сторону движения.

Аналогично выводится вектор ускорения

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{\bar{r}}.$$

Вектор ускорения в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Чтобы получить формулы для вычисления проекции скорости и ускорения на оси неподвижной декартовой системы координат, воспользуемся выражением радиуса-вектора.

Подстановка дает

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}.$$

Зная уравнения движения, вычислим проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат и модуль вектора скорости

$$v_x = \dot{x},\quad v_y = \dot{y},\quad v_z = \dot{z};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Вектор скорости представим в виде

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}.$$

После подстановки получим

$$\bar{a} = \dot{v}_x\bar{i} + \dot{v}_y\bar{j} + \dot{v}_z\bar{k}.$$

Отсюда проекции и модуль вектора ускорения вычислим по формулам:

$$a_x = \dot{v}_x,\quad a_y = \dot{v}_y,\quad a_z = \dot{v}_z;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

## 1.3. Скорость движения точки и ускорение при естественном способе задания движения

Чтобы получить формулы для вектора скорости и вектора ускорения при естественном способе описания движения точки, воспользуемся понятием функции от функции.

Будем считать, что радиус-вектор точки $M$ зависит от дуги, которая зависит от времени $t$, т.е. $\bar{r} = \bar{r}[s(t)]$ (рис.4).

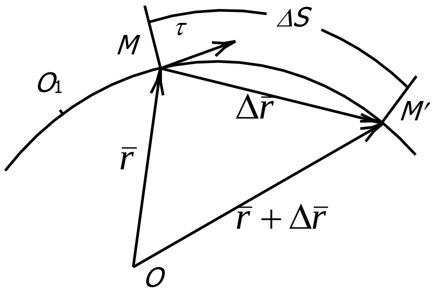


Рис. 4

Тогда

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Так как $\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta S \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\right| = 1$, то $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ – единичный касательный вектор к траектории в точке $M$.

Вектор скорости принимает вид

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau}.$$

Так как $\dot{s} = v$, то $\bar{v} = v \cdot \bar{\tau}$.

Теперь определим ускорение как производную вектора скорости по времени:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds}$$

Производную $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ преобразуем с помощью радиуса кривизны траектории (рис. 5).

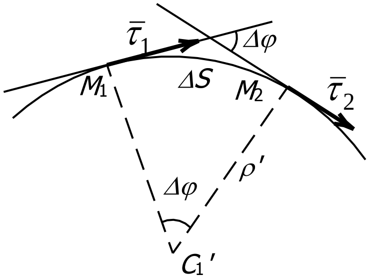


Рис. 5

Точка $M_1$ – начало дуги $\Delta S$, $M_2$ – конец дуги, $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ – единичные касательные векторы, $\Delta\varphi$ – угол смежности, $\rho'$ – радиус окружности с центром $c_1'$. Отсюда следуют соотношения:

$$\Delta S = \rho' \Delta\varphi ,$$

$$\frac{d\varphi}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{1}{\rho},$$

где $\rho$ – радиус кривизны кривой, т.е. радиус соприкасающейся окружности.

Следовательно,

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{d\bar{\tau}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi}.$$

Так как $\bar{\tau}^2 = 1$, то $\bar{\tau}\dfrac{d\bar{\tau}}{d\varphi} = 0$. Отсюда $\dfrac{d\bar{\tau}}{d\varphi} \perp \bar{\tau}$, $\dfrac{d\bar{\tau}}{d\varphi} = b\bar{n}$, где $\bar{n}$ – единичный вектор главной нормали траектории в точке *M*, *b* – модуль вектора $\dfrac{d\bar{\tau}}{d\varphi}$. Обратимся к рис. 6 и вычислим величину *b*.

Из $\Delta AM_1B$ находим $\left|\Delta\bar{\tau}\right| = 2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$.

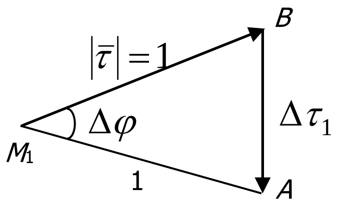


Рис. 6

Для модуля производной $\dfrac{d\bar{\tau}}{d\varphi}$ получим

$$b = \left|\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = 1.$$

Таким образом, формулу приводим к виду

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho}\bar{n}$$

Подстановка приводит к окончательному результату

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}.$$

Вектор ускорения при естественном способе задания движения точки равен геометрической сумме двух взаимно перпендикулярных векторов, один из которых направлен по касательной к траектории, а другой – по главной нормали.

Модуль касательного ускорения вычисляется по формуле

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v},$$

модуль нормального ускорения – по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

модуль полного ускорения – по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Для решения задач иногда полезно применять комбинированные формулы. Так, касательное ускорение можно вычислить, дифференцируя по времени скорость,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

а нормальное ускорение можно определить из формулы полного ускорения

$$a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_\tau^2,$$

откуда находим величину радиуса кривизны

$$\rho = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{a_n}.$$

# 2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 2.1. Поступательное движение

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая этого тела движется параллельно самой себе (рис. 7). Точки *A* и *B* описывают одинаковые траектории с равными скоростями и ускорениями.

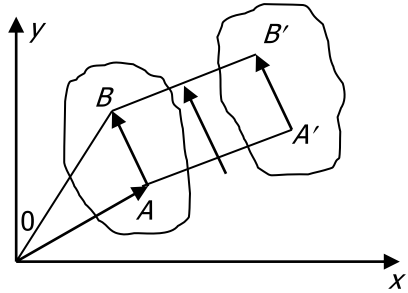


Рис. 7

Из определения $\bar{r}_b = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}$, где *AB* – const.

Дифференцируя , получим $\bar{Q}_B = \bar{Q}_A$.

Отсюда следует, что изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению одной (любой) точки тела.

## 2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Если твердое тело движется так, что две какие-нибудь его точки остаются неподвижными, то такое движение называется вращательным (рис. 8).

Положение вращающегося тела определяется линейным углом двугранного угла $П_oП_1$. Измеряется угол $\varphi$ всегда в радианах. При вращении тела вокруг оси этот угол является непрерывной и однозначной функцией времени, т.е.

$$\varphi = f(t).$$

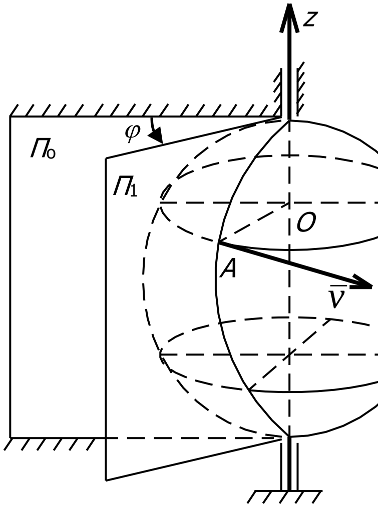


Рис. 8

Производная от угла $\varphi$ по времени называется угловой скоростью вращения тела, т.е.

$$\omega = \dot{\varphi}.$$

Производная от угловой скорости по времени называется угловым ускорением вращения тела, т.е.

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

При вращении тела все его точки описывают окружности. Рассмотрим точку $A$, находящуюся на расстоянии $h$ от оси вращения (рис. 8).

$$V = \frac{ds}{dt} = h\dot{\varphi} = h\omega.$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = h\varepsilon, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = h\omega^2,$$

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Выведем векторную формулу для скорости точки *А*. Будем считать, что угловая скорость является векторной величиной, а положение точки *А* определяется радиусом-вектором (рис. 9). Составляя векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{r}$, получим $\left|\bar{\omega} \times \bar{r}\right| = \omega r \sin \alpha = v$.

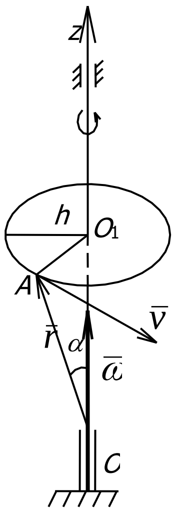


Рис. 9

Следовательно,

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Эта формула, называемая формулой Эйлера, позволяет при заданной угловой скорости тела определить величину и направление скоростей точек вращающегося тела.

Так как $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$, то формулу Эйлера можно записать в виде

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

При решении задач кинематики в ряде случаев пользуются подвижными осями *Oxyz*. Когда такие оси движутся вращательно, то их орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ зависят от времени. Орт $\bar{i}$ можно рассматривать как радиус-вектор $\bar{r}_A = \bar{i}$ точки *A*, лежащей на оси *Ox* на расстоянии единицы длины от начала 0. Тогда $\dfrac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}$.

Аналогичные соотношения получим и для производных от $\bar{j}$ и $\bar{k}$. В результате находим:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \; \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \; \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}.$$

Эти равенства называются формулами Пуассона.

# 3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

## 3.1. Относительное, переносное и абсолютное движения

Рассмотрим простейшее сложное движение, когда точка движется относительно некоторой системы координат *Oxyz*, которая в свою очередь произвольно движется по отношению к другой системе $O_1x_1y_1z_1$, принятой условно за неподвижную. Такое движение точки по отношению к $O_1x_1y_1z_1$ называется сложным.

Относительным движением точки называется ее движение по отношению к подвижной системе отсчета. Относительной траекторией, относительной скоростью и относительным ускорением точки называют соответственно траекторию, скорость и ускорение в этом относительном движении.

