



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Методические указания
по выполнению расчетно-графической работы
по дисциплине «Теория расчета
пластин и оболочек» для обучающихся по
техническим направлениям подготовки
(специальностям)

**«Расчет на изгиб прямоугольной
пластины методом конечных
разностей»**

Авторы
Демченко Д.Б.,
Маяцкая И.А.,
Чепурненко А.С.,
Языев Б.М.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Расчет на изгиб прямоугольной пластины методом конечных разностей: методические указания предназначены для проведения практической работы по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек» для обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания включают задания для выполнения расчетно-графической работы для студентов, изучающих курс «Теория расчета пластин и оболочек».

Авторы

канд. техн. наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов»
Демченко Д.Б.

канд. техн. наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов»
Маяцкая И.А.

канд. техн. наук, ст. преп. кафедры «Сопротивление
материалов»
Чепурненко А.С.

докт. техн. наук, профессор кафедры «Сопротивление
материалов»
Языев Б.М.





Оглавление

Общие положения.	4
1. Постановка задачи.....	4
2. Метод конечных разностей.	5
Пример выполнения расчетно-графической работы.	11
Библиографический список.	17

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.

1. Постановка задачи.

Рассматривается тонкая прямоугольная пластина из изотропного материала (рис. 1), соответствующего закону Гука, нагруженная нормальными к срединной плоскости равномерно распределенной внешней нагрузкой интенсивностью q_F , нагрузкой от собственного веса q_G и двумя сосредоточенными силами F .

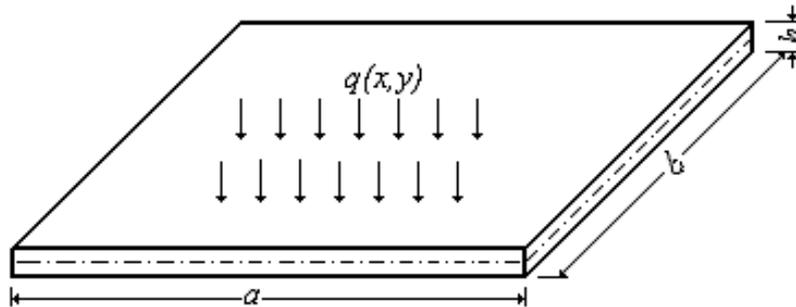


Рис. 1

При этом сосредоточенная сила рассматривается как предельный случай распределенной нагрузки на площади $dx \times dy$.

Размеры пластины заключены в пределах:

$$\left(\frac{1}{80} \div \frac{1}{100} \right) \leq \frac{h}{a} \leq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \right),$$

где h – толщина пластины;

a – меньший размер основания пластины.

Задача расчета пластины на изгиб сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения в частных производных

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D},$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (1)$$

Здесь:

$w=w(x,y)$ – функция прогибов срединной поверхности пластины;

$q(x,y) = q_F + q_G$ – интенсивность поверхностной нагрузки;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины;

$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ двойной оператор Лапласа над функцией $w=w(x,y)$.

Определение функции прогибов $w=w(x,y)$, одновременно удовлетворяющей уравнению (1) и граничным условиям на контуре пластины, представляет трудную задачу, точное решение которой можно получить только в некоторых частных случаях нагружения и условий закрепления пластин.

Для инженерной практики имеют особо важное значение приближенные, но достаточно общие методы решения таких задач. Для этого необходимо привести дифференциальное уравнение изгиба пластин к алгебраическому виду. В расчетно-графической работе дифференциальное уравнение (1) решается методом конечных разностей.

2. Метод конечных разностей.

Основой метода конечных разностей (МКР) является замена входящих в дифференциальное уравнение производных их приближенными выражениями через значение искомой функции прогибов в некоторых фиксированных точках, называемых узлами. Эта замена сводит решение дифференциального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются значения искомой функции прогибов в узловых точках.

Расчет изотропных пластин на изгиб сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения равновесия (1) относительно функции прогибов $w=w(x,y)$.

