



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

## **Практикум**

по дисциплинам

### **«Сопротивление материалов» и «Техническая механика»**

Методические указания по выполнению  
расчетно-графической работы на тему

### **«Расчет балок на прочность»**

Авторы  
Еремин В.Д.

Ростов-на-Дону, 2024

## Аннотация

Методические указания содержат основные теоретические положения, примеры решения типовых задач и порядок выполнения студентами расчетно – графической работы на тему «Расчет балок на прочность» по дисциплинам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика».

Предназначены для подготовки бакалавров и специалистов всех форм подготовки (очная и заочная), обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

## Автор

к. т. н., профессор кафедры «Сопротивление материалов»  
Еремин В.Д.



## Оглавление

<b>РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ .....</b>	<b>4</b>
Тема 1. Основные теоретические положения .....	4
1.1. Нормальные напряжения при изгибе .....	4
1.2. Касательные напряжения при изгибе.....	10
1.3. Главные напряжения при изгибе.....	16
Тема 2. Примеры расчета на прочность статически определимых балок .....	18
2.1. Задача №1. Расчет на прочность статически определимой деревянной консольной балки .....	18
2.2. Задача №2. Расчет на прочность статически определимой деревянной балки на двух шарнирных опорах.....	27
2.3. Задача №3. Расчет на прочность статически определимой стальной балки с промежуточным шарниром .....	38
<b>Контрольные вопросы к расчётно-графической работе на тему « РАСЧЁТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ » .....</b>	<b>62</b>
<b>Рекомендуемая литература .....</b>	<b>63</b>

## РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

### Тема 1. Основные теоретические положения

#### 1.1. Нормальные напряжения при изгибе

При действии на балку внешней нагрузки, перпендикулярной геометрической оси балки и расположенной в одной из главных плоскостей инерции каждого поперечного сечения балки, в ее сечениях, в общем случае, возникают одновременно изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки вызывает нормальные напряжения, которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \quad (1.1)$$

где

$\sigma$  – нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки;

$M_y$  – изгибающий момент в исследуемом поперечном сечении балки;

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения относительно главной оси  $y$ ;

$z$  – координата точки поперечного сечения, в которой определяется нормальное напряжение.

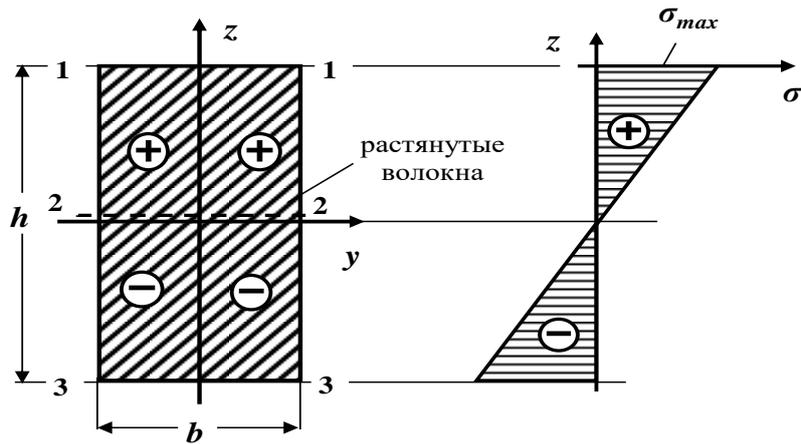
Формула (1.1) позволяет определять величину нормального напряжения  $\sigma$  в любой точке поперечного сечения балки.

По формуле (1.1) можно определять абсолютную величину нормального напряжения  $\sigma$ , а его знак устанавливать в зависимости от того, в сжатой или растянутой зоне находится рассматриваемая точка. В этом случае величины  $M_y$  и  $z$  берутся по абсолютным значениям.

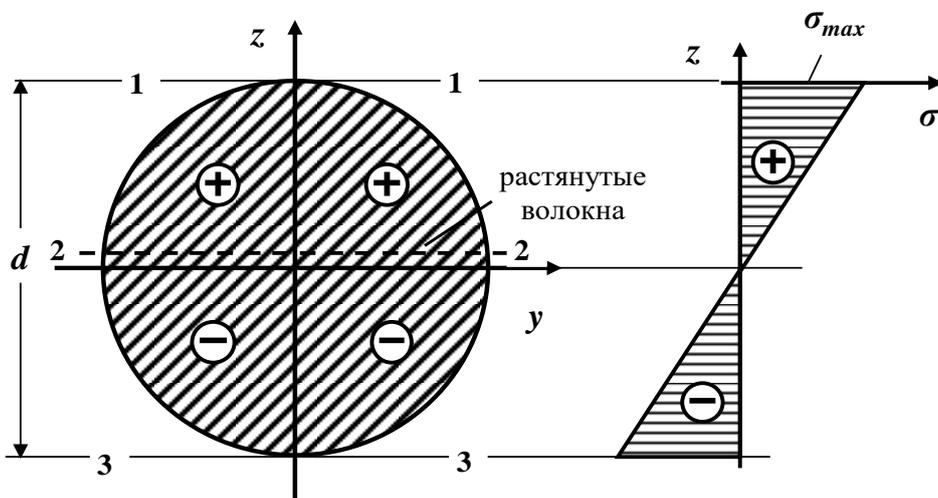
Если же учитывать знаки изгибающего момента  $M_y$  и координаты  $z$ , то формула (1.1) позволяет определять численное значение нормального напряжения  $\sigma$  и его знак.

*В этом случае изгибающий момент  $M_y$  считается положительным, если он вызывает растяжение в точках первой четверти поперечного сечения балки.*

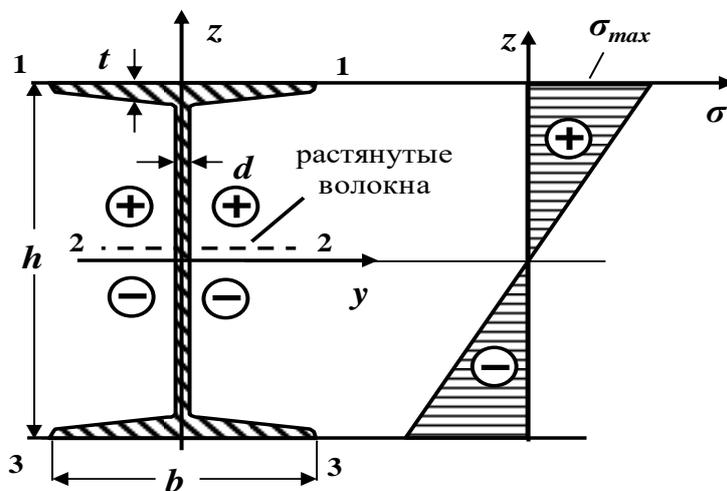
Определим нормальные напряжения в характерных точках поперечных сечений балки, лежащих на линиях **1–1**, **2–2** и **3–3** (рис. 1.1 ÷ 1.3).