Переносной скоростью точки в данный момент времени называют скорость, которая имеет точка, как неизменно связанная в этот момент времени с самой подвижной системой координат.

Абсолютным движением точки называют ее движение относительно неподвижной системы отсчета. Абсолютной скоростью, абсолютным ускорением точки называют соответственно скорость и ускорение в абсолютном движении.

При решении задач принимают следующие обозначения: $\bar{v}_{отн}$ – относительная скорость; $\bar{a}_{отн}$ – относительное ускорение; $\bar{r}$ – радиус-вектор точки в подвижной системе отсчета; $\bar{v}_{пер}$, $\bar{a}_{пер}$ – переносная скорость и переносное ускорение.

## 3.2. Сложение скоростей и ускорений при вращательном переносном движении

Из векторного треугольника *OOA* (рис. 10) имеем, что во все время движения

$$\bar{R} = 0_1 0 \cdot \bar{k} + \bar{r} = 0_1 0 \cdot \bar{k} + x\bar{i} + y\bar{j},$$

где $0_1 0 = h$ – const. Когда точка *A* движется относительно системы *Oxy*, а сама система вращается вокруг неподвижной оси *Oz*, то *x*,*y* изменяются по величине, а $\bar{i}$, $\bar{j}$ – по направлению. Вектор $\bar{R}$

будет, следовательно, изменяться и по величине, и по направлению. Дифференцируя, получим:

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \left( x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} \right) + \left( \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right).$$

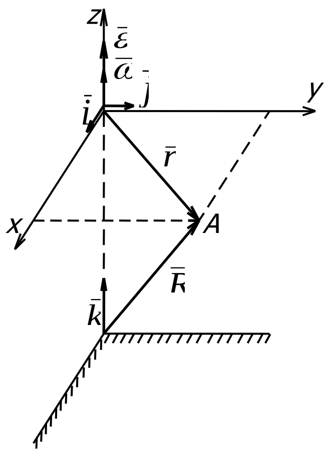


Рис. 10

Так как абсолютная скорость точки *A* является первой производной от радиуса-вектора $\bar{R}$, то

$$\bar{v} = \left( x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} \right) + \left( \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right).$$

Это выражение преобразуем по формулам Пуассона:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \left( x\bar{i} + y\bar{j} \right) + \left( \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right) = \bar{\omega} \times \bar{r} + \left( \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right).$$

Первое слагаемое определяет скорость переносного движения точки при вращении подвижной системы координат, т.е.

$$\bar{v}_{пер} = \bar{\omega} \times \left( x\bar{i} + y\bar{j} \right) = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Второе слагаемое определяет скорость точки *А* при неизменных $\bar{i}$ , $\bar{j}$ , т.е. ее относительную скорость

$$\bar{v}_{отн} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}.$$

В результате

$$\bar{v} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн}.$$

Таким образом, доказана теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Теперь найдем зависимость между абсолютным, относительным и переносным ускорениями точки.

Дифференцируя по времени, получим

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{пер}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{отн}}{dt}.$$

Определим производную от переносной скорости:

$$\frac{d\bar{v}_{пер}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \left(x\bar{i} + y\bar{j}\right) + \bar{\omega} \times \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt}\right) + \bar{\omega} \times \left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}\right) =$$
$$= \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right) + \bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}.$$

Так как

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right),$$

то

$$\frac{d\bar{v}_{пер}}{dt} = \bar{a}_{пер} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}.$$

Найдем производную от относительной скорости :

$$\frac{d\bar{v}_{отн}}{dt} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \left(\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}\right) = \bar{a}_{отн} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}.$$

Подставляя выражения, получим

$$\bar{a} = \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{отн} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}.$$

Эта формула показывает, что в том случае, когда переносное движение не является поступательным, абсолютное ускорение точки складывается из трех ускорений: переносного, относительного и ускорения равного $2\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}$, которое называется поворотным или кориолисовым уравнением.

В результате

$$\bar{a} = \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{кор},$$

где $\bar{a}_{кор} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}$.

Таким образом, доказана теорема Кориолиса о сложении ускорений: в том случае, когда переносное движение не является поступательным, абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова.

В случае, когда $\bar{R} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, формула не меняет вида.

Для определения вектора кориолисова ускорения можно воспользоваться простым правилом Н.Е. Жуковского. По этому правилу надо вектор $\bar{v}_{отн}$ спроектировать на плоскость *П*, перпендикулярную оси вращения (рис. 11,а), и повернуть эту проекцию на 90° в сторону вращения.

Если относительная траектория – плоская кривая и перемещается все время в своей плоскости, то угол $\alpha = 90°$ (рис. 11,б) и в этом случае $\bar{a}_{кор} = 2\omega v_{отн}$. Кроме того, в этом случае, как видно из рис. 11,б, направление $\bar{a}_{пер}$ можно найти, повернув вектор $\bar{v}_{отн}$ на 90° в сторону переносного вращения.

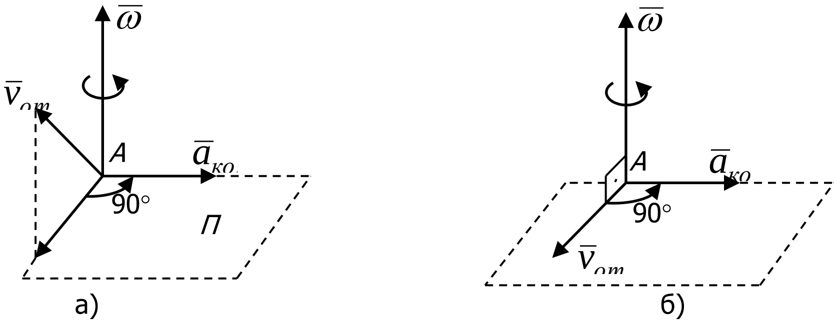
$\overline{\omega}$
$\overline{v}_{от}$
A
$\overline{a}_{ко}$
90°
П
а)
$\overline{\omega}$
A
$\overline{a}_{ко}$
90°
$\overline{v}_{от}$
б)

Рис. 11

# 4. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 4.1. Уравнения движения твердого тела

Плоским движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости *П*.

Примерами такого движения могут служить: 1) качение колеса по прямолинейному рельсу; 2) движение шатуна кривошипно-шатунного механизма.

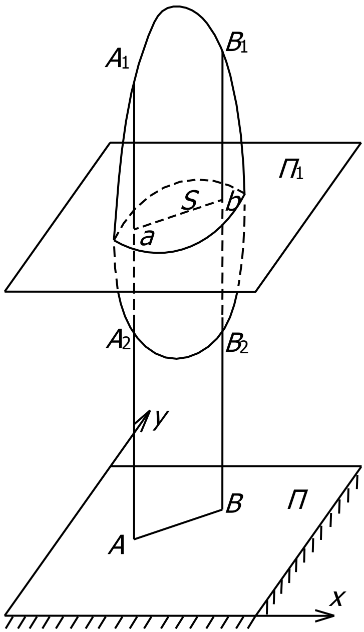


Рис. 12

Если пересечь данное подвижное тело плоскостью $П_1$, параллельной неподвижной плоскости *П*, то в сечении получим некоторую плоскую фигуру $S$ (рис. 12). Из определения плоского движения следует, что при таком движении тела фигура $S$, перемещаясь с данным телом, остается в плоскости $П_1$.

Возьмем теперь в теле какой-нибудь отрезок $A_1A_2$, перпендикулярный к плоскости сечения $S$. Так как фигура $S$ во все время движения тела остается в плоскости $П_1$, то отрезок $A_1A_2$ остается перпендикулярным к этой плоскости и, следовательно, перемещается параллельно самому себе, т.е. движется поступательно так же, как точка *A* прямой $A_1A_2$ .

Отсюда следует, что изучение плоского движения тела приводится к изучению движения отрезка *AB* фигуры *S* относительно неподвижной системы координат *Oxy* (рис. 13).

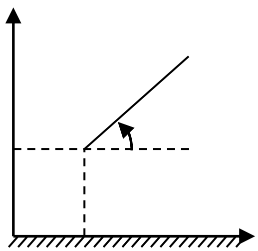

Рис. 13

При движении тела координаты $x_A$ , $y_A$ и угол $\varphi$ изменяются с течением времени. Чтобы описать плоское движение твердого тела относительно неподвижной системы координат *Oxy* , достаточно задать три уравнения движения:

$$x_A = f_1(t),\ y_A = f_2(t),\ z_A = f_3(t)$$

Эти уравнения называются уравнениями плоского движения твердого тела. Точка *A* называется полюсом.

В частном случае угол $\varphi$ может оказаться постоянным, а будут изменяться с течением времени только координаты $x_A$ и $y_A$ ; в этом случае тело движется поступательно. Если же, наоборот, полюс *A* остается неизменным, то тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через полюс и перпендикулярно к плоскости чертежа.

Следовательно, движение твердого тела (стержня *AB*) в общем случае можно разложить на два мгновенные движения: 1) поступательное движение со скоростью полюса *A*, и 2) вращательное движение вокруг полюса.

Так как различные точки фигуры *S* движутся по различным траекториям и с различными скоростями, то поступательное движение зависит от выбора полюса, а вращательное – не зависит.