Как и в плоской задаче теории упругости, на пластину наносится прямоугольная сетка с шагом $dx \times dy$ и для каждого k -го узла, в котором $w_k \neq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, N$), составляется конечно-разностный аналог уравнения (1):

$$(\nabla^4 w)_k = \frac{q_k}{D}, \quad k=1,2,3,\dots,N. \quad (2)$$

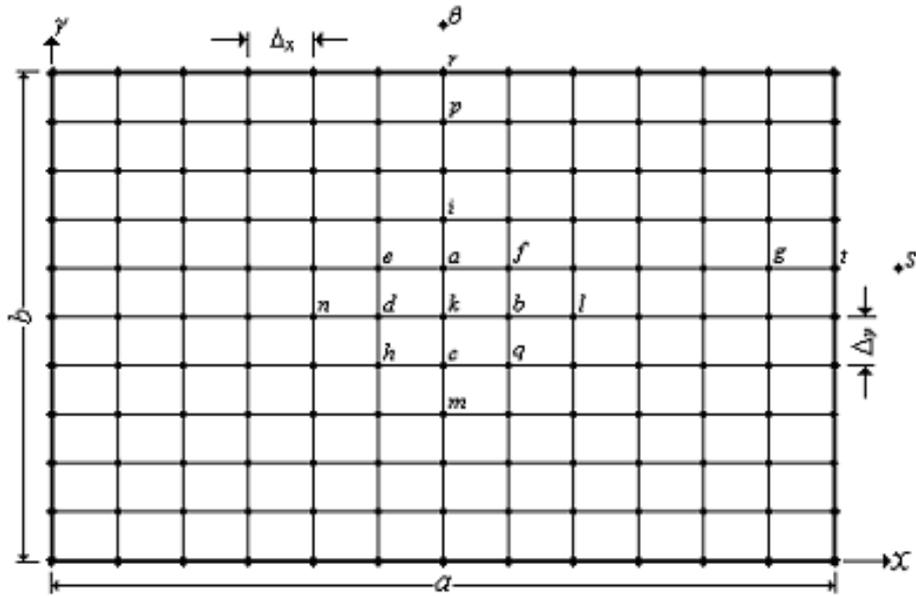


Рис. 2

В левую часть уравнения (2) входят четвертые производные функции прогибов w . По аналогии с плоской задачей теории упругости, для произвольной точки k сетки их можно выразить в конечных разностях следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_k = \frac{w_l - 4w_b + 6w_k - 4w_d + w_n}{(\Delta_x)^4}; \quad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_k = \frac{w_m - 4w_c + 6w_k - 4w_a + w_i}{(\Delta_y)^4};$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k = \frac{(w_q - 2w_b + w_f) - 2(w_c - 2w_k + w_a)}{(\Delta_x)^2 (\Delta_y)^2},$$

которые связывают прогибы тринадцати точек. Подставив значения производных в уравнение (2), получим:

$$\left. \begin{aligned} & (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)w_k - 4(1 + \alpha)(w_a + \alpha \cdot w_b + w_c + \alpha \cdot w_d) + \\ & + 2\alpha(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + \alpha^2 w_l + w_m + \alpha^2 w_n = \frac{q_k \Delta_y^4}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{\Delta_y^2}{\Delta_x^2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{\Delta_y^4}{\Delta_x^4}$.

Если в точке K действует сосредоточенная сила F_k , то ее представляют в виде: $F_k = q_k \Delta_x \cdot \Delta_y$. В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} & (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)w_k - 4(1 + \alpha)(w_a + \alpha w_b + w_c + \alpha w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + \\ & + w_i + \alpha^2 w_l + w_m + \alpha^2 w_n = \frac{F_k \alpha \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y}{D} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В случае квадратной сетки ($\Delta_x = \Delta_y = \Delta$) уравнения (3) и (4) принимают, соответственно, вид:

$$20w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + w_l + w_m + w_n = \frac{q_k \Delta^4}{D} \quad (5)$$

$$20w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + w_l + w_m + w_n = \frac{F_k \Delta^2}{D} \quad (6)$$

В расчетно-графической работе на пластину принимается квадратная сетка с шагом $\Delta x = \Delta y = \Delta$.

Уравнения (5) и (или) (6) составляются для каждого внутреннего узла сетки. При составлении этих уравнений для узлов сетки, расположенных вблизи контура пластины, в них войдут значения прогибов w в узлах на контуре пластины и фиктивные прогибы в законтурных узлах. Фиктивные прогибы в законтурных узлах необходимо выразить через прогибы узлов сетки внутри контура или на контуре, используя граничные условия.

Составим граничные условия для произвольной точки края пластины:

1. Для шарнирно опертого края пластины (например, $x = 0$, $x = a$) при жестких (не проседающих) опорах имеем (рис. 3) следующие граничные условия:
 $w_i = 0$; $w_{i+1} = -w_{i-1}$.

Здесь t (рис. 2) – номер контурного узла сетки.

2. Для жестко защемленного края пластины (например, $x = 0$, $x = a$) при жестких (не проседающих) опорах имеем (рис. 3) следующие граничные условия:
 $w_i = 0$; $w_{i+1} = w_{i-1}$.