**Рис. 1.1. Эпюра нормальных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки**



**Рис. 1.2. Эпюра нормальных напряжений по высоте круглого поперечного сечения балки**



**Рис. 1.3. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки**

## Расчет балок на прочность

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, т.е. наиболее удаленных от главной оси ( $z = z_{max}$ ), возникают наибольшие нормальные напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} \quad (1.2)$$

Обозначая  $\frac{I_y}{z_{max}} = W_y$ , получаем формулу для определения максимальных напряжений в произвольном сечении балки

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} \quad (1.3)$$

В этих формулах

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения относительно оси  $y$ ;

$z_{max}$  – максимальное расстояние, измеряемое по оси  $z$  от главной оси  $y$  до наиболее удаленной точки поперечного сечения;

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ .

*Опасными точками поперечного сечения называются точки, напряжения в которых достигают наибольших по величине значений.*

В точках **2 – 2** поперечного сечения балки, лежащих на главной оси  $y$  (на нейтральной оси), нормальные напряжения равны нулю.

*Поэтому, нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю.*

Нейтральная ось при плоском изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярна к силовой плоскости.

Если нейтральная ось является осью симметрии поперечного сечения балки, то  $z_{max} = \pm \frac{h}{2}$ , следовательно, нормальные напряжения в опасных точках поперечного сечения, в этом случае, будут равны

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_y}{W_y}$$

где

$h$  – высота поперечного сечения балки;

$W_y = \frac{I_y}{\frac{h}{2}}$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$  (оси симметрии).

Максимальное напряжение в балке возникает в сечении, где изгибающий момент достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

*Сечение, в котором изгибающий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение  $M_{max}$ , называется опасным сечением балки по нормальным напряжениям.*

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки

## Расчет балок на прочность

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \quad (1.4)$$

Построим эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  для некоторых типов поперечных сечений.

*График, изображающий закон изменения напряжений  $\sigma$  по высоте поперечного сечения, называется эпюрой нормальных напряжений.*

Как следует из формулы (1.1), нормальные напряжения  $\sigma$  зависят линейно от координаты  $z$ , и по высоте поперечного сечения закон изменения нормальных напряжений представляет прямую линию.

На рис. 1.1 ÷ 1.3 показаны в общем виде эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  для прямоугольного, круглого и двутаврового поперечных сечений балки /для случая растянутых верхних волокон/.

### Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям

Размеры элементов конструкций (поперечные сечения и длина) необходимо подбирать такими, чтобы под действием внешних нагрузок они не разрушались и не получали деформаций выше допустимого предела.

В условиях массового строительства также возникает проблема экономии строительных материалов при полной гарантии прочности конструкций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в ее элементах, были ниже предельных значений. Поэтому при проектировании необходимо правильно установить напряжения, обеспечивающие безопасность конструкции.

В настоящее время применяются, в основном, два метода расчета на прочность: *по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям*. Оба метода преследуют одну цель – обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Первый метод еще недавно широко использовался в строительном деле и частично используется в настоящее время. По этому методу размеры элементов конструкции должны быть такими, чтобы во всех сечениях напряжения, вызываемые нагрузкой, не превышали допускаемой величины.

Второй, более прогрессивный метод расчета по предельным состояниям был разработан советскими учеными. В настоящее время он является основным методом, применяемым при проектировании сооружений в нашей стране. Нормами установлены три вида предельных состояний. В сопротивлении материалов рассматривается главным образом первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу допускаемых напряжений* имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (1.5)$$

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу предельных состояний* имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B. \quad (1.6)$$

В этих формулах

$\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{\max}$  – наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения относительно главной оси  $y$  (горизонтальная ось);

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение материала элементов конструкции;

$R^H$  – нормативное сопротивление материала элементов конструкции;

$n$  – коэффициент перегрузки;

$k$  – коэффициент однородности материала элементов конструкции;

$m_B$  – коэффициент условий работы элементов конструкции.

Величина допускаемых напряжений  $[\sigma]$  назначается в зависимости от материала, из которого изготовлена балка.

Пластичные материалы обладают примерно равными пределами текучести на сжатие и на растяжение, поэтому  $[\sigma_c] = [\sigma_p] = [\sigma]$ .

Для хрупких материалов, у которых прочность на сжатие выше, чем на растяжение, допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, как правило, не равны между собой  $[\sigma_c] \geq [\sigma_p]$  и, поэтому, необходимо записывать два условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} \cdot z_{\max_p} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} \cdot z_{\max_c} \leq [\sigma_c],$$

где

$z_{\max_p}$  и  $z_{\max_c}$  – расстояния (координаты) от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон.

Величина  $R$ , равная

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B, \quad (1.7)$$

называется *расчетным сопротивлением* материала элементов конструкции.

В зависимости от цели расчета различают три вида расчетов на прочность:

1). Проектный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ). По заданной нагрузке определяют наибольший изгибающий момент  $M_{\max}$  (по эпюре изгибающих моментов) и из условия прочности (1.5) или (1.6) находят величину требуемого момента сопротивления поперечного сечения по формулам:

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

## Расчет балок на прочность

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (1.8)$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max} \cdot n}{R^H \cdot k \cdot m_B} \quad (1.9)$$

По полученной величине требуемого момента сопротивления  $W_y^{\text{треб}}$  подбирают размеры поперечных сечений балки таким образом, чтобы действительный момент сопротивления  $W_y$  примерно равнялся бы требуемому  $W_y \approx W_y^{\text{треб}}$ .

Как известно, момент сопротивления  $W_y$  для простых поперечных сечений определяется по формулам через размеры сечения или по сортаментам для прокатных профилей.