Угловая скорость $\omega$ вращательное движения равна производной от угла по времени, т.е.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

а скорость полюса *A* равна производной по времени от радиуса-вектора $\bar{r}_A(t)$

$$\bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt},$$

где $\bar{r}_A(t) = x_A(t)\bar{i} + y_A(t)\bar{j}$.

## 4.2. Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей

Определим движение любой точки *B*, лежащей в сечении тела, с помощью радиуса-вектора $\bar{r}_B = \bar{r}_A(t) + \bar{r}_{B/A}(t)$.

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A},$$

где $\bar{v}_A$ – скорость полюса *A*, $v_{B/A} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}$ – скорость точки *B* при вращении отрезка *AB* вокруг полюса *A*.

Итак, скорость всякой точки *B* движущейся плоской фигуры равна векторной сумме двух скоростей: 1) скорости полюса *A* и 2) скорости точки *B* во вращении фигуры *S* вокруг точки *A*.

Теорема. Проекции скоростей двух точек фигуры на прямую, соединяющую эти точки равны между собой.

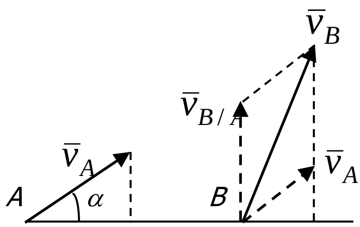


Рис. 14

Доказательство. Пусть скорости двух точек *A* и *B* фигуры равны $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}$ (рис. 14). Проектируя $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ на линию *AB* и учитывая, что вектор $\bar{v}_{B/A}$ перпендикулярен к *AB*, получим

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. В каждый данный момент времени при движении фигуры *S*, если $\omega \neq 0$, имеется единственная точка плоскости $П_1$ сечения тела, мгновенная скорость которой равна нулю.

Доказательство. Пусть скорость точки *A* равна $\bar{v}_A$ (рис. 15). Повернем полупрямую, по которой направлена скорость $\bar{v}_A$, на прямой угол вокруг точки *A* в направлении вращения фигуры и затем на этой повернутой полупрямой отложим отрезок $AC = \dfrac{v_A}{\omega}$.

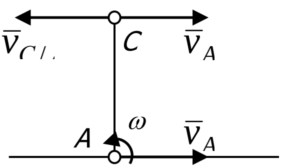


Рис.15

Тогда

$$\left|\bar{v}_{C/A}\right| = \omega AC = \omega \cdot \frac{v_A}{\omega} = v_A,$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A - \bar{v}_{C/A} = \bar{v}_A - \bar{v}_A = 0.$$

Мгновенным центром скоростей МЦС называется точка сечения *S* тела, скорость которой в данный момент равна нулю.

МЦС принято обозначать через $c_v$.

Если в качестве полюса выбрать точку $c_v$, то для скорости любой точки *B* фигуры будем иметь:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{C_V} + \bar{v}_{B/C_V}.$$

Но $\bar{v}_{C_V}$ = 0, а поэтому $\bar{v}_B = \bar{v}_{B/C_V}$, т.е. мгновенная скорость любой точки фигуры равна по модулю и направлению той скорости, которую имеет эта точка во вращении фигуры вокруг точки $c_v$.

Заметим, что положение МЦС не остается неизменным на неподвижной плоскости, по которой перемещается фигура, так же как и положение МЦС на плоскости самой движущейся фигуры; различным моментам времени соответствуют как различные точки данной фигуры, которые являются в эти моменты центрами скоростей, так и различные положения этих точек на неподвижной плоскости.

Таким образом, движение плоской фигуры можно представить как непрерывный ряд последовательных мгновенных вращений вокруг мгновенных центров скоростей.

Если положение МЦС в данный момент найдено и угловая скорость фигуры в этот момент времени известна, то скорости любых точек фигуры определяются просто. Так, например, для точек *A* и *B* (рис. 16) будем иметь:

$$v_A = \omega A c_V \quad (\bar{v}_A \perp c_V A),$$
$$v_B = \omega B c_V \quad (\bar{v}_B \perp c_V B).$$

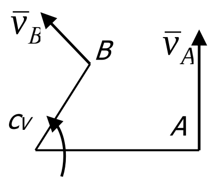


Рис. 16

Отсюда $\dfrac{v_A}{Ac_V}=\dfrac{v_B}{Bc_V}$, т.е. скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Для определения МЦС надо знать только направления скоростей каких-нибудь двух точек *A* и *B* плоской фигуры *S*; мгновенный центр скоростей $c_V$ находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек *A* и *B* к скоростям этих точек.

2. Для определения скорости любой точки сечения *S* надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь точки *A* сечения тела и направление скорости другой его точки *B*. Тогда, восстановив из точек *A* и *B* перпендикуляры к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, находим $c_V$ и по направлению $\bar{v}_A$ определим направление вращения. После этого, зная $\bar{v}_A$, вычислим скорость любой точки фигуры *S*.

## 4.3. План скоростей

Определение скоростей различных точек движущейся плоской фигуры легко может быть выполнено графически при помощи построения плана скоростей.

Если из произвольно взятой точки проведем векторы, равные по модулю и направлению скоростям различных точек движущейся плоской фигуры в данный момент, то полученный таким образом чертеж называется планом скоростей для этой фигуры.

Пусть например, скорости трех точек *A*, *B* и *C* данной фигуры равны $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_C$ (рис. 114,а). Если проведем их из произвольной точки *O* векторы $\overline{Oa}=\bar{v}_A$, $\overline{Ob}=\bar{v}_B$ и $\overline{Oc}=\bar{v}_C$, то получим план скоростей (рис. 17,б).

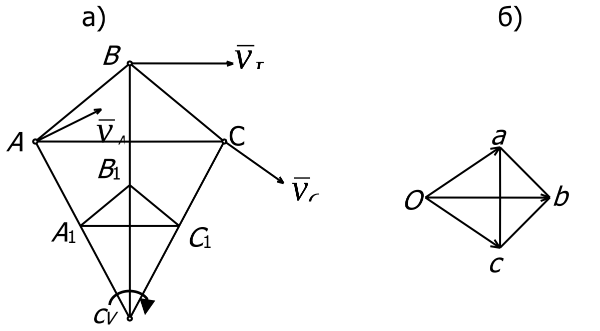


Рис. 17

Мгновенный центр скоростей $C_V$ фигуры лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках *A*, *B* и *C* к скоростям $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_C$. Соединим точки *A*, *B* и *C* с центром $C_V$ и отложим на $C_V A$, $C_V B$ и $C_V C$ отрезки $C_V A_1$, $C_V B_1$ и $C_V C_1$, равные $C_V A_1 = \bar{v}_A = C_V A \cdot \omega$, $C_V B_1 = \bar{v}_B = C_V B \cdot \omega$ и $C_V C_1 = \bar{v}_C = C_V C \cdot \omega$, где $\omega$ обозначает угловую скорость фигуры в ее вращении вокруг центра $C_V$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{C_V A_1}{C_V A} = \frac{C_V B_1}{C_V B} = \frac{C_V C_1}{C_V C} = \omega.$$

Если соединим теперь между собой прямыми точки *A*, *B* и *C* и $A_1$, $B_1$ и $C_1$, то из предыдущих пропорций следует, что соответствующие стороны треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ параллельны, а поэтому эти треугольники подобны, причем отношение их соответствующих сторон равно $\omega$.

Так как скорости $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_C$ соответственно перпендикулярны к $C_V A_1$, $C_V B_1$ и $C_V C_1$, то ясно, что, повернув четырехугольник $C_V A_1 B_1 C_1$ вокруг точки $C_V$ на 90° в направлении вращения фигуры, получим план скоростей. Таким образом, четырехугольник *Oabc* представляет собой план скоростей. Этот четырехугольник равен четырехугольнику $C_V A_1 B_1 C_1$. Отсюда вытекают следующие основные свойства плана скоростей:

1. Всякий многоугольник на плане скоростей подобен соответствующему многоугольнику на движущейся фигуре.

В самом деле, $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$, но $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta abc$; следовательно, $\Delta ABC \backsim \Delta ABC$.

2. Отношение соответствующих сторон этих многоугольников равно $\omega$.

3. Всякая прямая на плане скоростей перпендикулярна к соответствующей прямой на движущейся фигуре.

Укажем еще на следующее свойство плана скоростей; из треугольника *Oab* на плане скоростей имеем

$$\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ab}$$

или

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \overline{ab}.$$

С другой стороны, как мы знаем, плоское движение фигуры можно разложить на два движения: 1) поступательное со скоростью $\bar{v}_A$ полюса *A* и 2) вращательное вокруг полюса *A* с угловой скоростью $\omega$. Поэтому

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, получим:

$$\overline{ab} = \bar{v}_{B/A}$$

т.е. вектор $\overline{ab}$ на плане скоростей равен по модулю и направлению скорости точки *B* фигуры во вращательном движении вокруг точки *A*.

Точно так же $\overline{bc} = \bar{v}_{C/B}$, где $\bar{v}_{C/B}$ есть скорость точки *C* во вращении фигуры вокруг точки *B*, и т.д.

Для построения плана скоростей достаточно знать модуль и направление скорости какой-нибудь точки движущейся фигуры и прямую, по которой направлена скорость какой-нибудь второй ее точки. Тогда скорости всех точек фигуры могут быть найдены.

