



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Методические указания
по выполнению расчетно-графической работы
по дисциплине «Теория расчета
пластин и оболочек» для обучающихся по
техническим направлениям подготовки
(специальностям)

**«Расчет на изгиб прямоугольной
пластины методом конечных
разностей»**

Авторы
Демченко Д.Б., Маяцкая И.А.,
Чепурненко А.С., Языев Б.М.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Расчет на изгиб прямоугольной пластины методом конечных разностей: методические указания предназначены для проведения практической работы по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек» для обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания включают задания для выполнения расчетно-графической работы для студентов, изучающих курс «Теория расчета пластин и оболочек».

Авторы

канд. техн. наук, доцент кафедры
«Сопротивление материалов»

Демченко Д.Б.;

канд. техн. наук, доцент кафедры
«Сопротивление материалов»

Маяцкая И.А.;

канд. техн. наук, ст. преп. кафедры
«Сопротивление материалов»

Чепурненко А.С.;

докт. техн. наук, профессор кафедры
«Сопротивление материалов» Языев Б.М.





Оглавление

Общие положения.	4
1. Постановка задачи.....	4
2. Метод конечных разностей.	5
Пример выполнения расчетно-графической работы.	11
Библиографический список.	17

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.

1. Постановка задачи.

Рассматривается тонкая прямоугольная пластина из изотропного материала (рис. 1), соответствующего закону Гука, нагруженная нормальными к срединной плоскости равномерно распределенной внешней нагрузкой интенсивностью q_F , нагрузкой от собственного веса q_G и двумя сосредоточенными силами F .

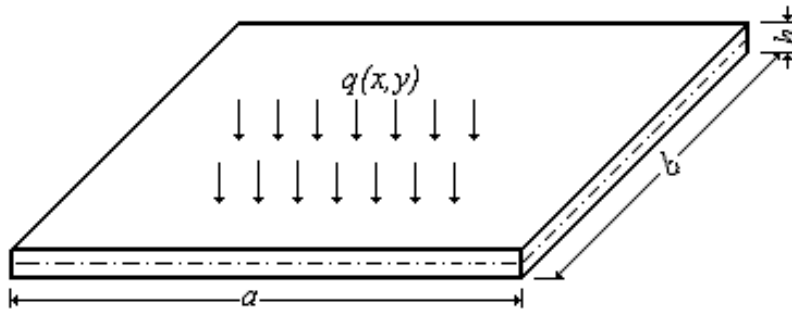


Рис. 1

При этом сосредоточенная сила рассматривается как предельный случай распределенной нагрузки на площади $dx \times dy$.

Размеры пластины заключены в пределах:

$$\left(\frac{1}{80} \div \frac{1}{100} \right) \leq \frac{h}{a} \leq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \right),$$

где h – толщина пластины;

a – меньший размер основания пластины.

Задача расчета пластины на изгиб сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения в частных производных

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D},$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (1)$$

Здесь:

$w=w(x,y)$ – функция прогибов срединной поверхности пластины;

$q(x,y) = q_F + q_G$ – интенсивность поверхностной нагрузки;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины;

$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ двойной оператор Лапласа над функцией $w=w(x,y)$.

Определение функции прогибов $w=w(x,y)$, одновременно удовлетворяющей уравнению (1) и граничным условиям на контуре пластины, представляет трудную задачу, точное решение которой можно получить только в некоторых частных случаях нагружения и условий закрепления пластин.

Для инженерной практики имеют особо важное значение приближенные, но достаточно общие методы решения таких задач. Для этого необходимо привести дифференциальное уравнение изгиба пластин к алгебраическому виду. В расчетно-графической работе дифференциальное уравнение (1) решается методом конечных разностей.

2. Метод конечных разностей.

Основой метода конечных разностей (МКР) является замена входящих в дифференциальное уравнение производных их приближенными выражениями через значение искомой функции прогибов в некоторых фиксированных точках, называемых узлами. Эта замена сводит решение дифференциального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются значения искомой функции прогибов в узловых точках.

Расчет изотропных пластин на изгиб сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения равновесия (1) относительно функции прогибов $w=w(x,y)$.