Подбор сечения производят следующим образом:

- если балка проектируется из прокатного профиля, то необходимый номер профиля берется по таблицам сортамента прокатных сталей в зависимости от величины требуемого момента сопротивления  $W_y^{\text{треб}}$ ;
- в случае подбора круглого сплошного сечения балки диаметром  $d$ , известно, что момент сопротивления  $W_y$  определяется по формуле

$$W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Приравнивая  $W_y \approx W_y^{\text{треб}}$ , находят требуемый диаметр балки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_y^{\text{треб}}}{\pi}}.$$

- в случае подбора прямоугольного поперечного сечения балки размером  $b \times h$ , предварительно задаются соотношением  $\beta = h/b$ , т.е.  $h = \beta \cdot b$ .

Известно, что момент сопротивления  $W_y$  для прямоугольного поперечного сечения балки определяется по формуле

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (\beta \cdot b)^2}{6} = \frac{\beta^2 \cdot b^3}{6}.$$

Приравнивая  $W_y \approx W_y^{\text{треб}}$ , находят требуемые размеры балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_y^{\text{треб}}}{\beta^2}}; \rightarrow h = \beta \cdot b.$$

2). Определение допустимой нагрузки. В этом случае известны размеры поперечного сечения ( $W_y$ ) и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ).

Из условия прочности (1.5) или (1.6) находят наибольшую допускаемую величину изгибающего момента:

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_y \cdot [\sigma]. \quad (1.10)$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_y \cdot R^H \cdot k \cdot m_B \cdot 1/n. \quad (1.11)$$

По найденному допускаемому значению изгибающего момента  $[M_{\max}]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

3). Проверочный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка, размеры поперечного сечения ( $W_y$ ) и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ).

Требуется определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в элементах конструкции, и сравнить с допускаемым напряжением, т.е. проверить выполнение условия прочности (1.5) или (1.6):

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B.$$

## 1.2. Касательные напряжения при изгибе

При плоском изгибе в поперечных сечениях балки наряду с нормальными напряжениями  $\sigma$ , вызванными изгибающим моментом  $M_y$ , возникают и касательные напряжения  $\tau$ , вызванные поперечными силами  $Q$ . При этом предполагают, что по ширине поперечного сечения балки касательные напряжения  $\tau$  распределяются равномерно, и пренебрегают его искривлениями.

Касательные напряжения  $\tau$  в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки определяются по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{b(z) J_y}, \quad (1.12)$$

где

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_y^{\text{отс}}$  – абсолютное значение статического момента «отсеченной» части поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ ;

$b(z)$  – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки;

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения балки.

$z$  – координата точки поперечного сечения, в которой определяется касательное напряжение.

«Отсеченной» частью поперечного сечения балки является часть поперечного сечения, расположенная по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси (главной оси  $y$ ).

В любом поперечном сечении балки статический момент отсеченной части  $S_y^{\text{отс}}$  для самых отдаленных от нейтральной оси (главной оси  $y$ ) точек сечения равен нулю, поэтому касательные напряжения  $\tau$  в них равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси (главной оси  $y$ ),  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2} = S_{\text{max}}$ , следовательно, касательные напряжения в них достигают максимальных значений (*опасные точки*). Здесь  $S_y^{1/2}$  – статический момент половины поперечного сечения.

*Сечение, в котором поперечная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение, называется опасным сечением балки по касательным напряжениям.*

Таким образом, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y}. \quad (1.13)$$

Рассмотрим распределение касательных напряжений при изгибе по высоте некоторых типов поперечных сечений (эпюры  $\tau$ ).

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения.

*График, изображающий закон изменения напряжений  $\tau$  по высоте поперечного сечения, называется эпюрой касательных напряжений.*

Из формулы (1.12) видно, что касательные напряжения в балке изменяются по

высоте поперечного сечения по тому же закону, что  $\frac{S_y^{\text{отс}}}{b(z)}$ .

### а). Прямоугольное поперечное сечение

В прямоугольном сечении  $b(z) = b = \text{const}$ , поэтому закон распределения будет таким же, что и для статического момента «отсеченной» части поперечного сечения  $S_y^{\text{отс}}$ .

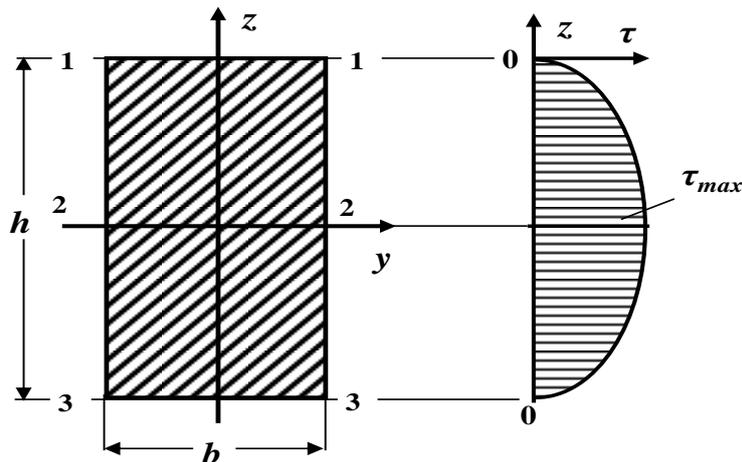
Касательные напряжения в произвольной точке прямоугольного поперечного сечения балки с координатой  $z$  вычисляются по формуле

## Расчет балок на прочность

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{b(z) J_y} = \frac{6Q}{bh^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (1.14)$$

Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте прямоугольного поперечного сечения изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 1.4).



**Рис. 1.4. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения балки**

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, т.е. наиболее удаленных от нейтральной оси (**при  $z = \pm \frac{h}{2}$** ), касательные напряжения равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2 – 2** (**при  $z = 0$** ), возникают наибольшие касательные напряжения (**опасные точки**).

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (1.15)$$

В этой формуле

$\tau_{\max}$  – максимальное касательное напряжение;

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = b \cdot h$  – площадь прямоугольного поперечного сечения балки.