а) б)

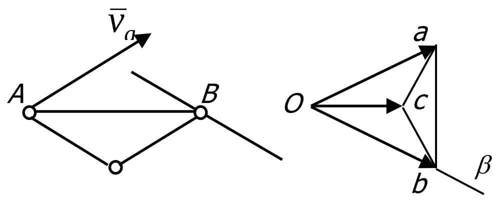


Рис. 18

В самом деле, пусть известна скорость $\bar{v}_A$ точки *A* и направление скорости точки *B* (рис. 18,а). Проведем из точки *O* вектор $\overline{oa} = \bar{v}_A$ и прямую $O\beta$, параллельную заданному направлению скорости точки *B* (рис. 18,б); вектор $\overline{Ob}$ , изображающий скорость точки *B*, направлен по прямой $O\beta$; следовательно, остается только определить положение точки *b* на этой прямой. Для этого заметим, что по третьему свойству плана скоростей $AB \perp ab$. Поэтому из точки *a* проведем прямую, перпендикулярную к *AB*; точка пересечения этой прямой с $O\beta$ является искомой точкой *b*, а вектор *Ob* определяет скорость точки *B*. Возьмем теперь какую-нибудь третью точку *C* фигуры. Если обозначить конец вектора, изображающего скорость этой точки на плане скоростей, буквой *c*, то по указанному свойству плана скоростей имеем $ac \perp AC$ и $bc \perp BC$. Поэтому точка пересечения двух прямых, проведенных из *a* и *b* и соответственно перпендикулярных к *Ac* и *BC*, определяет на плане скоростей точку *c*, а вектор *Oc* определяет искомую скорость точки *C*. Как видим, этим способом легко можно определить графически скорость любой точки фигуры. Заметим, что при рассмотренном способе построения плана скоростей не требуется находить положения мгновенного центра скоростей фигуры, что практически весьма существенно, так как МЦС часто оказывается настолько удаленным, что не помещается на чертеже.

В качестве пример построим план скоростей для двухкривошипного механизма (рис. 19,а), если известны длина кривошипа $CA=r$ и угловая скорость $\omega$, с которой он вращается вокруг неподвижной точки *C*.

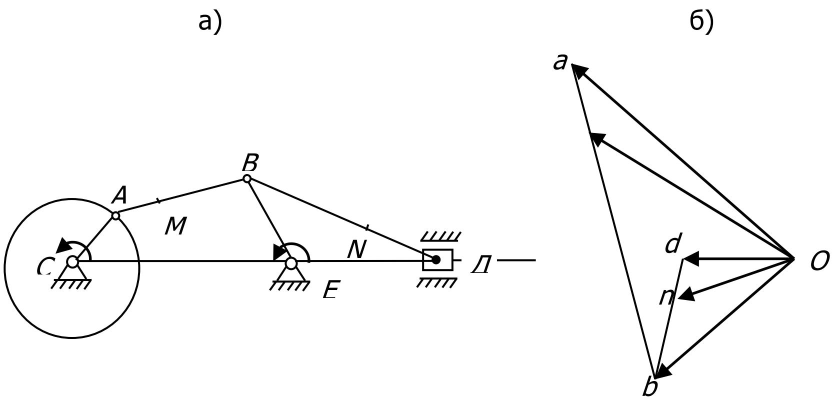


Рис. 116

Так как $r$ и $\omega$ даны, то модуль скорости точки $A$ известен: $v_A = \omega r$ ; эта скорость направлена перпендикулярно к $CA$. Из произвольной точки $O$ проведем вектор $\overline{Oa}$, перпендикулярный к $CA$, длина которого в произвольно выбранном масштабе изображает модуль скорости точки $A$ (рис. 19,б). Так как точка $B$ принадлежит кривошипу $BE$, вращающемуся вокруг неподвижной точки $E$, то ее скорость перпендикулярна к $BE$; относительная скорость $\bar{v}_{B/A}$ вращения точки $B$ вокруг $A$ перпендикулярна к $AB$. Поэтому для построения на плане скоростей скорости $B$ проведем из точки $O$ прямую, перпендикулярную к $BE$, а из точки $a$ – прямую, перпендикулярную к $AB$; точку пересечения этих прямых обозначим через $b$; вектор $\overline{Ob}$ определяет скорость точки $B$. Далее, для определения скорости какой-нибудь точки $M$ звена $AB$ поступаем следующим образом: так как точки $A$, $M$ и $B$ лежат на одной прямой, то на основании первого свойства плана скоростей заключаем, что соответствующие им точки $a$, $m$ и $b$ на плане также должны лежать на одной прямой и, кроме этого, должна иметь место пропорция

$$\frac{ab}{mb} = \frac{AM}{MB}.$$

Поэтому достаточно разделить отрезок $ab$ в отношении

$\frac{AM}{MB}$ и точку деления *m* соединить прямой с точкой *O*; тогда вектор *Om* определит скорость точки *M*.

Таким образом, планы скоростей для звеньев *AB* и *BE* построены. Переходим к шатуну *ВД*. Скорость точки *B* уже найдена. Направление скорости точки *Д* известно, так как эта точка движется по прямой *ДЕ*. Поэтому проводим из точки *O* прямую, параллельную *ДЕ*, а из точки *b* – прямую, перпендикулярную к *ВД*. Точку пересечения этих прямых обозначим через $\alpha$; тогда вектор *Od* определит скорость точки *Д*. Для определения скорости какой-нибудь точки *N* шатуна *ВД* поступаем совершенно так же, как и при определении скорости точки *M*; делим отрезок *bd* в отношении $\frac{BN}{NД}$ и точку деления *n* соединяем прямой с точкой *O*; вектор *On* определит скорость точки *N*. Таким образом, получаем план скоростей для всего механизма.

## 4.4. Ускорения точек тела

Перейдем теперь к определению ускорений точек тела. С этой целью скорость перепишем в виде

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}).$$

Так как

$$\left|\bar{\varepsilon} \times \overline{AB}\right| = \varepsilon AB = \bar{a}^{\tau}_{B/A},$$

$$\left|\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB})\right| = \omega^2 AB = \bar{a}^{n}_{B/A},$$

то

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{B/A} + \bar{a}^{n}_{B/A} = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A}.$$

Заключаем, что ускорение всякой точки *B* движущейся фигуры равно векторной сумме двух ускорений: 1) ускорения полюса *A* и 2) ускорения точки *B* во вращении фигуры *S* вокруг точки *A*.

При ускоренном вращении фигуры *S* ускорение $\bar{a}^{\tau}_{B/A}$ будет направлено по перпендикуляру к *AB* в ту же сторону, куда направлена скорость $\bar{v}_{B/A}$ точки *B*; при замедленном вращении фигуры это ускорение будет направлено в сторону, противоположную направлению $\bar{v}_{B/A}$. Если обозначить через $\alpha$ острый угол, который ускорение $\bar{a}_{B/A}$ образует с направлением *AB*, то

$$tg\alpha = \frac{\left|\bar{a}^{\tau}_{B/A}\right|}{\left|\bar{a}^{n}_{B/A}\right|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Отсюда следует, что этот угол имеет в данный момент одно и тоже значение для всех точек фигуры.

Вектор $\bar{a}_{B/A}$ отклоняется от направления отрезка *AB* всегда в ту сторону, куда направлено ускорение $\bar{a}^{\tau}_{B/A}$. При ускоренном вращении фигуры векторы $\bar{a}_{B/A}$ и $\bar{v}_{B/A}$ расположены по одну сторону от отрезка *AB*, а при замедленном вращении – по разные стороны.

Очевидно, что для определения ускорений точек данной фигуры нужно знать ускорение $\bar{a}_A$, а также $\omega$ и $\varepsilon$ во вращении фигуры вокруг точки *A*.

При определении скоростей точек движущейся плоской фигуры была доказана теорема о мгновенном центре скоростей.

Аналогично этому докажем теорему о мгновенном центре ускорений $C_a$.

Теорема. В каждый данный момент времени при движении фигуры, если $\omega \neq 0$ и $\varepsilon > 0$, имеется единственная точка этой фигуры, мгновенное ускорение которой равно нулю.

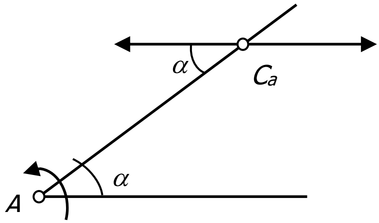


Рис. 20

Доказательство. Пусть ускорение точки *A* равно $\bar{a}_A$ (рис. 20). Повернем полупрямую, по которой направлен вектор $\bar{a}_A$, на угол $\alpha = arctg\left(\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}\right)$ в направлении ускоренного вращения фигуры и затем на этой повернутой полупрямой отложим отрезок $AC_a = \dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}$. Тогда

$$\left|a_{C_a/A}\right| = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}\,AC_d = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} \cdot \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} = a_A,$$

$$\bar{a}_{C_a} = \bar{a}_A - \bar{a}_{C_a/A} = \bar{a}_A - \bar{a}_A = 0,$$

что и требовалось доказать.

Мгновенный центр ускорений принято обозначать через $C_a$.

Таким образом, приходим к следующему заключению: чтобы найти $C_a$, нужно полупрямую, по которой направлен вектор $\bar{a}_A$, повернуть на острый угол $\alpha$ и затем отложить на ней от точки *A* отрезок, равный $\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}$; конец этого отрезка определяет положение искомого центра ускорений в данный момент.

