



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Сопротивление материалов»

## **Методические указания**

по выполнению расчетно-графической работы  
по дисциплине «Теория расчета пластин и  
оболочек» для обучающихся по техническим  
направлениям подготовки (специальностям)

# **«Расчет резервуара в форме однополостного гипербоида вращения»**

Авторы

Демченко Д.Б., Маяцкая И.А.,  
Чепурненко А.С., Языев Б.М.

Ростов-на-Дону, 2018

## Аннотация

Расчет резервуара в форме однополостного гиперboloида вращения: методические указания предназначены для проведения практической работы по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек» для обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания включают основные теоретические положения и пример выполнения задания расчетно-графической работы для студентов, изучающих курс «Теория расчета пластин и оболочек».

## Авторы

канд. техн. наук, доцент кафедры  
«Сопротивление материалов»

Демченко Д.Б.;

канд. техн. наук, доцент кафедры  
«Сопротивление материалов»

Маяцкая И.А.;

канд. техн. наук, ст. преп. кафедры  
«Сопротивление материалов»

Чепурненко А.С.;

докт. техн. наук, профессор кафедры  
«Сопротивление материалов» Языев Б.М.





## Оглавление

<b>1. Общие положения.</b> .....	<b>4</b>
<b>2. Безмоментная теория оболочек.</b> .....	<b>7</b>
<b>3. Безмоментная теория оболочек вращения.</b> .....	<b>9</b>
<b>4. Осесимметричная задача оболочек вращения.</b> .....	<b>11</b>
<b>5. Постановка задачи.</b> .....	<b>19</b>
5.1 Расчет резервуара на действие собственного веса. ....	19
5.2 Расчет резервуара на давление жидкости.....	22
<b>6. Выполнение расчетно-графической работы в программе Microsoft Excel</b>	<b>32</b>
<b>7. Расчет в программном комплексе ЛИРА-САПР 2013</b> .....	<b>37</b>
<b>Библиографический список.</b> .....	<b>47</b>

## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.

*Оболочкой* называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с другими размерами тела. Толщина оболочки может быть переменной, или постоянной. Поверхность, равноотстоящая от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется *срединной поверхностью*.

Исследуются только тонкие оболочки, у которых толщина намного меньше габаритных размеров срединной поверхности.

Рассматривается *геометрически линейная* теория оболочек, позволяющая составлять уравнения равновесия не учитывая деформации элемента оболочки. В этом случае они будут линейными, а зависимости между перемещениями и параметрами деформаций – линеаризованными.

Материал оболочек подчиняется закону Гука, т. е. имеет место физическая линейность. Предполагается, что в оболочке перемещения достаточно малы, при этом обеспечивается и геометрическая линейность.

Особенность формы оболочки, состоящая в резком различии их толщины и габаритных размеров, предоставляет возможность упрощения теории путем некоторой схематизации действительной работы конструкции. Эта схематизация формулируется в используемых гипотезах Кирхгофа-Лява. Принятие гипотез намного упрощает расчет по сравнению со строгой постановкой в теории сред, в частности в теории упругости и вместе с тем обеспечивается достаточная точность. В результате упрощения все функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние оболочки, оказываются функциями двух координат точек ее срединной поверхности.

В основе технической теории оболочек лежат две гипотезы:

1. Прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности оболочки до деформации, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности деформированной оболочки и не изменяет своей длины (гипотеза Кирхгофа – Лява – гипотеза прямых нормалей).

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы по сравнению с другими напряжениями (принимаются равными нулю).

Первую гипотезу называют так же *гипотезой прямой нормали*, а вторую гипотезу – гипотезой о *не надавливании слоев оболочки*.

Гипотеза прямой нормали дает возможность выразить деформации в любой точке оболочки через деформации ее срединной поверхности, которые зависят от двух координат  $\alpha$  и  $\beta$ , и таким образом свести решение трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Деформации же любой поверхности, находящейся на одинаковых расстояниях от срединной поверхности описываются посредством *параметров деформации* срединной поверхности.

Оболочки, в которых применимы упомянутые гипотезы, называются тонкими, граница между тонкими и толстыми оболочками условна и обычно определяется отноше-

нием  $(h/R)_{\max} \approx 1/20$ , где  $h$  – толщина оболочки,  $R$  – радиус кривизны срединной поверхности. Подавляющее большинство оболочек имеют параметр  $(h/R)$  намного меньший, чем  $1/20$ . В теории тонких оболочек всеми членами, имеющими порядок  $(h/R)$ , пренебрегают по сравнению с единицей (такую же погрешность дает использование гипотез Кирхгофа, положенных в основу технической теории оболочек).

Два пересекающихся семейства линий на поверхности образуют сеть линий. Среди бесконечного множества различных сетей, в исследуемой оболочке используется сеть линий главных кривизн, образующих ортогональную сеть. В этом случае уравнения получаются наиболее простыми.

В касательной плоскости к поверхности существует два ортогональных направления, проходящих через точку касания, при которых компонент  $t_{xy}$  тензора кривизн

$$T_k = \begin{vmatrix} k_x & t_{xy} \\ t_{xy} & k_y \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

обращается в нуль. Элемент  $t_{xy}$  характеризует *кручение поверхности*.

Нормальные сечения поверхности, соответствующие этим ортогональным направлениям, называются *главными направлениями*, а кривизны этих сечений

в точке касания называются *главными кривизнами*. При этом одна из главных кривизн в точке касания является **максимальной**, а другая **минимальной** из множества кривизн всех нормальных сечений.

Вместо главных кривизн удобно пользоваться инвариантами кривизн. Первый инвариант с точностью до множителя  $1/2$  представляет собой, так называемую, *среднюю кривизну* поверхности в данной точке:

$$K_{cp} = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (1.2)$$

Второй инвариант представляет собой, так называемую, *гауссову* (или полную) *кривизну* поверхности в данной точке:

$$K = k_1 \cdot k_2. \quad (1.3)$$

Если во всех точках поверхности  $K > 0$ , то ее в целом можно назвать *поверхностью положительной гауссовой кривизны* (сфера, эллипсоид).

Если во всех точках поверхности  $K < 0$  (), то имеем *поверхность отрицательной гауссовой кривизны* (гиперболический параболоид).

Если во всех точках поверхности  $K = 0$ , то она называется *поверхностью нулевой гауссовой кривизны* (цилиндр, конус).

Абсолютное значение гауссовой кривизны характеризует *степень искривленности поверхности* в рассматриваемой точке.

В зависимости от формы срединной поверхности, закона изменения толщин, характера закрепления и вида внешнего воздействия оболочка может находиться в трех различных характерных напряженных состояниях.

В одном из них совместно возникают, так называемые, *мембранные (цепные) напряжения*, связанные с усилиями  $N_1$ ,  $N_2$  и  $S$ , и *изгибные напряжения*, связанные с моментами  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H$  и сопутствующие им силами  $Q_1$  и  $Q_2$ . При этом оба типа напряжений получаются величинами одного порядка. Такое напряженное состояние называют *смешанным*.

Второй тип напряженного состояния характерен тем, что напряжения от усилий намного превышают напряжения от моментов. Такое напряженное состояние называют *безмоментным*. В очень редких случаях напряженное состояние может быть *строго безмоментным*.

Третий тип напряженного состояния характеризуется тем, что напряжения от усилий намного меньше напряжений от моментов. Такое напряженное состояние называют *моментным* или *изгибным*.

## 2. БЕЗМОМЕНТАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК.

Безмоментная теория оболочек представляет собой упрощенный вариант общей теории оболочек, в котором пренебрегается влиянием изгибающих и крутящих моментов, а также поперечных сил на напряженно-деформированное состояние оболочки. Напряженное состояние, характеризуемое лишь нормальными и сдвигающими силами, действующими в плоскостях, касательных к срединной поверхности оболочки, называется *безмоментным напряженным состоянием*. (рис. 2.1).

Необходимость и достаточность условий существования безмоментного напряженного состояния формулируются следующим образом:

1. Оболочка должна иметь плавно изменяющуюся непрерывную поверхность.
2. Нагрузка на оболочку должна быть плавной и непрерывной.

3. Условия закрепления краев оболочки должны быть таковы, чтобы края имели возможность свободно перемещаться в направлении нормали к поверхности. Неподвижное закрепление краев неизбежно вызывает изгибание оболочки под нагрузкой, т. е. нарушение безмоментного напряженного состояния. Граничные закрепления должны обеспечивать жесткость (неизменяемость) формы оболочки. Особое внимание уделяется закреплению краев оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны (например, однополостные гиперboloиды вращения). Жесткость формы гиперboloида обеспечивается закреплением одного из его краев опорными стержнями в двух тангенциальных направлениях (рис. 2.2).

4. Силы, приложенные к краям оболочки, должны лежать в плоскости, касательной к ее поверхности.

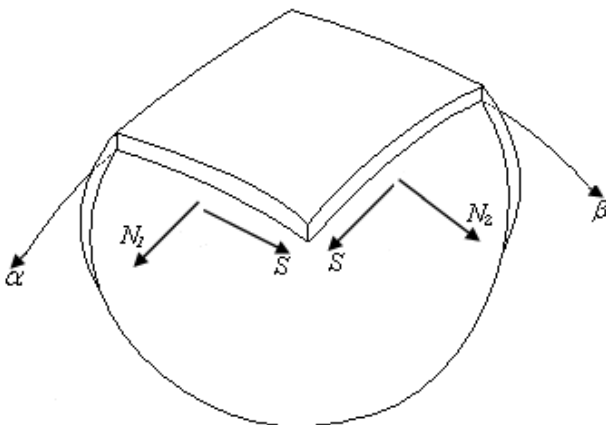


Рис. 2.1

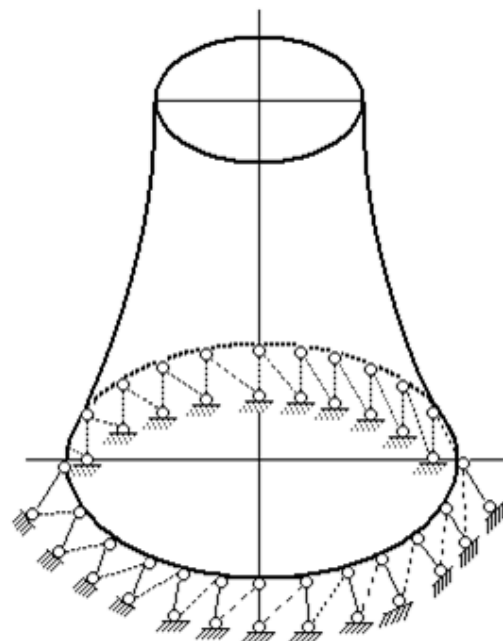


Рис. 2.2

При выполнении сформулированных четырех условий существования безмоментного напряженного состояния расчет оболочек можно вести, полагая, что моменты и поперечные силы равны нулю:

$$M_1 = M_2 = H = Q_1 = Q_2 = 0. \quad (2.1)$$

Уравнения равновесия принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (A^2 S) + Q_1 k_1 AB + AB p_1 = 0 \quad ; \quad (2.2,а)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (AN_2) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B^2 S) + Q_2 k_2 AB + AB p_2 = 0 \quad ; \quad (2.2,б)$$

$$k_1 N_1 + k_2 N_2 - p_3 = 0. \rightarrow \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - p_3 = 0 \quad . \quad (2.2,в)$$

При строгом решении проблемы к этим уравнениям необходимо присоединить три уравнения совместности деформаций, выраженные через усилия. В целях упрощения: не принимают во внимание условия совместности деформаций. В этом случае число уравнений равновесия равно числу искомых функций. Если рассматривать случай, в котором относительно опорных реакций безмоментная оболочка статически определима, то усилия  $N_1$ ,  $N_2$  и  $S$  могут быть найдены из системы уравнений равновесия (2.2).



### 3. БЕЗМОМЕНТАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ.

На рис. 3.1 показан элемент произвольной оболочки вращения, заданной в сферической системе координат  $(\varphi, \theta)$ , т. е. в качестве криволинейных координат приняты  $\alpha = \varphi$  и  $\beta = \theta$ .

Из рис. 3.1, а, б можно установить, что

$$r = R_2 \sin \varphi; \quad ab = ds_2 = rd\theta; \quad ad = ds_1 = R_1 d\varphi. \quad (3.1)$$

Коэффициенты Ламе (коэффициенты первой квадратичной формы) равны:

$$A = R_1, \quad B = r, \quad (3.2)$$

где  $R_1$  – радиус кривизны меридиана;  $R_2$  – длина нормали к поверхности оболочки (радиус кривизны широты);  $r$  – радиус параллельного круга. Для произвольной оболочки вращения  $r = f(\varphi)$ .

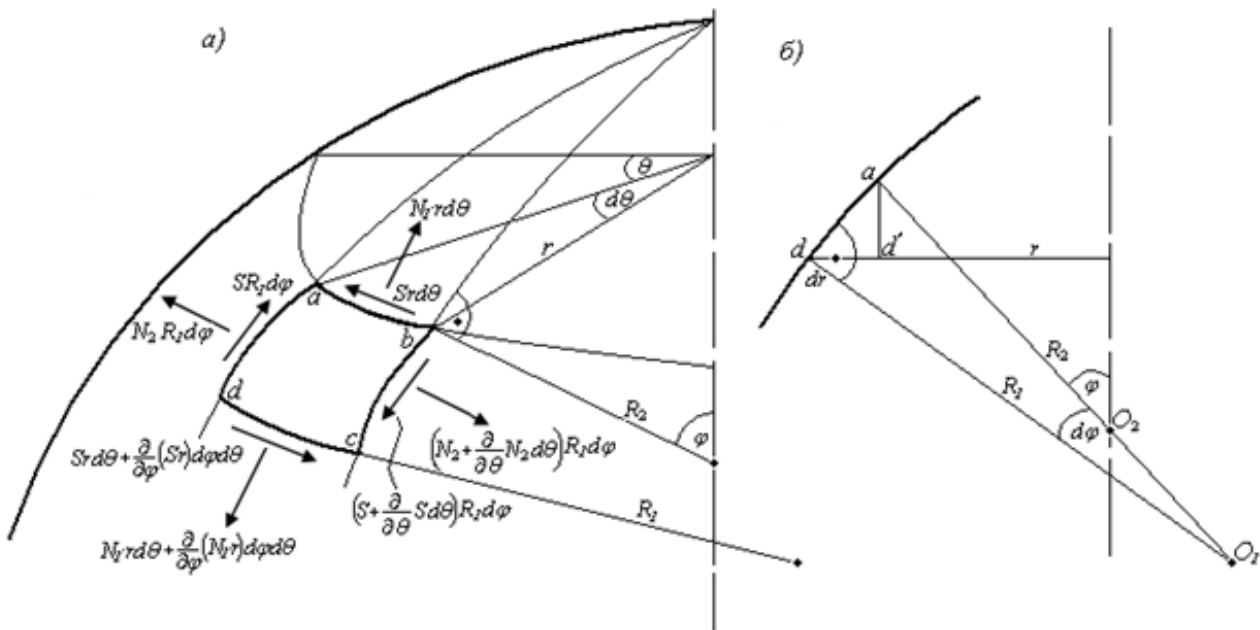


Рис. 3.1

Коэффициенты Ламе  $A$  и  $B$  являются функциями координат  $\varphi$  и не зависят от  $\theta$  ввиду симметрии формы оболочки.

Уравнения равновесия (2.2) в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(rN_1)}{\partial\varphi} - N_2 \frac{\partial r}{\partial\varphi} + R_1 \frac{\partial S}{\partial\theta} + R_1 r p_1 = 0; \quad R_1 \frac{\partial N_2}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2 S) + R_1 r p_2 = 0; \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_3. \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Из рис. 3.1,б можно определить, что

$$d'd = \frac{dr}{d\varphi} d\varphi \approx ad \cdot \cos\varphi = R_1 d\varphi \cos\varphi. \rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = R_1 \cos\varphi, \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получим уравнения равновесия в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad R_1 \frac{\partial S}{\partial\theta} + \frac{\partial(rN_1)}{\partial\varphi} - N_2 R_1 \cos\varphi + r R_1 p_1 = 0; \\ б) \quad R_1 \frac{\partial N_2}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2 S) + r R_1 p_2 = 0; \\ в) \quad \frac{1}{R_1} N_1 + \frac{1}{R_2} N_2 = p_3. \end{aligned} \right\} (3.5)$$

Усилия  $N_1$ ,  $N_2$  и  $S$  в общем случае являются функциями обеих независимых переменных  $\varphi$  и  $\theta$ .

#### 4. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ.

Рассмотрим оболочку вращения на которую действует нагрузка, симметричная относительно оси  $Oz$ .

К такому виду нагрузки относятся собственный вес, равномерная снеговая нагрузка, давление жидкости в резервуаре и т. п.

