ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Методические указания

для проведения практических занятий
часть №2 по дисциплинам

«Теоретическая механика (общий курс)» и «Теоретическая механика»

Авторы
Высоковский Д.А.,
Углич С.И.,
Кириллова Е.В.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Методические указания для проведения практических занятий часть №2 по дисциплинам «Теоретическая механика (общий курс)» и «Теоретическая механика» для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

В методических указаниях представлены примеры решения заданий по каждой теме практических занятий раздела «Кинематика». Каждая тема предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для решения задач.

Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»
Высоковский Д.А.

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»
Углич С.И.

ст.преподаватель кафедры «Техническая механика»
Кириллова Е.В.

Оглавление

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Указания к решению задач. Задачи по кинематике точки, решаемые методом прямоугольных декартовых координат, можно разделить на следующие основные типы:

а) составление уравнений движения точки в декартовых координатах исходя из условий данной задачи;

б) определение траектории, скорости и ускорения точки из данных уравнений движения точки в декартовых координатах.

При решении задач первого типа следует выбирать систему осей прямоугольных декартовых координат, не совмещая начало координат с движущейся точкой. Кроме этого, необходимо рассматривать положение движущейся точки в произвольный момент времени t, а не ее начальное и конечное положение, и выразить ее текущие координаты как функции времени t. При этом текущие координаты движущейся точки можно находить сначала как функции геометрических параметров задачи, зависимость которых от времени определяется или по известным условиям, или находится дополнительно по качественным характеристикам движения.

При решении задач второго типа чтобы найти уравнение траектории точки в заданной системе координат, достаточно из уравнений движения исключить время t. Для определения векторов скорости и ускорения точки необходимо путем дифференцирования функций по времени найти проекции этих векторов на соответствующие оси координат, а затем определить модули направления векторов скорости и ускорения точки.

Задача 1. В механизме, изображенном на рис. 1, ползуны A и B соединены стержнем AB длиной $l = a + b$, движутся при вращении шарниром D. Найти скорость и ускорение каждого из ползунов, а также траекторию, скорость и ускорение вектора скорости точки M, находящейся на расстоянии b от конца A стержня AB, если угол DOA=φ изменяется пропорционально времени, т. е. φ=ωt, где ω=const и ω>0.

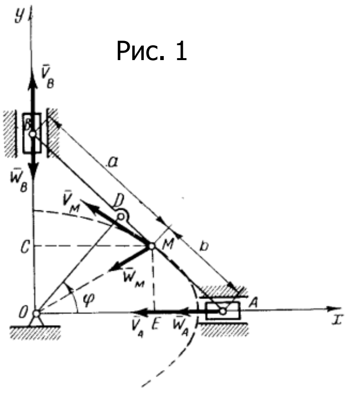


Рис. 1

Решение. В тех случаях, когда закон движения точки непосредственно не задан, решение задачи надо начинать с нахождения уравнений, определяющих закон движения точки. Для определения закона движения точек A, B и M примем направляющие Ox и Oy за координатные оси. Прежде всего определим закон движения, скорость и ускорение каждого из ползунов A и B. Так как OD = =AD, то OAB=φ. Обозначая координаты точек A и B соответственно через x_A и y_B, получим

$$x_A = lcos\varphi = lcos\omega t \quad y_A = lsin\varphi = lsin\omega t$$

Эти уравнения и представляют закон движения каждого из ползунов. Дифференцируя x_A и y_B по времени t, найдем проекции вектора скорости каждого из ползунов на координатные оси:

$$v_{Ax} = x'_A = -\omega lsin\omega t \quad v_{By} = y'_B = \omega lcos\omega t$$

Дифференцируя эти выражения по времени t, найдем проекции вектора ускорения каждого из ползунов

$$a_{Ax} = x''_A = -\omega^2 lcos\omega t \quad a_{By} = y''_B = -\omega^2 lsin\omega t$$

Знаки $v_{Ax}, a_{Ax}, v_{By}, a_{By}$ указывают направление векторов скорости и ускорения ползунов. Ползун A из рассматриваемого положения движется ускоренно, а ползун B — замедленно.

Определим уравнения движения, траекторию, скорость и ускорение точки M. Обозначая координаты точки M через x_M и y_M, из треугольников BMC и AME находим уравнения движения точки M стержня AB:

$$x_M = acos\varphi = acos\omega t \quad y_M = bin\varphi = bsin\omega t$$

Чтобы получить уравнение траектории точки M, нужно из уравнений движения этой точки M исключить время t. Для этого разделим правую и левую части этих уравнений соответственно на коэффициенты при косинусе и синусе и возведем обе части в квадрат, затем, сложив их, получим

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$$

Таким образом, траектория точки M — эллипс с полуосями a и Ь.

Дифференцируя уравнения движения точки М по времени t, получим проекции вектора скорости им точки М на оси координат

$$v_{Mx} = x'_M = -\omega a sin\omega t \quad v_{My} = y'_M = \omega b cos\omega t$$

Отсюда находим модуль вектора скорости

$$v_M = |\vec{v}_M| = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \omega\sqrt{a^2 sin^2\omega t + b^2 cos^2\omega t}$$

Модуль вектора скорости $\vec{v}_M$ оказывается величиной переменной, меняющейся с течением времени.

Дифференцируя v_{Mx} и v_{My} повремени t, получим проекции вектора ускорения $\vec{a}_M$ точки М на оси координат

$$a_{Mx} = x''_M = -\omega^2 a cos\omega t = -\omega^2 x_M$$
$$a_{My} = y''_M = -\omega^2 b sin\omega t = -\omega^2 y_M$$

Модуль вектора ускорения $\vec{a}_M$ равен

$$a_M = |\vec{a}_M| = \sqrt{a_M^2 + a_M^2} = \omega^2\sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \omega^2 r$$

где $r = \mathrm{OM}$ есть расстояние движущейся точки М от начала координат.

Направление вектора ускорения $\vec{a}_M$ определяется формулами

$$\cos(\widehat{\vec{a}_M, \vec{\imath}}) = \frac{a_{Mx}}{a_M} = -\frac{x_M}{r} \qquad \cos(\widehat{\vec{a}_M, \vec{\jmath}}) = \frac{a_{My}}{a_M} = -\frac{y_M}{r}$$

Так как направление отрезка ОМ образует с осями Ох и Оу углы, косинусы которых равны $\frac{x_M}{r}$ и $\frac{y_M}{r}$, то вектор, направленный от точки М к точке О, имеет направляющие косинусы, соответственно равные $-\frac{x_M}{r}$ и $-\frac{y_M}{r}$. Отсюда следует, что вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен вдоль МО к центру описываемого ею эллипса.