Здесь t (рис. 4) – номер контурного узла сетки.

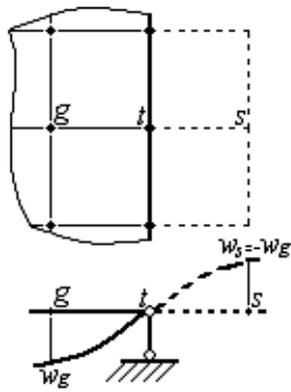


Рис. 3

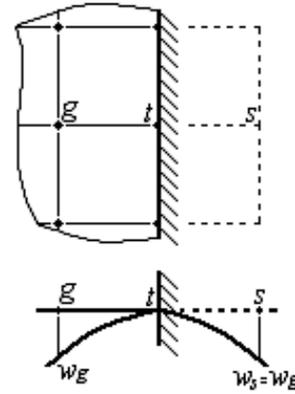


Рис. 4

С помощью равенств, выражающих граничные условия, либо исключают из уравнений (2) все законтурные ординаты, либо присоединяют эти равенства к уравнениям (2) в качестве дополнительных уравнений. В целом это дает замкнутую систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равных числу уравнений. Их решение дает числовое поле прогибов пластины w_k .

В итоге получаем замкнутую систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равных числу уравнений. Их решение дает числовое поле прогибов w_k ($k=1, 2, 3, \dots, N$).

В расчетно-графической работе исключаем из уравнений (2) все законтурные ординаты (фиктивные прогибы). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равных числу внутренних узлов сетки.

Внутренние усилия.

Имеем выражения для внутренних усилий и напряжений:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad H = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_{zx} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad Q_{zy} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

$$\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_y^{\max} = \frac{6M_y}{h^2}; \quad \tau_{xy}^{\max} = \frac{6H}{h^2}; \quad \tau_{zx}^{\max} = \frac{3Q_{zx}}{2h}; \quad \tau_{zy}^{\max} = \frac{3Q_{zy}}{2h}.$$

В выражения для внутренних усилий входят вторые производные функции прогибов w . По аналогии с плоской задачей теории упругости, для произвольной точки k сетки их можно выразить в конечных разностях следующими соотношениями

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k = \frac{w_b - 2w_k + w_d}{(\Delta_x)^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k = \frac{w_a - 2w_k + w_c}{(\Delta_y)^2};$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{(w_f + w_h) - (w_q + w_e)}{4\Delta_x \cdot \Delta_y}.$$

Подставив значения производных в выражения для усилий, получим:

$$\left. \begin{aligned} M_{x(k)} &= -D \left(\frac{w_b - 2w_k + w_d}{\Delta_x^2} + \mu \frac{w_a - 2w_k + w_c}{\Delta_y^2} \right); \\ M_{y(k)} &= -D \left(\frac{w_{a1} - 2w_k + w_{c1}}{\Delta_y^2} + \mu \frac{w_b - 2w_k + w_d}{\Delta_x^2} \right); \\ H_{(k)} &= -D(1 - \mu) \frac{(w_f + w_h) - (w_{q1} + w_e)}{4\Delta_x \cdot \Delta_y}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{zx(k)} &= -D \left[\frac{w_l - 2(w_b - w_d) - w_n}{2\Delta_x^3} + \frac{w_f - w_e - 2(w_b - w_d) + w_{q1} - w_h}{2\Delta_x \Delta_y^2} \right]; \\ Q_{zy(k)} &= -D \left[\frac{w_i - 2(w_a - w_c) - w_n}{2\Delta_y^3} + \frac{w_{f1} - w_q - 2(w_{a1} - w_{c1}) + w_{e1} - w_h}{2\Delta_x^2 \Delta_y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Напряжения.

$$\sigma_{x(k)}^{\max} = \frac{6M_{x(k)}}{h^2}; \quad \sigma_{y(k)}^{\max} = \frac{6M_{y(k)}}{h^2}; \quad \tau_{xy(k)}^{\max} = \frac{6H_{(k)}}{h^2}; \quad \tau_{zx(k)}^{\max} = \frac{3Q_{zx(k)}}{2h}; \quad \tau_{zy(k)}^{\max} = \frac{3Q_{zy(k)}}{2h}. \quad (9)$$

Правая часть уравнений (2) состоит из нагрузок:

$$q_{(k)} = q_{G(k)} + q_{F(k)} + \left(\frac{F}{\Delta_x \cdot \Delta_y} \right)_k. \quad (10)$$

Здесь

$q_{G(k)} = \gamma \cdot h$ – собственный вес пластины, приходящийся на единицу площади поверхности пластины. Вводится с коэффициентом 1 ;

$q_{F(k)}$ – интенсивность заданной нагрузка, значение которой в узлах сетки зависит от размера грузовой площади, приходящейся на рассматриваемый узел. Например, для пластины (рис. 5), где заштрихованная область – область приложения нагрузки q_F :

- в узлах №№ 1, 2, 3, 4, 10, 15 нагрузка вводится с коэффициентом $0,5$; в узле №5 – с коэффициентом $0,25$; в узлах №№ 6 ÷ 9, 11 ÷ 14 – с коэффициентом 1 ;

$F_{(k)}$ – внешняя сосредоточенная сила, приложенная в k -ом узле сетки.