В этом случае система уравнений (3.5) значительно упрощается. Все производные по координате  $\theta$  обращаются в нуль, так как нагрузка, а, следовательно, и компоненты внутренних усилий не изменяются в круговом направлении.

Предполагаем также, что отсутствует составляющая внешней нагрузки  $p_2$ . Наличие такой компоненты, не зависящей от координаты  $\theta$ , означает, что оболочка скручивается силами  $p_2$ . На практике это обычно не имеет места.

При отсутствии скручивающих сил  $p_2$   $S=0$ .

Таким образом, в случае осесимметричной нагрузки уравнение (3.5,б) тождественно удовлетворяется.

Из уравнения (3.5,а) получим:

$$\frac{d(rN_1)}{d\varphi} - N_2 R_1 \cos \varphi + r R_1 p_1 = 0 \quad (a)$$

Из уравнения (3.5,в) найдем значение  $N_2$

$$N_2 = R_2 \left( p_3 - \frac{N_1}{R_1} \right)$$

и подставив его в выражение (а), получим:

$$\frac{d(rN_1)}{d\varphi} - R_1 \cos \varphi \left( R_2 p_3 - \frac{R_2}{R_1} N_1 \right) + r R_1 p_1 = 0$$

Умножая полученное уравнение на  $\sin \varphi$ , получим:

$$\sin \varphi \frac{d}{d\varphi} (rN_1) - R_1 \cos \varphi \left( R_2 p_3 \sin \varphi - \frac{R_2}{R_1} N_1 \sin \varphi \right) + r R_1 p_1 \sin \varphi = 0 \quad (6)$$

Из (3.1) имеем  $r = R_2 \sin \varphi$ .

Тогда уравнение (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} (rN_1) - R_1 \cos \varphi \left( rp_3 - \frac{r}{R_1} N_1 \right) + rR_1 p_1 \sin \varphi = 0. \rightarrow \\ \rightarrow \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} (rN_1) + rN_1 \cos \varphi + rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (B)$$

По правилу дифференцирования произведения, получим:

$$\frac{d}{d\varphi} (rN_1 \sin \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (rN_1) \sin \varphi + N_1 r \cos \varphi.$$

Отсюда

$$\sin \varphi \frac{d}{d\varphi} (rN_1) = \frac{d}{d\varphi} (rN_1 \sin \varphi) - rN_1 \cos \varphi,$$

что позволяет записать уравнение (B) в виде:

$$\frac{d}{d\varphi} (rN_1 \sin \varphi) + rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) = 0. \quad (Г)$$

Интегрируя в пределах от 0 до  $\varphi$ , получим:

$$rN_1 \sin \varphi = - \int_0^{\varphi} rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + C. \quad (4.1)$$

Из выражения (4.1) после интегрирования определяем  $N_1$ . Произвольную постоянную  $C$  находим из граничных условий. После нахождения  $N_1$  можно найти  $N_2$  из уравнения (3.5,в).

Интеграл (4.1) получает простой физический смысл, если левую и правую части выражения умножить на  $2\pi$ :

$$N_1 \sin \varphi \cdot r(2\pi) = -2\pi \int_0^{\varphi} rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + 2\pi C. \quad (4.2)$$

Из рис. 4.1 видно, что  $N_1 \sin \varphi$  есть вертикальная составляющая меридионального усилия  $N_1$ , действующего на уровне параллельного круга, определяемого углом  $\varphi$ . Поэтому левая часть выражения (4.2) есть равнодействующая всех нормальных усилий  $N_1$  на круге, соответствующем углу  $\varphi$ , так как  $2\pi r$  – длина окружности этого круга.

Рассмотрим правую часть соотношения (4.2). Как видно из *рис. 4.1*,  $2\pi r R_1 d\varphi$  есть площадь элементарного кольца, соответствующего бесконечно малому углу  $d\varphi$ ;  $p_1 \sin \varphi$  и  $p_3 \cos \varphi$  – вертикальные составляющие компонентов нагрузки. Следовательно, подинтегральная функция представляет собой вертикальную составляющую нагрузки, соответствующую некоторому элементарному кольцу. Интегрируя по  $\varphi$ , получаем полную вертикальную составляющую всей нагрузки, действующей на оболочку выше параллели, для которой определяется усилие  $N_1$ .

Таким образом, уравнение (4.2) выражает условие равновесия  $\sum z = 0$  части оболочки, ограниченной снизу текущей параллелью

Рассмотрим наиболее общий случай оболочки вращения, имеющей круговой вырез у вершины, определяемый углом  $\varphi_0$  (*рис. 4.1*). Если край этого выреза загружен равномерно распределенной по параллели нагрузкой с интенсивностью  $q$ , то вертикальная результирующая этой нагрузки составит  $2\pi b q$  и уравнение (4.2) примет вид:

$$N_1 \sin \varphi \cdot 2\pi r = -2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi - 2\pi b q \quad (4.3)$$

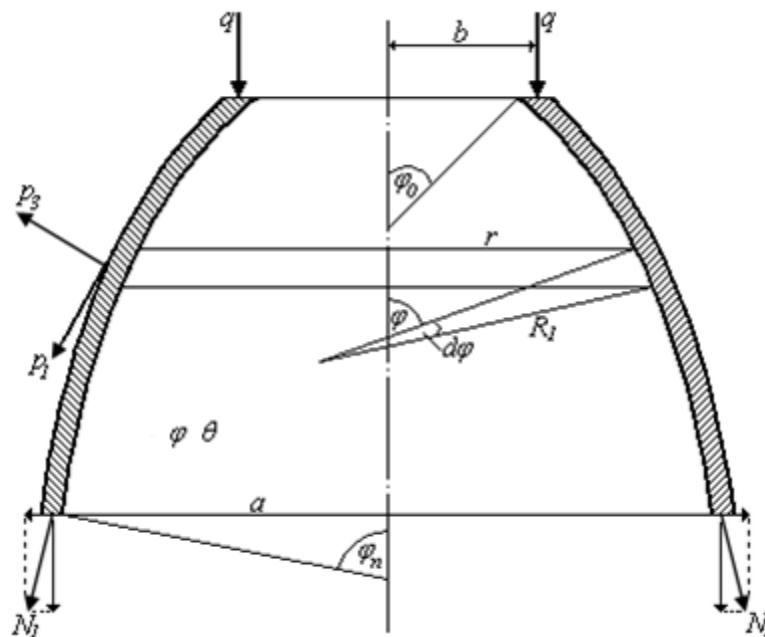


Рис. 4.1

Если оболочка не имеет выреза, интегрирование ведется от 0 до  $\varphi$  и  $q=0$ .

Следовательно, при отсутствии выреза  $C=0$ ; а при наличии –  $C=bp_3$ , где  $b$  – радиус контурной параллели у выреза оболочки.

Определив  $N_1$  из уравнения (4.3), вычисляем значение  $N_2$  по формуле, полученной из уравнения (3.5,в):

$$N_2 = R_2 \left( p_3 - \frac{N_1}{R_1} \right) = p_3 R_2 - \frac{R_2}{R_1} N_1 \quad (4.4)$$

В некоторых случаях удобнее задать форму оболочки в цилиндрических координатах  $(z, \theta, r)$ . Рассмотрим срединную поверхность широко применяемых в технике оболочек, образованную вращением произвольной кривой относительно некоторой оси  $Oz$  (рис. 4.2). Главными линиями кривизны являются меридианы и параллели, образующие так называемую географическую сетку. Эти линии принимаем за криволинейные координаты.

Выражение для первой квадратичной формы принимает вид:

$$(ds)^2 = A^2(d\alpha)^2 + B^2(d\beta)^2$$

Примем за основные параметры: -  $\alpha = z$  – расстояние по вертикали, отсчитываемое от точки  $O$ ; -  $\beta = \theta$  – угол между двумя вертикальными плоскостями, проходящими через ось  $Oz$ : начальной –  $OCD_0$  и плоскостью  $OCD$ . Каждому значению  $z = const$  будет соответствовать некоторая параллель, а углу  $\theta = const$  – меридиан. Их пересечение определяет положение точки  $M$  (рис. 4.2).

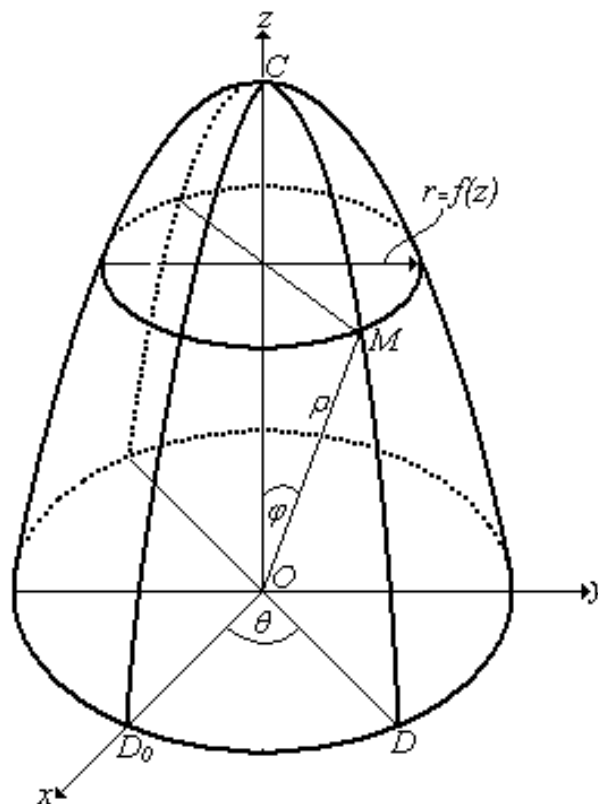


Рис. 4.2

Выбранная система координат  $(z, \theta, r)$  называется цилиндрической. Определим, например, значения коэффициентов первой квадратичной формы для произвольной оболочки вращения в цилиндрической системе координат.

Оболочка образована вращением некоторой кривой, положение которой в плоскости может быть определено радиусом вращения в функции от координаты  $z$ . Рассмотрим элемент поверхности оболочки, выделенный двумя параллельными плоскостями, отстоящими одна от другой на бесконечно малое расстояние  $dz$ , и двумя меридиональными плоскостями, угол между которыми примем равным  $d\theta$  (рис. 4.3).

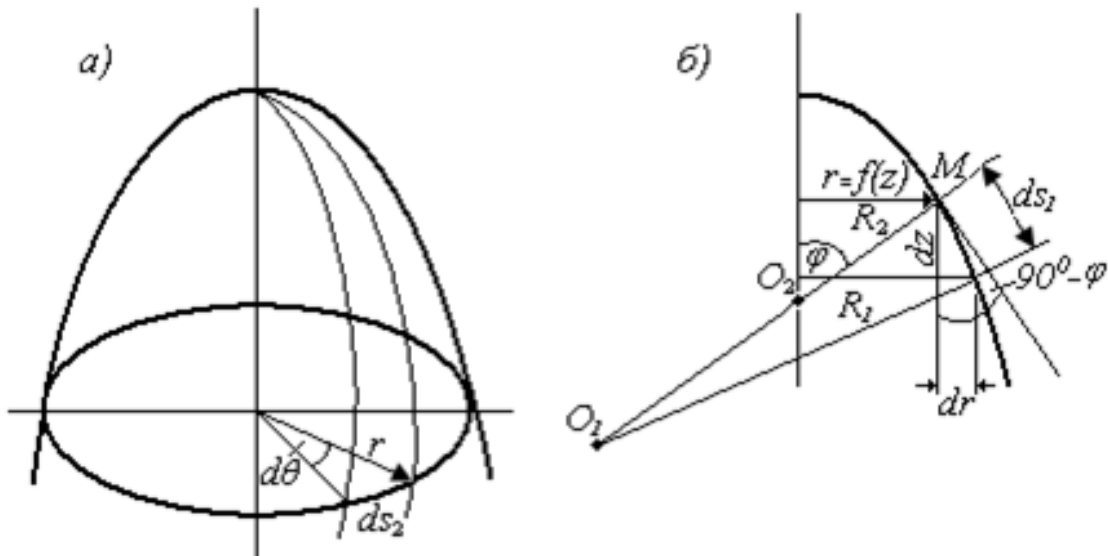


Рис. 4.3

Из рис. 4.3,а:

$$ds_2 = rd\theta$$

Из рис. 4.3,б:

$$ds_1 = dz \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{dz}{\sin \varphi} = dz \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \varphi}} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi};$$

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varphi\right]}{\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varphi\right]} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi. \rightarrow \frac{dr}{dz} = \operatorname{ctg} \varphi$$

Тогда  $ds_1 = dz \sqrt{1 + r'^2}$

При этом, угол  $\varphi$  определяет положение нормали в каждой точке поверхности.

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \varphi}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \varphi}}} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}} = \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 + r'^2}}.$$
(4.5)

Бесконечно малый отрезок  $ds$  по поверхности в теории поверхностей называется *линейным элементом*. Квадрат линейного элемента поверхности с учетом линеаризации, равен

$$(ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 = [1 + r'^2] dz^2 + r^2 d\theta^2.$$

Выражение для первой квадратичной формы имеет вид:

$$(ds)^2 = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2.$$

Так как в цилиндрической системе координат  $\alpha = z$  и  $\beta = \theta$ , то, следовательно, значения коэффициентов первой квадратичной формы оказываются равными:

$$A^2 = 1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2; \quad B^2 = r^2$$

Отсюда получаем значения коэффициентов Ламе для оболочки вращения в цилиндрической системе координат:

$$A = \sqrt{1 + r'^2}; \quad B = r.$$
(4.6)

В цилиндрической системе координат оболочку вращения можно записать в следующем виде:

$$x = r(z) \cos \theta, \quad y = r(z) \sin \theta, \quad z = z.$$

На рис. 4.3,б введены обозначения:  $O_1M = R_1$  – радиус кривизны меридиана оболочки и  $O_2M = R_2$  – радиус кривизны оболочки вдоль параллельного круга.

Коэффициенты первой квадратичной формы могут быть выражены также и через главные радиусы кривизны –  $R_1$  и  $R_2$ . Непосредственно из рис. 4.3,б получим:



$$A^2 = R_1^2, \quad B^2 = R_2^2 \sin^2 \varphi = r^2.$$

Отсюда  $A = R_1, \quad B = r.$  (4.7)

Рассмотрим уравнение (г):

$$\frac{d}{d\varphi} (rN_1 \sin \varphi) + rR_1(p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) = 0.$$

Подставив значения тригонометрических функций из (4.5), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left( r \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} N_1 \right) + rR_1 \left( \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} p_1 - p_3 \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} \right) &= 0. \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d}{d\varphi} \left( r \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} N_1 \right) + \frac{r}{R_1 \sqrt{1+r'^2}} (p_1 - r'p_3) &= 0. \end{aligned}$$

Кривизну меридиана можно записать (кривизна плоской кривой) в виде:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad r'' = \frac{d^2 r}{dz^2}. \quad (д)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left( r \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} N_1 \right) + \frac{rr''}{(1+r'^2)^2} (p_1 - r'p_3) &= 0. \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d}{d\varphi} \left( r \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} N_1 \right) + r(p_1 - r'p_3) &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя в пределах от  $z_0$  до  $z$ , получим:

$$N_1 = -\frac{\sqrt{1+r'^2}}{r} \left[ \int_{z_0}^z r(p_1 - r'p_3) dz + C \right], \quad (4.8)$$

где  $r=r(z)$  – уравнение кривой, вращение которой вокруг оси  $Oz$  образует поверхность

оболочки.  $r' = \frac{dr}{dz}$ ;  $z_0$  – координата, соответствующая краю оболочки. Усилие  $N_2$  находим из уравнения (3. 5,в)

$$N_2 = R_2 \left( p_3 - \frac{N_1}{R_1} \right) = -\frac{R_2}{R_1} N_1 + R_2 p_3$$

Подставляя значения  $R_1$  и  $R_2$ :

$$R_1 = \frac{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r''}, \quad R_2 = \frac{r}{\sin \varphi} = r\sqrt{1+r'^2}$$

получим:

$$N_2 = -\frac{rr''}{1+r'^2} N_1 + r\sqrt{1+r'^2} p_3 \quad (4.9)$$

## 5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается железобетонный тонкостенный резервуар, срединная поверхность которого представляет собой однополостный гиперболоид вращения, на действие собственного веса и давления жидкости.

Требуется: определить меридиональные и кольцевые усилия в оболочке; определить меридиональные и кольцевые напряжения; построить эпюры усилий и напряжений.

### 5.1 Расчет резервуара на действие собственного веса.

Тонкостенную оболочку в форме однополостного гиперболоида вращения часто применяют при строительстве градирен и резервуаров.

Уравнение меридиана этой поверхности имеет вид:

$$r = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2}, \quad (5.1)$$

где  $a$  и  $b$  – параметры гиперболы.