Задача 2. Определить траекторию, скорость и ускорение конца А кривошипа ОА и середины М шатуна АВ, а также скорость и ускорение поршня В кривошипно-шатунного механизма (рис. 2), если ОА=АВ=2а, а угол φ при вращении кривошипа растет пропорционально времени: φ=ωt, где ω=const и ω>0.

Решение. Определим уравнения движения конца A кривошипа OA. Возьмем систему координатных осей x и y с началом в точке O. Обозначая координаты точки A через x_A и y_A, находим

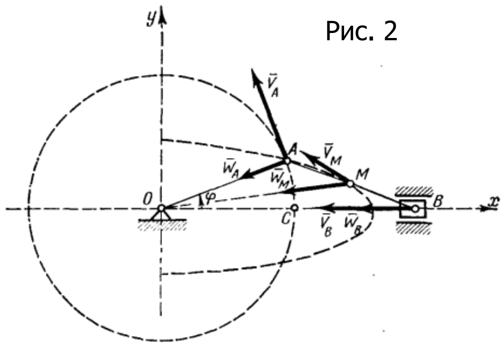


Рис. 2

$$x_A = OAcos\varphi = 2acos\omega t \quad y_A = OAsin\varphi = 2asin\omega t$$

Для определения траектории точки A возведем эти уравнения в квадрат и сложим. Тогда получим $x_A^2 + y_A^2 = 4a^2$. Следовательно, траекторией точки A является окружность радиуса 2a, центр которой совпадает с началом координат. В начальный момент при t=0 мы имеем x_A =2a, y_A =0, т. е. движущаяся точка A находится в точке C (рис. 2). При возрастании времени t от 0 до $\frac{\pi}{2\omega}$ функция $x_A = 2acos\omega t$ убывает, а y_A возрастает, будучи положительным. Следовательно, движение точки A по окружности происходит, как видно, против часовой стрелки.

Проекции вектора скорости $\vec{v}_A$ точки A на координатные оси получим, дифференцируя x_A и y_A по времени t

$$v_{Ax} = x_A' = -2a\omega sin\omega t \quad v_{Ay} = y_A' = 2a\omega cos\omega t$$

Отсюда находим модуль вектора скорости

$$v_A = |\vec{v}_A| = \sqrt{v_A^2 + v_A^2} = 2a\omega = const$$

т. е. модуль вектора скорости $\vec{v}_A$ не меняется с течением времени.

Направление вектора скорости

$$\cos(\widehat{\vec{v}_A, \vec{i}}) = \frac{v_{Ax}}{v_A} = -sin\omega t \qquad \cos(\widehat{\vec{v}_A, \vec{j}}) = \frac{v_{Ay}}{a_A} = cos\omega t$$

Вектор скорости $\vec{v}_A$ перпендикулярен к радиусу-вектору OA точки A и направлен в сторону, показанную на рис. 2.

Проекции вектора ускорения $\vec{a}_A$ точки А на координатные оси получим, дифференцируя v_{Ax} и v_{Ay} по времени t,

$$a_{Ax} = x_A'' = -2a\omega^2 cos\omega t = -\omega^2 x_A$$
$$a_{Ay} = y_A'' = -2a\omega^2 sin\omega t = -\omega^2 y_A$$

Отсюда находим модуль вектора ускорения

$$a_A = |\vec{a}_A| = \sqrt{a_A^2 + a_A^2} = 2a\omega^2 = const$$

Модуль вектора ускорения $\vec{a}_A$ также не меняется с течением времени. Таким образом, несмотря на постоянство модуля вектора скорости $\vec{v}_A$ точки А, вектор ускорения $\vec{a}_A$ этой точки не обращается в нуль. Это объясняется тем, что движение точки А происходит по криволинейной траектории и вектор скорости $\vec{v}_A$ все время изменяет свое направление.

Направление вектора ускорения

$$\cos(\widehat{\vec{a}_A, \vec{\imath}}) = \frac{a_{Ax}}{a_A} = -\frac{x_A}{2a} \qquad \cos(\widehat{\vec{a}_A, \vec{\jmath}}) = \frac{a_{Ay}}{a_A} = -\frac{y_A}{2a}$$

Отсюда нетрудно установить, что при рассматриваемом равномерном движении точки А по окружности ее вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен вдоль АО к центру окружности.

Теперь определим траекторию, скорость и ускорения точки М шатуна АВ. Начинаем с определения уравнений движения точки М. Обозначая координаты точки М через x_M и y_M, находим

$$x_M = 2acos\varphi + acos\varphi = 3acos\omega t \qquad y_M = asin\varphi = asin\omega t$$

Разделим правую и левую части этих уравнений соответственно на коэффициенты при косинусе и синусе и возведем обе части в квадрат, затем, сложив их, получим траекторию точки М

$$\frac{x_M^2}{9a^2} + \frac{y_M^2}{a^2} = 1$$

Траектория точки М — эллипс с полуосями 3а и а.

Дифференцируя уравнения движения точки М по времени t, получим проекции вектора скорости им этой точки на координатные оси

$$v_{Mx} = x'_M = -3asin\omega t \quad v_{My} = y'_M = a\omega cos\omega t$$

Отсюда находим модуль вектора скорости

$$v_M = |\vec{v}_M| = \sqrt{v_M^2 + v_M^2} = a\omega\sqrt{9sin^2\omega t + cos^2\omega t}$$

т. е. модуль вектора скорости меняется с течением времени в пределах от $v_{Mmin} = a\omega$ до $v_{Mmax} = 3a\omega$.

Дифференцируя v_{Mx} и v_{My} повремени t, получим проекции вектора ускорения $\vec{a}_M$ точки М на оси координат

$$a_{Mx} = x''_M = -3a\omega^2 cos\omega t = -\omega^2 x_M$$
$$a_{My} = y''_M = -a\omega^2 sin\omega t = -\omega^2 y_M$$

Модуль вектора ускорения $\vec{a}_M$ равен

$$a_M = |\vec{a}_M| = \sqrt{a_M^2 + a_M^2} = \omega^2\sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \omega^2 r$$

где r — модуль радиуса-вектора $\vec{r}$ точки М, проведенного из начала координат О до точки М. Итак, модуль вектора ускорения $\vec{a}_M$ точки М меняется пропорционально ее расстоянию от начала координат О, т. е. от центра эллипса.