Как и в плоской задаче теории упругости, на пластину наносится прямоугольная сетка с шагом $dx \times dy$ и для каждого k -го узла, в котором $w_k \neq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, N$), составляется конечно-разностный аналог уравнения (1):

$$(\nabla^4 w)_k = \frac{q_k}{D}, \quad k=1,2,3,\dots,N. \quad (2)$$

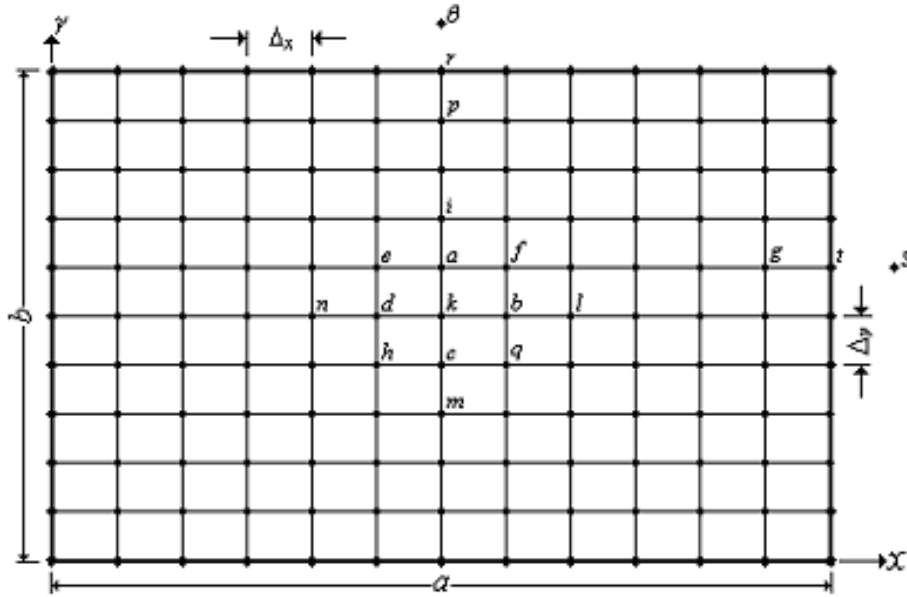


Рис. 2

В левую часть уравнения (2) входят четвертые производные функции прогибов w . По аналогии с плоской задачей теории упругости, для произвольной точки k сетки их можно выразить в конечных разностях следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_k = \frac{w_l - 4w_b + 6w_k - 4w_d + w_n}{(\Delta_x)^4}; \quad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_k = \frac{w_m - 4w_c + 6w_k - 4w_a + w_i}{(\Delta_y)^4};$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k = \frac{(w_q - 2w_b + w_f) - 2(w_c - 2w_k + w_a)}{(\Delta_x)^2 (\Delta_y)^2},$$

которые связывают прогибы тринадцати точек. Подставив значения производных в уравнение (2), получим:

$$\left. \begin{aligned} & (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)w_k - 4(1 + \alpha)(w_a + \alpha \cdot w_b + w_c + \alpha \cdot w_d) + \\ & + 2\alpha(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + \alpha^2 w_l + w_m + \alpha^2 w_n = \frac{q_k \Delta_y^4}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{\Delta_y^2}{\Delta_x^2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{\Delta_y^4}{\Delta_x^4}$.

Если в точке K действует сосредоточенная сила F_k , то ее представляют в виде: $F_k = q_k \Delta_x \cdot \Delta_y$. В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} & (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)w_k - 4(1 + \alpha)(w_a + \alpha w_b + w_c + \alpha w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + \\ & + w_i + \alpha^2 w_l + w_m + \alpha^2 w_n = \frac{F_k \alpha \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y}{D} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В случае квадратной сетки ($\Delta_x = \Delta_y = \Delta$) уравнения (3) и (4) принимают, соответственно, вид:

$$20w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + w_l + w_m + w_n = \frac{q_k \Delta^4}{D}. \quad (5)$$

$$20w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + w_l + w_m + w_n = \frac{F_k \Delta^2}{D}. \quad (6)$$

В расчетно-графической работе на пластину принимается квадратная сетка с шагом $\Delta x = \Delta y = \Delta$.

Уравнения (5) и (или) (6) составляются для каждого внутреннего узла сетки. При составлении этих уравнений для узлов сетки, расположенных вблизи контура пластины, в них войдут значения прогибов w в узлах на контуре пластины и фиктивные прогибы в законтурных узлах. Фиктивные прогибы в законтурных узлах необходимо выразить через прогибы узлов сетки внутри контура или на контуре, используя граничные условия.

Составим граничные условия для произвольной точки края пластины:

1. Для шарнирно опертого края пластины (например, $x = 0$, $x = a$) при жестких (не проседающих) опорах имеем (рис. 3) следующие граничные условия:
 $w_i = 0$; $w_{i+1} = -w_{i-1}$.

Здесь t (рис. 2) – номер контурного узла сетки.