На *рис. 5.1* изображен резервуар, срединная поверхность которого – однополостный гиперболоид вращения. При задании формы меридиана уравнением  $r = r(z)$  для расчетов удобнее пользоваться формулами (4.8) и (4.9). Подставляя нагрузку (собственный вес) в общем виде (*рис. 4.1*).

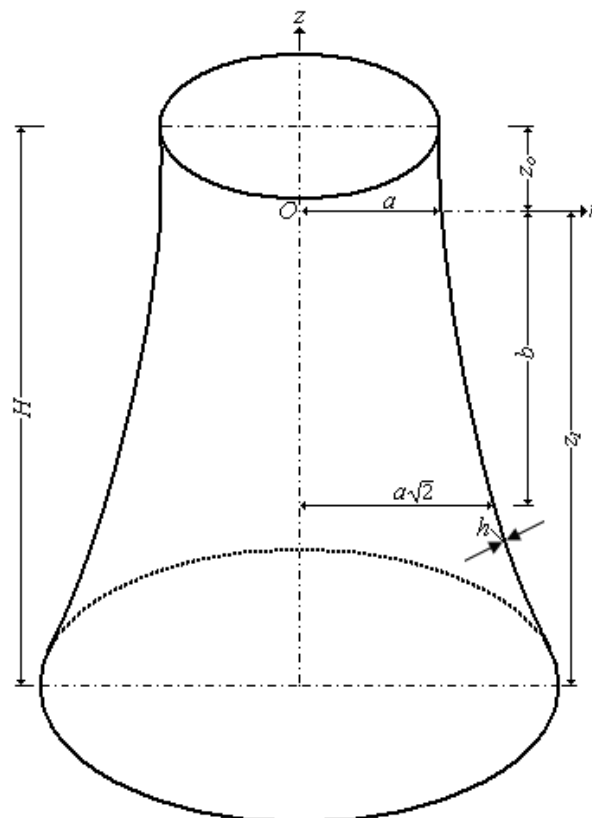


Рис. 5.1

$$p_1 = q \sin \varphi = q \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}}, \quad p_3 = -q \cos \varphi = -q \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} \quad (5.2)$$

[значения  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  в цилиндрической системе координат взяты из формулы (4.5)] в уравнения (4.8) и (4.9), получим:

$$N_1 = -\frac{\sqrt{1+r'^2}}{r} \int_{z_0}^z r q \left( \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} \right) dz + C$$

Здесь  $z_0$  координата верхнего края резервуара.  
После сокращений

$$N_1 = -\frac{\sqrt{1+r'^2}}{r} \left[ \int_{z_0}^z q r \sqrt{1+r'^2} dz \right] + C \quad (5.3)$$

Формулой (5.3) можно пользоваться для вычисления усилия  $N_1$  от собственного веса в произвольной оболочке вращения, меридиан которой задан в форме  $r = r(z)$ . Определим из (5.1)

$$r' = \frac{a}{b} \frac{1}{2} (b^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2z = \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}}, \quad r'^2 = \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}$$

$$r'' = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{b^2 + z^2} - 0,5z(b^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2z}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow r'' = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 + z^2)^3}} \quad (5.4)$$

Подставим в уравнение (5.3) выражения (5.1 и 5.4).

$$N_1 = -\frac{\sqrt{1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}}}{\frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2}} \left[ \int_{z_0}^z q \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}} dz + C \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{\frac{b^4 + (a^2 + b^2)z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}}}{\frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2}} \left[ \int_{z_0}^z q \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 + b^2)z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}} dz + C \right],$$

или

$$N_1 = -\frac{a^2 + b^2}{b^2(b^2 + z^2)} \sqrt{\frac{b^4}{a^2 + b^2} + z^2} \left[ \int_{z_0}^z q \sqrt{\frac{b^4}{a^2 + b^2} + z^2} dz + C \right]$$

Введем обозначение

$$e^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2}. \quad (*)$$

Получим:

$$N_1 = -\frac{a^2 + b^2}{b^2(b^2 + z^2)} \sqrt{e^2 + z^2} \left[ \int_{z_0}^z q \sqrt{e^2 + z^2} dz + C \right]. \quad (5.5)$$

Из таблицы интегралов имеем

$$\int \sqrt{e^2 + z^2} dz = \frac{1}{2} \left[ z \sqrt{e^2 + z^2} + e^2 \ln(z + \sqrt{e^2 + z^2}) \right].$$

Выражение (5.5) в этом случае принимает вид:

$$N_1 = \frac{a^2 + b^2}{b^2(b^2 + z^2)} \sqrt{e^2 + z^2} \left\{ -\frac{q}{2} \left[ z \sqrt{e^2 + z^2} + e^2 \ln(z + \sqrt{e^2 + z^2}) \right] \Big|_{z_0}^z + C \right\}. \quad (5.6)$$

Произвольная постоянная  $C$  определяется из условия на верхнем контуре. Предположим, что на контуре при  $z=z_0$   $N_1=p$ . Из (5.6) получаем

$$C = \frac{b^2(b^2 + z_0^2)}{(a^2 + b^2)\sqrt{e^2 + z_0^2}} p. \quad (5.7)$$

Окончательное выражение для  $N_1(z)$  получим, подставляя равенство (5.7.) в выражение (5.6).

$$N_1 = \frac{a^2 + b^2}{b^2(b^2 + z^2)} \sqrt{e^2 + z^2} \times \left\{ -\frac{q}{2} \left[ z \sqrt{e^2 + z^2} + e^2 \ln(z + \sqrt{e^2 + z^2}) \right] \Big|_{z_0}^z + \frac{b^2(b^2 + z_0^2)}{(a^2 + b^2)\sqrt{e^2 + z_0^2}} p \right\}. \quad (5.8)$$

Получим выражение для кольцевого усилия  $N_2$ , подставляя в (4.9) значения функции  $r = r(z)$  и ее производные из (5.4):

$$N_2 = -\frac{\frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \frac{ab}{\sqrt{(b^2 + z^2)^3}}}{1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}} N_1(z) + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}} p_3$$

Подставляя значение  $p_3$  из (5.2), получим:

$$N_2 = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)(e^2 + z^2)} N_1(z) + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}} \cdot (-q) \frac{\frac{az}{b \sqrt{b^2 + z^2}}}{\sqrt{1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}}}$$

После сокращений

$$N_2 = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)(e^2 + z^2)} N_1(z) - \frac{a^2}{b^2} qz \quad (5.9)$$

В случае отсутствия нагрузки на контуре  $z=z_0$   $N_1=0$ . Из (5.6) получаем  $C=0$ . Выражение (5.8) для усилия  $N_1$  принимает вид:

$$N_1 = \frac{a^2 + b^2}{b^2 (b^2 + z^2)} \sqrt{e^2 + z^2} \times \left\{ -\frac{q}{2} \left[ z \sqrt{e^2 + z^2} + e^2 \ln \left( z + \sqrt{e^2 + z^2} \right) \right] \Big|_{z_0}^z \right\} \quad (5.10)$$

## 5.2 Расчет резервуара на давление жидкости.

Для случая наполнения резервуара жидкостью необходимо учитывать, что если на какую – либо поверхность действует давление жидкости, то вертикальные составляющие сил давления равны весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью.

Рассмотрим резервуар, полностью заполненный жидкостью (рис. 5,2)

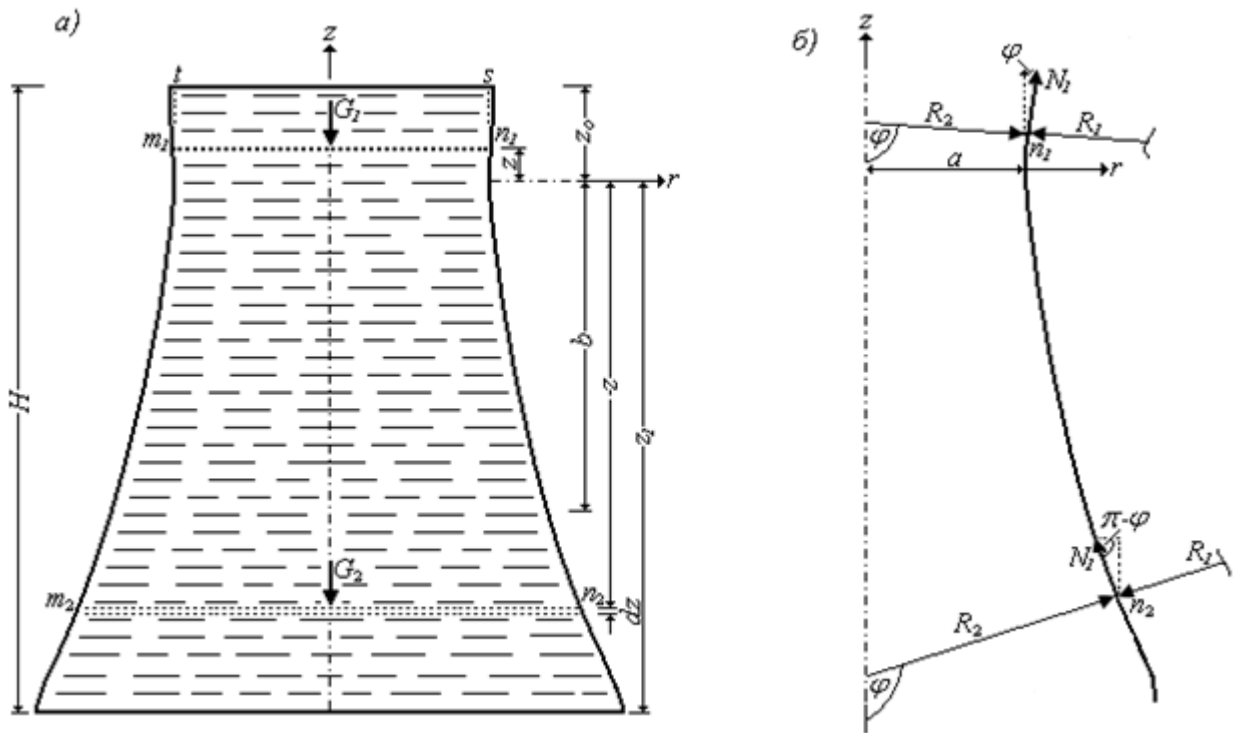


Рис. 5.2

Определим радиусы кривизны нормальных сечений. Кривизну меридиана можно записать (кривизна плоской кривой) в виде:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad r'' = \frac{d^2 r}{dz^2}$$

Из (5.1): определим производные

$$r' = \frac{a}{b} \frac{1}{2} (b^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2z = \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}}, \quad r'^2 = \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)}$$

$$r'' = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{b^2 + z^2} - z \frac{1}{2} (b^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2z}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow r'' = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 + z^2)^3}}$$

Подставляя в уравнение для радиуса кривизны, получим

$$R_1 = -\frac{\sqrt{[b^4 + (a^2 + b^2)z^2]^3}}{ab^4} = -\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^3} \cdot \sqrt{(e^2 + z^2)^3}}{ab^4}, \quad (5.11)$$

где 
$$e^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2} . \tag{5.12}$$

Знак «минус» в формуле (5.11) взят потому, что вогнутость гиперболы направлена в обратную сторону от оси вращения.

Из рис 5.2,6 имеем:

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{b^2} ,$$

где, согласно (4.5)

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} = \frac{b\sqrt{b^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}} . \tag{5.13}$$

Подставив в выражение для радиуса кривизны  $R_2$ , получим:

$$R_2 = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{b^2} . \tag{5.14}$$

Рассмотрим верхнюю часть резервуара

$$(0 \leq z \leq z_0) .$$

Проведем нормальное сечение на расстоянии  $z$ .

Вес жидкости, расположенный выше сечения равен  $G_1 = \gamma \cdot V_1$ , где  $V_1$  – объем цилиндра с высотой  $(z_0 - z)$  и радиусом  $r$  может быть определен по формуле

$$V_1 = \pi r^2 (z_0 - z) .$$

Составим уравнение статики  $\sum(z) = 0$ .

$$- 2\pi r N_1 \sin \varphi - \gamma \pi r^2 (z_0 - z) = 0 . \rightarrow N_1 = - \frac{\gamma}{2 \sin \varphi} (z_0 - z) .$$

Подставляя значение  $r$  из (5.1) и  $\sin \varphi$  из (5.13), получим



$$N_1 = -\frac{\gamma a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{2b^2} (z_0 - z) \quad (5.15)$$

Основным уравнением безмоментной теории оболочек является уравнение (2.2,в) – уравнение Лапласа:

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - p_3 = 0. \rightarrow \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_1 \quad (5.16)$$

где  $q_1$  – давление жидкости, определяемое по формуле

$$q_1 = \frac{\gamma V_1}{\pi r^2} = \frac{\gamma \pi r^2 (z_0 - z)}{\pi r^2} = \gamma (z_0 - z)$$

Из уравнения (5.16) найдем

$$N_2 = R_2 \left[ q_1 - \frac{N_1}{R_1} \right] = R_2 \left[ \gamma (z_0 - z) - \frac{N_1}{R_1} \right] \quad (5.17)$$

Рассмотрим нижнюю часть резервуара:  $-z_1 \leq z \leq 0$

Уравнение равновесия (рис. 5.2):

$$-2\pi r N_1 \sin(\pi - \varphi) - (G_{1\max} + G_2) = 0. \rightarrow 2\pi r \sin \varphi = -G_{1\max} - G_2 \quad [\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi]$$

Определим объем жидкости  $V_2$ . Из рис. (5.2) имеем:

$$dV_2 = \pi r^2 dz. \rightarrow V_2 = \pi \int_{-z}^0 r^2 dz = \pi \frac{a^2}{b^2} \int_{-z}^0 (b^2 + z^2) dz = \pi \frac{a^2}{b^2} \left( b^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-z}^0,$$

или 
$$V_2 = \pi a^2 \left( z + \frac{z^3}{3b^2} \right)$$

Вес жидкости: 
$$G_{1\max} = \gamma \pi a^2 z_0$$

Тогда уравнение равновесия принимает вид:

$$2\pi r N_1 \sin \varphi = -\gamma \pi a^2 \left( z_0 + \left| z + \frac{z^3}{3b^2} \right| \right). \rightarrow N_1 = -\frac{\gamma a^2}{2r \sin \varphi} \left( z_0 + \left| z + \frac{z^3}{3b^2} \right| \right)$$

После подстановки значений  $r$  и  $\sin \varphi$ , получим:

$$N_1 = -\frac{\gamma a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{2(b^2 + z^2)} \left( z_0 + \left| z + \frac{z^3}{3b^2} \right| \right). \quad (5.17)$$

Давление жидкости  $q_2$  определим по формуле

$$q_2 = \frac{G_{1\max} + G_2}{\pi r^2} = \frac{\gamma b^2}{b^2 + z^2} \left( z_0 + \left| z + \frac{z^3}{3b^2} \right| \right). \quad (5.18)$$

Определим кольцевое усилие  $N_2$  из уравнения:

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_2. \rightarrow N_2 = R_2 \left( q_2 - \frac{N_1}{R_1} \right)$$

Подставив значения радиусов кривизн и давления жидкости, получим:

$$N_2 = \frac{\gamma a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{b^2 + z^2} \left[ z_0 + \left| z + \frac{z^3}{3b^2} \right| \left[ 1 - \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)(e^2 + z^2)} \right] \right]. \quad (5.19)$$

Пример выполнения расчетно-графической работы для железобетонного резервуара на действие собственного веса и давления жидкости.