Направление вектора ускорения $\vec{a}_M$ определяется формулами

$$\cos(\widehat{\vec{a}_M, \vec{\imath}}) = \frac{a_{Mx}}{a_M} = -\frac{x_M}{r} \qquad \cos(\widehat{\vec{a}_M, \vec{\jmath}}) = \frac{a_{My}}{a_M} = -\frac{y_M}{r}$$

Вектор ускорения $\vec{a}_M$ движущейся точки М направлен вдоль МО к центру эллипса.

Составим теперь уравнение движения поршня В. Обозначая абсциссу точки В через x_B, находим $x_B = 4acos\omega t$. Это уравнение и определяет уравнение движения поршня В.

Найдем теперь скорость и ускорение поршня В. Дифференцируя уравнение движения поршня по времени, получаем проекцию вектора скорости $\vec{v}_B$ поршня на ось Ох

$$v_{Bx} = x'_B = -4a\omega sin\omega t$$

Знак «минус» показывает, что вектор скорости $\vec{v}_B$ в данный момент направлен в сторону, обратную положительному направлению оси Ox.

Проекцию вектора ускорения $\vec{a}_B$ поршня на ось Ox получим, дифференцируя v_{Bx} по времени t,

$$a_{Bx} = x_B'' = -4a\omega^2 cos\omega t$$

Знаки v_{Bx} и a_{Bx} указывают направление векторов скорости $\vec{v}_B$ и ускорения $\vec{a}_B$. Поршень из рассматриваемого положения движется ускоренно.

ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Угловая скорость тела в данный момент равна первой производной от угла поворота тела по времени.

Угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота тела по времени.

Линейная скорость какой-либо точки вращающегося твердого тела равняется произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Вектор скорости любой точки тела,вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, взятой на оси вращения тела.

Задачи, относящиеся к вращательному движению твердого тела вокруг неподвижной оси, можно разделить на три основные типа:

1) определение угла поворота, угловой скорости и углового ускорения тела;

2) определение линейных скоростей и ускорений точек вращающегося тела;

3) задачи, относящиеся к передаче вращательного движения от одного тела к другому (зубчатые и ременные передачи).

Задача 3. В период разгона маховик вращается вокруг своей оси по закону $\varphi=8\pi t^3$. Определить угловую скорость и угловое ускорение маховика в тот момент, когда он сделает 4 об.

Решение. По заданному закону вращательного движения находим угловую скорость и угловое ускорение маховика в данный момент

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 24\pi t^2 \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 48\pi t$$

Так как маховик сделал 4 об, то угол поворота равен $\varphi=2\pi N=2\pi\ 4 = 8\pi$ рад. Далее находим, в какой момент времени t угол поворота маховика будет равен $\varphi=8\pi$ рад. Для этого подставим это значение угла поворота в формулу $\varphi=8\pi t^3$, тогда получим $8\pi=8\pi t^3$, отсюда t=1 с

Угловая скорость и угловое ускорение маховика в этот момент времени будут равны $\omega=24\pi$ с$^{-1}$ $\varepsilon=48\pi$ с$^{-2}$

Задача 4. Вал, делающий n=90 об/мин , после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и до остановки сделал 30 об. Определить, сколько времени прошло с момента выключения двигателя до остановки вала.

Решение. Так как вал вращается равнозамедленно, то для него, считая 9о—0,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Начальной угловой скоростью вала будет та, которую вал имел до выключения двигателя. Следовательно,

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 3\pi\ c^{-1}$$

Так как в момент остановки угловая скорость вала равна нулю, то ω=0. Подставляя это значение в уравнение, получаем 0=3п + εt, отсюда ε= - 3п/t

Так как вал до остановки сделал N=30 об, то угол поворота вала равен φ=2пN=2п 30 = 60п рад. Подставляя найденные значения ε и φ в уравнение, получаем

$$60\pi = 3\pi t - \frac{3\pi}{t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Откуда t=40 сек.

Задача 5. Маховик радиуса R=1 м вращается равномерно вокруг своей оси, делая пять оборотов за 0,5 сек. Определить линейную скорость и линейное ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Решение. Так как маховик вращается равномерно, то для него

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}$$

В данном случае за время t=0,5 сек угол поворота маховика $\varphi - \varphi_0 = 2\pi N = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ рад, поэтому ω=20п c^{-1}

Кроме того, при равномерном вращении маховика ω =const, и, следовательно, ε=0. Таким образом,

$$v = R\omega = 20\pi = 62.8\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad \omega_\tau = R\varepsilon = 0$$

$$\omega_n = \omega = R\omega^2 = 400\pi^2 = 3943.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Задача 6. Зубчатое колесо I радиусом r_1=0,6 м находится во внешнем зацеплении с колесом II радиусом r_2=0,5 м (рис. 3). На вал радиусом r_3=0,3 м колеса I намотана нить, к концу которой подвешен груз, так что он движется в вертикальном направлении по закону $s=3t^2$ (s— в метрах, t — в секундах). Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса II, а также полное линейное ускорение какой-либо точки B, лежащей на ободе этого колеса.

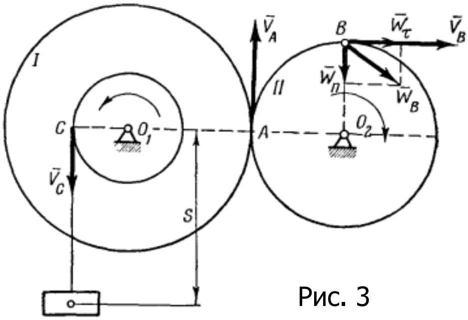


Рис. 3

Решение. Колесо I (ведущее) вращается вокруг неподвижной оси Ox в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Скорость точки A зацепления колес будет направлена, как показано на рис. 3, и, следовательно, колесо II (ведомое) будет вращаться вокруг неподвижной оси O_2 в сторону, противоположную вращению ведущего колеса I.

Для линейной скорости точки A, как принадлежащей одновременно и колесу I и колесу II, будем иметь

$$v_A = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

где ω_1 и ω_2 угловые скорости колес I и II. Отсюда следует, что

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

т. е. отношение угловой скорости ведущего колеса и угловой скорости ведомого равно обратному отношению их радиусов.