2. Для жестко защемленного края пластины (например, $x = 0$, $x = a$) при жестких (не проседающих) опорах имеем (рис. 3) следующие граничные условия:
 $w_i = 0$; $w_{i+1} = w_{i-1}$.

Здесь t (рис. 4) – номер контурного узла сетки.

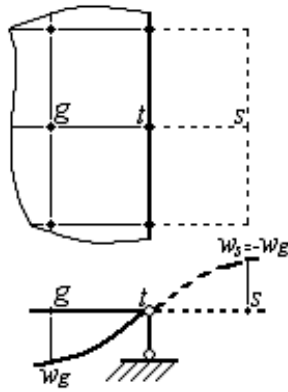


Рис. 3

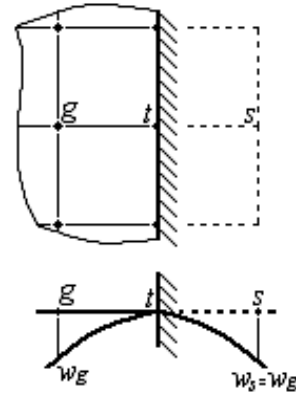


Рис. 4

С помощью равенств, выражающих граничные условия, либо исключают из уравнений (2) все законтурные ординаты, либо присоединяют эти равенства к уравнениям (2) в качестве дополнительных уравнений. В целом это дает замкнутую систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равных числу уравнений. Их решение дает числовое поле прогибов пластины w_k .

В итоге получаем замкнутую систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равных числу уравнений. Их решение дает числовое поле прогибов w_k ($k=1, 2, 3, \dots, N$).

В расчетно-графической работе исключаем из уравнений (2) все законтурные ординаты (фиктивные прогибы). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равных числу внутренних узлов сетки.

Внутренние усилия.

Имеем выражения для внутренних усилий и напряжений:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad H = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_{zx} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad Q_{zy} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

$$\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_y^{\max} = \frac{6M_y}{h^2}; \quad \tau_{xy}^{\max} = \frac{6H}{h^2}; \quad \tau_{zx}^{\max} = \frac{3Q_{zx}}{2h}; \quad \tau_{zy}^{\max} = \frac{3Q_{zy}}{2h}.$$

В выражения для внутренних усилий входят вторые производные функции прогибов w . По аналогии с плоской задачей теории упругости, для произвольной точки k сетки их можно выразить в конечных разностях следующими соотношениями

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k = \frac{w_b - 2w_k + w_d}{(\Delta_x)^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k = \frac{w_a - 2w_k + w_c}{(\Delta_y)^2};$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{(w_f + w_h) - (w_q + w_e)}{4\Delta_x \cdot \Delta_y}.$$

Подставив значения производных в выражения для усилий, получим:

$$\left. \begin{aligned} M_{x(k)} &= -D \left(\frac{w_b - 2w_k + w_d}{\Delta_x^2} + \mu \frac{w_a - 2w_k + w_c}{\Delta_y^2} \right); \\ M_{y(k)} &= -D \left(\frac{w_{a1} - 2w_k + w_{c1}}{\Delta_y^2} + \mu \frac{w_b - 2w_k + w_d}{\Delta_x^2} \right); \\ H_{(k)} &= -D(1 - \mu) \frac{(w_f + w_h) - (w_{q1} + w_e)}{4\Delta_x \cdot \Delta_y}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{zx(k)} &= -D \left[\frac{w_l - 2(w_b - w_d) - w_n}{2\Delta_x^3} + \frac{w_f - w_e - 2(w_b - w_d) + w_{q1} - w_h}{2\Delta_x \Delta_y^2} \right]; \\ Q_{zy(k)} &= -D \left[\frac{w_i - 2(w_a - w_c) - w_n}{2\Delta_y^3} + \frac{w_{f1} - w_q - 2(w_{a1} - w_{c1}) + w_{e1} - w_h}{2\Delta_x^2 \Delta_y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Напряжения.

$$\sigma_{x(k)}^{\max} = \frac{6M_{x(k)}}{h^2}; \quad \sigma_{y(k)}^{\max} = \frac{6M_{y(k)}}{h^2}; \quad \tau_{xy(k)}^{\max} = \frac{6H_{(k)}}{h^2}; \quad \tau_{zx(k)}^{\max} = \frac{3Q_{zx(k)}}{2h}; \quad \tau_{zy(k)}^{\max} = \frac{3Q_{zy(k)}}{2h}. \quad (9)$$

Правая часть уравнений (2) состоит из нагрузок:

$$q_{(k)} = q_{G(k)} + q_{F(k)} + \left(\frac{F}{\Delta_x \cdot \Delta_y} \right)_k. \quad (10)$$