Параметры резервуара (рис. 5.1):

$$a = 13\text{м}, \quad b = 28,16\text{м}, \quad H = 53,3\text{м}, \quad z_0 = 7,8\text{м}, \quad H = 0,25\text{м}, \quad z_1 = -45,5\text{м}.$$

$$e^2 = \frac{(28,16)^4}{13^2 + 28,16^2} = 653,8; \quad a^2 + b^2 = 13^2 + (28,16)^2 = 962,15; \quad b^2 = 793,15;$$

$$b^2 + z_0^2 = (28,16)^2 + (-7,8)^2 = 854,99; \quad b^2 + z_1^2 = (28,16)^2 + (45,5)^2 = 2863,40;$$

$$e^2 + z_0^2 = 653,797 + 60,84 = 714,64; \quad e^2 + z_1^2 = 653,8 + 2070,25 = 2724,05;$$

$$\sqrt{e^2 + z_1^2} = 52,19; \quad \sqrt{b^2 + z_1^2} = 53,51; \quad \sqrt{e^2 + z_0^2} = 26,73; \quad e = \sqrt{653,797} = 25,57.$$

### 1. Действие собственного веса

Определение усилий  $N_{1,\rho}$  и  $N_{2,\rho}$

Из (5.10) и (5.9) имеем:

$$N_{1,\rho} = \frac{a^2 + b^2}{b^2(b^2 + z^2)} \sqrt{e^2 + z^2} \times \left\{ -\frac{q}{2} \left| z\sqrt{e^2 + z^2} + e^2 \ln(z + \sqrt{e^2 + z^2}) \right| \Big|_{z_0}^z \right\}$$

$$N_{2,\rho} = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)(e^2 + z^2)} N_1(z) - \frac{a^2}{b^2} qz$$

Здесь  $q = \rho \cdot h$ . ( $\rho = 24 \text{ кН/м}^3$  - объемный вес материала резервуара)

$z = z_0 = 7,8 \text{ м}$ .

$$N_{1,\rho}(7,8) = 0$$

$$N_{2,\rho}(7,8) = -\frac{169}{793,15} 7,8 = -1,66 \text{ кН/м}$$

$z = 0$

$$N_{1,\rho}(0) = \frac{962,154 \cdot 25,569}{793,154 \cdot 793,154} \left( -\frac{6}{2} \right) \times$$

$$\times |0 + 653,80 \ln(0 + 25,57) - 7,8 \cdot 26,73 - 653,80 \ln(7,8 + 26,73)| =$$

$$= -0,117 |653,80(\ln 25,57 - \ln 34,53) - 208,52| =$$

$$= -0,117 |653,80(3,2412 - 3,5418) - 208,52| = -0,117 |-196,53 - 208,52| =$$

$$= -0,117 |-405,05| = 0,117 \cdot 405,05 \approx -47,4 \text{ кН/м}$$

$$N_{2,\rho}(0) = -\frac{169 \cdot 793,15}{(169 + 793,15)653,8} (-47,4) = \frac{134042,35}{962,15 \cdot 653,8} (-47,4) =$$

$$= 0,213 \cdot 47,4 = 10,2 \text{ кН/м}$$

$z = -15 \text{ м}$ .

$$N_{1,\rho}(-15) = \frac{962,15 \cdot \sqrt{653,8 + 225}}{793,15 \cdot (793,15 + 225)} \left( -\frac{6}{2} \right) \times$$

$$\times |-15 \cdot 29,64 + 653,80 \ln(-15 + 29,64) - (7,8) \cdot 26,73 - 653,80 \ln(7,8 + 26,73)| =$$

$$= -0,106 |-444,6 + 653,80(\ln 14,64 - \ln 34,53) - 208,52| =$$

$$= -0,106 |-653,12 + 653,80(2,68 - 3,54)| = -0,106 |-653,12 - 562,27| =$$

$$= -0,106 |-1215| = -0,106 \cdot 1215 = -128,8 \text{ кН/м}$$

$$N_{2,\rho}(-15) = -\frac{169 \cdot 793,15}{962,15 \cdot (654 + 225)} (-128,8) - \frac{169}{793,15} 6(-15) = 0,158 \cdot 128,8 + 19,18 =$$

$$= 20,35 + 19,18 = 39,53 \text{ кН/м}$$

$z = -30 \text{ м}$ .

$$\begin{aligned}
 N_{1,\rho}(-30) &= \frac{962,15 \cdot \sqrt{653,8 + 900}}{793,15 \cdot (793,15 + 900)} \left( -\frac{6}{2} \right) \times \\
 &\times \left| -30 \cdot 39,42 + 653,80 \ln(-30 + 39,42) - (7,8) \cdot 26,73 - 653,80 \ln(7,8 + 26,73) \right| = \\
 &= -0,085 \left| -1182,6 + 653,80(\ln 19,42 - \ln 34,53) - 208,52 \right| = \\
 &= -0,085 \left| -1391,12 + 653,80(2,97 - 3,54) \right| = -0,085 \left| -1391,12 - 372,67 \right| = \\
 &= -0,085 \left| -1763,8 \right| = -149,9 \text{ кН / м.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{2,\rho}(-30) &= -\frac{169 \cdot 793,15}{962,15 \cdot (654 + 900)} (-149,9) - \frac{169}{793,15} 6(-30) = \\
 &= 0,085 \cdot 149,9 + 38,35 = \\
 &= 12,74 + 38,35 = 51,1 \text{ кН / м.}
 \end{aligned}$$

$$z = z_1 = -45,5 \text{ м}$$

$$\begin{aligned}
 N_{1,\rho}(-45,5) &= \frac{962,15 \cdot 52,19}{793,15 \cdot 2863,40} \left( -\frac{6}{2} \right) \times \\
 &\times \left| -45,5 \cdot 52,19 + 653,80 \ln(-45,5 + 52,19) - (7,8) \cdot 26,73 - 653,80 \ln(7,8 + 26,73) \right| = \\
 &= -0,0663 \left| -2374,74 + 653,80(\ln 6,69 - \ln 34,53) - 208,52 \right| = \\
 &= -0,0663 \left| -2583,26 + 653,80(1,90 - 3,54) \right| = -0,0663 \frac{q}{2} \left| -2583,26 - 1074,45 \right| = \\
 &= -0,0663 \left| -3657,71 \right| = -0,0663 \cdot 3657,71 = -242,5 \text{ кН / м.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{2,\rho} &= -\frac{169 \cdot 793,15}{962,15 \cdot 2724,05} (-242,5) - \frac{169}{793,15} 6(-45,5) = 0,051 \cdot 242,5 + 58,17 = \\
 &= 12,37 + 58,17 = 70,54 \text{ кН / м.}
 \end{aligned}$$

Определение наибольших напряжений  $\sigma_{1,\rho} = \sigma_{\rho \text{ мерид.}}$  и  $\sigma_{2,\rho} = \sigma_{\rho \text{ кольц.}}$

Для железобетона объемный вес  $\gamma = 24 \text{ кН / м}^3$ .

$$\sigma_{\rho \text{ мерид. (наиб.)}} = -\frac{N_1}{h} = -\frac{242,5}{0,25} = -970 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = -0,97 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\rho \text{ кольц.}} = \frac{N_{2,\rho}}{h} = \frac{70,54}{0,25} = 282 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \approx 0,28 \text{ МПа.}$$

2. Расчет на давление жидкости.

Верхняя часть резервуара.

$$(0 \leq z \leq z_0).$$

Выражения для усилий:

$$N_1 = -\frac{\gamma a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{2b^2} (z_0 - z); \quad N_2 = R_2 \left[ \gamma (z_0 - z) - \frac{N_1}{R_1} \right]$$

Выражения для радиусов кривизны

$$R_1 = -\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^3} \cdot \sqrt{(e^2 + z^2)^3}}{ab^4}; \quad R_2 = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{b^2}$$

$$z = z_0 = 7,8 \text{ м.}$$

$$N_{1,\gamma} = 0; \quad N_{2,\gamma} = 0$$

$$z = 0$$

$$N_{1,\gamma}(0) = -\frac{\gamma a \sqrt{a^2 + b^2}}{2b^2} \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} z_0 = -\frac{\gamma a}{2} z_0 = -\frac{10 \cdot 13}{2} \cdot 7,8 = -507 \text{ кН/м};$$

Определим радиусы кривизны нормальных сечений

$$R_1(0) = -\frac{654 \cdot 25,57 \cdot 962,15 \cdot 31,02}{13 \cdot 793,15 \cdot 793,15} = -61,03 \text{ м.}$$

$$R_2(0) = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot b^2}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2}} = a = 13 \text{ м.}$$

Тогда

$$N_{2,\gamma}(0) = 13 \left[ 10 \cdot 7,8 - \frac{-507}{-61,03} \right] = 13(78 - 8,31) = 13 \cdot 69,69 = 906 \text{ кН/м}$$

Нижняя часть резервуара.

$$-z_1 \leq z \leq 0$$

Выражения для усилий:

$$N_{1,\gamma} = -\frac{\gamma a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{2(b^2 + z^2)} \left( z_0 + \left| z + \frac{z^3}{3b^2} \right| \right);$$

$$N_{2,\gamma} = \frac{\gamma a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{e^2 + z^2}}{b^2 + z^2} \left[ z_0 + \left| z + \frac{z^3}{3b^2} \right| \right] \left[ 1 - \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)(e^2 + z^2)} \right]$$

$$N_1(-15) = -\frac{10 \cdot 13 \cdot 31,02 \cdot \sqrt{654 + 225}}{2 \cdot (793,15 + 225)} \left[ 7,8 + \left| -15 - \frac{225 \cdot 15}{3 \cdot 793,15} \right| \right] =$$

$$= -58,72 \cdot (22,8 + 1,42) = -58,7 \cdot 24,22 = -2008 \text{кН/м}.$$

$$N_{2,\gamma}(-15) = \frac{10 \cdot 13 \cdot 31,02 \cdot \sqrt{654 + 225}}{793,15 + 225} \left[ 7,8 + \left| -15 + \frac{-15^3}{3 \cdot 793,15} \right| \right] \times$$

$$\left[ 1 - \frac{169 \cdot 793,15}{2 \cdot 962,15 \cdot (654 + 225)} \right] = 117,43(22,8 + 1,42)(1 - 0,079) = 2619 \text{кН / м}.$$

$$N_{1,\gamma}(-30) = -\frac{10 \cdot 13 \cdot 31,02 \cdot \sqrt{654 + 900}}{2 \cdot (793,15 + 900)} \left[ 7,8 + \left| -30 - \frac{27000}{3 \cdot 793,15} \right| \right] =$$

$$= -46,94 \cdot (37,8 + 11,35) = -46,94 \cdot 49,15 = -2307 \text{кН/м}.$$

$$N_{2,\gamma}(-30) = \frac{10 \cdot 13 \cdot 31,02 \cdot \sqrt{654 + 900}}{793,15 + 900} \left[ 7,8 + \left| -30 + \frac{-27000}{3 \cdot 793,15} \right| \right] \times$$

$$\left[ 1 - \frac{169 \cdot 793,15}{2 \cdot 962,15 \cdot (654 + 900)} \right] = 96,16(37,8 + 11,35)(1 - 0,045) = 4513,6 \text{кН / м}.$$

$$N_{1,\gamma}(-45,5) = -\frac{10 \cdot 13 \cdot 31,02 \cdot 52,19}{2 \cdot 2863,4} \left[ 7,8 + \left| 45,5 + \frac{2070,25 \cdot 45,5}{3 \cdot 793,15} \right| \right] = -3402 \text{кН/м}$$

$$N_{2,\gamma}(-45,5) = \frac{10169 \cdot 31,02 \cdot 52,19}{2863,4} \left[ 7,8 + \left| -45,5 + \frac{-45,5^3}{3 \cdot 937,15} \right| \right] \left[ 1 - \frac{169 \cdot 793,15}{2 \cdot 962,15 \cdot 2724,05} \right] =$$

$$= 73,50(53,3 + 39,6)(1 - 0,026) = 73,50 \cdot 92,9 \cdot 0,974 = 6651 \text{кН / м}.$$

Эпюры усилий показаны на *рис. 5.3*.

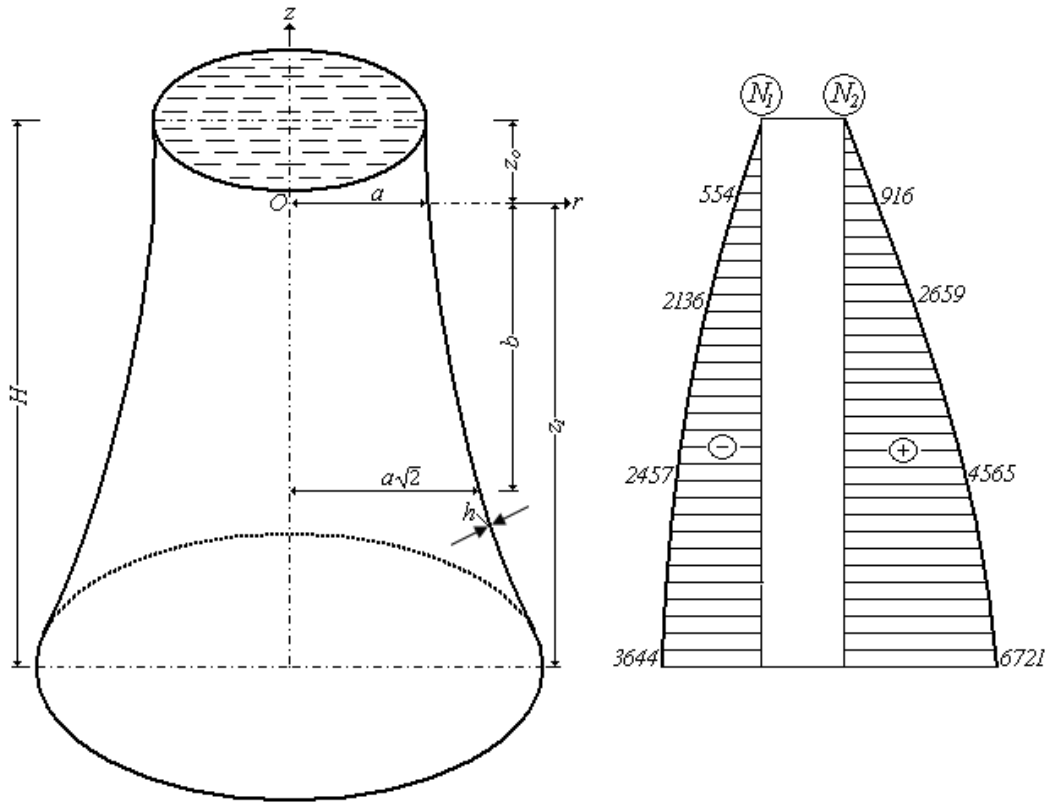


Рис. 5.3

Определение наибольших напряжений от действия собственного веса и давления жидкости.

$$\sigma_{1\text{наиб.}} = \frac{(N_{1,\rho} + N_{1,\gamma})}{h} = \frac{-(242,5 + 3402)}{0,25} = -\frac{3644,5}{0,25} = -14578 \text{кН/м}^2 \approx -17,6 \text{МПа} ;$$

$$\sigma_{2\text{наиб}} = \frac{N_{2,\rho} + N_{2,\gamma}}{h} = \frac{70,5 + 6651}{0,25} = \frac{6721,5}{0,25} = 26886 \text{кН/м}^2 \approx 26,9 \text{МПа}$$

## 6. ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ В ПРОГРАММЕ MICROSOFT EXCEL

Рассмотрим выполнение расчетно-графической работы в программе Microsoft Excel на примере железобетонного резервуара.

Параметры резервуара (рис. 5.1):

$$a = 13\text{м}, \quad b = 28,16\text{м}, \quad H = 53,3\text{м}, \quad z_0 = -7,8\text{м}, \quad h = 0,25\text{м}, \quad z_1 = 45,5\text{м}.$$

Удельный вес материала  $\rho = 24 \text{ кН} / \text{м}^3$ , удельный вес жидкости  $\gamma = 10 \text{ кН} / \text{м}^3$ .

1. Подготовить ячейки с исходными данными.

	A	B	C
1	a=	13	
2	b=	28.16	
3	H=	53.3	
4	z0	-7.8	
5	z1	45.5	
6	h=	0.25	
7	$\rho$ =	24	
8	$\gamma$ =	10	

2. Определить нагрузку от собственного веса  $q = \rho h$ :

	A	B
1	a=	13
2	b=	28.16
3	H=	53.3
4	z0	-7.8
5	z1	45.5
6	h=	0.25
7	$\rho$ =	24
8	$\gamma$ =	10
9	q=	=B7*B6

3. Определить величину  $e$  по формуле (5.12):



	A	B	C
1	a=	13	
2	b=	28.16	
3	H=	53.3	
4	z0	-7.8	
5	z1	45.5	
6	h=	0.25	
7	ρ=	24	
8	γ=	10	
9	q=	6	
10	e=	=B2^2/(B1^2+B2^2)^0.5	

4. Задаться определенным количеством точек  $n$  для построения графиков. В нашем случае  $n = 11$ . Определить шаг  $\Delta z$  по формуле  $\Delta z = (z_1 - z_0) / (n - 1)$

	A	B	C	D	E	F
1	a=	13		n=	11	
2	b=	28.16		$\Delta z$ =	=(B5-B4)/(E1-1)	
3	H=	53.3				
4	z0	-7.8				
5	z1	45.5				
6	h=	0.25				
7	ρ=	24				
8	γ=	10				
9	q=	6				
10	e=	25.56707				

5. Ввести значения от  $z_0$  до  $z_1$  с шагом  $\Delta z$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a=	13		n=	11							
2	b=	28.16		$\Delta z$ =	5.33							
3	H=	53.3										
4	z0	-7.8										
5	z1	45.5										
6	h=	0.25										
7	ρ=	24										
8	γ=	10										
9	q=	6										
10	e=	25.56707										
11												
12	z	-7.8	-2.47	2.86	8.19	13.52	18.85	24.18	29.51	34.84	40.17	45.5

6. Для каждого значения  $z$  определить меридиональные и кольцевые продольные силы от действия собственного веса и гидростатического давления по формулам (5.10), (5.9), (5.16), (5.17).