Линейная скорость поступательно движущегося груза (или скорость нити) равна

$$v_c = \frac{ds}{dt} = 6t\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Так как вал приводится во вращательное движение сматываемой с него нитью, то линейная скорость точки C, лежащей на ободе вала, равна скорости груза (или нити). При этом угловая скорость вала, а следовательно, и колеса I будет равна

$$\omega_1 = \frac{v_c}{r_3} = \frac{6t}{0.3} = 20t\ c^{-1}$$

а угловое ускорение колеса I будет равно

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 20\ c^{-2}$$

Вращение колес I к II равноускоренное, а поэтому для угловых скоростей этих колес имеем формулы: $\omega_1 = \varepsilon_1 t$ и $\omega_2 = \varepsilon_2 t$, откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Отсюда находим угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 колеса II

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = 20t\frac{0.6}{0.5} = 24t\ c^{-1}$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} = 20\frac{0.6}{0.5} = 24\ c^{-2}$$

Линейное ускорение произвольной точки B обода колеса II будет равно

$$a_B = r_2\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 12\sqrt{1 + 576t^4}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости из одного положения в другое можно осуществить поступательным перемещением плоской фигуры, равным перемещению произвольно выбранного полюса, и вращательным перемещением плоской фигуры вокруг этого полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а величина угла поворота и направление поворота от выбора полюса не зависят.

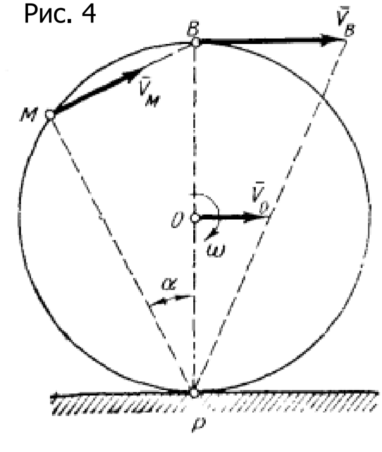
Движение плоской фигуры в ее плоскости можно разложить на поступательное движение, при котором все ее точки движутся так же, как произвольно выбранный полюс, и на вращательное движение вокруг этого полюса.

Абсолютная скорость любой точки B плоской фигуры в каждый данный момент равна геометрической сумме двух скоростей: скорости другой, произвольно выбранной и принятой за полюс, точки плоской фигуры, и скорости точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг этого полюса.

Мгновенным центром скоростей называется точка, абсолютная скорость которой равна нулю.

В каждый данный момент скорости точек плоской фигуры расположены так, как если бы плоская фигура вращалась вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей плоской фигуры и перпендикулярной ее плоскости. При этом скорости точек плоской фигуры перпендикулярны мгновенным радиусам вращения и пропорциональны расстояниям этих точек до мгновенного центра скоростей.

Рис. 4



Задача 7. Найти скорость точки M обода колеса, катящегося по неподвижному прямолинейному рельсу без скольжения (рис. 4), если скорость центра колеса равна v_0, а угол BPM=α и радиус OP=R.

Решение. Колесо совершает плоское движение. Так как колесо катится без скольжения по неподвижному рельсу, то мгновенный центр скоростей этого колеса находится в точке касания P колеса с рельсом, и поэтому скорость $\vec{v}_M$ точки M обода колеса будет перпендикулярной к мгновенному радиусу вращения MP. А так как прямой угол PMB опирается на диаметр, то вектор скорости $\vec{v}_M$ точки M проходит через точку B. Зная положение мгновенного центра скоростей колеса и скорость его центра, находим угловую скорость колеса

$$\omega = \frac{v_o}{OP} = \frac{v_o}{R}$$

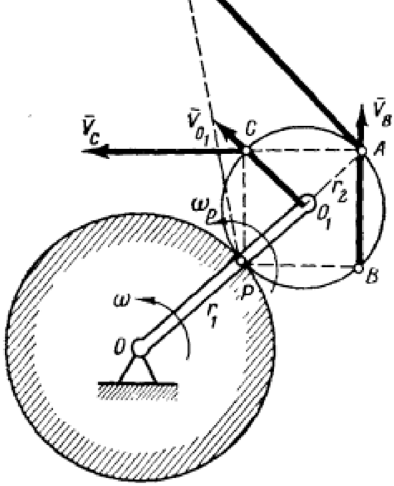
Направление ω (направление вращения колеса) определяется направлением $\vec{v}_O$ и показано стрелкой. Замечая, что MP=2Rcosα, находим модуль скорости точки M

$$v_M = \omega \cdot MP = 2v_o cos\alpha$$

Чем точка M дальше от мгновенного центра скоростей P, тем ее скорость больше; из всех точек обода колеса наибольшую скорость $\vec{v}_B = 2\vec{v}_O$ имеет точка B, являющаяся верхним концом вертикального диаметра.

Задача 8. Кривошип OO_1 вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O и увлекает диск радиуса r_2, заставляя его катиться без скольжения по неподвижному диску радиуса r_1 (рис. 5). Найти скорости точек A, B и C диска, лежащих на концах двух взаимно перпендикулярных диаметров.

Рис. 5



Решение. Диск радиуса r_2 совершает плоское движение. Для решения этой задачи достаточно найти мгновенный центр скоростей этого диска и скорость какой-либо его точки.

Очевидно, мгновенный центр скоростей движущегося диска находится в точке соприкосновения P дисков. Так как точка O_1 принадлежит кривошипу OO_1, то ее скорость $\vec{v}_{O_1}$, есть вращательная скорость вокруг оси O и, следовательно,

$$v_{O_1} = OO_1 \cdot \omega = (r_1 + r_2)\omega$$

причем вектор $\vec{v}_{O_1}$ перпендикулярен к кривошипу OO_1. Но так как точка O_1 принадлежит и диску радиуса r_2, то ее скорость $\vec{v}_{O_1}$,в то же время должна быть вращательной скоростью вокруг точки P, т. е.

$$v_{O_1} = \omega_P \cdot O_1 P = \omega_P r_2$$

где ω_P — угловая скорость диска.

Из сравнения равенств и следует

$$\omega_P = (1 + \frac{r_1}{r_2})\omega$$

Направление ω_P (направление вращения диска) определяется направлением $\vec{v}_{O_1}$ и показано стрелкой.