F вводится с коэффициентом 1 в узлах, где приложена, в остальных – 0 .

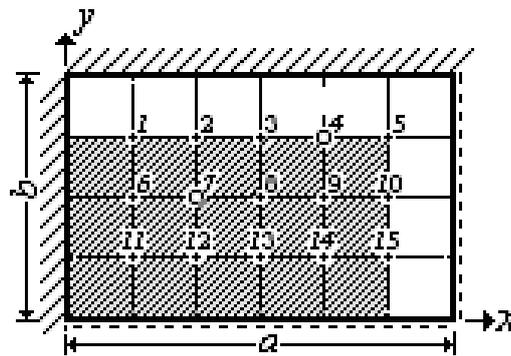


Рис. 5

Для схемы пластины (рис. 5) правая часть системы уравнений (2) будет иметь вид:

$$q_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma \cdot h + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot q_F + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F$$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Числовые данные для расчета пластины (рис. 6):

$$a = 5,4\text{м}; \quad b = 3,6\text{м}; \quad h = 0,15\text{м}; \quad F = 30\text{кН}; \quad q = 20\text{кН} / \text{м}^2; \quad \gamma = 24\text{кН} / \text{м}^3;$$

$$E = 25 \cdot 10^3 \text{МПа}; \quad \mu = 1/6; \quad m = 6; \quad n = 4; \quad \Delta x = \frac{a}{m} = 0,9\text{м}; \quad \Delta y = \frac{b}{n} = 0,9\text{м}.$$

Собственный вес пластины, приходящийся на 1 м² поверхности, равен:

$$q_G = \gamma \cdot h = 24 \cdot 0,15 = 3,6\text{кН/м}^2$$

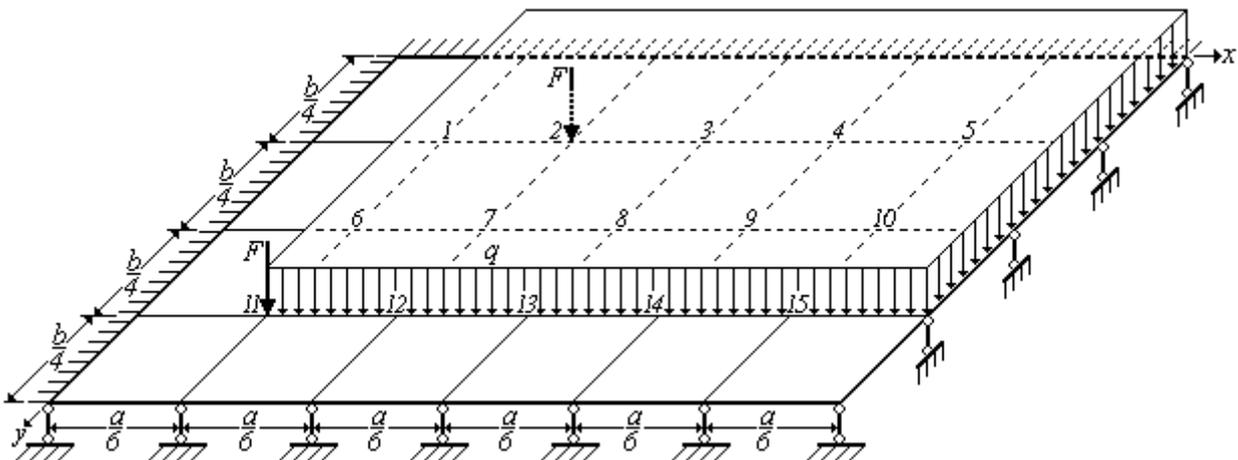


Рис. 6

Цилиндрическая жесткость равна:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 15^3 \cdot 10^{-6}}{12(1-0,16^2)} = 7216\text{кНм}$$

Дифференциальное уравнение изгиба пластины (1) в форме метода конечных разностей (рис. 2) при квадратной сетке, нагруженной собственным весом q_G , постоянной распределенной нагрузкой q_F (площадь нагружения на схеме пластины заштрихована – рис. 3) и сосредоточенной силой F (узлы сетки, где приложена сила, отмечены «значком» \diamond – узел 2, узел 11) имеет вид:

$$20w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_q + w_h) + w_i + w_l + w_m + w_n =$$

$$= \frac{q_{F(k)} \cdot \Delta^4}{D} + \frac{q_{G(k)} \cdot \Delta^4}{D} + \frac{F_{(k)} \cdot \Delta^2}{D}.$$

1. Составляем матрицы исходной нагрузки, с учетом схемы нагружения.