Здесь

$q_{G(k)} = \gamma \cdot h$ – собственный вес пластины, приходящийся на единицу площади поверхности пластины. Вводится с коэффициентом 1 ;

$q_{F(k)}$ – интенсивность заданной нагрузка, значение которой в узлах сетки зависит от размера грузовой площади, приходящейся на рассматриваемый узел. Например, для пластины (рис. 5), где заштрихованная область – область приложения нагрузки q_F :

- в узлах №№ 1, 2, 3, 4, 10, 15 нагрузка вводится с коэффициентом $0,5$; в узле №5 – с коэффициентом $0,25$; в узлах №№ 6 ÷ 9, 11 ÷ 14 – с коэффициентом 1 ;

$F_{(k)}$ – внешняя сосредоточенная сила, приложенная в k -ом узле сетки.

F вводится с коэффициентом 1 в узлах, где приложена, в остальных – 0 .

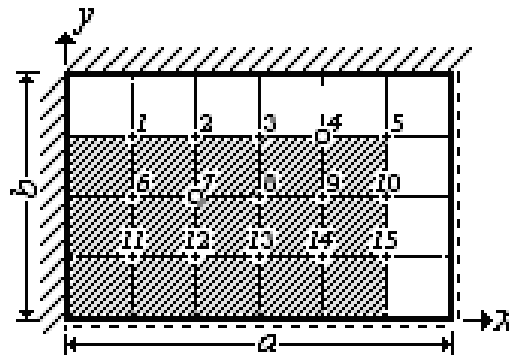


Рис. 5

Для схемы пластины (рис. 5) правая часть системы уравнений (2) будет иметь вид:

$$q_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma \cdot h + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot q_F + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F$$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Числовые данные для расчета пластины (рис. 6):

$$a = 5,4\text{м}; \quad b = 3,6\text{м}; \quad h = 0,15\text{м}; \quad F = 30\text{кН}; \quad q = 20\text{кН/м}^2; \quad \gamma = 24\text{кН/м}^3;$$

$$E = 25 \cdot 10^3 \text{МПа}; \quad \mu = 1/6; \quad m = 6; \quad n = 4; \quad \Delta x = \frac{a}{m} = 0,9\text{м}; \quad \Delta y = \frac{b}{n} = 0,9\text{м}.$$

Собственный вес пластины, приходящийся на 1 м² поверхности, равен:

$$q_G = \gamma \cdot h = 24 \cdot 0,15 = 3,6\text{кН/м}^2$$

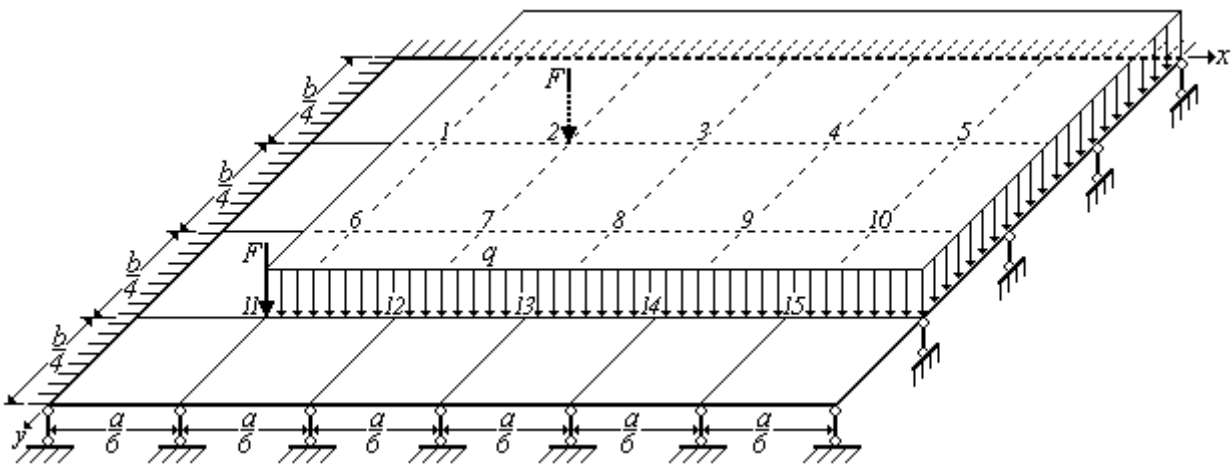


Рис. 6

Цилиндрическая жесткость равна:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 15^3 \cdot 10^{-6}}{12(1-0,16^2)} = 7216\text{кНм}$$