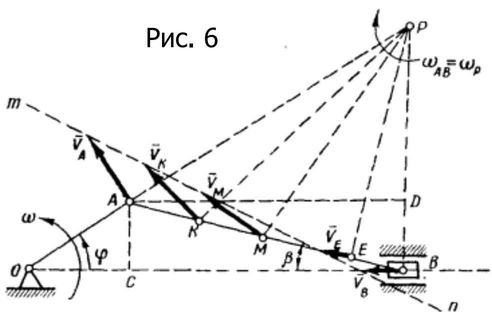
Зная ω_P и мгновенные радиусы вращений PA, PB и PC, находим скорости точек A, B и C:

$$v_A = \omega_P \cdot PA = (1 + \frac{r_1}{r_2})\omega \cdot 2r_2 = 2(r_1 + r_2)\omega$$

$$v_B = \omega_P \cdot PB = \omega_P \cdot PA\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(r_1 + r_2)\omega$$

$$v_C = \omega_P \cdot PC = \omega_P \cdot PB = v_B$$

Рис. 6



Задача 9. В кривошипно-шатунном механизме (рис. 6), состоящим из кривошипа OA, ползуна B и шарнирно соединенного с ними шатуна AB, кривошип OA длиной r вращается с угловой скоростью ω. Длина шатуна AB=*l*. При данном угле φ определить: 1) скорость ползуна B; 2) скорость средней точки M шатуна AB; 3) угловую скорость шатуна AB. Вычислить, в частности, эти кинематические характеристики для двух положений механизма, когда φ=0 и φ==90°.

Решение. Все звенья кривошипно-шатуиного механизма совершают плоское движение. Плоское движение кривошипа OA будет являться вместе с тем и вращательным движением вокруг неподвижной оси О. Плоское движение ползуна В будет одновременно и поступательным движением вдоль неподвижных направляющих. Плоское же движение шатуна АВ будет одновременно вращательным и поступательным.

Известны направления скоростей двух точек А и В шатуна АВ: скорость точки А перпендикулярна к кривошипу ОА (точка А является общей для шатуна и кривошипа), а скорость точки В направлена по линии движения ОВ ползуна (точка В является общей для шатуна и ползуна). Восставляя из точек А и В перпендикуляры к направлениям скоростей точек А и В, находим на пересечении этих перпендикуляров положение мгновенного центра скоростей Р для шатуна (линия АР является продолжением ОА).

Так как точка А принадлежит кривошипу ОА, то ее скорость $\vec{v}_A$ есть вращательная скорость вокруг оси О, и, следовательно, модуль этой скорости

$$v_A = OA \cdot \omega = r\omega$$

Так как точка А принадлежит и шатуну, то ее скорость в то же время должна быть вращательной скоростью вокруг мгновенного центра скоростей Р, т. е.

$$v_A = \omega_P \cdot AP = \omega_{AB} \cdot AP$$

Отсюда находим, что угловая скорость шатуна равна

$$\omega_{AB} = \omega_P = \frac{v_A}{AP} = \frac{r\omega}{AP}$$

а модули скоростей точек В и М шатуна соответственно равны

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = v_A \frac{BP}{AP} \qquad v_M = \omega_{AB} \cdot MP = v_A \frac{MP}{AP}$$

Направлены скорости $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_M$ точек В и М перпендикулярно соответственно к отрезкам ВР и МР в сторону вращения шатуна.

Следовательно, решение задачи сводится к определению длин отрезков АР, ВР и МР. Опуская из точки А перпендикуляры AD и АС на прямые ВР и ОВ, имеем

$$AP = \frac{AD}{cos\varphi}$$

$$AD = CB = \sqrt{(AB)^2 - (AC)^2} = \sqrt{l^2 - r^2 sin^2\varphi}$$

и, следовательно,

$$AP = \frac{1}{cos\varphi}\sqrt{l^2 - r^2 sin^2\varphi}$$

Из треугольников ОРВ и МРВ соответственно имеем

$$BP = OPsin\varphi = (OA + AP)sin\varphi = \left(r + \frac{1}{cos\varphi}\sqrt{l^2 - r^2 sin^2\varphi}\right)sin\varphi$$

$$MP = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (BP)^2 - l \cdot BPsin\beta}$$

где, очевидно, $lsin\beta = rsin\varphi$

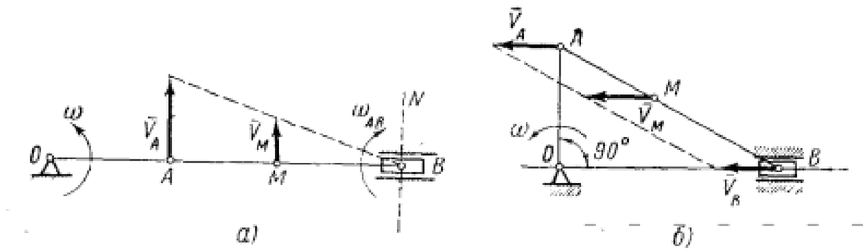


Рис. 7

Решим теперь ту же задачу для двух частных случаев, когда φ=0 и φ=90°. Расположение звеньев механизма и распределение скоростей точек шатуна АВ при φ=0 показано на рис. 7, а. При φ=0 мгновенным центром скоростей шатуна АВ будет точка В, так как в ней будут пересекаться перпендикуляры АВ и BN, восставленные из точек А и В к скоростям этих точек. Следовательно, скорость $\vec{v}_B$ точки В (скорость ползуна) будет равна нулю («мертвое» положение механизма). Для этого положения угловая скорость ω_{AB} шатуна равна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{AB} = \frac{r}{l}\omega$$

а скорость $\vec{v}_M$ точки М шатуна

$$v_M = \omega_{AB} \cdot MP = \omega_{AB} \cdot MB = v_A \frac{MB}{AB} = \omega r \frac{l/2}{l} = \frac{\omega r}{2}$$

Расположение звеньев механизма и распределение скоростей точек шатуна AB при φ=90° показано на рис. 7, б. При φ=90° скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ параллельны и точки A и B не лежат на одном перпендикуляре к направлениям этих скоростей; при этом перпендикуляры, восставленные из точек A и B к скоростям этих точек, пересекаются в бесконечности. Так как проекции скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ на направление шатуна должны быть одинаковы, то эти скорости геометрически равны, т. е. $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, но при этом $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{BA} = 0$, или $\vec{v}_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB = 0$. Но так как AB≠0, то при φ=90° должна быть равна нулю угловая скорость ω_{AB} шатуна AB. Следовательно, движение шатуна AB является в этом случае мгновенно-поступательным.

Так как в мгновенно-поступательном движении скорости всех точек геометрически равны, то заключаем, что

$$v_M = v_A = v_B = \omega r$$

Легко видеть, что в этот момент векторы ускорений каких-либо двух точек шатуна AB не будут равны между собой. Так, ускорение точки A при ω=const направлено к центру O, а ускорение точки B направлено по прямой BO.