При ускоренном вращении фигуры поворот полупрямой на угол нужно производить в направлении вращения фигуры; при замедленном же вращении фигуры этот поворот нужно производить в направлении, обратном вращению фигуры. Если $\varepsilon$ = 0, то $\alpha$

$= 0$ , и мгновенный центр ускорений $C_a$ лежит на прямой, по которой направлен вектор $\overline{a}_A$. Расстояние $AC_a$ равно в этом случае $\dfrac{a_A}{\omega^2}$.

Положение мгновенного центра ускорений при движении фигуры не остается неизменным: различным моментам времени соответствуют различные положения центра ускорений как на неподвижной плоскости, так и на подвижной плоскости фигуры.

Если положение центра ускорений в данный момент известно, то ускорение любой точки фигуры определяется просто.

Если вместо точки $A$ возьмем точку $C_a$ (мгновенный центр ускорений), то будем иметь: $a_B = a_{B/C_a}$ , т.е. ускорение всякой точки движущейся плоской фигуры и данный момент определяется так же, как ускорение этой точки при вращательном движении фигуры вокруг мгновенного центра ускорений.

Формула дает распределение ускорений в движущейся фигуре в данный момент времени. Следовательно, это распределение ускорений такое же, как если бы фигура вращалась с такой же угловой скоростью и с тем же угловым ускорением вокруг неподвижной точки, совпадающей с точкой $C_a$ – мгновенным центром ускорений (рис. 21)

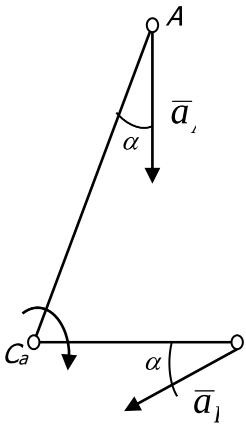


Рис. 21

Так как модуль ускорения

$$\left|\bar{a}_{B/C_a}\right| = BC_a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

то на основании равенства для модуля ускорения точки *B* фигуры получим

$$a_B = BC_a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Точно так же модуль $\bar{a}_A$ точки *A*: $a_A = AC_a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.
Из этих равенств следует:

1. Так как $\dfrac{a_A}{a_B} = \dfrac{AC_a}{BC_a}$, то модули ускорений точек движущейся фигуры пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра ускорений.

2. Мгновенный центр ускорений лежит в точке пересечения прямых, проведенных из двух каких-нибудь точек *A* и *B* фигуры под одним и тем же углом $\alpha = arctg\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ к ускорениям этих точек (рис. 21).

3. Если $\varepsilon$ = 0 и, следовательно, $\alpha$ = 0, то в этом случае прямые, по которым направлены ускорения всех точек фигуры в данный момент, пересекаются в одной точке – мгновенном центре ускорений.

# 5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 5.1. Сложение поступательных движений

Здесь рассмотрим задачу о сложном движении твердого тела, аналогичную задаче о сложном движении отдельной точки.

Пусть данное твердое тело движется определенным образом относительно системы координат $Oxy$, которая в свою очередь имеет определенное движение относительно неподвижной системы $O'x'y'$. Требуется найти абсолютное движение тела.

В зависимости от того, какими являются относительное движение тела и движение подвижной системы осей, будем иметь задачи о сложении поступательных движений, или о сложении вращательного и поступательного движений, или о сложении вращательных движений.

Начнем со случая поступательных движений, т.е. с того случая, когда относительное движение тела и переносное движение являются поступательными.

Пусть данное твердое тело движется поступательно со скоростью $\bar{v}_1$ относительно некоторой системы отсчета, которая в свою очередь движется поступательно со скоростью $\bar{v}_2$ относительно другой системы отсчета, принимаемой за неподвижную. Требуется определить движение тела относительно последней системы.

Абсолютная скорость $\bar{v}$ какой-нибудь точки тела по теореме сложения скоростей равна геометрической сумме скоростей относительной и переносной, т.е. $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$. Но для всех точек тела имеем: $\bar{v}_r = \bar{v}_1$ и $\bar{v}_e = \bar{v}_2$. Это следует из того, что относительное и переносное движения являются поступательными. А потому $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Из этого равенства видно, что абсолютные скорости всех точек тела в каждый данный момент одинаковые. Отсюда следует, что движение тела относительно неподвижной системы отсчета является поступательным со скоростью $\bar{v}$, равной геометрической сумме скоростей $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$. Таким образом, приходим к заключению: в том случае, когда относительное и переносное движения являются поступательными, абсолютное движение тела есть также поступательное, причем скорость этого поступательного движения равна геометрической сумме скоростей относительного и переносного движений.

## 5.2. Сложение двух вращений вокруг параллельных осей

Рассмотрим тот случай, когда относительное движение тела и переносное движение представляют собой вращения вокруг параллельных осей.

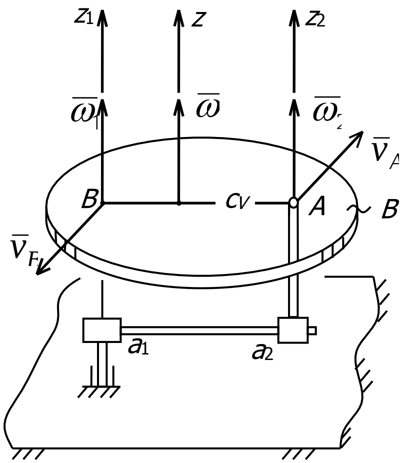


Рис. 22

Пусть кривошип $a_1a_2$ вращается вокруг неподвижной оси $z_1$, перпендикулярной к неподвижной плоскости *П*, с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ (рис. 22). Предположим, что на ось $z_2$, перпендикулярную к плоскости *П* и неизменно связанную с кривошипом $a_1a_2$, свободно насажено тело (например круглый диск), вращающееся вокруг оси $z_2$ с относительной угловой скоростью $\overline{\omega}_2$. Тогда движение тела будет плоским по отношению к неподвижной плоскости *П*. Здесь возможны частные случаи.

Сначала допустим, что оба вращения совершаются в одном направлении. Построив векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ (рис. 22), постараемся определить абсолютное движение тела, получающееся в результате сложения двух этих движений. С этой целью воспользуемся теорией плоского движения твердого тела.

Если в качестве полюса фигуры *s* принять точку *B*, то

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{A/B} = \bar{v}_B + \bar{\omega}_1 \times \overline{BA}.$$

Так как точка *B* находится на неподвижной оси $z_1$, то $v_B$ = 0. А потому

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{A/B} = \bar{\omega}_1 \times \overline{BA}.$$

Теперь принимаем в качестве полюса точку *A*. В этом случае

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_2 \times \overline{AB}.$$

Но $\bar{v}_B = 0$; следовательно,

$$\bar{v}_A = -\bar{v}_{B/A}, \quad \bar{v}_A = -\bar{\omega}_2 \times \overline{AB}.$$

Скорость точки *A* при вращении фигуры *s* вокруг оси $z_1$ и скорость точки *B* при вращении вокруг оси $z_2$ направлены в противоположные стороны, а потому мгновенный центр скоростей $C_v$ находится между точками *A* и *B*.

Так как скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС, то $\dfrac{v_A}{AC_v} = \dfrac{v_B}{BC_v} = \omega$.

Определим угловую скорость $\omega$ мгновенного вращения вокруг $C_v$.

Абсолютная скорость точки *A* равна по модулю $\omega \cdot AC_v$; с другой стороны, модуль этой же точки равен $\omega_1 \cdot AB$; отсюда $\omega AC_V = \omega_1 AB$.

Аналогичное соотношение получим для скорости точки *B*: $\omega BC_V = \omega_2 AB$.

Из этих равенств находим:

$$\omega(AC_V + BC) = (\omega_1 + \omega_2)AB \quad \text{или} \quad \omega AB = (\omega_1 + \omega_2)AB.$$

Отсюда

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Таким образом, приходим к следующему заключению: при сложении двух направленных в одну сторону вращений вокруг параллельных осей абсолютное движение тела таково, что в каждый данный момент существует мгновенная ось вращения тела, параллельная осям относительного и переносного вращений и делящая расстояние между ними внутренним образом на части, обратно пропорциональные относительной и переносной угловым скоростям. Мгновенная абсолютная угловая скорость тела параллельна относительной и переносной угловым скоростям и направлена в ту же сторону, а ее модуль равен сумме модулей этих угловых скоростей.

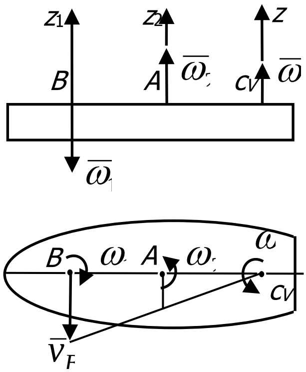


Рис. 23

Предположим теперь, что угловые скорости $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ представляют два антипараллельных вектора (рис. 23). Пусть $\overline{\omega}_1 > \overline{\omega}_2$. Совершенно так же, как и в предыдущем случае, легко убедиться в том, что для точки $C_V$ тела, лежащей на прямой *AB*, абсолютная скорость будет равна нулю при условии, что эта точка лежит вне отрезка *AB* за вектором большей угловой скорости, и что

$$\frac{v_A}{AC_V} = \frac{v_B}{BC_V},$$

$$\omega \cdot AC = \omega_1 \cdot AB,$$

$$\omega \cdot BC = \omega_2 \cdot AB.$$

Из этих равенств находим

$$\omega(BC_V - AC_V) = (\omega_2 - \omega_1)AB \text{ или}$$

$$\omega \cdot AB = (\omega_2 - \omega_1)AB.$$

Откуда

$$\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Таким образом, приходим к следующему заключению: при сложении двух направленных в противоположные стороны вращений вокруг параллельных осей абсолютное движение тела таково, что в каждый данный момент существует мгновенная ось вращения тела, параллельная осям данных вращений и делящая расстояние между ними внешним образом на части, обратно пропорциональные относительной и переносной угловыми скоростями. Мгновенная абсолютная угловая скорость тела параллельна относительной и переносной угловым скоростям и направлена в сторону большей из них, а ее модуль равен разности модулей этих угловых скоростей.