Так как, **наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки**, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (1.15) подставить  **$Q = Q_{\max}$**

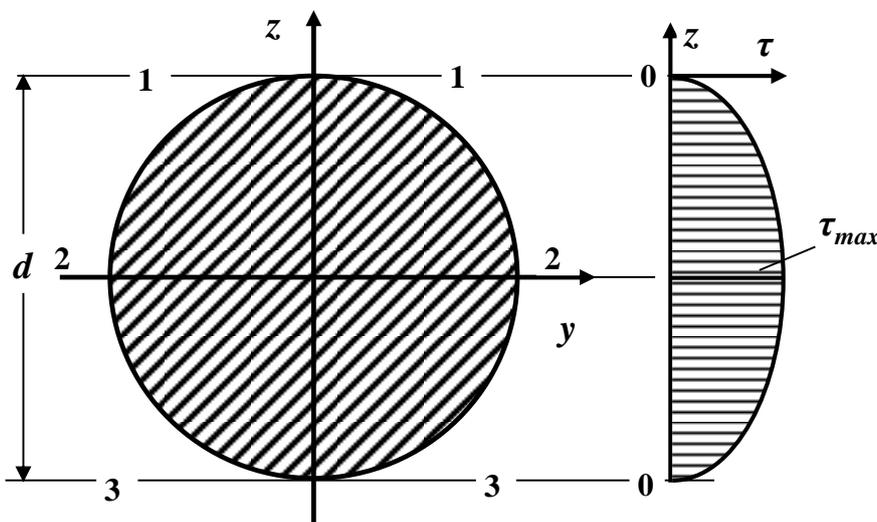
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} \quad (1.16)$$

На рис. 1.4 показан общий вид эпюры касательных напряжений  $\tau$  для прямоугольного поперечного сечения балки.

### б). Круглое поперечное сечение

Предполагается, что вертикальные проекции касательных напряжений равномерно распределены по ширине круглого сечения. Эти составляющие касательного напряжения определяются по формуле (1.12). Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте круглого поперечного сечения также изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1–1**, **2–2** и **3–3** (рис. 1.5).



**Рис. 1.5 Эпюра касательных напряжений для круглого поперечного сечения балки.**

В точках круглого поперечного сечения, лежащих на линиях **1–1** и **3–3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (*при*  $z = \pm \frac{d}{2}$ ), касательные напряжения равны нулю, так как  $S_y^{\text{отс}} = 0$ .

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2–2** (*при*  $z = 0$ ), возникают наибольшие касательные напряжения (*опасные точки*), так как  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2} = S_{\max}$ .

Здесь  $S_y^{1/2}$  – статический момент половины поперечного сечения относительно главной оси  $y$ .

Максимальное касательное напряжение для круглого поперечного сечения балки можно вычислить по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A} \quad (1.17)$$

В этой формуле

$T_{max}$  – максимальное касательное напряжение;

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$  – площадь круглого поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (1.17) подставить  $Q = Q_{max}$ .

$$T_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{max}}{A}. \quad (1.18)$$

На рис. 1.5 показан общий вид эпюры касательных напряжений  $\tau$  для круглого поперечного сечения балки.

### в). Двутавровое поперечное сечение

Характерной особенностью этого сечения является резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки двутавра к его полке.

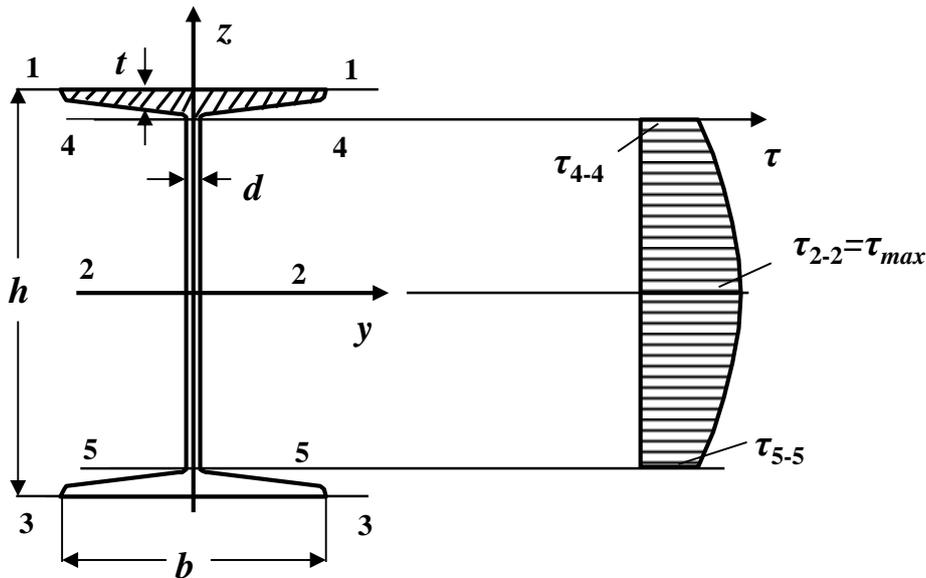
При определении касательных напряжений в **полке** двутавра необходимо иметь в виду, что для их определения нельзя использовать формулу Д.И. Журавского (1.12), так как предположение о равномерности распределения касательных напряжений по ширине полки здесь не выполняется. Таким образом, вопрос о величине и законе распределения касательных напряжений в полках двутавра остается неразрешенным. Однако, ввиду того, что в этих сечениях касательные напряжения невелики, то их обычно не вычисляют.

Значительно больший интерес представляют касательные напряжения в **стенке** двутавра, так как, в основном, поперечную силу воспринимает стенка.

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д.И. Журавского (1.12)

$$\tau = \frac{Q S_y^{отс}}{b(z) J_y}.$$

Для этого обычно определяют численные значения касательных напряжений в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях **4–4**, **2–2** и **5–5** **стенки двутавра** (рис.1.6).



**Рис. 1.6. Эпюра касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения балки**

Максимальные касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии **2–2** (на главной оси  $y$ ) двутавра

(*опасные точки*), поэтому для поперечного сечения балки из двутавра  $b(z) = d$  (рис.1.6). Отсеченная часть фигуры, в этом случае, – верхняя половина поперечного сечения, поэтому  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2}$ ,

где

$S_y^{1/2}$  – статический момент половины сечения относительно главной оси  $y$ .

(Для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте).

Для определения касательных напряжений в точках, лежащих на линиях **4–4** и **5–5**, находят статический момент полки (отсеченная часть сечения – заштрихованная полочка двутавра, рис. 1.6)

$$\begin{aligned} S_y^{\text{отс}} = S_y^{\text{полки}} &= S_y^{1/2} - S_y^{1/2 \text{ стенки}} = S_y^{1/2} - d \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) = \\ &= S_y^{1/2} - \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)^2. \end{aligned}$$

По полученным численным значениям  $\tau$  в сечениях **2–2**, **4–4** и **5–5** строят эпюру касательных напряжений по высоте *стенки* двутавра (рис.1.6).