Задача 10. Кривошип OA=2r, вращающийся вокруг оси O с угловой скоростью ω, несет на себе ось подвижной шестерни 1, катящейся без скольжения по неподвижной шестерне 2. При этом шестерня 1 приводит в движение шарнирно соединенный с ней шатун CB=1, связанный с ползуном B. Радиусы шестерен одинаковы. Определить угловую скорость шатуна CB и скорости точек C и B в момент, когда радиус AC перпендикулярен к кривошипу OA (рис. 8).

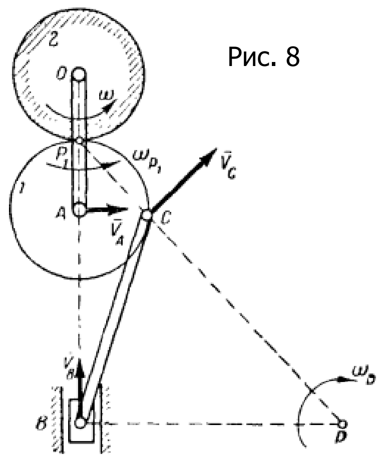


Рис. 8

Решение. Так как точка A шестерни 1 одновременно принадлежит и кривошипу O A, то ее скорость $\vec{v}_a$ есть вращательная скорость вокруг оси O и, следовательно, $v_a = \omega \cdot OA = 2r\omega$, причем вектор

$\vec{v}_a$ перпендикулярен к кривошипу ОА. Так как шестерня 1 катится по неподвижной шестерне 2 без скольжения, то скорость точки P_1 касания этих шестерен равна нулю; следовательно, эта точка является мгновенным центром скоростей для шестерни I. Поэтому угловая скорость ω_{p_1}, шестерни I будет

$$\omega_{p_1} = \frac{v_C}{CP} = \frac{2\sqrt{2}\omega r}{CP}$$

Но так как $BP = BP_1$ и $CP = PP_1 - CP_1 = (BP_1 - r)\sqrt{2} = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{CB^2 - AC^2} = \sqrt{2}\sqrt{l^2 - r^2}$, то

$$v_B = \omega_P \cdot BP = \omega_P \cdot BP_1$$

но так как $BP_1 = r + AB = r + \sqrt{l^2 - r^2}$, то

$$v_B = 2\omega r\left(1 + \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right)$$

но так как

$$BP_1 = r + AB = r + \sqrt{l^2 - r^2},$$

то

$$v_B = 2\omega r\left(1 + \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right).$$

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Если переносное движение является поступательным, то абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки, а абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений этой точки.

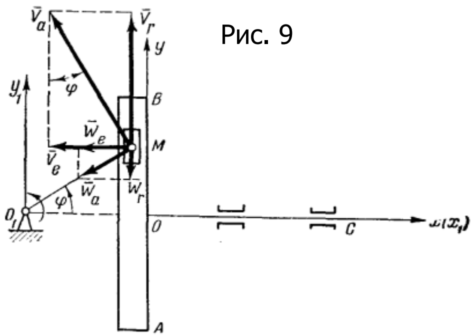


Рис. 9

Задача 11. Кривошип ОМ кривошипно-кулисного механизма (рис. 9) равномерно вращается вокруг неподвижной оси O_1 Конец М этого кривошипа соединен шарнирно с ползуном, который при вращении кривошипа скользит вдоль прикрепленной к стержню ОС вертикальной кулисы АВ и сообщает этой кулисе возвратно-поступательное движение в горизонтальном направлении. Зная, что кривошип вращается с угловой скоростью ω=10 $с^{-1}$ и что его длина ОМ = 0,4 м, определить скорость и ускорение кулисы в тот момент, когда кривошип образует с осью кулисы угол φ=30°.

Решение. В данном случае подвижной системой отсчета является кулиса, а неподвижной — станина механизма. Начало подвижной системы отсчета Оху возьмем в точке О кулисы, а начало неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1$ — в точке O_1 станины механизма.

Абсолютным движением точки М (центра шарнира, соединяющего ползун с кривошипом) будет ее круговое перемещение вместе с кривошипом вокруг неподвижной точки Ох. Это движение точки М можно считать составным, т.е. получающимся в результате сложения:

1) движения точки М вместе с кулисой в ее возвратно-поступательном (переносном) перемещении вдоль оси O_1x_1;
2) относительного движения точки М вместе с ползуном, движущимся возвратно-поступательно в прорези кулисы.

Так как кулиса движется поступательно, то все ее точки имеют в каждый данный момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения. Эту общую для всех точек кулисы переносную скорость, а также это общее для всех точек кулисы переносное ускорение и требуется определить.

Найдем переносную скорость $\vec{v}_e$ и переносное ускорение $\vec{a}_e$ той точки кулисы, с которой в момент, когда φ=30°, совпадает конец М кривошипа.

Абсолютная скорость $\vec{v}_a$ точки М, модуль которой легко определяется по формуле

$$\vec{v}_a = O_1M \cdot \omega = 0.4 \cdot 10 = 4\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

направлена перпендикулярно к кривошипу O_1M. Относительная скорость $\vec{v}_r$ точки М, равная скорости ползуна в прорези кулисы, направлена вдоль кулисы. Переносная скорость $\vec{v}_e$ точки М, равная поступательной скорости кулисы, направлена горизонтально. На рис. 9 изображен известный по модулю и направлению вектор абсолютной скорости $\vec{v}_a$ точки М и показано его разложение на составляющие $\vec{v}_r$и $\vec{v}_e$.

Из параллелограмма скоростей находим искомую скорость кулисы

$$v_e = v_a sin\varphi = 4sin30° = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Так как кривошип вращается вокруг точки O_1 равномерно, то абсолютное ускорение точки М состоит из одной лишь центростремительной составляющей, т. е. по модулю равно

$$\omega_a = O_1M \cdot \omega^2 = 0.4 \cdot 100 = 40\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

и направлено от точки М к точке O_1.

Имея в виду, что движение кулисы есть движение поступательное, воспользуеься теоремой сложения ускорений. Переносное ускорение $\vec{a}_e$ точки М, равное поступательному ускорению кулисы, направлено горизонтально, а относительное ускорение $\vec{a}_r$ точки М, равное ускорению ползуна в прорези кулисы, направлено вдоль кулисы. Строим параллелограмм ускорений (рис. 9), из которого находим искомое ускорение кулисы

$$a_e = a_a cos\varphi = 40cos30° = 20\sqrt{3}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Задача 12. Наклонная плоскость, составляющая с горизонтом угол α=45° (рис. 10), движется поступательно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением 2 м/с. По этой наклонной плоскости скользит груз М с постоянным ускорением $\sqrt{2}$ м/с^2. Определить траекторию груза М, его скорость и ускорение по отношению к неподвижной системе отсчета, если в начальный момент наклонная плоскость и груз М были неподвижны и груз М находился в точке О; высота наклонной плоскости h=1 м.