Дифференциальное уравнение изгиба пластины (1) в форме метода конечных разностей (рис. 2) при квадратной сетке, нагруженной собственным весом q_G , постоянной распределенной нагрузкой q_F (площадь нагружения на схеме пластины заштрихована – рис. 3) и сосредоточенной силой F (узлы сетки, где приложена сила, отмечены «значком» \diamond – узел 2, узел 11) имеет вид:

$$20w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + w_l + w_m + w_n =$$

$$= \frac{q_{F(k)} \cdot \Delta^4}{D} + \frac{q_{G(k)} \cdot \Delta^4}{D} + \frac{F_{(k)} \cdot \Delta^2}{D}.$$

1. Составляем матрицы исходной нагрузки, с учетом схемы нагружения.

Суммируя все виды нагрузки, действующие на пластину, получим:

$$\frac{1}{D} [(q_{F(k)} + q_{G(k)}) \cdot \Delta^4 + F_{(k)} \cdot \Delta^2] = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 8,923 & 39,784 & 15,484 & 15,484 & 15,484 \\ 8,923 & 15,484 & 15,484 & 15,484 & 15,484 \\ 29,942 & 8,923 & 8,923 & 8,923 & 8,923 \end{vmatrix},$$

где

$$q_F = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot 20; \quad q_G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 3,6; \quad F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot 30.$$

2. Составляем конечно-разностные уравнения для каждого внутреннего узла сетки, с учетом граничных условий:

$$\begin{aligned} 20w_1 - 8(0 + w_2 + w_6 + 0) + 2(0 + w_7 + 0 + 0) + w_1 + w_3 + w_{11} + w_1 &= 8,923; \\ 20w_2 - 8(w_3 + w_7 + w_1) + 2(0 + 0 + w_8 + w_6) + w_2 + w_4 + w_{12} + 0 &= 39,784; \\ 20w_3 - 8(0 + w_4 + w_8 + w_2) + 2(0 + 0 + w_9 + w_7) + w_3 + w_5 + w_{13} + w_1 &= 15,484; \\ 20w_4 - 8(0 + w_5 + w_9 + w_3) + 2(0 + 0 + w_{10} + w_8) + w_4 + 0 + w_4 + w_2 &= 15,484; \\ 20w_5 - 8(0 + 0 + w_{10} + w_4) + 2(0 + 0 + 0 + w_9) + w_5 + (-w_5) + w_{15} + w_3 &= 15,484; \\ 20w_6 - 8(w_1 + w_7 + w_{11} + 0) + 2(0 + w_2 + w_{12} + 0) + 0 + w_8 + 0 + w_6 &= 8,923; \\ 20w_7 - 8(w_2 + w_8 + w_{12} + w_6) + 2(w_1 + w_3 + w_{13} + w_{11}) + 0 + w_9 + 0 + 0 &= 15,484; \\ 20w_8 - 8(w_3 + w_9 + w_{13} + w_7) + 2(w_2 + w_4 + w_{14} + w_{12}) + 0 + w_{10} + 0 + w_6 &= 15,484; \\ 20w_9 - 8(w_4 + w_{10} + w_{14} + w_8) + 2(w_3 + w_5 + w_{15} + w_{13}) + 0 + 0 + 0 + w_7 &= 15,484; \\ 20w_{10} - 8(w_5 + 0 + w_{15} + w_9) + 2(w_4 + 0 + 0 + w_{14}) + 0 - w_{10} + 0 + w_8 &= 15,484; \\ 20w_{11} - 8(w_6 + w_{12} + 0 + 0) + 2(0 + w_7 + 0 + 0) + w_1 + w_{13} - w_{11} + w_{11} &= 29,942; \\ 20w_{12} - 8(w_7 + w_{13} + 0 + w_{11}) + 2(w_6 + w_8 + 0 + 0) + w_2 + w_{14} - w_{12} + 0 &= 8,923; \\ 20w_{13} - 8(w_8 + w_{14} + 0 + w_{12}) + 2(w_7 + w_9 + 0 + 0) + w_3 + w_{15} - w_{13} + w_{11} &= 8,923; \\ 20w_{14} - 8(w_9 + w_{15} + 0 + w_{13}) + 2(w_8 + w_{10} + 0 + 0) + w_4 + 0 - w_{14} + w_{12} &= 8,923; \\ 20w_{15} - 8(w_{10} + 0 + 0 + w_{14}) + 2(w_9 + 0 + 0 + 0) + w_5 - w_{15} - w_{15} + w_{13} &= 8,923; \end{aligned}$$