Расчет резервуара в форме однополостного гиперboloида вращения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	a=	13		n=	11						
2	b=	28.16		Δz=	5.33						
3	H=	53.3									
4	z0	-7.8									
5	z1	45.5									
6	h=	0.25									
7	ρ=	24									
8	γ=	10									
9	q=	6									
10	e=	25.56707323									
11											
12	z	-7.8	-2.47	2.86	8.19	13.52	18.85	24.18	29.51	34.84	
13	N1,ρ	$= -\$B\$9/2 * (\$B\$10^2 + \$B12^2)^{0.5} * (\$B\$1^2 + \$B\$2^2) / (\$B\$2^2 + \$B12^2) / \$B\$2^2 * (B12 * (B12^2 + \$B\$10^2)^{0.5} + \$B\$10^2 * \ln(\text{ABS}(B12 + (B12^2 + \$B\$10^2)^{0.5})) - \$B\$4 * (\$B\$4^2 + \$B\$10^2)^{0.5} - \$B\$10^2 * \ln(\text{ABS}(\$B\$4 + (\$B\$4^2 + \$B\$10^2)^{0.5})))$									
14											
15											

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a=	13		n=	11							
2	b=	28.16		Δz=	5.33							
3	H=	53.3										
4	z0	-7.8										
5	z1	45.5										
6	h=	0.25										
7	ρ=	24										
8	γ=	10										
9	q=	6										
10	e=	25.56707323										
11												
12	z	-7.8	-2.47	2.86	8.19	13.52	18.85	24.18	29.51	34.84	40.17	45.5
13	N1,ρ	0	-32.5746	-64.4507	-94.3803	-121.598	-145.989	-167.941	-188.054	-206.905	-224.954	-242.527
14	N2,ρ	$= B13 * \$B\$1^2 * \$B\$2^2 / (\$B\$10^2 + B12^2) / (\$B\$1^2 + \$B\$2^2) - \$B\$9 * \$B\$1^2 / \$B\$2^2 * B12$										
15												

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a=	13		n=	11							
2	b=	28.16		Δz=	5.33							
3	H=	53.3										
4	z0	-7.8										
5	z1	45.5										
6	h=	0.25										
7	ρ=	24										
8	γ=	10										
9	q=	6										
10	e=	25.56707323										
11												
12	z	-7.8	-2.47	2.86	8.19	13.52	18.85	24.18	29.51	34.84	40.17	45.5
13	N1,ρ	0	-32.5746	-64.4507	-94.3803	-121.598	-145.989	-167.941	-188.054	-206.905	-224.954	-242.527
14	N2,ρ	9.973951608	-3.71965	-17.223	-28.7149	-37.5399	-44.2601	-49.8121	-54.9192	-59.9849	-65.1877	-70.585
15	N1,γ	$= \$B\$8 * \$B\$1 / \$B\$2^2 * (\$B\$1^2 + \$B\$2^2)^{0.5} * (\$B\$10^2 + B12^2)^{0.5} / (\$B\$2^2 + B12^2) * (B12^3 / 3 - \$B\$4 * B12^2 / 2 + \$B\$4^3 / 6)$										

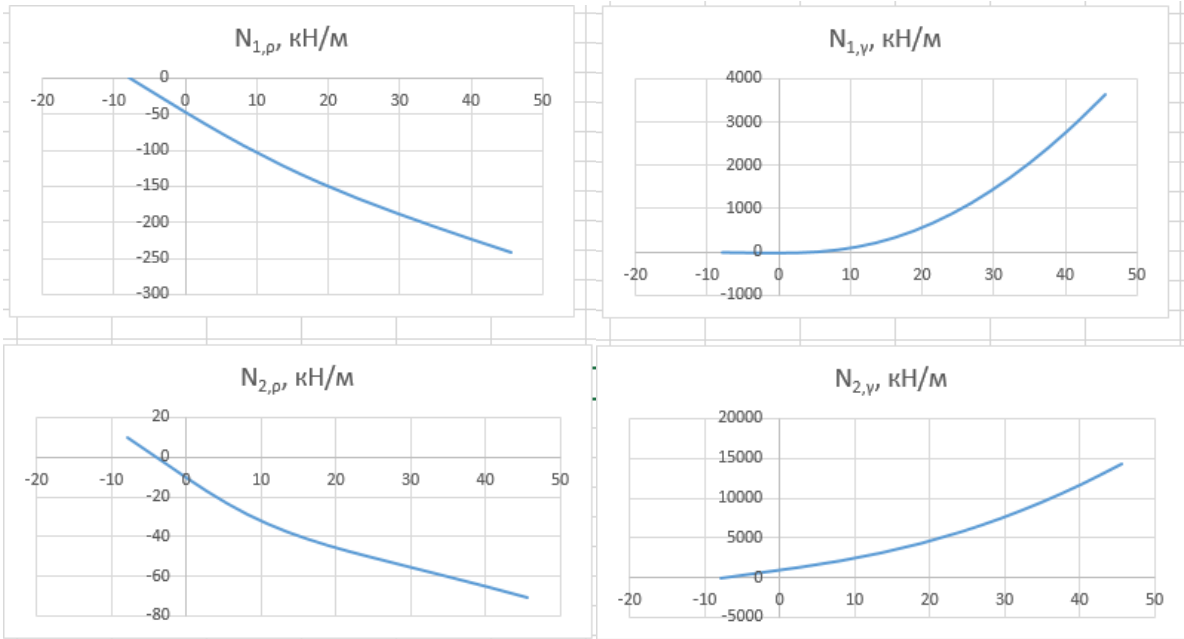
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a=	13		n=	11							
2	b=	28.16		Δz=	5.33							
3	H=	53.3										
4	z0	-7.8										
5	z1	45.5										
6	h=	0.25										
7	ρ=	24										
8	γ=	10										
9	q=	6										
10	e=	25.56707323										
11												
12	z	-7.8	-2.47	2.86	8.19	13.52	18.85	24.18	29.51	34.84	40.17	45.
13	N1,ρ	0	-32.5746	-64.4507	-94.3803	-121.598	-145.989	-167.941	-188.054	-206.905	-224.954	-242.52
14	N2,ρ	9.973951608	-3.71965	-17.223	-28.7149	-37.5399	-44.2601	-49.8121	-54.9192	-59.9849	-65.1877	-70.58
15	N1,γ	-2.26214E-15	-9.85915	-6.43203	58.03078	219.6668	497.8097	897.9369	1417.944	2053.145	2798.829	3651.14
16	N2,γ	=B\$8*B\$1*(B\$1^2+B\$2^2)^0.5*(B\$10^2+B12^2)^0.5/B\$2^2*(B12-B\$4)+B15*B\$1^2*B\$2^2/(B\$1^2+B\$2^2)/										
17	σ1,ρ	B\$10^2+B12^2)										

7. Определить напряжения от действия собственного веса и гидростатического давления по формулам:

$$\sigma_{1,\rho} = \frac{N_{1,\rho}}{h}; \quad \sigma_{2,\rho} = \frac{N_{2,\rho}}{h}; \quad \sigma_{1,\gamma} = \frac{N_{1,\gamma}}{h}; \quad \sigma_{2,\gamma} = \frac{N_{2,\gamma}}{h}.$$

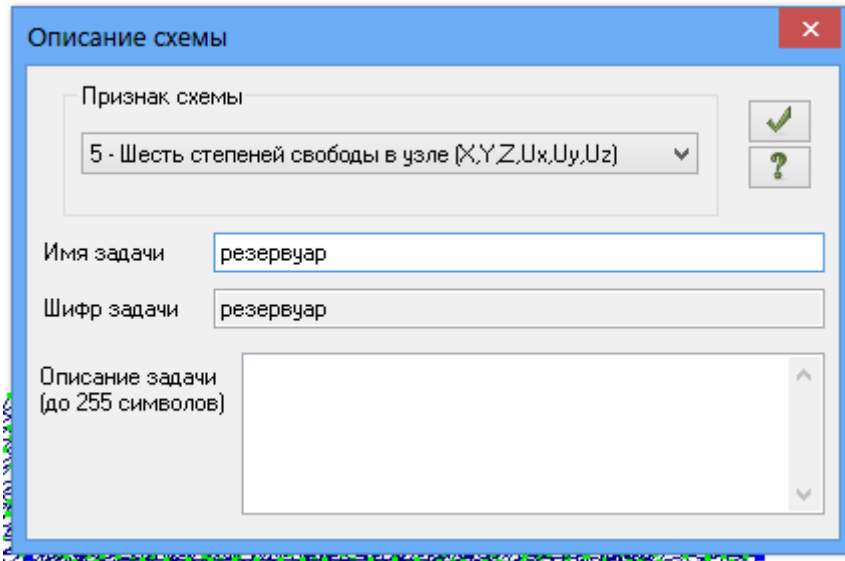
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a=	13		n=	11							
2	b=	28.16		Δz=	5.33							
3	H=	53.3										
4	z0	-7.8										
5	z1	45.5										
6	h=	0.25										
7	ρ=	24										
8	γ=	10										
9	q=	6										
10	e=	25.56707323										
11												
12	z	-7.8	-2.47	2.86	8.19	13.52	18.85	24.18	29.51	34.84	40.17	45.5
13	N1,ρ	0	-32.5746	-64.4507	-94.3803	-121.598	-145.989	-167.941	-188.054	-206.905	-224.954	-242.527
14	N2,ρ	9.973951608	-3.71965	-17.223	-28.7149	-37.5399	-44.2601	-49.8121	-54.9192	-59.9849	-65.1877	-70.585
15	N1,γ	-2.26214E-15	-9.85915	-6.43203	58.03078	219.6668	497.8097	897.9369	1417.944	2053.145	2798.829	3651.147
16	N2,γ	-4.41053E-16	694.0442	1393.09	2193.964	3171.845	4373.053	5823.203	7536.762	9522.519	11786.11	14331.22
17	σ1,ρ	=B13/B\$6	-130.299	-257.803	-377.521	-486.392	-583.955	-671.764	-752.215	-827.621	-899.815	-970.108
18	σ2,ρ	39.89580643	-14.8786	-68.892	-114.86	-150.16	-177.04	-199.248	-219.677	-239.939	-260.751	-282.34
19	σ1,γ	-9.04855E-15	-39.4366	-25.7281	232.1231	878.6673	1991.239	3591.748	5671.778	8212.581	11195.32	14604.59
20	σ2,γ	-1.76421E-15	2776.177	5572.359	8775.856	12687.38	17492.21	23292.81	30147.05	38090.08	47144.42	57324.87

8. Построить эпюры меридиональных и кольцевых продольных сил от действия собственного веса и гидростатического давления:

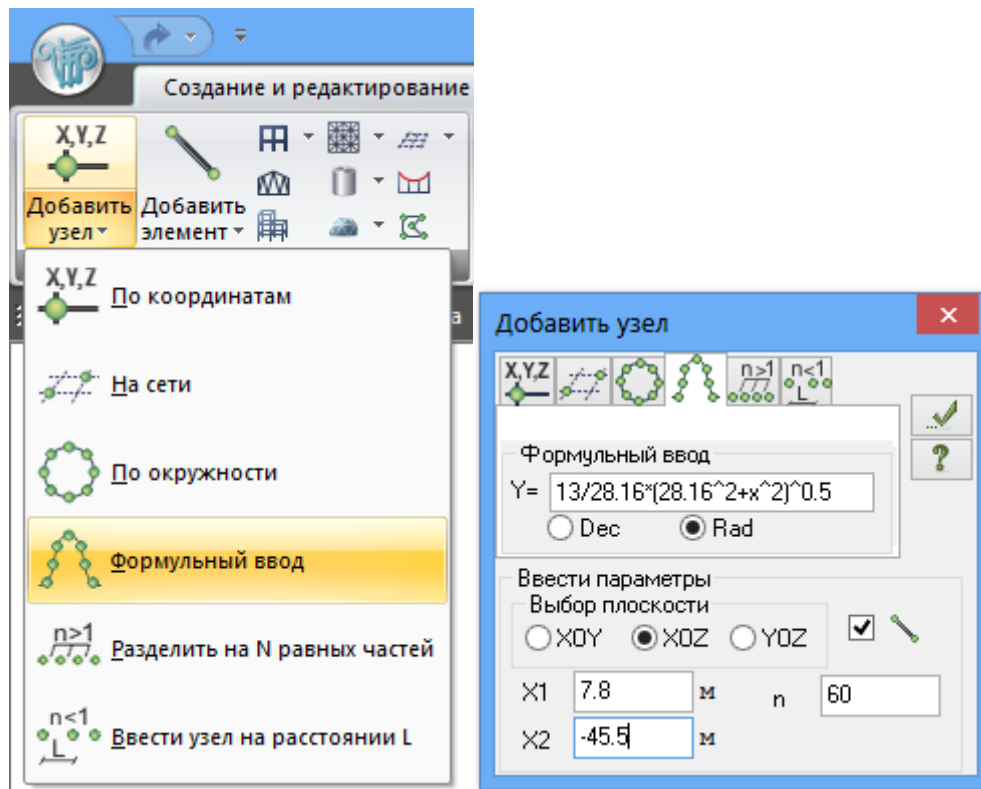


## 7. РАСЧЕТ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ЛИРА-САПР 2013

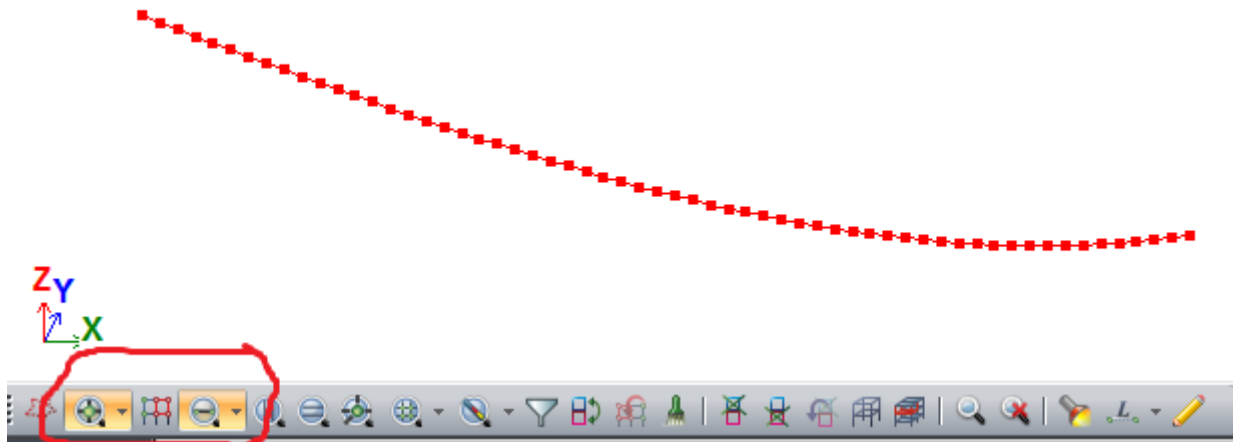
1. Создать новый файл, выбрать признак схемы 5 (6 степеней свободы в узле)



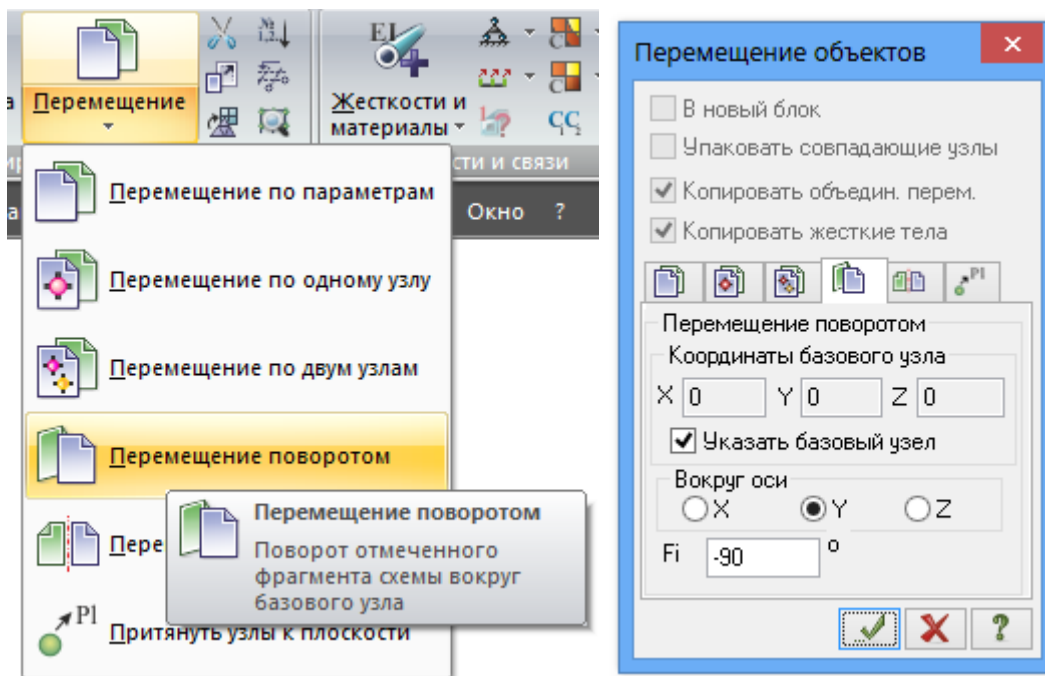
2. Перейти на вкладку «Добавить узел» и выбрать «Формульный ввод». Ввести уравнение образующей.