В балках сплошного сечения чаще всего величина касательных напряжений по сравнению с нормальными напряжениями невелика, и большей частью производить проверку прочности балки по касательным напряжениям нет необходимости.

В коротких балках, сильно нагруженных вблизи опор, и в балках тонкостенного профиля касательные напряжения могут иметь сравнительно большую величину.

Поэтому на практике обычно подбирают размеры поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям, а затем уже проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение балки условию прочности по касательным напряжениям.

В этом случае проверка прочности по методу допускаемых касательных напряжений производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y} \leq [\tau], \quad (1.19)$$

где

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Для стальных балок обычно принимают допускаемое касательное напряжение  $[\tau] \approx 0,6 \cdot [\sigma]$ .

### 1.3. Главные напряжения при изгибе

Обычно, дополнительную проверку на прочность по главным напряжениям производят для поперечных сечений, у которых ширина резко меняется вблизи краев сечения, например, в двутавре, швеллере или пустотелом прямоугольном профиле. Эпюры нормальных и касательных напряжений для таких профилей (например, рис. 1.3 и 1.6) показывают, что на уровне перехода от полки к стенке (точки **4 – 4** и **5 – 5**) касательные и нормальные напряжения имеют величину, близкую к максимальной.

По главным напряжениям проверяются те сечения балки по ее длине, где одновременно изгибающий момент и поперечная сила достигают большой величины. Причем, если таких сечений несколько, то проверяются все эти сечения.

В этом случае дополнительная проверка на прочность по главным напряжениям при изгибе производится в зависимости от принятой теории прочности.

Эти условия прочности имеют вид:

1-я теория – теория наибольших нормальных напряжений

$$\sigma^I = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma] \quad (1.20)$$

2-я теория – теория наибольших деформаций (удлинений)

$$\sigma^{II} = [0,35 \cdot \sigma + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}] \leq [\sigma] \quad (1.21)$$

3-я теория – теория наибольших касательных напряжений

$$\sigma^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma] \quad (1.22)$$

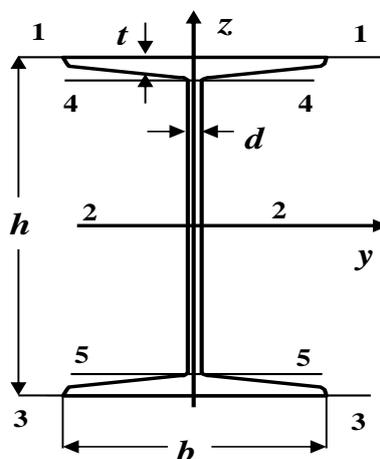
4-я теория – энергетическая теория (теория потенциальной энергии формоизменения)

$$\sigma^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma] \quad (1.23)$$

В настоящее время для проверки балок на прочность по главным напряжениям чаще всего применяются третья теория (наибольших касательных напряжений) (1.22) и четвертая (энергетическая) теория прочности (1.23).

Однако на практике при расчете балок до сих пор сохранилось применение теории наибольших нормальных напряжений (1.20), дающей часто более экономичные размеры поперечных сечений.

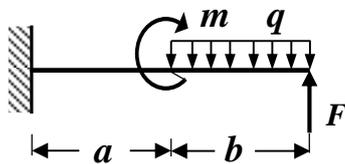
Таким образом, для уточнения размеров поперечного сечения балки производится проверка прочности в отдельных его точках. Например, для балок двутаврового сечения (рис. 1.7) такая проверка производится в точках **1 – 1** и **3 – 3** поперечного сечения по нормальным напряжениям /формулы (1.5) или (1.6)/, в точках **4 – 4** и **5 – 5** - по главным напряжениям /формулы (1.20) – (1.23)/, в точках **2 – 2** – по касательным напряжениям /формула (1.19)/.



**Рис. 1.7. Сечения балки, в которых производятся проверки прочности**

## Тема 2. Примеры расчета на прочность статически определимых балок

### 2.1. Задача №1. Расчет на прочность статически определимой деревянной консольной балки



**Исходные данные:**

$$a = 2 \text{ м}; \quad b = 2 \text{ м}; \quad q = 10 \text{ кН/м};$$

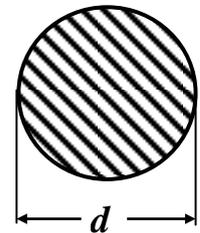
$$m = 8 \text{ кНм}; \quad F = 15 \text{ кН};$$

$$[\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

**Рис. 1.8. Схема балки**

Для заданной расчетной схемы консольной балки (рис. 1.8) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Из условия прочности по методу допускаемых нормальных напряжений подобрать круглое поперечное сечение балки диаметром  $d$  (рис. 1.9), приняв допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .



**Рис. 1.9**

4. Проверить прочность балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.
5. Проверить прочность балки по нормальным напряжениям по методу предельных состояний, приняв нормативное сопротивление  $R^H = 19 \text{ МПа}$ ; коэффициент перегрузки  $n = 1,3$ ; коэффициент однородности материала  $k = 0,76$ ; коэффициент условий работы  $m_B = 0,9$ .
6. Проверить прочность подобранного сечения балки по касательным напряжениям, приняв  $[\tau] = 2 \text{ МПа}$ .
7. Для опасных сечений построить эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте балки.

### Решение

#### Определение опорных реакций

Для консольных балок, в виде исключения, опорные реакции  $R_A$ ,  $H_A$  и  $M_A$  можно не определять, а вести дальнейший расчет со стороны свободного конца балки. Численные значения опорных реакций, в случае необходимости, можно определить по эпюрам  $Q$  и  $M$ , используя правило «скачков».

### Построение эпюр поперечной силы $Q$ и изгибающего момента $M$

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Разбиваем расчетную схему балки на участки. В нашем примере балка имеет два участка ( $AB$  и  $BC$ ), которые пронумеруем справа налево (рис. 1.10).