Заметим, что положение мгновенной оси *z* в пространстве не остается неизменным так же, как и положение оси *z* в движущемся теле; различным моментам времени соответствуют как различные оси данного тела, которые являются в эти моменты мгновенными осями вращений, так и различные положения этих осей в пространстве.

Таким образом, движение твердого тела можно представить как непрерывный ряд последовательных мгновенных вращений вокруг мгновенных осей скоростей.

Геометрическое место мгновенных осей $z$ в самом движущемся теле называется подвижным аксоидом. В данном случае подвижный аксоид представляет собой цилиндрическую поверхность.

При сложении двух вращений, направленных в противоположные стороны, мы предположили, что модули угловых скоростей этих вращений не равны.

Рассмотрим теперь тот случай, когда модули этих угловых скоростей равны между собой. Такие два направленные в противоположные стороны вращения вокруг параллельных осей с равными по модулю угловыми скоростями называются парой вращений. Векторы угловых скоростей таких вращений образуют пару угловых скоростей.

Определим абсолютное движение тела, получающееся в результате сложения пары вращений.

Пусть имеем пару угловых скоростей $\overline{m}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ (рис. 24). Найдем абсолютную скорость какой-нибудь точки $M$ тела. Скорость точки $M$ во вращательном движении вокруг оси $z_1$ можно представить в виде векторного произведения

$$\overline{v}_1 = \overline{\omega}_1 \times \overline{r}_1.$$

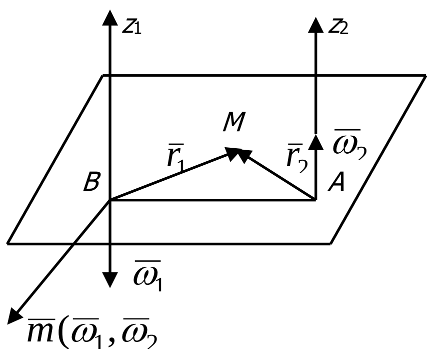


Рис. 24

Точно так же скорость $\overline{v}_2$ точки $M$ во вращении вокруг оси $z_2$ выразим так: $\overline{v}_2 = \overline{\omega}_2 \times \overline{r}_2$.

Абсолютная скорость точки $M$ равна геометрической сумме скоростей $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$; следовательно, $\bar{v}_M = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1) + (\bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2)$.

Заменяя $\bar{\omega}_1$ через $-\bar{\omega}_2$, получим: $\bar{v}_M = -(\bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1) + (\bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2) = \bar{\omega}_2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$.

Но $\overline{BA} + \bar{r}_2 = \bar{r}_1$; отсюда $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \overline{BA}$, а потому $\bar{v}_M = \overline{BA} \cdot \bar{\omega}_2$. Векторное произведение $\overline{BA} \cdot \bar{\omega}_2$ представляет собой момент вектора $\bar{\omega}_2$ относительно точки $B$, или, что то же, момент пары ($\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$), а потому

$$\bar{v}_M = \bar{m}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2).$$

Отсюда следует: 1) абсолютная скорость точки $M$ равна по модулю $\omega_1 \cdot AB$ и направлена перпендикулярно к плоскости пары ($\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$); 2) абсолютная скорость точки $M$ не зависит от выбора этой точки: все точки тела имеют в каждый данный момент одинаковые абсолютные скорости, равные по модулю и направлению момента пары ($\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$), откуда заключаем, что абсолютное движение тела является поступательным.

Таким образом, приходим к выводу: пара вращений эквивалентна поступательному движению, скорость которого равна вектор-моменту этой пары.

Примером такого движения является поступательное движение велосипедной педали относительно рамы велосипеда.

## 5.3. Кинематика рядовых, планетарных и дифференциальных передач

Полученные результаты в предыдущем параграфе используем для кинематического расчета зубчатых передач, образованных цилиндрическими зубчатыми шестеренками (колесами). Рассмотрим основные виды этих передач.

1. Рядовой называется передача, в которой все оси зубчатых колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны. При этом одно из колес является ведущим, а остальные

ведомыми. Зацепление бывает внутреннее (рис. 25,а) или внешнее (рис. 25,б,в).

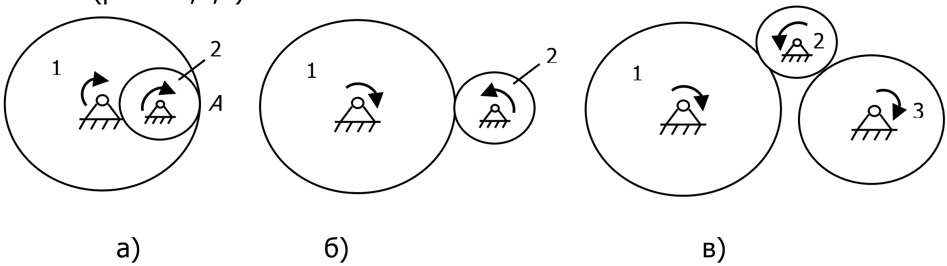


Рис. 25

Так как скорость точки $A$ сцепления у обоих колес одинакова, то имеет место соотношение $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Учитывая, что число $z$ зубцов сцепленных колес пропорционально радиусам, а вращения колес происходят при внутреннем зацеплении в одну сторону, а при внешнем в разные, получим

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{внешн} = \frac{-r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{внутрен} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

При внешнем зацеплении трех колес (рис. 25,в) находим, что

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{r_3}{r_2},$$

Откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Следовательно, отношения угловых скоростей крайних шестерен в рядовой передаче обратно пропорционально их радиусам (числу зубцов) и не зависит от радиусов промежуточных (паразитных) шестерен.

Из полученных результатов следует, что при рядовом сцеплении $n$ будет

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}.$$

где $k$ – число внешних зацеплений.

Всякая рядовая передача характеризуется передаточным числом $i_{1n}$ , под которым понимают отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}.$$

Передаточное число может быть выражено и через отношение радиусов ведомого и ведущего колес или через отношение их чисел зубьев.

2. Планетарной называется передача (рис. 26), в которой шестерня 1 неподвижна, а оси остальных шестерен, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе $AB$, вращающемся вокруг оси неподвижной шестерни.

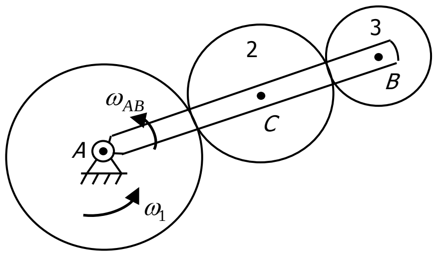


Рис. 26

3. Дифференциальной называется передача (рис. 26), если в ней шестерня 1 не является неподвижной и может вращаться вокруг своей оси $A$ независимо от кривошипа $AB$.

Таким образом, планетарная зубчатая передача может быть рассмотрена как частный случай дифференциальной зубчатой передачи, а именно, когда ведущее зубчатое колесо 1 неподвижно, т.е. $\omega_1 = 0$.

Рядовая зубчатая передача также является частным случаем дифференциальной передачи, а именно, когда кривошип *AB* неподвижен, т.е. $\omega_{AB} = 0$.

## 5.4. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть кривошип $a_1a_2$ вращается вокруг неподвижной оси $z_1$ с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ (рис. 27). Предположим, что на ось $z_2$, неизменно связанную с кривошипом $a_1a_2$, свободно насажено тело, вращающееся вокруг оси $z_2$ с относительной угловой скоростью $\overline{\omega}_2$.

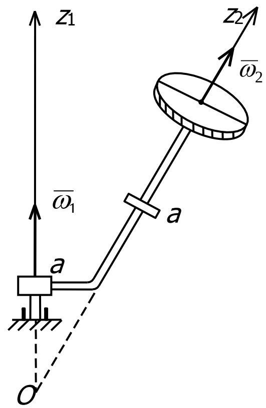


Рис. 27

Построив векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ (рис. 27), постараемся определить абсолютное движение тела, получающееся в результате сложения двух вращений.

С этой целью возьмем в движущемся теле какую-нибудь точку *M* и найдем ее абсолютную скорость (рис. 27). Относительная скорость $\overline{v}_r$ точки *M* равна векторному произведению относительной угловой скорости $\overline{\omega}_2$ на радиус-вектор $\overline{r}$ этой точки;

следовательно, $\bar{v}_r = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}$.

Аналогично выражается и переносная скорость $\bar{v}_e = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}$.