Суммируя все виды нагрузки, действующие на пластину, получим:

$$\frac{1}{D} [(q_{F(k)} + q_{G(k)}) \cdot \Delta^4 + F_{(k)} \cdot \Delta^2] = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 8,923 & 39,784 & 15,484 & 15,484 & 15,484 \\ 8,923 & 15,484 & 15,484 & 15,484 & 15,484 \\ 29,942 & 8,923 & 8,923 & 8,923 & 8,923 \end{vmatrix},$$

где

$$q_F = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot 20; \quad q_G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 3,6; \quad F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot 30.$$

2. Составляем конечно-разностные уравнения для каждого внутреннего узла сетки, с учетом граничных условий:

$$\begin{aligned} 20w_1 - 8(0 + w_2 + w_6 + 0) + 2(0 + w_7 + 0 + 0) + w_1 + w_3 + w_{11} + w_1 &= 8,923; \\ 20w_2 - 8(w_3 + w_7 + w_1) + 2(0 + 0 + w_8 + w_6) + w_2 + w_4 + w_{12} + 0 &= 39,784; \\ 20w_3 - 8(0 + w_4 + w_8 + w_2) + 2(0 + 0 + w_9 + w_7) + w_3 + w_5 + w_{13} + w_1 &= 15,484; \\ 20w_4 - 8(0 + w_5 + w_9 + w_3) + 2(0 + 0 + w_{10} + w_8) + w_4 + 0 + w_4 + w_2 &= 15,484; \\ 20w_5 - 8(0 + 0 + w_{10} + w_4) + 2(0 + 0 + 0 + w_9) + w_5 + (-w_5) + w_{15} + w_3 &= 15,484; \\ 20w_6 - 8(w_1 + w_7 + w_{11} + 0) + 2(0 + w_2 + w_{12} + 0) + 0 + w_8 + 0 + w_6 &= 8,923; \\ 20w_7 - 8(w_2 + w_8 + w_{12} + w_6) + 2(w_1 + w_3 + w_{13} + w_{11}) + 0 + w_9 + 0 + 0 &= 15,484; \\ 20w_8 - 8(w_3 + w_9 + w_{13} + w_7) + 2(w_2 + w_4 + w_{14} + w_{12}) + 0 + w_{10} + 0 + w_6 &= 15,484; \\ 20w_9 - 8(w_4 + w_{10} + w_{14} + w_8) + 2(w_3 + w_5 + w_{15} + w_{13}) + 0 + 0 + 0 + w_7 &= 15,484; \\ 20w_{10} - 8(w_5 + 0 + w_{15} + w_9) + 2(w_4 + 0 + 0 + w_{14}) + 0 - w_{10} + 0 + w_8 &= 15,484; \\ 20w_{11} - 8(w_6 + w_{12} + 0 + 0) + 2(0 + w_7 + 0 + 0) + w_1 + w_{13} - w_{11} + w_{11} &= 29,942; \\ 20w_{12} - 8(w_7 + w_{13} + 0 + w_{11}) + 2(w_6 + w_8 + 0 + 0) + w_2 + w_{14} - w_{12} + 0 &= 8,923; \\ 20w_{13} - 8(w_8 + w_{14} + 0 + w_{12}) + 2(w_7 + w_9 + 0 + 0) + w_3 + w_{15} - w_{13} + w_{11} &= 8,923; \\ 20w_{14} - 8(w_9 + w_{15} + 0 + w_{13}) + 2(w_8 + w_{10} + 0 + 0) + w_4 + 0 - w_{14} + w_{12} &= 8,923; \\ 20w_{15} - 8(w_{10} + 0 + 0 + w_{14}) + 2(w_9 + 0 + 0 + 0) + w_5 - w_{15} - w_{15} + w_{13} &= 8,923; \end{aligned}$$