3. Составляем систему разрешающих уравнений (11)

$$A \cdot W = B,$$

где:

$$W = \begin{pmatrix} W_I \\ W_{II} \\ W_{III} \end{pmatrix}; \quad W_I = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}; \quad W_{II} = \begin{pmatrix} w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{pmatrix}; \quad W_{III} = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{14} \\ w_{15} \end{pmatrix}.$$

$$B = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} B_I \\ B_{II} \\ B_{III} \end{pmatrix}; \quad B_I = \begin{pmatrix} 8,923 \\ 39,784 \\ 15,484 \\ 15,484 \\ 15,484 \end{pmatrix}; \quad B_{II} = \begin{pmatrix} 8,923 \\ 15,484 \\ 15,484 \\ 15,484 \\ 15,484 \end{pmatrix}; \quad B_{III} = \begin{pmatrix} 30,730 \\ 8,923 \\ 8,923 \\ 8,923 \\ 8,923 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -8 & 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 21 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 21 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 21 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 20 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 21 & -8 & 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & -8 & 19 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 20 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & -8 & 19 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 19 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & -8 & 18 \end{pmatrix}$$

4. Решив систему уравнений $W = \frac{1}{D} A^{-1} \cdot B$, находим прогибы

$$W = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} W_I \\ W_{II} \\ W_{III} \end{pmatrix}; \quad W_I = \begin{pmatrix} 4,7248 \\ 10,1953 \\ 10,8289 \\ 9,5031 \\ 6,0543 \end{pmatrix}; \quad W_{II} = \begin{pmatrix} 7,6483 \\ 15,1094 \\ 17,4497 \\ 15,6801 \\ 9,8754 \end{pmatrix}; \quad W_{III} = \begin{pmatrix} 6,6796 \\ 11,2887 \\ 12,9028 \\ 11,5808 \\ 7,2364 \end{pmatrix}.$$

Разделив на цилиндрическую жесткость, получим (мм):

$$W = \begin{pmatrix} W_I \\ W_{II} \\ W_{III} \end{pmatrix}; \quad W_I = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 1,41 \\ 1,50 \\ 1,32 \\ 0,84 \end{pmatrix}; \quad W_{II} = \begin{pmatrix} 1,06 \\ 2,09 \\ 2,42 \\ 2,17 \\ 1,37 \end{pmatrix}; \quad W_{III} = \begin{pmatrix} 0,93 \\ 1,56 \\ 1,79 \\ 1,60 \\ 1,00 \end{pmatrix}.$$

5. Изогнутая срединная поверхность пластины изображена на *рис. 7*.

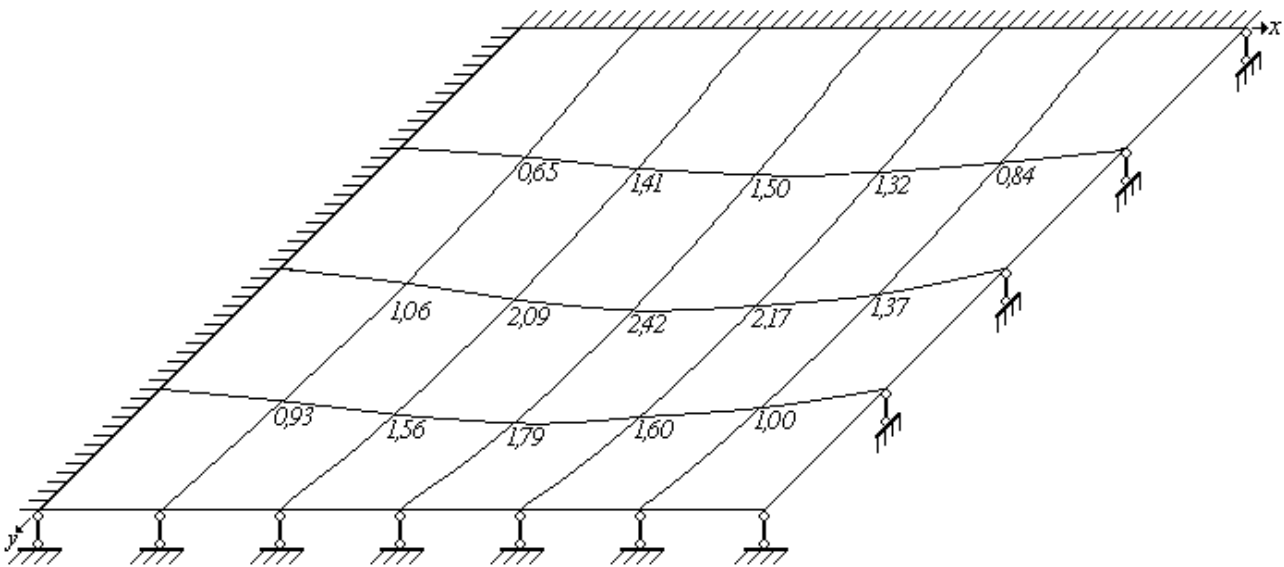


Рис. 7

6. Определяем значения изгибающих моментов. В форме метода конечных разностей (*рис. 2*):