Складывая эти две скорости, получим абсолютную скорость точки *M*:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = \bar{\omega}_2 \times \bar{r} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r} = (\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) \times \bar{r}.$$

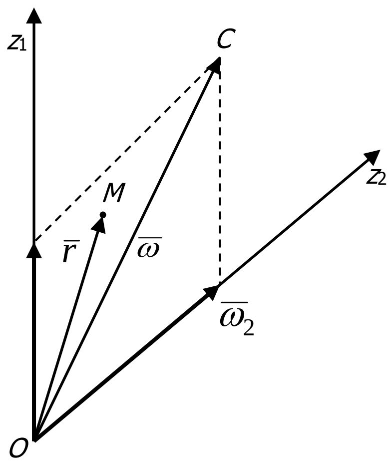


Рис. 28

Так как точка *M* выбрана произвольно, то эта формула показывает, что абсолютная скорость всех точек тела в данный момент определяется так же, как при вращательном движении тела вокруг оси, проходящей через точку *O*, с угловой скоростью $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$; следовательно прямая *OC* (рис. 28), ко которой направлен вектор $\bar{\omega}$, является мгновенной осью вращения тела, а абсолютная угловая скорость $\bar{\omega}$ равна геометрической сумме угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$.

Объединим этот результат с тем, который был получен при сложении вращений вокруг параллельных осей, мы видим, что угловые скорости складываются так же, как параллельные или сходящиеся силы.

Выясним теперь, каковы будут в рассматриваемом случае аксоиды, т.е. геометрические места мгновенных осей *OC* в пространстве и в самом движущемся теле. Так как мгновенная ось *OC* все время проходит через неподвижную точку *O*, то аксоиды в данном случае представляют собой два конуса с общей вершиной *O*. В частном случае, когда $\omega_1$ = const и $\omega_2$ = const, углы, образуемые мгновенной осью *OC* с осями $Oz_1$ и $Oz_2$ , будут оставаться неизменными; следовательно, в этом случае неподвижный и подвижный аксоиды представляют собой два круглых конуса. В каждый данный момент аксоиды касаются друг друга вдоль общей образующей, которая является для этого момента мгновенной осью вращения тела, и абсолютное движение тела представляет собой качение без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

Если тело участвует одновременно в мгновенных вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке *O*, то, последовательно применяя равенство $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ , придем к выводу, что результирующее движение является мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку *O*, а угловая скорость этого движения

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_n .$$

# 6. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

## 6.1. Уравнения движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Пусть имеем твердое тело с одной неподвижно закрепленной точкой *O*. В этом случае тело не может двигаться поступательно, но может поворачиваться вокруг любой оси, проходящей через неподвижную точку.

Выясним какое число параметров определяет положение тела с одной неподвижной точкой относительно выбранной системы отсчета.

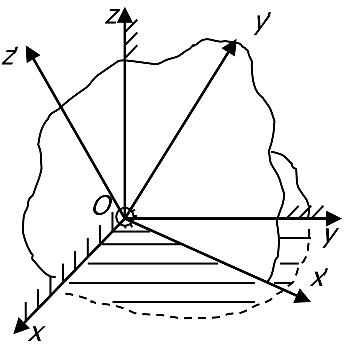


Рис. 29

Отнесем движение данного тела к системе неподвижных осей *Oxyz*, имеющих начало в неподвижной точке *O*. Кроме того, в самом теле возьмем систему неизменно связанных с ним подвижных осей $Ox'y'z'$, имеющих начало в той же точке *O* (рис. 29). Положение данного тела в пространстве будет вполне определено, если будет известно положение подвижной системы осей $Ox'y'z'$. Следовательно, чтобы определить положение тела, имеющего одну неподвижную точку, достаточно определить положение неизменно связанной с ним подвижной системы осей.

Для того, чтобы определить положение системы осей $Ox'y'z'$, достаточно знать три угла Эйлера. Это делается следующим образом. Обозначим линию пересечения координатных плоскостей *Oxy* и $Ox'y'$ через *ON* и установим на ней положительное направление (направление от *O* к *N*); эта прямая *ON* называется линией узлов (рис. 30). Угол между осью $Ox$ и линией узлов $ON$ обозначим через $\psi$; этот угол лежит в плоскости $Oxy$ и отсчитывается от оси $Ox$ в положительном направлении. Угол между плоскостями $Oxy$ и $Ox'y'$, или, что то же, угол между осями $z$ и $z'$, обозначим через $\theta$: этот угол отсчитывается от оси $z$ в положительном направлении; ясно, что линия узлов $ON$ перпендикулярная к плоскости $Ozz'$. Угол между линией узлов $ON$ и осью $Ox'$ обозначим через $\varphi$; этот угол лежит в плоскости $Ox'y'$ и отсчитывается от линии узлов в положительном направлении.

Три эйлеровых угла $\psi$, $\theta$ и $\varphi$ носят следующие названия: угол $\psi$ называется углом прецессии, угол $\theta$ – углом нутации и угол $\varphi$ – углом собственного вращения.

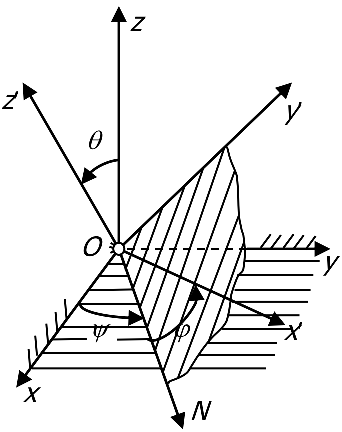


Рис. 30

Систему осей $Oxyz$ можно перевести в положение $Ox'y'z'$ посредством следующих трех вращений: поворачиваем сначала систему осей $Oxyz$ вокруг оси $z$ на угол $\psi$, тогда ось $Ox$, совпадет с линией узлов $ON$; затем производим поворот вокруг $ON$ на угол $\theta$, тогда ось $z$ займет положение оси $z'$; наконец, производим поворот вокруг оси $z'$ на угол $\varphi$, тогда ось $Ox$ (которая до этого поворота совпадала с осью $ON$) займет положение $x'$, и, следовательно, система осей $Oxy$ перейдет в положение $Ox'y'z'$. Отсюда следует, что положение подвижных осей $Ox'y'z'$, а значит, и положение твердого тела, имеющего неподвижную точку $O$, вполне определяется тремя углами Эйлера, т.е. тремя параметрами. Поэтому говорят, что твердое тело, с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы. При движении тела эти углы являются некоторыми однозначными и непрерывными функциями времени, т.е.

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$$

Если функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ известны, то для каждого данного момента времени мы сможем найти углы $\psi$, $\varphi$ и $\theta$ и, следовательно, будем знать положение тела в данный момент. Поэтому уравнения вполне определяют движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, и называются уравнениями движения тела вокруг неподвижной точки.

## 6.2. Теорема Даламбера – Эйлера

Рассмотрим теперь это движение твердого тела вокруг неподвижной точки с геометрической точки зрения. Покажем, что геометрическая картина движения тела вокруг неподвижной точки аналогична той, которую для плоского движения тела дает теорема о мгновенном центре скоростей.

Если при плоском движении всякая точка тела движется параллельно некоторой неподвижной плоскости, то при движении твердого тела, имеющего неподвижную точку *O*, каждая точка этого тела перемещается по поверхности сферы, описанной из центра *O* радиусом, равным расстоянию этой точки от точки *O*.

Если при плоском движении фигуры имеется мгновенный центр скоростей, то при сферическом движении тела есть единственная мгновенная ось вращения.

Докажем теперь следующую теорему Даламбера – Эйлера:

Теорема. Всякое перемещение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, из одного положения в другое можно осуществить поворотом на некоторый определенный угол вокруг некоторой определенной оси, проходящей через эту неподвижную точку.

Доказательство. Пусть данное тело, имеющее неподвижную точку *O*, переместилось из одного положения в другое. Допустим, что некоторая точка этого тела переместилась при этом из положения *A* в положение $A_1$, а точка *B* этого тела, которая сначала находилась в точке $A_1$, заняла положение $B_1$ (рис. 31).

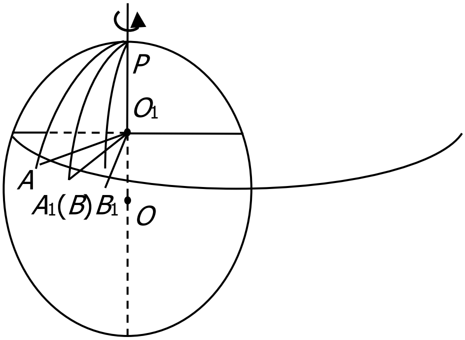


Рис. 31

Понятно, что три точки $A$, $A_1$ и $B$ лежат на поверхности сферы, описанной из центра $O$ радиусом, равным $OA$. Плоскость, проведенная через эти три точки, пересекает сферу по окружности, центр которой $O_1$ ; прямая $OO_1$ перпендикулярна к плоскости этой окружности.

Точку пересечения этой прямой со сферой обозначим через $P$. Так как отрезки $AA_1$ и $A_1B_1$ представляют собой расстояния между теми же двумя точками $A$ и $B$, перемещенными только в новое положение, то $AA_1 = A_1B_1$; отсюда следует, что дуги $\overset{\frown}{AA_1}$ и $\overset{\frown}{A_1B_1}$ равны между собой.