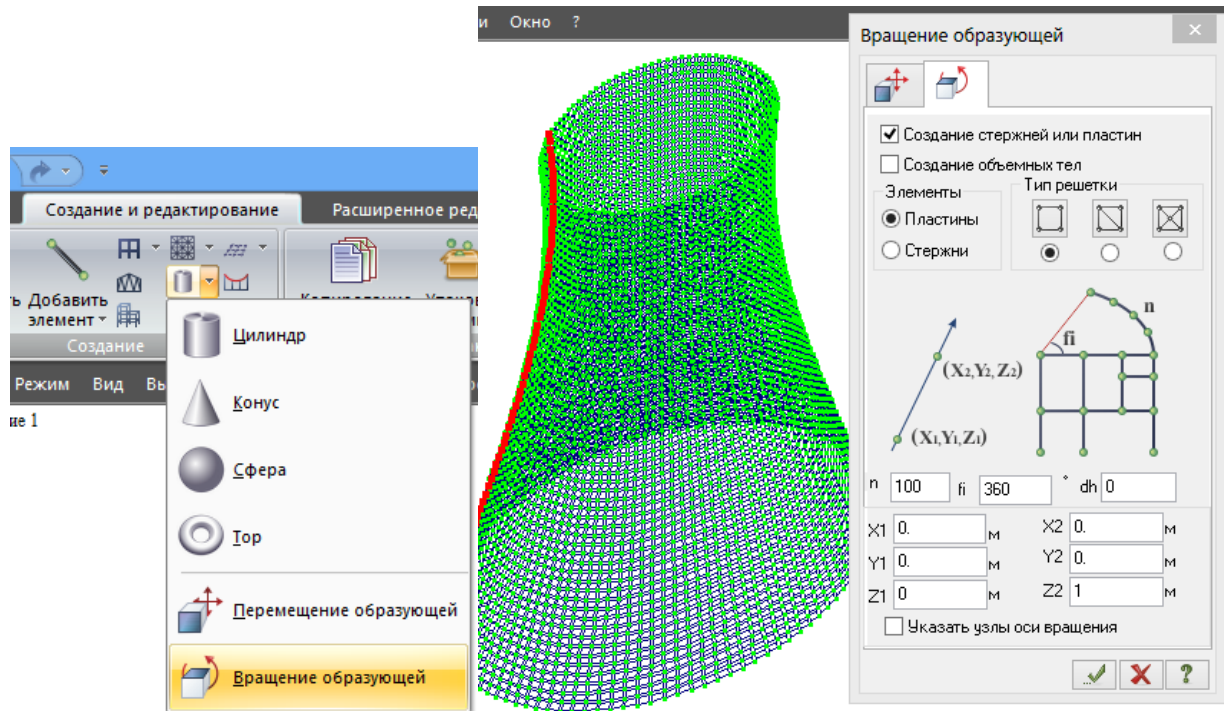
3. Выделить образующую, предварительно включив отметку узлов и отметку элементов



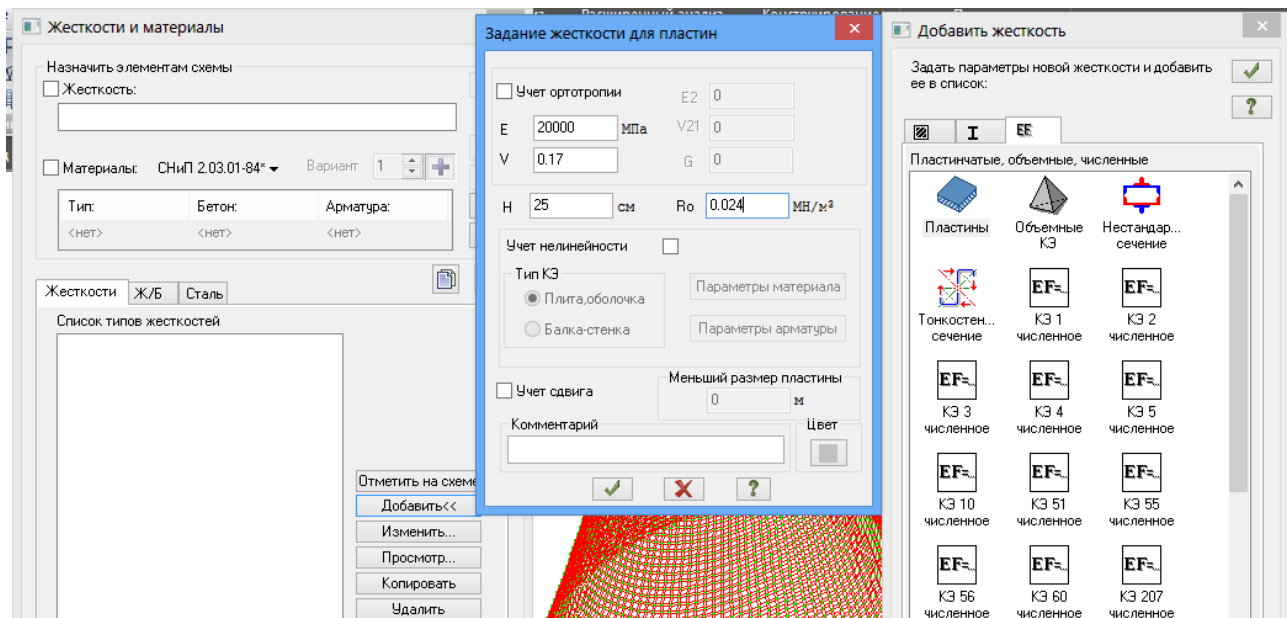
4. Повернуть образующую на 90 градусов относительно оси y



5. Перейти во вкладку «Вращение образующей»

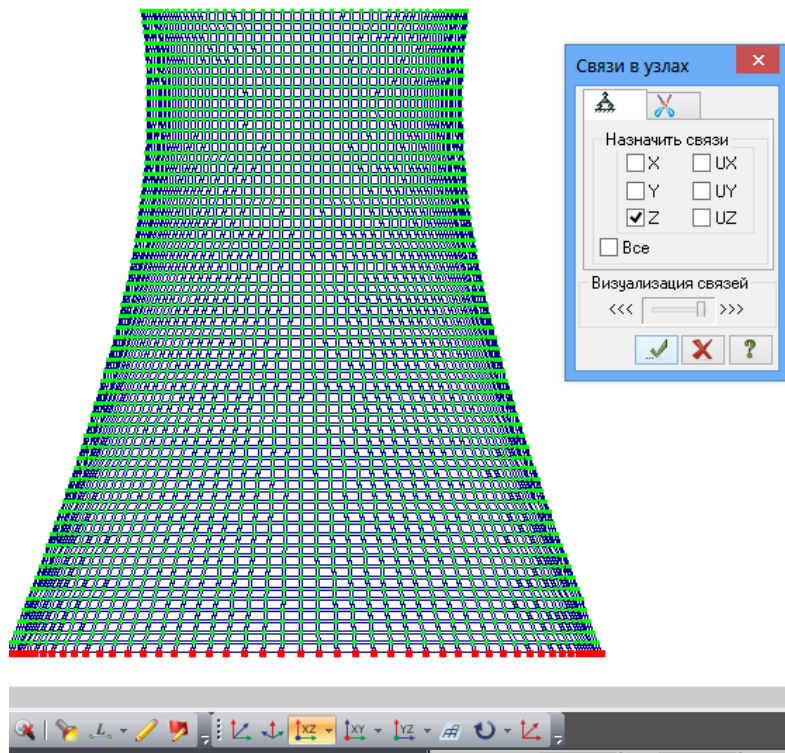


6. Удалить образующую из стержневых элементов, нажав кнопку «Delete».
7. Выделить все элементы и перейти во вкладку «Жесткости и материалы». Добавить тип жесткости «Пластины». Ввести характеристики материала и толщину оболочки. Величина  $R_0$  – удельный вес материала.

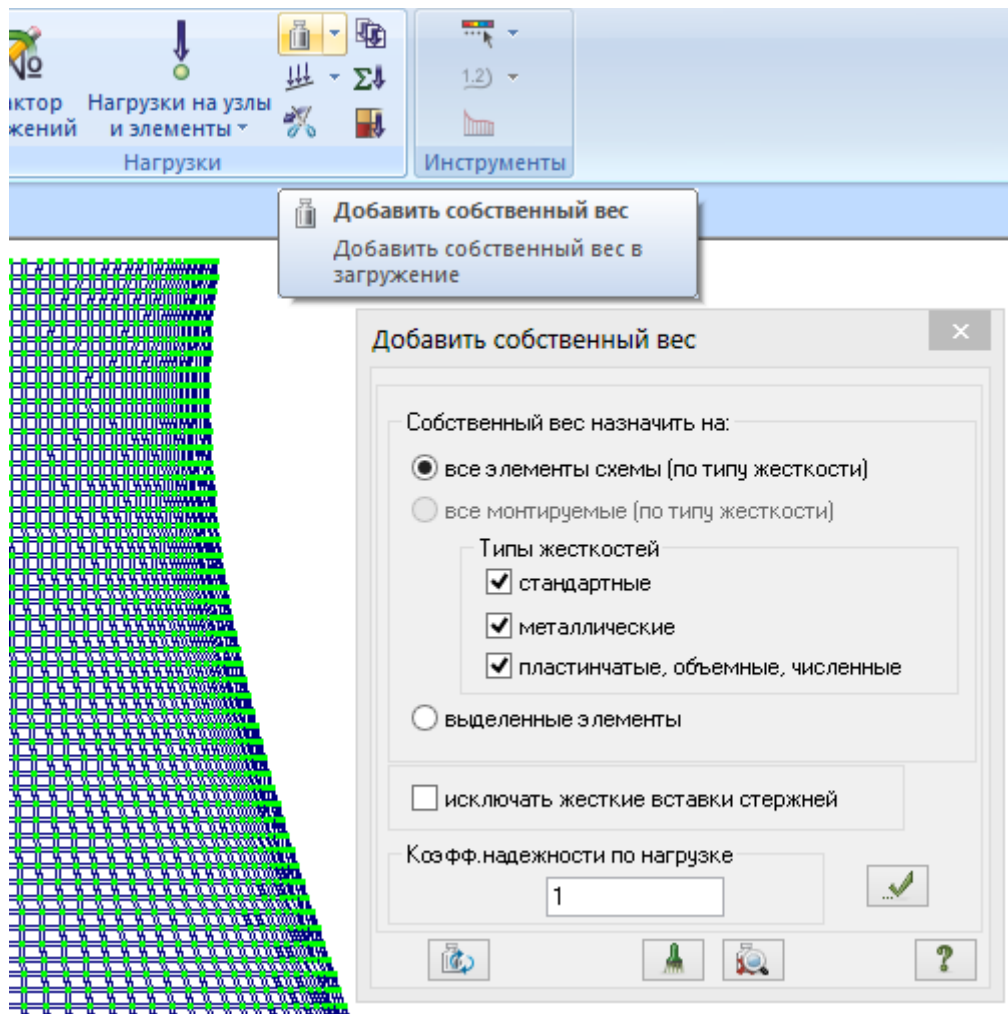


8. Применить добавленный тип жесткости.
9. Выделить нижние узлы и задать им закрепление по z.



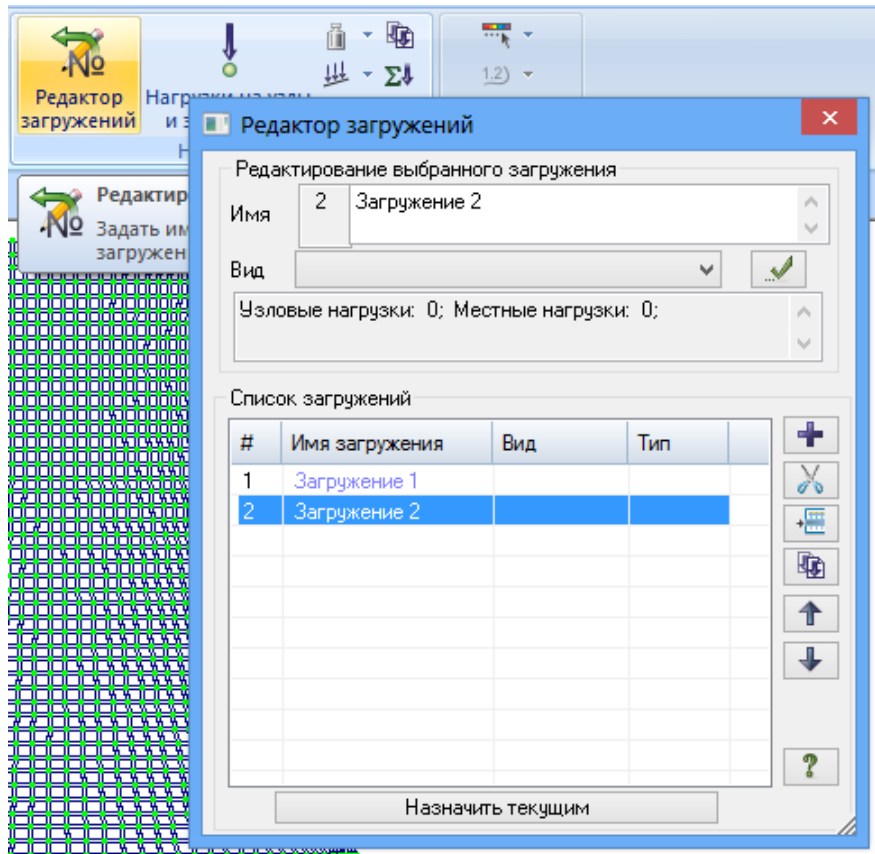


10. Добавить нагрузку от собственного веса

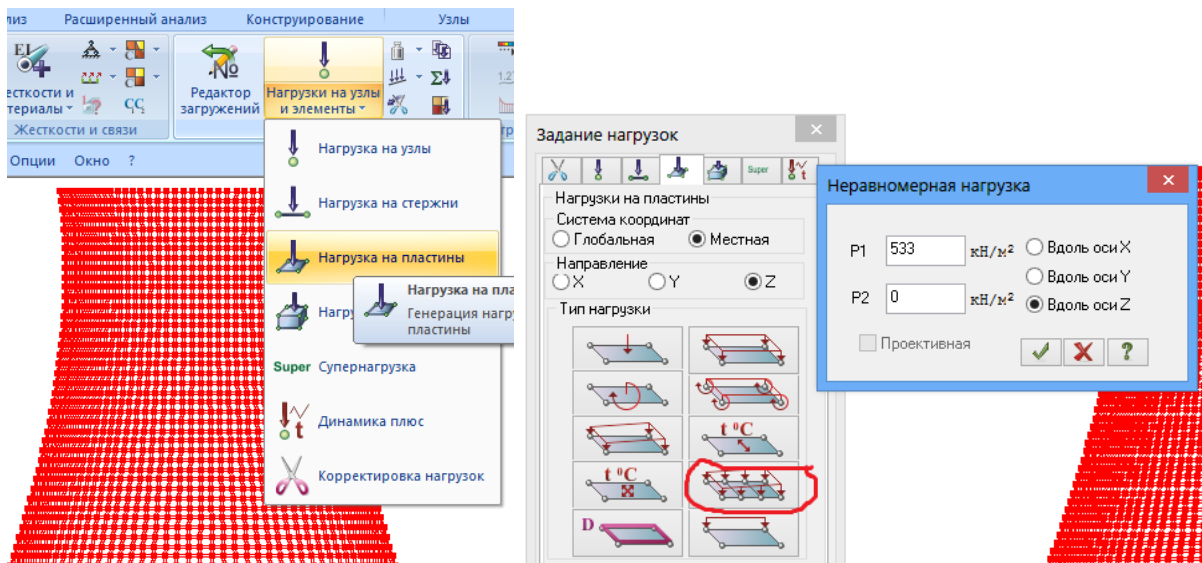




11. Для расчета на гидростатическое давление создать новое загрузку.