$$M_{x(k)} = -D \left(\frac{w_b - 2w_2 + w_d}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_c - 2w_k + w_a}{\Delta y^2} \right);$$

$$M_{y(x)} = -D \left(\frac{w_c - 2w_k + w_a}{\Delta y^2} + \mu \frac{w_b - 2w_k + w_d}{\Delta x^2} \right)$$

Сечение $y = b/2$; $0 \leq x \leq a$.

$$M_{x(x=0)} = \frac{-1}{0,9^2} [(7,648 - 2 \cdot 0 + 7,648) + 0,16(0 - 2 \cdot 0 + 0)] = -18,88$$

$$M_{x(6)} = \frac{-1}{0,9^2} [(15,109 - 2 \cdot 7,648 + 0) + 0,16(6,680 - 2 \cdot 7,648 + 4,725)] = 1,00$$

$$M_{x(7)} = \frac{-1}{0,9^2} [(17,450 - 2 \cdot 15,109 + 7,648) + 0,16(11,289 - 2 \cdot 15,109 + 10,195)] = 8,05$$

$$M_{x(8)} = \frac{-1}{0,9^2} [(15,680 - 2 \cdot 17,450 + 15,109) + 0,16(12,903 - 2 \cdot 17,450 + 10,829)] = 7,29$$

$$M_{x(9)} = \frac{-1}{0,9^2} [(9,875 - 2 \cdot 15,680 + 17,450) + 0,16(11,581 - 2 \cdot 15,680 + 9,503)] = 7,03$$

$$M_{x(10)} = \frac{-1}{0,9^2} [(0 - 2 \cdot 9,875 + 15,680) + 0,16(7,236 - 2 \cdot 9,875 + 6,054)] = 6,31$$

$$M_{x(x=a)} = 0$$

Сечение $x = a/2$; $0 \leq y \leq b$.

$$M_{y(y=0)} = \frac{-1}{0,9^2} [(10,829 - 2 \cdot 0 + 10,829) + 0,16(0 - 2 \cdot 0 + 0)] = -26,84$$

$$M_{y(3)} = \frac{-1}{0,9^2} [(17,450 - 2 \cdot 10,829 + 0) + 0,16(9,503 - 2 \cdot 10,829 + 10,195)] = 5,58$$

$$M_{y(8)} = \frac{-1}{0,9^2} [(12,903 - 2 \cdot 17,450 + 10,829) + 0,16(15,680 - 2 \cdot 17,450 + 15,109)] = 14,54$$

$$M_{y(13)} = \frac{-1}{0,9^2} [(0 - 2 \cdot 12,903 + 17,450) + 0,16(11,581 - 2 \cdot 12,903 + 11,289)] = 10,90$$

$$M_{y(y=b)} = 0$$

Эпюры изгибающих моментов $M_x(y = b/2; 0 \leq x \leq a)$ и $M_y(x = a/2; 0 \leq y \leq b)$ изображены на рис. 8.