Так как положение данного тела однозначно определяется положением двух его точек ($A$ и $B$), то, для того чтобы перевести тело из первого положения во второе, ему нужно сообщить такое перемещение, при котором точка $A$ должная занять положение $A_1$, а точка $B$ ($A_1$) – положение $B_1$. Для этого достаточно повернуть тело вокруг оси $OP$ на угол равный углу $AO_1A_1$; тогда треугольник $AO_1B$ совместится с равным ему треугольником $A_1O_1B_1$ , а дуга $\overset{\frown}{AA_1}$ совместиться с равной ей дугой $A_1B_1$, и, следовательно, теорема доказана.

## 6.3. Распределение скоростей в твердом теле, движущемся вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось вращения тела

Известны два метода в изучении свойств движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Согласно первому из них, каждое перемещение тела можно произвести тремя вращениями тела вокруг осей *Oz*, *Oz'* и *ON* (см. рис. 29). При этих вращениях изменяются углы Эйлера $\psi$, $\varphi$, $\theta$, определяющие положение тела в пространстве. При непрерывном движении тела эти углы изменяются непрерывно и можно внести понятия угловых скоростей прецессии, нутации, собственного вращения: $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\theta}$, $\omega_3 = \dot{\varphi}$.

С другой стороны, по теореме Даламбера – Эйлера, любое перемещение тела вокруг его неподвижной точки можно произвести одним вращением вокруг определенной оси. Всякое бесконечно малое перемещение тела в данный момент времени можно, следовательно, считать одним бесконечно малым вращение вокруг мгновенной оси вращения для этого момента времени.

Мгновенная угловая скорость $\overline{\omega}$ направлена по мгновенной оси вращения.

Таким образом, совокупность трех вращений тела вокруг осей *Oz*, *Oz'*, *ON* (рис. 32) кинематически эквивалентна одному вращению. Мгновенная угловая скорость $\overline{\omega}$ равна геометрической сумме мгновенных скоростей $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, т.е.

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 .$$

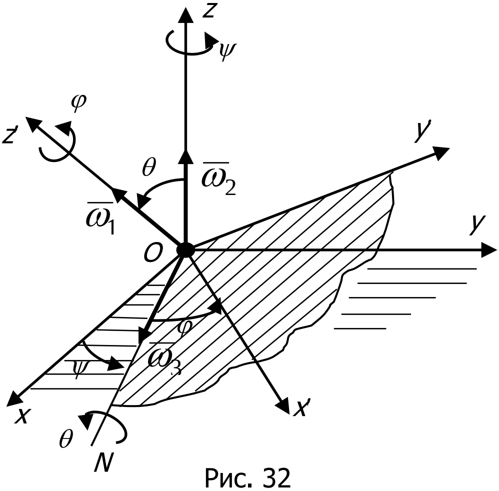


Рис. 32

Найдем проекции вектора $\overline{\omega}$ на подвижные оси $Ox'y'z'$. Обозначая эти проекции через $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$, получим

$$\omega_{x'} = \omega_{1x'} + \omega_{2x'} + \omega_{3x'},$$

$$\omega_{y'} = \omega_{1y'} + \omega_{2y'} + \omega_{3y'},$$

$$\omega_{z'} = \omega_{1z'} + \omega_{2z'} + \omega_{3z'},$$

где $\omega_{1x'} = 0$, $\omega_{1y'} = 0$, $\omega_{1z'} = \dot{\varphi}$, $\omega_{2x'} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$, $\omega_{2y'} = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$, $\omega_{2z'} = \dot{\psi}\cos\theta$, $\omega_{3x'} = \dot{\theta}\cos\varphi$, $\omega_{3y'} = -\dot{\theta}\sin\varphi$, $\omega_{3z'} = 0$.

Подставляя все вычисленные проекции, найдем окончательно

$$\omega_{x'} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$\omega_{y'} = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_{z'} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

Полученные уравнения называются кинематическими уравнениями Эйлера.

Если вектор $\overline{\omega}$ известен, то скорость точки *M* тела, положение которой задается радиусом-вектором $\overline{r}$ в подвижной системе, можно вычислить по формуле Эйлера $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$.

Эта формула дает распределение скоростей в данный момент в твердом теле, движущемся вокруг неподвижной точки; из нее следует, что это распределение скоростей таково же, как при вращении тела вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\overline{\omega}$.

Заметим, что движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно представить как непрерывный ряд последовательных вращений вокруг мгновенных осей, проходящих через неподвижную точку. Положение мгновенной оси вращения тела не остается неизменным; в различные моменты времени эта ось занимает различные положения как в пространстве, так и в самом движущемся теле.

Для решения многих задач о движении твердого тела вокруг неподвижной точки будет полезно представить скорость в виде определителя

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix},$$

где $x', y', z'$ – проекции радиус-вектора $\overline{r}$ на подвижные оси $Ox'y'z'$.

Раскрывая этот определитель по элементам первой строки, получим формулу разложения скорости $\overline{v}$ по подвижным координатным осям:

$$\overline{v} = (\omega_{y'} z' - \omega_{z'} y')\overline{i} + (\omega_{z'} x' - \omega_{x'} z')\overline{j} + (\omega_{x'} y' - \omega_{y'} x')\overline{k}.$$

Отсюда получим выражения для проекций скорости $\overline{v}$ на подвижные оси $Ox'y'z'$:

$$v_{x'} = \omega_{y'} z' - \omega_{z'} y',$$

$$v_{y'} = \omega_{z'} x' - \omega_{x'} z',$$

$$-v_{z'} = \omega_{y'} x' - \omega_{x'} y'.$$

Заметим, что координаты точки *M* $x', y', z'$ имеют постоянные значения, так как подвижные оси $Ox'y'z'$, неизменно связанные с данным телом, перемещаются вместе с ним и, следовательно, положение точки *M* тела относительно этих осей с течением времени не изменяется.

Если возьмем какую-нибудь точку тела, лежащую в данный момент на мгновенной оси вращения, то скорость этой точки будет равна нулю, т.е. $v_{x'} = 0$, $v_{y'} = 0$, $v_{z'} = 0$. Поэтому

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}},$$

Этим уравнениям удовлетворяют координаты всех точек тела, лежащих в данный момент на мгновенной оси вращения; поэтому уравнения представляют собой уравнения прямой, проходящей через начало координат и являются уравнениями мгновенной оси вращения в подвижной системе осей.

В неподвижной системе *Oxyz* уравнения принимают вид:

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi,$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi,$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi};$$

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y,$$

$$v_y = \omega_z x - \omega_x z,$$

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Заметим, что координаты *x*, *y* и *z* являются функциями времени, так как точка *M* перемещается относительно неподвижных осей *Oxyz*.

## 6.4. Распределение ускорений в твердом теле, движущемся вокруг неподвижной точки

Формулу для определения ускорения какой-либо точки *M* тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, нельзя получить, непосредственно используя формулу для ускорения при вращательном движении вокруг неподвижной оси, так как в рассматриваемом случае угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ не направлено по оси вращения, а следовательно, и по $\bar{\omega}$. Во всем остальном формулы для ускорения в этих случаях полностью аналогичны.

Формулу для определения ускорения какой-либо точки *M* тела можно получить путем дифференцирования по времени вектора скорости. Выполняя дифференцирование, получим

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega}\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Так как $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$; $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, то $\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$.

Часть общего ускорения точки $\bar{a}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ называют вращательным ускорением, а другую часть $\bar{a}_\omega = \bar{\omega} \times \bar{v}$ называют осестремительным ускорением.

Выведем теперь формулы для проекций ускорения $\bar{a}$ точки *M* на неподвижные координатные оси.

Представляя векторные произведения $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ и $\bar{\omega} \times \bar{v}$ в виде определителей, будем иметь:

$$\bar{a}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

$$\bar{a}_{\omega} = \bar{\omega} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \& & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Развертывая эти определители по элементам первой строки, получим:

$$\bar{a}_{\varepsilon} = (\varepsilon_y z - \varepsilon_z y)\bar{i} + (\varepsilon_z x - \varepsilon_x z)\bar{j} + (\varepsilon_x y - \varepsilon_y x)\bar{k}$$

И

$$\bar{a}_{\omega} = (\omega_y v_z - \omega_z v_y)\bar{i} + (\omega_z v_x - \omega_x v_z)\bar{j} + (\omega_x v_y - \omega_y v_x)\bar{k}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \bar{a} = (\varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_y v_z - \omega_z v_y)\bar{i} + \\ + (\varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_z v_x - \omega_x v_z)\bar{j} + \\ + (\varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_x v_y - \omega_y v_x)\bar{k}. \end{aligned}$$

Из этой формулы разложения ускорения $\bar{a}$ по неподвижным координатным осям следует, что искомые проекции $a_x$ , $a_y$ и $a_z$ равны соответственно коэффициентам при ортах $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$, т.е.

$$a_x = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_y v_z - \omega_z v_y,$$

$$a_y = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_z v_x - \omega_x v_z,$$

$$a_z = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_x v_y - \omega_y v_x.$$

Подставляя сюда значения проекций скорости $v_x$ , $v_y$ и $v_z$, получим:

$$a_x = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - x\omega^2,$$

$$a_y = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - y\omega^2,$$

$$a_z = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - z\omega^2.$$

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2.$$

По этим формулам нетрудно вычислить проекции ускорения $\bar{a}$ и затем определить модуль и направление этого вектора.