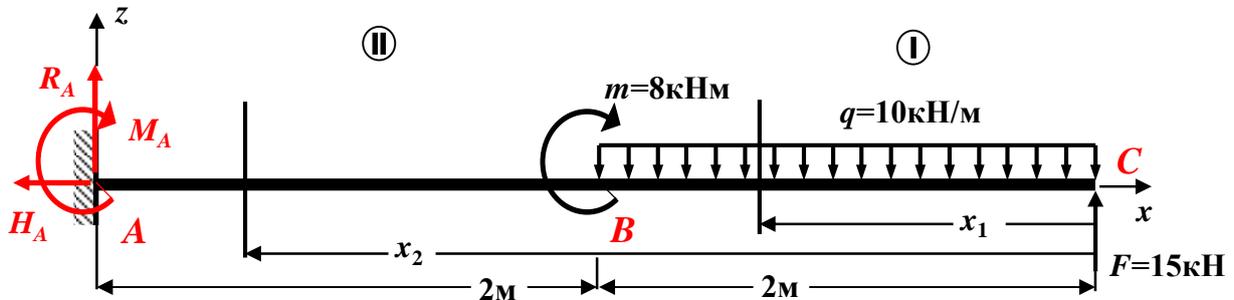


Рис. 1.10. Расчетная схема балки

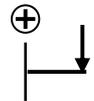
Проводим сечение на каждом участке и рассматриваем правую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.10), так как слева от сечения опорные реакции неизвестны.

**I участок CB:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = -F + q \cdot x_1 = -15 + 10 \cdot x_1.$$



Поперечная сила  $Q$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = -15 + 10 \cdot 0 = -15 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(2\text{ м}) = -15 + 10 \cdot 2 = +5 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения, в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = -15 + 10 \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = 15/10 = 1,5 \text{ м;} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 1,5 \text{ м.}}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента



## Расчет балок на прочность

$$\begin{aligned}
 M(x_1) &= F \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 15 \cdot x_1 - 10 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 15 \cdot x_1 - 5 \cdot x_1^2 = \\
 &= x_1 \cdot (15 - 5 \cdot x_1).
 \end{aligned}$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка и в найденном сечении с координатой  $x_0 = 1,5 \text{ м}$

$$\begin{aligned}
 M(0) &= 0 \text{ кНм (значение на правой границе участка);} \\
 M_{\text{экстр.}} &= M(1,5\text{м}) = +1,5 \cdot (15 - 5 \cdot 1,5) = +11,25 \text{ кН} \cdot \text{м} = + 11,3 \text{ кНм} \\
 &\text{(значение в сечении балки с координатой } x_0 = 1,5 \text{ м);} \\
 M(2\text{м}) &= 2 \cdot (15 - 5 \cdot 2) = + 10 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}
 \end{aligned}$$

**II участок ВА:**  $2\text{ м} \leq x_2 \leq 4\text{ м}$  (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки.

При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и  правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = -F + q \cdot 2 = -15 + 10 \cdot 2 = + 5 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$\begin{aligned}
 Q(2\text{м}) &= + 5 \text{ кН (значение на правой границе);} \\
 Q(4\text{м}) &= + 5 \text{ кН (значение на левой границе).}
 \end{aligned}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента



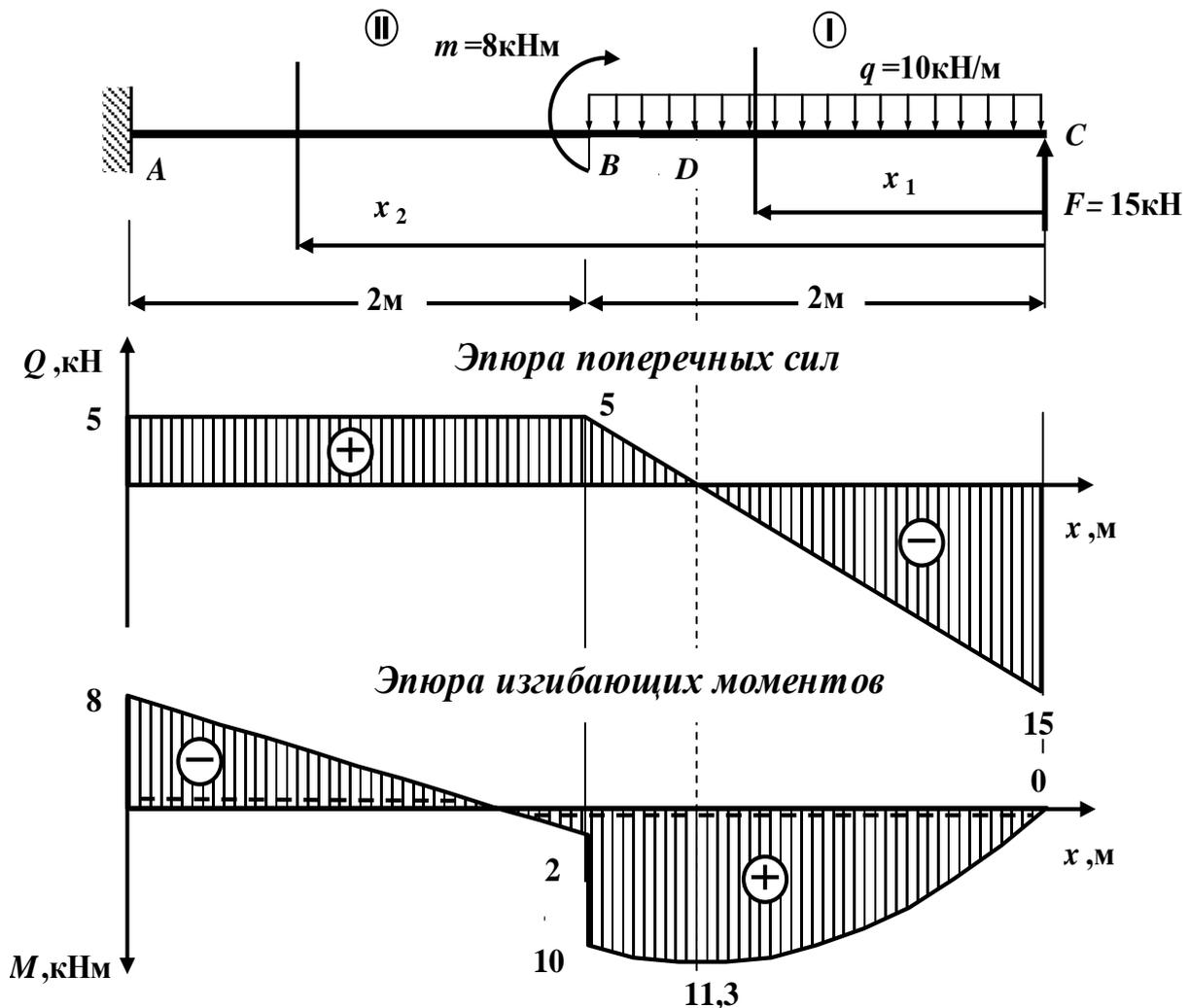
$$M(x_2) = F \cdot x_2 - q \cdot 2 \cdot (x_2 - 1) - m = 15 \cdot x_2 - 20(x_2 - 1) - 8 = -5 \cdot x_2 + 12.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$\begin{aligned}
 M(2\text{м}) &= -5 \cdot 2 + 12 = + 2 \text{ кНм (значение на правой границе);} \\
 M(4\text{м}) &= -5 \cdot 4 + 12 = - 8 \text{ кНм (значение на левой границе).}
 \end{aligned}$$

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.11.

Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов: масштаб длины балки - 1 см: 0,5 м; масштаб оси  $Q$  - 1 см: 10 кН; масштаб оси  $M$  - 1 см: 5 кНм.



**Рис. 1.11. Эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$**

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

На эпюре  $M$  вместе со знаком пунктиром показаны положения растянутых волокон.

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.
- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.
- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).
- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{экстр}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).
- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.
- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### Подбор круглого сечения деревянной балки по методу допускаемых напряжений

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (1.5)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле

$\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси

$y$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Из условия прочности определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения балки (1.8)

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Размеры поперечного сечения балки подбираются из условия

$$W_y \approx W_y^{\text{треб}}.$$

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **D**, рис. 1.11)

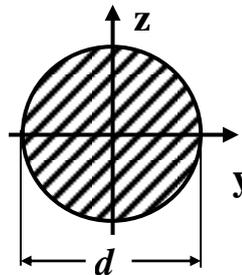
$$M_{\max} = 11,3 \text{ кНм} = 11,3 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Используя неравенство (1.8), определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения балки

$$\begin{aligned} W_y^{\text{треб}} &\geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \geq \frac{11,3 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{10 \cdot \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = \\ &= 1,13 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \text{ см}^3 = 1130 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Момент сопротивления **W<sub>y</sub>** круглого сечения диаметром **d** вычисляется по формуле (см. справочные таблицы)

$$W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$



Приравнявая **W<sub>y</sub>** и **W<sub>y</sub><sup>треб</sup>**, получаем

$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} \geq 1130 \text{ см}^3.$$

Откуда находим диаметр **d**

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1130 \text{ см}^3}{3,14}} = 22,582 \text{ см} \approx 22,6 \text{ см}.$$

Размеры сечений деревянных элементов, согласно требованиям технологии, округляются до размера, кратного 0,5 см.

С учетом технологических требований принимаем круглое поперечное сечение балки диаметром  $d = 23,0$  см.

### Проверка прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по допускаемым нормальным напряжениям (1.5). С этой целью определяем фактический момент сопротивления

$$W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot (23,0 \text{ см})^3}{32} = 1193,89 \text{ см}^3 \approx 1190 \text{ см}^3 = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Находим максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{11,3 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{1,19 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 9,50 \text{ МПа} < [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по методу допускаемых нормальных напряжений выполняется.

Проверяем выполнение условия экономичности

$$\varepsilon = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{10 - 9,50}{10} \cdot 100\% = 5,0\% (\pm 5\%).$$

Условие экономичности выполняется.

Условия прочности и экономичности выполняются, принимаем балку круглого поперечного сечения диаметром  $d = 23,0$  см.

### Проверка прочности балки по нормальным напряжениям по методу предельных состояний

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу предельных состояний имеет вид (1.6)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B.$$

Проверим выполнение этого условия прочности.

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение  $D$ , рис. 1.11)

$$M_{\max} = 11,3 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Фактический момент сопротивления  $W_y^{\text{факт}}$  круглого поперечного сечения балки диаметром  $d = 23,0$  см равен

$$W_y^{\text{факт}} = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Расчетное сопротивление  $R$  материала балки равно

$$R = R^H \cdot k \cdot m = 19 \text{ МПа} \cdot 0,76 \cdot 0,9 = 13 \text{ МПа}.$$

Находим максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} = \frac{11,3 \cdot 10^{-3} \text{ мНм} \cdot 1,3}{1,19 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 12,3 \text{ МПа} < R = 13 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности и по методу предельных состояний выполняется.*

### Проверка прочности подобранного сечения балки по касательным напряжениям

Максимальные касательные напряжения возникают в опасном сечении балки в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (ось  $y$ ).

Для круглого поперечного сечения балки максимальные касательные напряжения вычисляется по формуле (1.18)

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A},$$

где

$\tau_{\max}$  – максимальное касательное напряжение.

$Q_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил).

$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$  – площадь круглого поперечного сечения балки.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений для круглого сечения балки имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau].$$

Здесь

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

В опасном сечении балки по касательным напряжениям (сечение **C**, рис. 1.11)

$$Q_{\max} = 15 \text{ кН} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ МН}.$$

При принятых размерах поперечного сечения балки диаметром  $d = 23,0 \text{ см}$  площадь круглого поперечного сечения балки равна

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 23,0^2 \cdot 10^{-4}}{4} = 415 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{15 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{415 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,482 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 0,482 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.*

В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.

### Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **D**, рис. 1.11) растянуты нижние волокна, поэтому нормальные напряжения в точках поперечного сечения, лежащих на линии **1 – 1** – отрицательные, а в точках поперечного сечения, лежащих на линии **3 – 3** – положительные (рис. 1.12).