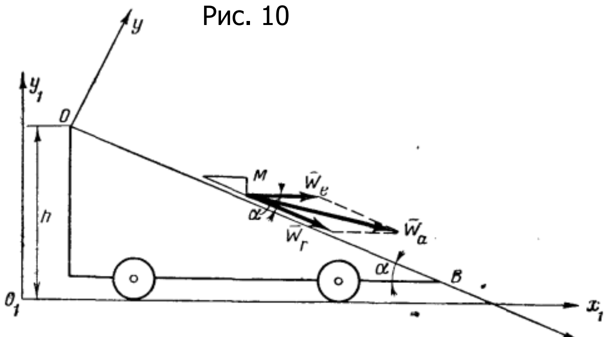
Решение. Движение груза М по отношению к горизонтальной плоскости (неподвижной системе отсчета Ox_1y_1 есть его абсолютное движение. Это движение груза М можно рассматривать как составное, т. е. состоящим из двух движений:

1) относительного, т. е. движения груза М по отношению к движущейся наклонной плоскости (подвижная система отсчета Oxy);

2) переносного, т. е. движения груза М вместе с наклонной плоскостью. Так как переносное ускорение $\vec{a}_e$ груза М равно ускорению наклонной плоскости, то модуль переносного ускорения $\vec{a}_e$ равен $a_e = 2$ м/с^2 при этом вектор $\vec{a}_e$ параллелен неподвижной оси O_1x_1.

Так как груз М перемещается относительно наклонной плоскости по прямой ОВ, то относительное ускорение $\vec{a}_r$ этого груза

Рис. 10



направлено по ОВ; при этом модуль вектора $\vec{a}_r$ равен $a_r = \sqrt{2}$ м/с^2. Мы знаем, что при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки определяется по правилу параллелограмма ускорений. Поэтому из параллелограмма ускорений (рис. 10) находим абсолютное ускорение $\vec{a}_a$ груза по формуле

$$a_a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 + 2a_e a_r cos\alpha} = \sqrt{10}\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$$

Определим теперь модуль вектора $\vec{a}_a$ методом проекции, т. е. по его проекциям на неподвижные оси O_1x_1. Так как,

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

то, проектируя обе части этого векторного равенства на оси, получим

$$a_{ax_1} = a_{ex_1} + a_{rx_1}$$
$$a_{ay_1} = a_{ey_1} + a_{ry_1}$$

Так как

$$a_{ex_1} = 2, \qquad a_{ey_1} = 0, \qquad a_{rx_1} = a_r cos\alpha = 1,$$
$$a_{ry_1} = -a_r sin\alpha = -1,$$

То

$$a_{ax_1} = 3 \quad a_{ay_1} = -1$$

Отсюда следует, что

$$a_a = \sqrt{a_{ax_1}^2 + a_{ay_1}^2} = \sqrt{10}\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$$

Так как

$$a_{ax_1} = \frac{dv_{ax_1}}{dt} = 3 \quad a_{ay_1} = \frac{dv_{ay_1}}{dt} = -1$$

То

$$v_{ax_1} = 3\int dt = 3t + C_1$$
$$v_{ay_1} = -\int dt = -t + C_2$$

Подставляя сюда начальные условия задачи при t=0, $v_{Ox_1} = v_{Oy_1} = 0$ найдем, что $C_1=C_2=0$, и, следовательно, будем иметь

$$v_{Ox_1} = 3t \;\; v_{Oy_1} = -t$$

Отсюда находим модуль абсолютной скорости $\vec{v}_a$ груза М

$$v_a = \sqrt{v_{ax_1}^2 + v_{ay_1}^2} = \sqrt{10}t \ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{v}_a$ найдем по формулам

$$\cos(\widehat{\vec{v}_a, x_1}) = \frac{v_{ax_1}}{v_a} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\cos(\widehat{\vec{v}_a, y_1}) = \frac{v_{ay_1}}{v_a} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Найдем теперь координаты x_1 и y_1 груза М в неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1$. Так как

$$v_{Ox_1} = \frac{dx_1}{dt} = 3t \;\; v_{Oy_1} = \frac{dy_1}{dt} = -t$$

то

$$x_1 = \frac{3}{2}t^2 \;\; y_1 = 1 - \frac{t^2}{2}$$

Исключая из этих уравнений абсолютного движения груза М время t, получим следующее уравнение прямой:

$$x_1 + 3y_1 = 3$$

Таким образом, абсолютная траектория груза М есть прямая линия.

СЛОЖНОЕ ВРАЩЕНИЕ

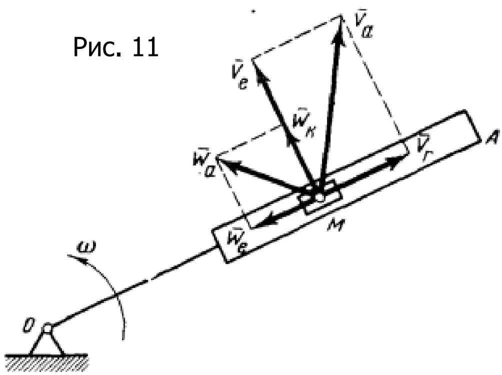
Поворотное ускорение точки равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и поворотного ускорений.

Чтобы получить направление поворотного ускорения, достаточно составляющую относительной скоростиr точки, перпендикулярную к вектору ускорения, повернуть (в плоскости, перпендикулярной к вектору юе) на прямой угол вокруг точки в направлении переносного вращения

Задача 13. Ползун М движется вдоль прямолинейной кулисы ОА от О к А с постоянной скоростью $\vec{v}_r = \vec{u}$, а сама кулиса равномерно вращается вокруг оси О против движения часовой стрелки с угловой скоростью ω (рис. 11). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна М в тот момент, когда ОМ=*l*.

Рис. 11



Решение. Движение ползуна М будем рассматривать как составное, в котором движение ползуна вдоль кулисы является относительным движением, а вращательное движение кулисы — переносным. Поэтому относительная скорость $\vec{v}_r$ ползуна равна заданной величине $\vec{u}$, т. е. $\vec{v}_r = \vec{u},\ v_r = u$

Переносная скорость $\vec{v}_e$ ползуна М равна той точке кулисы, с которой в данный момент совпадает ползун М, т. е.