12. Выделить все элементы и перейти на вкладку «нагрузка на пластины». Выбрать местную систему координат и направление по z. Далее выбрать неравномерную нагрузку. Значение P1 вычисляется как  $\gamma(z_1 - z_0) = 10(7.8 + 45.5)$



13. Перейти на вкладку «Расчет-Выполнить полный расчет». Результаты расчета можно просмотреть на вкладке «Анализ».

Изополя меридиональных и кольцевых напряжений в срединной поверхности при действии собственного веса и гидростатического давления приведены на рис. 7.1 – 7.4.

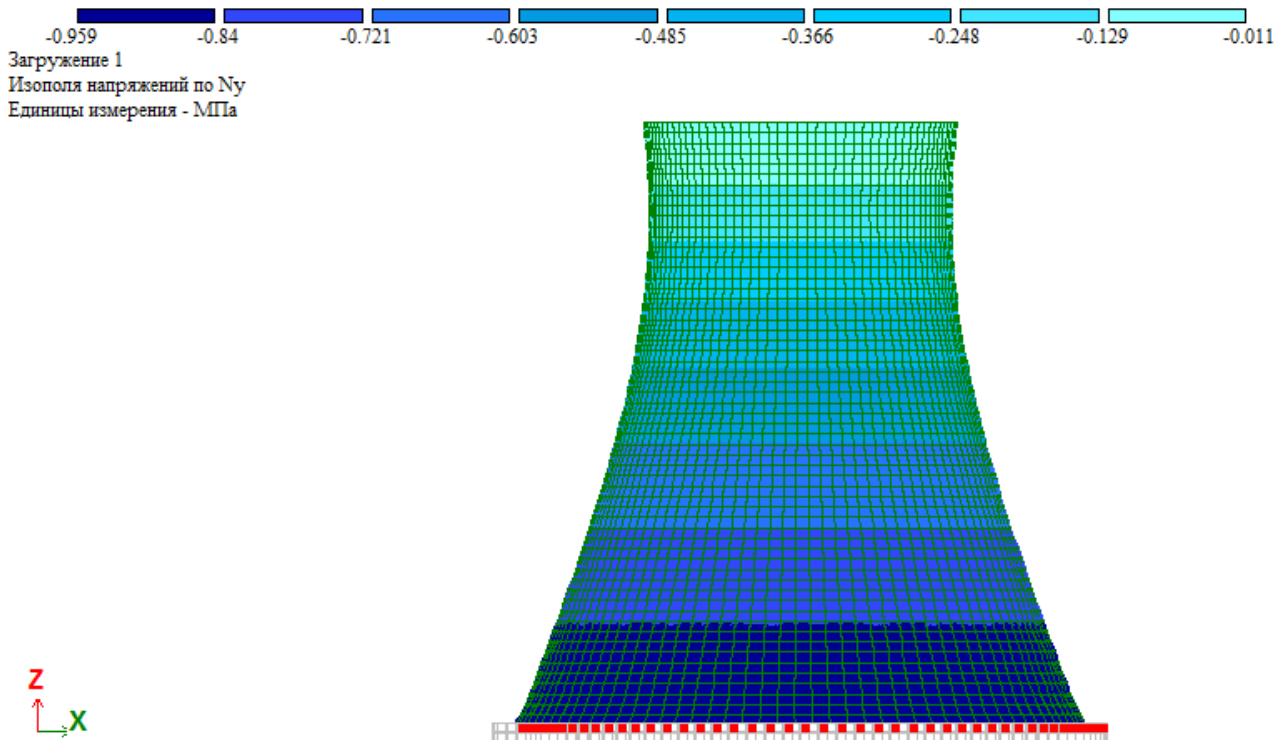


Рис. 7.1. Изополя меридиональных напряжений при действии собственного веса

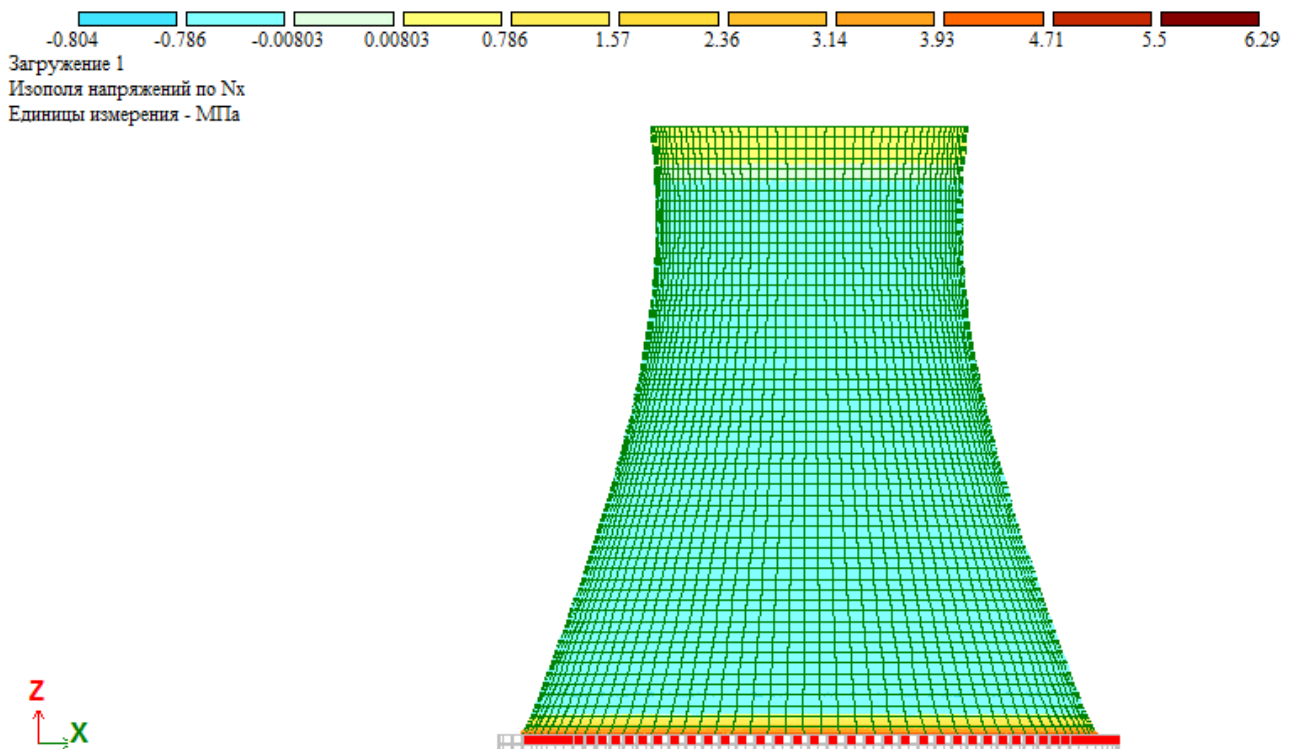


Рис. 7.2. Изополя кольцевых напряжений при действии собственного веса

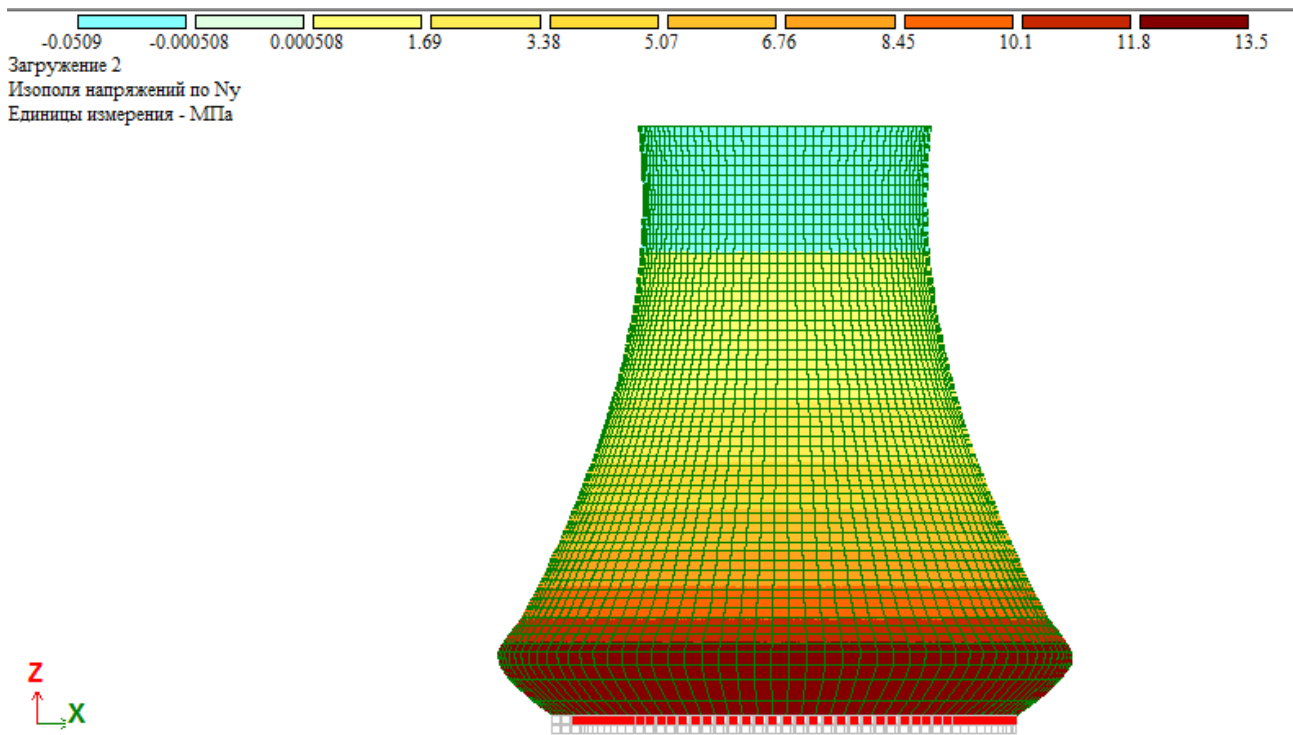


Рис. 7.3. Изополя меридиональных напряжений при действии гидростатического давления

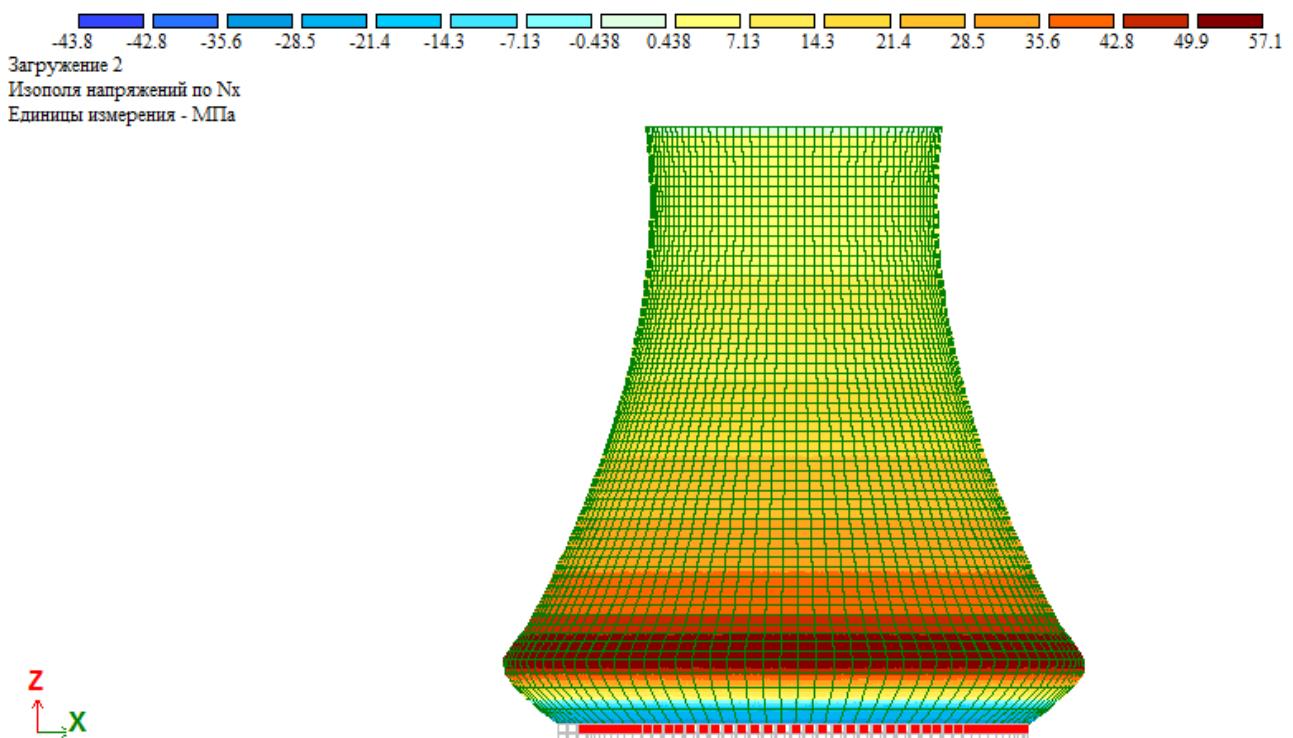


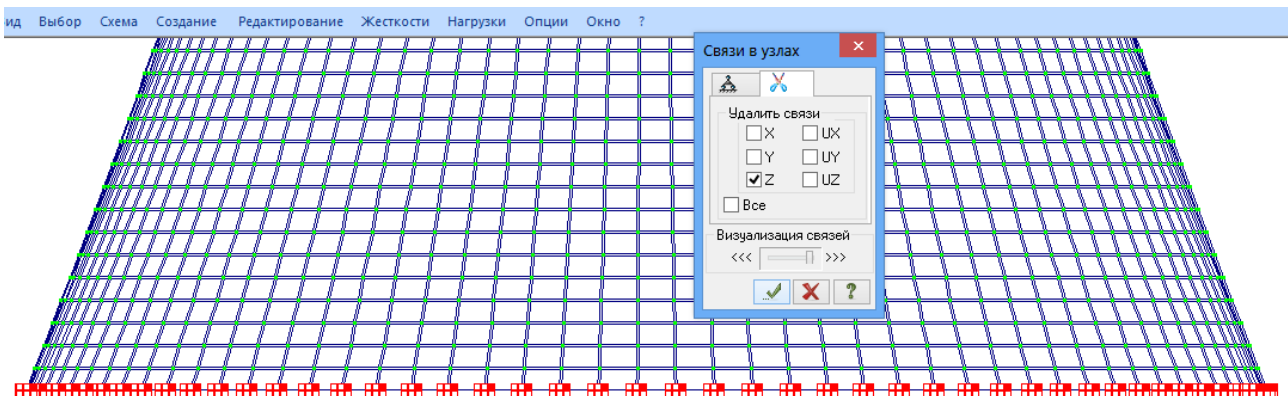
Рис. 7.4. Изополя кольцевых напряжений при действии гидростатического давления

При действии собственного веса наибольшие меридиональные напряжения по безмоментной теории  $\sigma_{1,\rho} = -0.97 \text{ МПа}$ , а в программном комплексе ЛИРА –

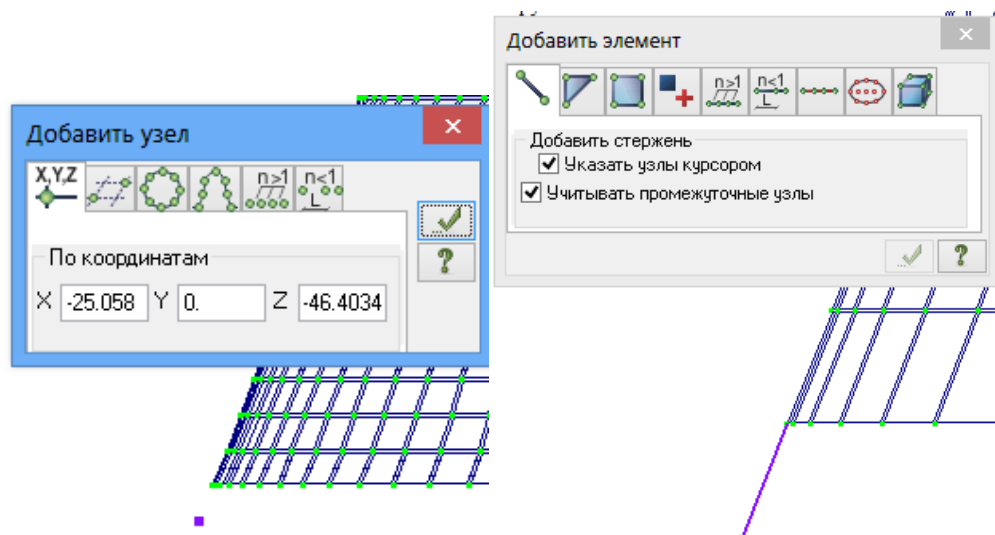
$\sigma_{1,\rho} = -0.959 \text{ МПа}$  . По кольцевым напряжениям наблюдается существенное расхождение. По безмоментной теории:  $\sigma_{2,\rho} = -0.282 \text{ МПа}$  , а в ПК ЛИРА –  $\sigma_{2,\rho} = 6.29 \text{ МПа}$  . Такое расхождение объясняется наличием в приопорной зоне краевого эффекта.