3. Составляем систему разрешающих уравнений (11)

$$A \cdot W = B,$$

где:

$$W = \begin{pmatrix} W_I \\ W_{II} \\ W_{III} \end{pmatrix}; \quad W_I = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}; \quad W_{II} = \begin{pmatrix} w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{pmatrix}; \quad W_{III} = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{14} \\ w_{15} \end{pmatrix}.$$

$$B = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} B_I \\ B_{II} \\ B_{III} \end{pmatrix}; \quad B_I = \begin{pmatrix} 8,923 \\ 39,784 \\ 15,484 \\ 15,484 \\ 15,484 \end{pmatrix}; \quad B_{II} = \begin{pmatrix} 8,923 \\ 15,484 \\ 15,484 \\ 15,484 \\ 15,484 \end{pmatrix}; \quad B_{III} = \begin{pmatrix} 30,730 \\ 8,923 \\ 8,923 \\ 8,923 \\ 8,923 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -8 & 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 21 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 21 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 21 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 20 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 21 & -8 & 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & -8 & 19 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 20 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & -8 & 19 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 19 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & -8 & 18 \end{pmatrix}$$

4. Решив систему уравнений $W = \frac{1}{D} A^{-1} \cdot B$, находим прогибы

$$W = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} W_I \\ W_{II} \\ W_{III} \end{pmatrix}; \quad W_I = \begin{pmatrix} 4,7248 \\ 10,1953 \\ 10,8289 \\ 9,5031 \\ 6,0543 \end{pmatrix}; \quad W_{II} = \begin{pmatrix} 7,6483 \\ 15,1094 \\ 17,4497 \\ 15,6801 \\ 9,8754 \end{pmatrix}; \quad W_{III} = \begin{pmatrix} 6,6796 \\ 11,2887 \\ 12,9028 \\ 11,5808 \\ 7,2364 \end{pmatrix}.$$

Разделив на цилиндрическую жесткость, получим (мм):

$$W = \begin{pmatrix} W_I \\ W_{II} \\ W_{III} \end{pmatrix}; \quad W_I = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 1,41 \\ 1,50 \\ 1,32 \\ 0,84 \end{pmatrix}; \quad W_{II} = \begin{pmatrix} 1,06 \\ 2,09 \\ 2,42 \\ 2,17 \\ 1,37 \end{pmatrix}; \quad W_{III} = \begin{pmatrix} 0,93 \\ 1,56 \\ 1,79 \\ 1,60 \\ 1,00 \end{pmatrix}.$$

5. Изогнутая срединная поверхность пластины изображена на *рис. 7*.

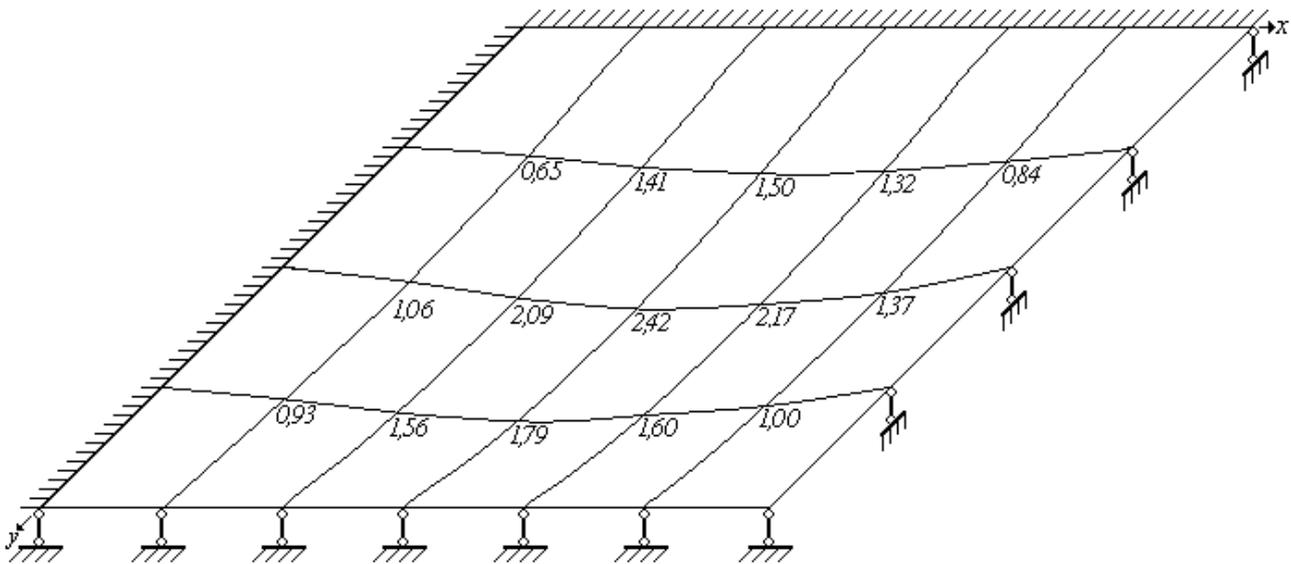


Рис. 7

6. Определяем значения изгибающих моментов. В форме метода конечных разностей (*рис. 2*):