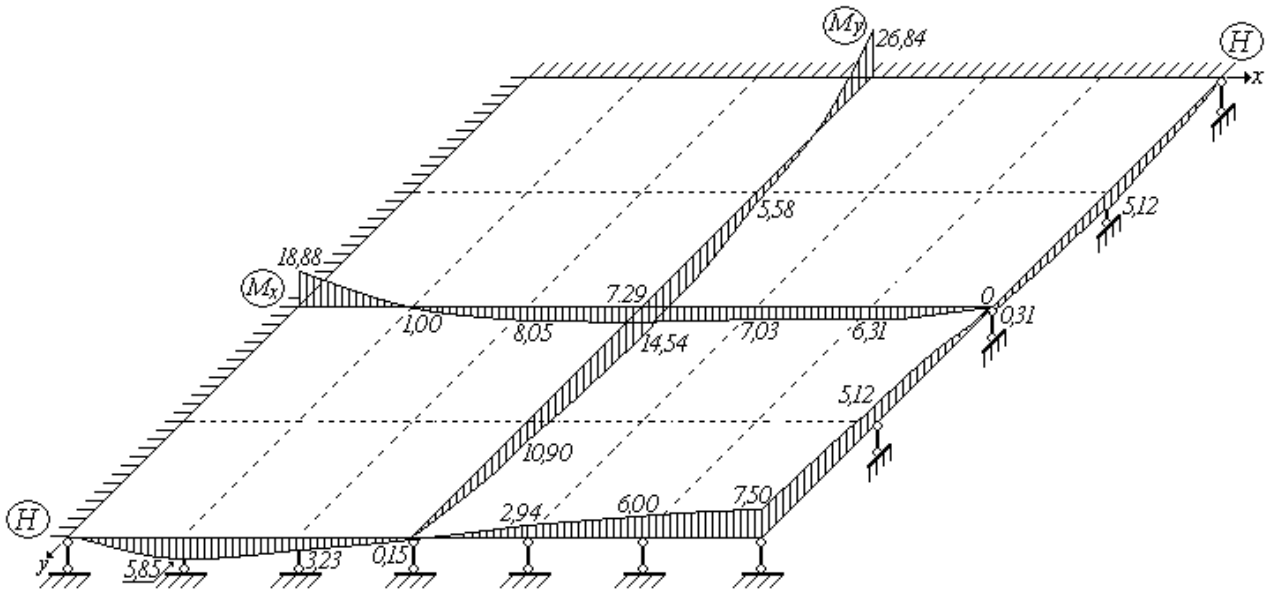


Рис. 8

7. Определяем значения максимальных нормальных напряжений.

$$\sigma_{X \max} = \frac{6 |M_{X \max}|}{h^2} = \frac{6 \cdot 18,88 \cdot 10^{-3}}{15^2 \cdot 10^{-4}} = 5,03 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{Y \max} = \frac{6 \cdot 26,84 \cdot 10^{-3}}{15^2 \cdot 10^{-4}} = 7,16 \text{ МПа}.$$

8. Определяем значение крутящего момента на шарнирно закрепленных гранях пластины. В форме метода конечных разностей (рис. 2):

$$H_{(k)} = -D(1 - \mu) \frac{(w_q + w_e) - (w_f + w_h)}{4\Delta^2}$$

Сечение $y = b$; $0 \leq x \leq a$

$$H_{(0)} = 0; \quad H_{(0,9)} = -(1 - 0,16) \frac{(-w_{12} + 0) - (w_{12} + 0)}{4 \cdot 0,9^2} = -\frac{0,07}{0,27} (-2 \cdot 11,2887) = 5,85;$$

$$H_{(1,8)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{13} + w_{11}) - (w_{13} - w_{11})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(6,6796 - 12,9028) = 3,23$$

$$H_{(2,7)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{14} + w_{12}) - (w_{14} - w_{12})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(11,2887 - 11,5808) = 0,15$$

$$H_{(3,6)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{15} + w_{13}) - (w_{15} - w_{13})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(12,9028 - 7,2364) = -2,94;$$

$$H_{(4,5)} = -\frac{0,07}{0,27} [(0 + w_{14}) - (0 - w_{14})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2 \cdot 11,5808 = -6,00;$$

$$H_{(5,4)} = -\frac{0,07}{0,27} [(w_{15} + w_{15}) - (-w_{15} - w_{15})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 4 \cdot 7,2364 = -7,50.$$

Сечение $x = a; \quad 0 \leq y \leq b$.

$$H_{(0)} = 0; \quad H_{(0,9)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{10} + 0) - (0 + w_{10})] = -\frac{0,07}{0,27} (-2 \cdot 9,8754) = 5,12;$$

$$H_{(1,8)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{15} + w_5) - (-w_5 + w_{15})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(6,0543 - 7,2364) = 0,31;$$

$$H_{(2,7)} = -\frac{0,07}{0,27} [(0 + w_{10}) - (-w_{10} + 0)] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2 \cdot 9,8754 = -5,12; \quad H_{(3,6)} = -7,50.$$

Эпюры крутящих моментов изображены на *рис. 8*.

9. Определяем значение наибольших касательных напряжений.

$$\tau_{xy \max} = \frac{6 \cdot H_{\max}}{h^2} = \frac{6 \cdot 7,50 \cdot 10^{-3}}{15^2 \cdot 10^{-4}} = 2 \text{ МПа}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 640 с.
2. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
4. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. Теория пластин и оболочек. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2012. – 114 с.
5. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т. . – 2011.
6. Демченко Б.М., Маяцкая И.А. Теория упругости с основами пластичности и ползучести. Часть 3. Балки, пластины, оболочки. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2015. – 169 с.