При действии гидростатического давления по безмоментной теории максимальные напряжения  $\sigma_{1,\gamma} = 14.6 \text{ МПа}$  и  $\sigma_{2,\gamma} = 57.3 \text{ МПа}$  . В ПК ЛИРА:  $\sigma_{1,\gamma} = 13.5 \text{ МПа}$  и  $\sigma_{2,\gamma} = 57.1 \text{ МПа}$  .

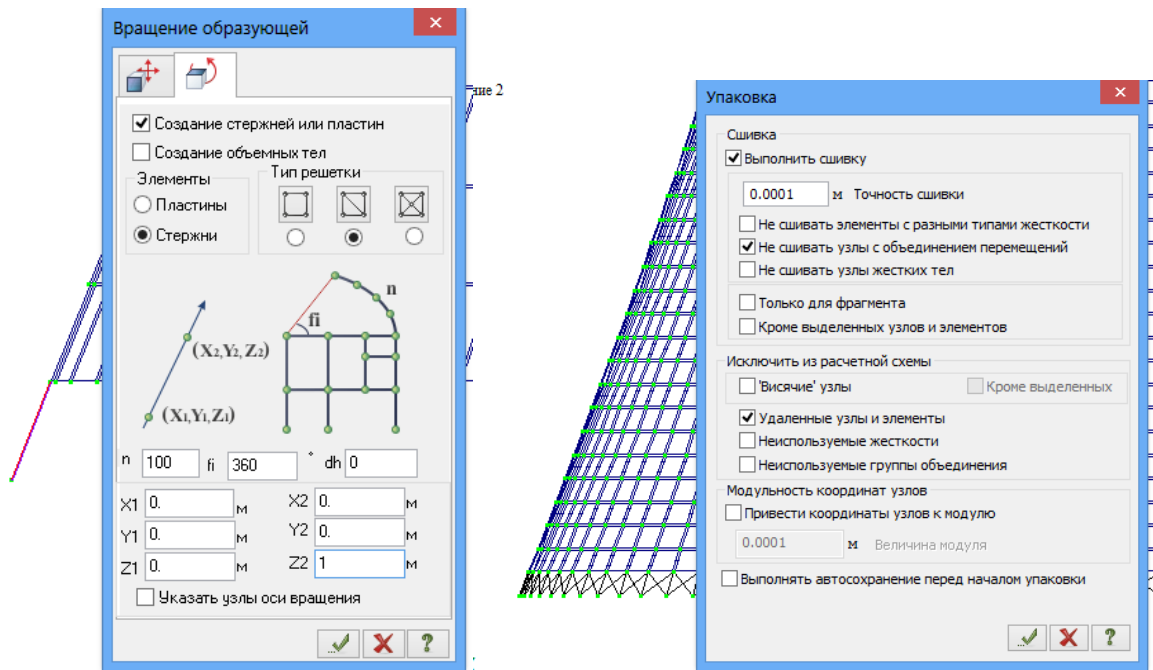
Краевой эффект при действии собственного веса будет отсутствовать в случае закрепления оболочки в соответствии с рис. 2.2. Для этого удаляем в нижних узлах закрепление по z.



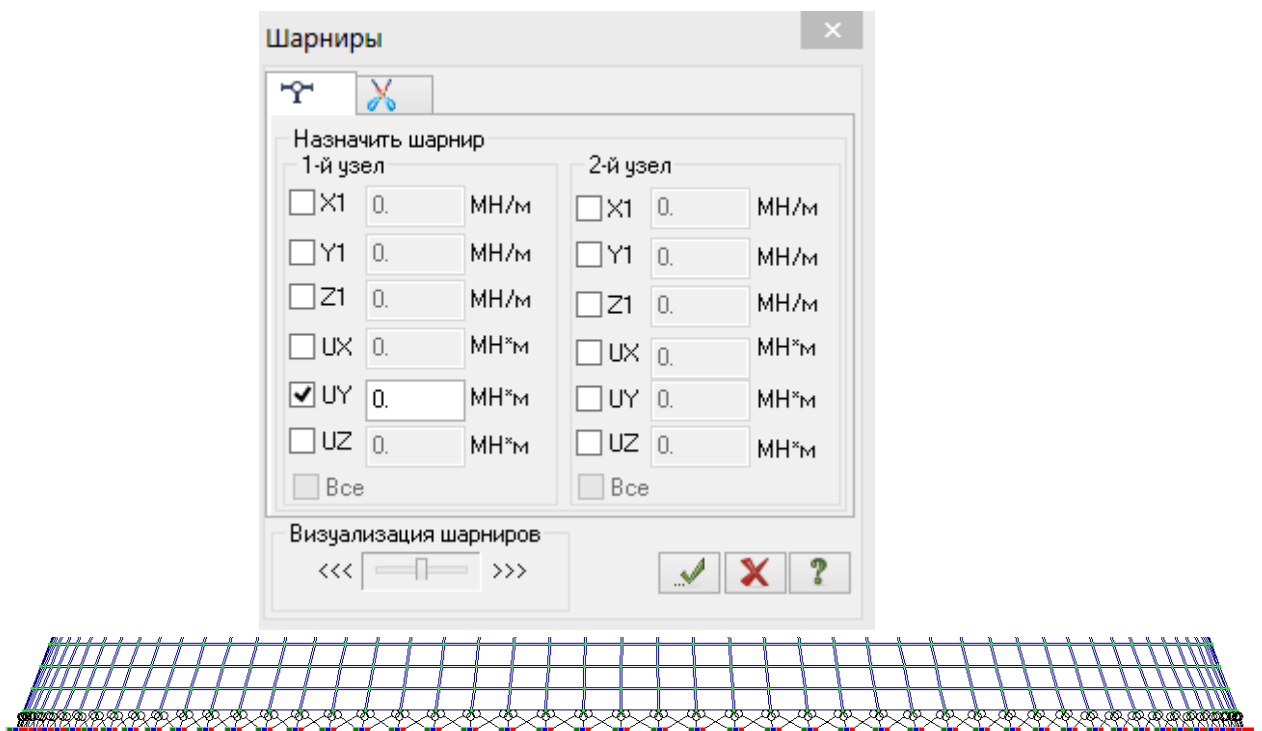
Добавляем стержень по касательной к образующей. Для этого предварительно добавляем узел по координатам.



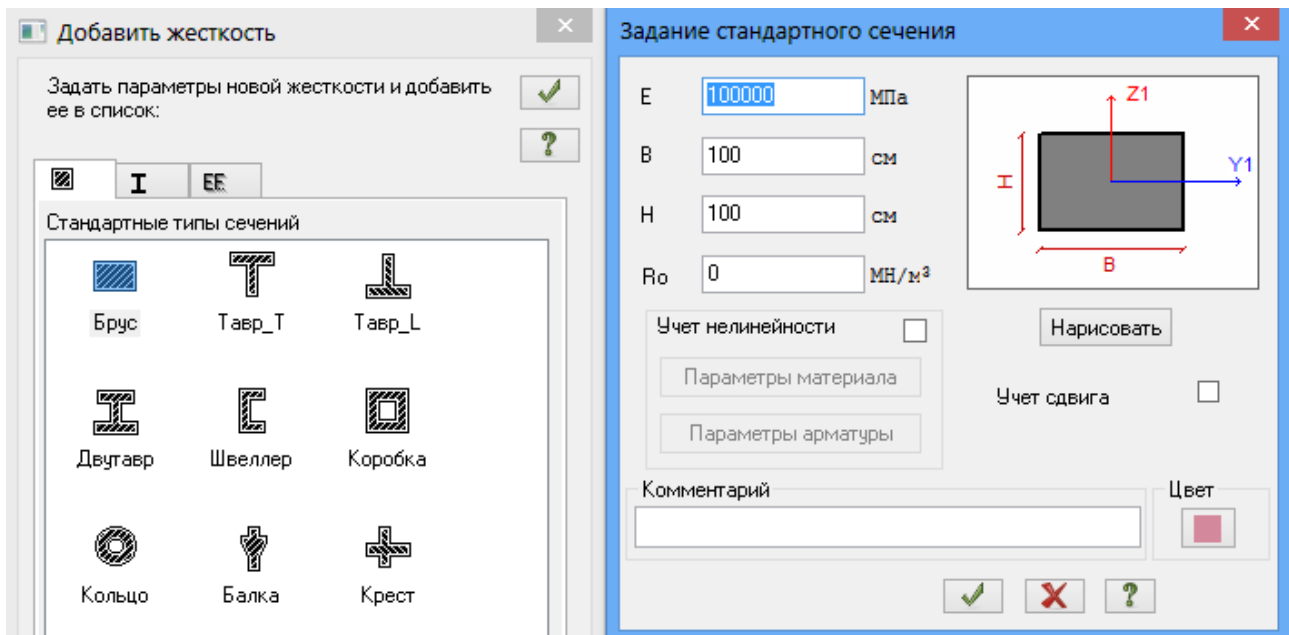
Выделяем и копируем стержень при помощи вращения образующей. Снимаем выделение стержня клавишей  . Выделяем и удаляем добавившиеся горизонтальные стержни. Выполняем упаковку схемы для удаления повторяющихся узлов.



Нижние узлы стержней закрепляем по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Выделяем все стержни и переходим на вкладку «Работа со стержнями». Выбираем вкладку «шарниры».



Далее нужно задать жесткость стержней таким образом, чтобы она была намного больше жесткости пластин.



Полученные в результате изополя меридиональных и кольцевых напряжений показаны на рис. 7.5. и 7.6

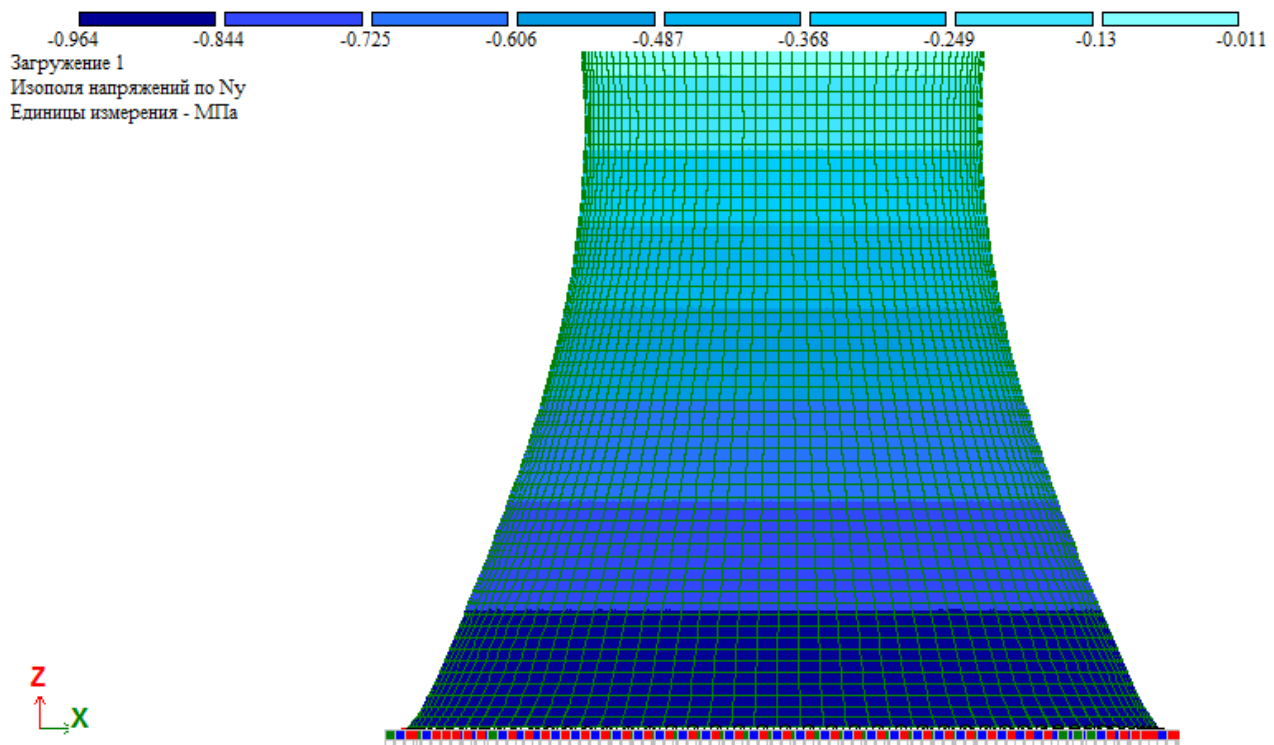


Рис. 7.5. Изополя меридиональных напряжений



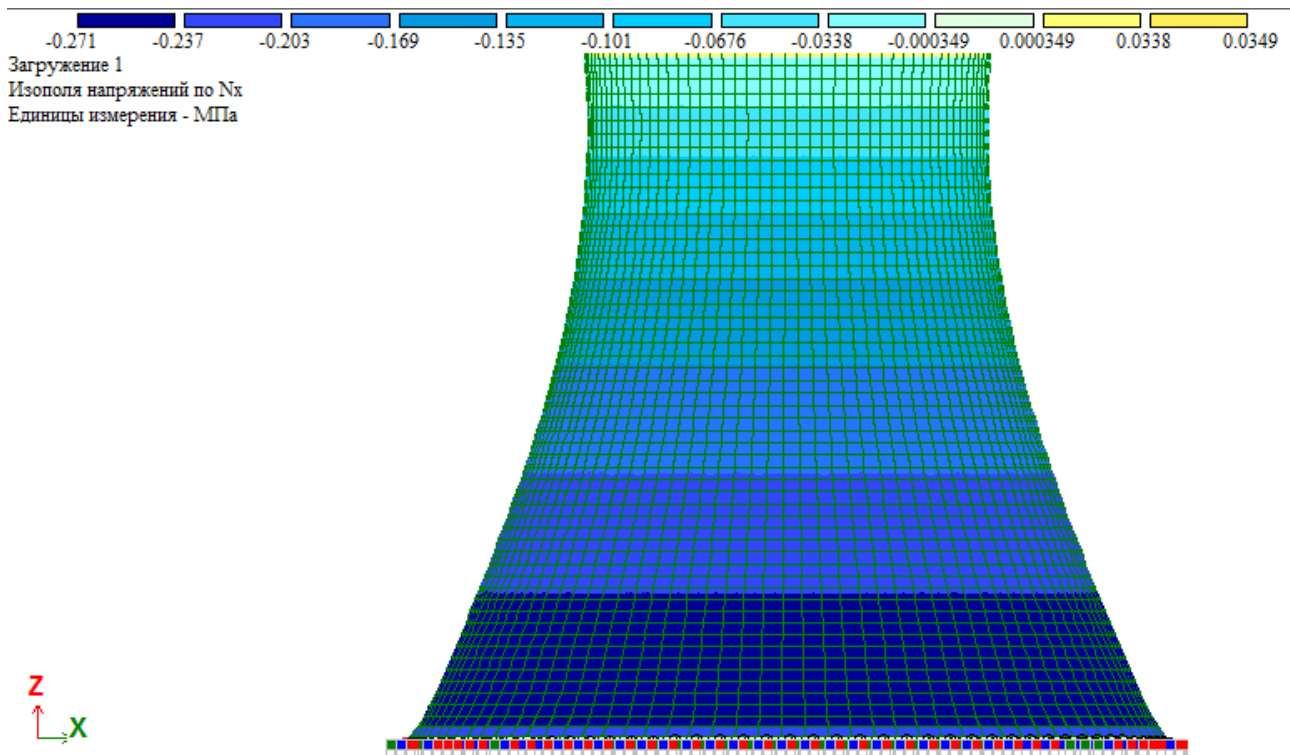


Рис. 7.6. Изополя кольцевых напряжений

В ПК ЛИРА при таком закреплении получены значения  $\sigma_{1,\rho} = -0.964 \text{ МПа}$  и  $\sigma_{2,\rho} = -0.271 \text{ МПа}$ . По меридиональным напряжениям разница с решением по безмоментной теории составляет 0.62%, а по кольцевым – 3.9%.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 640 с.
2. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
3. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. М: Высшая школа, 1972. – 206 с.
4. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л. Стройиздат. 1975. – 256 с.
5. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
6. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. Теория пластин и оболочек. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2012. – 114 с.
7. Демченко Б.М., Маяцкая И.А. Теория упругости с основами пластичности и ползучести. Часть 3. Балки, пластины, оболочки. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2015. – 169 с.