$$M_{x(k)} = -D \left(\frac{w_b - 2w_2 + w_d}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_c - 2w_k + w_a}{\Delta y^2} \right);$$

$$M_{y(x)} = -D \left(\frac{w_c - 2w_k + w_a}{\Delta y^2} + \mu \frac{w_b - 2w_k + w_d}{\Delta x^2} \right)$$

Сечение $y = b/2$; $0 \leq x \leq a$.

$$M_{x(x=0)} = \frac{-1}{0,9^2} [(7,648 - 2 \cdot 0 + 7,648) + 0,16(0 - 2 \cdot 0 + 0)] = -18,88$$

$$M_{x(6)} = \frac{-1}{0,9^2} [(15,109 - 2 \cdot 7,648 + 0) + 0,16(6,680 - 2 \cdot 7,648 + 4,725)] = 1,00$$

$$M_{x(7)} = \frac{-1}{0,9^2} [(17,450 - 2 \cdot 15,109 + 7,648) + 0,16(11,289 - 2 \cdot 15,109 + 10,195)] = 8,05$$

$$M_{x(8)} = \frac{-1}{0,9^2} [(15,680 - 2 \cdot 17,450 + 15,109) + 0,16(12,903 - 2 \cdot 17,450 + 10,829)] = 7,29$$

$$M_{x(9)} = \frac{-1}{0,9^2} [(9,875 - 2 \cdot 15,680 + 17,450) + 0,16(11,581 - 2 \cdot 15,680 + 9,503)] = 7,03$$

$$M_{x(10)} = \frac{-1}{0,9^2} [(0 - 2 \cdot 9,875 + 15,680) + 0,16(7,236 - 2 \cdot 9,875 + 6,054)] = 6,31$$

$$M_{x(x=a)} = 0$$

Сечение $x = a/2$; $0 \leq y \leq b$.

$$M_{y(y=0)} = \frac{-1}{0,9^2} [(10,829 - 2 \cdot 0 + 10,829) + 0,16(0 - 2 \cdot 0 + 0)] = -26,84$$

$$M_{y(3)} = \frac{-1}{0,9^2} [(17,450 - 2 \cdot 10,829 + 0) + 0,16(9,503 - 2 \cdot 10,829 + 10,195)] = 5,58$$

$$M_{y(8)} = \frac{-1}{0,9^2} [(12,903 - 2 \cdot 17,450 + 10,829) + 0,16(15,680 - 2 \cdot 17,450 + 15,109)] = 14,54$$

$$M_{y(13)} = \frac{-1}{0,9^2} [(0 - 2 \cdot 12,903 + 17,450) + 0,16(11,581 - 2 \cdot 12,903 + 11,289)] = 10,90$$

$$M_{y(y=b)} = 0$$

Эпюры изгибающих моментов $M_x(y = b/2; 0 \leq x \leq a)$ и $M_y(x = a/2; 0 \leq y \leq b)$ изображены на *рис. 8*.