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} \quad \text{или} \quad v_e = \omega \cdot OM = \omega l$$

при этом вектор $\vec{v}_e$ направлен перпендикулярно к кулисе ОА.

Складывая геометрически скорости $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$, найдем абсолютную скорость $\vec{v}_a$ ползуна М

$$\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$$

Так как вектор $\vec{v}_a$ есть диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$, то модуль искомой абсолютной скорости $\vec{v}_a$ ползуна будет равен

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{u^2 + l^2\omega^2}$$

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ ползуна М в данном случае равно нулю ($\vec{a}_r = 0$), так как ползун М движется вдоль кулисы равномерно и прямолинейно.

Так как переносное движение есть равномерное вращение, то переносное ускорение $\vec{a}_e$ползуна М, равное ускорению той точки кулисы, с которой в данный момент совпадает ползун М, равно центростремительному ускорению и направлено к точке О, т. е.

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{OM}$$
$$a_e = \omega^2 \cdot OM = \omega^2 l$$

Поворотное ускорение $\vec{a}_k$ ползуна легко найти по формуле

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{u}$$

при этом вектор $\vec{a}_k$ перпендикулярен одновременно и к угловой скорости $\vec{\omega}$ и к относительной скорости $\vec{u}$ и ориентирован так, как показано на рис. 11. Замечая, что вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен к вектору $\vec{u}$, получим для модуля вектора $\vec{a}_k$ следующее значение:

$$a_k = 2\omega u$$

Окончательно для абсолютного ускорения $\vec{a}_a$ ползуна М будем иметь

$$\vec{a}_k = -\omega^2\overrightarrow{OM} + 2\vec{\omega} \times \vec{u}$$
$$a_a = \sqrt{a_e^2 + a_k^2} = \sqrt{\omega^4 l^2 + 4\omega^2 u^2}$$

Полагая, что $l = ut$, найдем

$$v_a = u\sqrt{1 + \omega^2 t^2} \qquad a_a = \omega u\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

Задача 14. Тело движется вдоль меридиана с юга на север поступательно с постоянной по модулю скоростью $v_r = u$ (рис. 12). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение тела, когда оно находится в северном полушарии на широте ϕ, предполагая, что угловая скорость Земли постоянна и равна ω. Радиус Земли равен R.

Решение. Пренебрегая размерами тела, рассматриваем его как точку М.

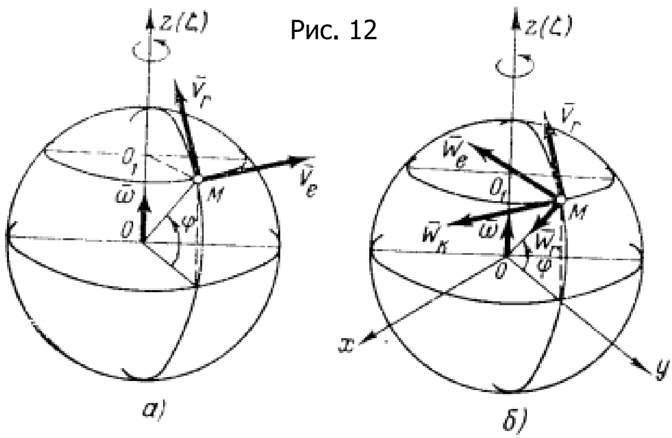
Так как Земля вращается с запада на восток, то вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ Земли будет направлен по оси Земли с юга на север.

Движение точки М будем рассматривать как составное, в котором движение точки по поверхности Земли является относительным движением, а вращательное движение Земли — переносным движением. Поэтому относительная скорость $\vec{v}_r$ точки М равна заданной величине $\vec{u}$, т. е.

$$\vec{v}_r = \vec{u} \qquad v_r = u$$

Переносная скорость $\vec{v}_e$ точки М равна скорости той точки поверхности Земли, с которой в данный момент совпадает точка М, т. е.

Рис. 12



$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} \quad \text{и} \quad v_e = \omega \cdot O_1M = R\omega cos\varphi$$

где O_1M — радиус параллели.

Для определения абсолютной скорости $\vec{v}_a$ точки построим векторы $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ (рис. 12, а) и сложим их геометрически. Тогда

$$\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$$

Следовательно, модуль абсолютной скорости точки М может быть определен из следующего равенства:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{u^2 + \omega^2 R^2 cos^2\varphi}$$

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ точки М направлено к центру Земли, так как точка М движется по меридиану равномерно; оно по модулю равно

$$a_r = \frac{v_r^2}{R} = \frac{u^2}{R}$$

Переносное ускорение $\vec{a}_e$ точки М направлено по радиусу параллели к оси вращения Земли; оно может быть определено по формуле

$$a_e = \omega^2 \cdot O_1 M = R\omega^2 cos\varphi$$

Направление поворотного ускорения $\vec{a}_k$ точки М находим по правилу векторного произведения. Так как

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2\vec{\omega} \times \vec{u}$$

то поворотное ускорение $\vec{a}_k$ перпендикулярно к плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$. Следовательно, вектор $\vec{a}_k$ направлен по касательной к параллели на запад.

Модуль поворотного ускорения легко вычислить, имея в виду, что угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$ равен ф. Следовательно,

$$a_k = 2\omega u sin\varphi$$

Для определения абсолютного ускорения $\vec{a}_a$ точки М построим пучок векторов $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$ и $\vec{a}_k$ (рис. 12, б) и сложим их геометрически. Тогда

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$$

Проектируя это векторное равенство на оси Ox, Oy и Oz, направленные как указано на рис. 12, б, получим проекции вектора $\vec{a}_a$ на эти оси:

$$a_{ax} = a_{ex} + a_{rx} + a_{kx} = 0 + 0 + 2v_r \omega sin\varphi = 2u\omega sin\varphi$$

$$a_{ay} = a_{ey} + a_{ry} + a_{ky} = -R\omega^2 cos\varphi - \frac{v_r^2}{R} cos\varphi + 0 = -(R\omega^2 + \frac{u^2}{R})cos\varphi$$

$$a_{az} = a_{ez} + a_{rz} + a_{kz} = 0 - \frac{v_r^2}{R} sin\varphi + 0 = -\frac{u^2}{R} sin\varphi$$

Таким образом, зная a_{ax}, a_{ay} и a_{az}, получим модуль искомого абсолютного ускорения $\vec{a}_a$ точки M

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{\left(4u^2\omega^2 + \frac{u^4}{R^2}\right) sin^2\varphi + \left(R\omega^2 + \frac{u^2}{R}\right)^2 cos^2\varphi}$$