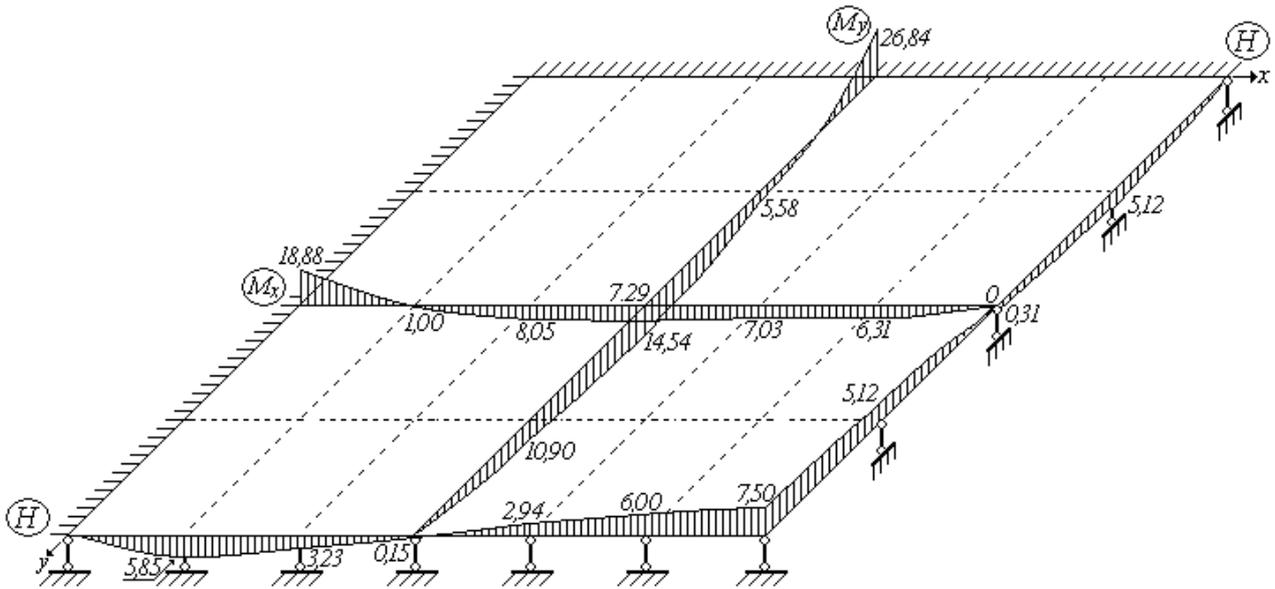


Рис. 8

7. Определяем значения максимальных нормальных напряжений.

$$\sigma_{X \max} = \frac{6 |M_{X \max}|}{h^2} = \frac{6 \cdot 18,88 \cdot 10^{-3}}{15^2 \cdot 10^{-4}} = 5,03 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{Y \max} = \frac{6 \cdot 26,84 \cdot 10^{-3}}{15^2 \cdot 10^{-4}} = 7,16 \text{ МПа}.$$

8. Определяем значение крутящего момента на шарнирно закрепленных гранях пластины. В форме метода конечных разностей (рис. 2):

$$H_{(k)} = -D(1 - \mu) \frac{(w_q + w_e) - (w_f + w_h)}{4\Delta^2}.$$

Сечение $y = b$; $0 \leq x \leq a$.

$$H_{(0)} = 0; \quad H_{(0,9)} = -(1 - 0,16) \frac{(-w_{12} + 0) - (w_{12} + 0)}{4 \cdot 0,9^2} = -\frac{0,07}{0,27} (-2 \cdot 11,2887) = 5,85;$$

$$H_{(1,8)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{13} + w_{11}) - (w_{13} - w_{11})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(6,6796 - 12,9028) = 3,23$$

$$H_{(2,7)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{14} + w_{12}) - (w_{14} - w_{12})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(11,2887 - 11,5808) = 0,15$$

$$H_{(3,6)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{15} + w_{13}) - (w_{15} - w_{13})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(12,9028 - 7,2364) = -2,94;$$

$$H_{(4,5)} = -\frac{0,07}{0,27} [(0 + w_{14}) - (0 - w_{14})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2 \cdot 11,5808 = -6,00;$$

$$H_{(5,4)} = -\frac{0,07}{0,27} [(w_{15} + w_{15}) - (-w_{15} - w_{15})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 4 \cdot 7,2364 = -7,50.$$

Сечение $x = a; \quad 0 \leq y \leq b$.

$$H_{(0)} = 0; \quad H_{(0,9)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{10} + 0) - (0 + w_{10})] = -\frac{0,07}{0,27} (-2 \cdot 9,8754) = 5,12;$$

$$H_{(1,8)} = -\frac{0,07}{0,27} [(-w_{15} + w_5) - (-w_5 + w_{15})] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2(6,0543 - 7,2364) = 0,31;$$

$$H_{(2,7)} = -\frac{0,07}{0,27} [(0 + w_{10}) - (-w_{10} + 0)] = -\frac{0,07}{0,27} \cdot 2 \cdot 9,8754 = -5,12; \quad H_{(3,6)} = -7,50.$$

Эпюры крутящих моментов изображены на *рис. 8*.

9. Определяем значение наибольших касательных напряжений.

$$\tau_{xy \max} = \frac{6 \cdot H_{\max}}{h^2} = \frac{6 \cdot 7,50 \cdot 10^{-3}}{15^2 \cdot 10^{-4}} = 2 \text{ МПа}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 640 с.
2. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
4. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. Теория пластин и оболочек. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2012. – 114 с.
5. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т. . – 2011.
6. Демченко Б.М., Маяцкая И.А. Теория упругости с основами пластичности и ползучести. Часть 3. Балки, пластины, оболочки. Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун-т., 2015. – 169 с.