Напряжения в точках линии **1 – 1**

$$\sigma_{1-1} = -\sigma_{\max} = -9,50 \text{ МПа.}$$

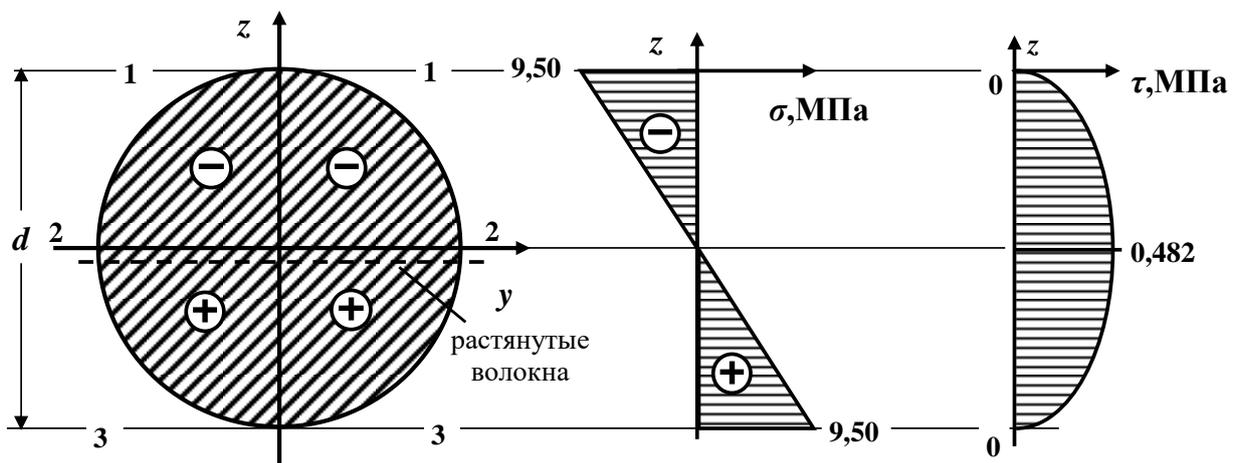
В точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (главная ось  $y$ ) **2 – 2**, нормальные напряжения равны **0**

$$\sigma_{2-2} = 0.$$

Напряжения в точках линии **3 – 3**

$$\sigma_{3-3} = +\sigma_{\max} = +9,50 \text{ МПа.}$$

Используя полученные данные, строим эпюру нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки, которая графически изображается наклонной прямой линией (рис. 1.12).



**Рис. 1.12. Эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки круглого поперечного сечения**

В нашей задаче точки, лежащие на линиях **1 – 1** и **3 – 3** поперечного сечения, являются **опасными точками по нормальным напряжениям**, они наиболее удалены от нейтральной линии (главной оси  $y$ ).

Переходим к построению эпюры касательных напряжений. Как было показано выше, максимальные касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (главная ось  $y$ ) **2–2**

$$\tau_{\max} = \tau_{2-2} = 0,482 \text{ МПа.}$$

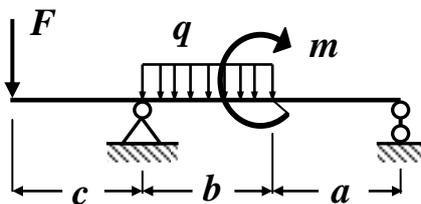
Точки, лежащие на нейтральной линии (ось  $y$ ) **2–2** поперечного сечения, являются **опасными точками по касательным напряжениям**.

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1–1** и **3–3**, касательные напряжения равны **0**, то есть

$$\tau_{1-1} = \tau_{3-3} = 0.$$

Используя полученные данные и учитывая, что касательные напряжения по высоте поперечного сечения изменяются по параболическому закону, строим эпюру касательных напряжений, как это показано на рис. 1.12.

## 2.2. Задача №2. Расчет на прочность статически определимой деревянной балки на двух шарнирных опорах



**Исходные данные:**

$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ м}; \quad b = 4 \text{ м}; \quad c = 2 \text{ м}; \\ q &= 10 \text{ кН/м}; \quad m = 19 \text{ кНм}; \quad F = 12 \text{ кН}; \\ \beta &= h/b = 2,5. \end{aligned}$$

**Рис. 1.13. Схема балки**

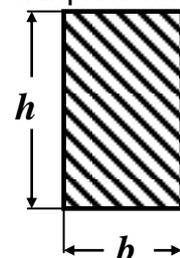
**Для заданной схемы балки на двух опорах (рис. 1.13) требуется:**

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Из условия прочности по методу допускаемых нормальных напряжений подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения (рис. 1.14) деревянной балки при заданных соотношениях  $\beta = h/b$ . Принять допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$ .

4. Проверить прочность подобранного сечения балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.

5. Проверить прочность балки по нормальным напряжениям по методу предельных состояний, приняв нормативное сопротивление  $R^H = 23 \text{ МПа}$ ; коэффициент перегрузки  $n = 1,35$ ;

коэффициент однородности материала  $k = 0,72$ ; коэффициент условий работы  $m_B = 1,0$ .



**Рис. 1.14**

6. Проверить прочность выбранного сечения балки по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений, приняв  $[\tau] = 2 \text{ МПа}$ .
7. Для опасных сечений построить эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте балки.

### Решение

#### Определение опорных реакций

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Для определения опорных реакций составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков (рис. 1.15):

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: -H_A = 0, \rightarrow H_A = 0.$$



2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $B$  равна нулю

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0: F \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 - m + R_D \cdot 5 &= 0; \\ 12 \cdot 2 - 10 \cdot 8 - 19 + R_D \cdot 5 &= 0; \end{aligned}$$

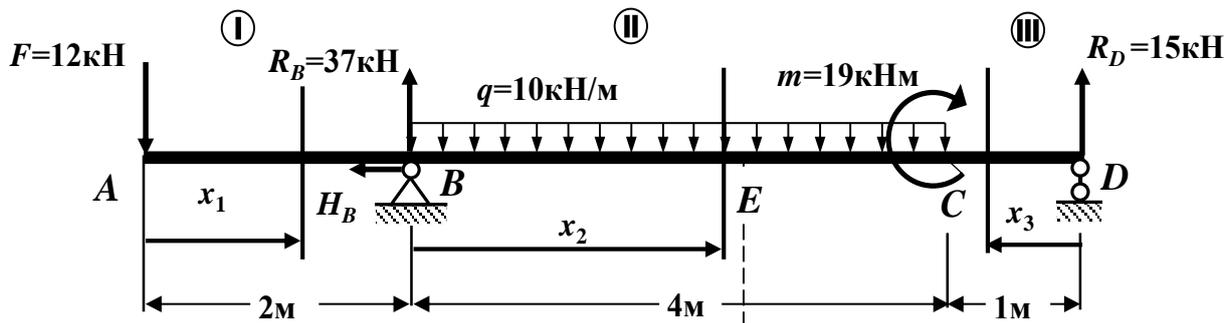


Рис. 1.15. Расчетная схема балки

$$-75 + R_D \cdot 5 = 0; \quad R_D = + \frac{75}{5} = + 15 \text{ кН}; \quad \rightarrow \quad R_D = + 15 \text{ кН}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $D$  равна нулю

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0: + F \cdot 7 - R_B \cdot 5 + q \cdot 4 \cdot 3 - m &= 0; \\ +12 \cdot 7 - R_B \cdot 5 + 10 \cdot 12 - 19 &= 0; \\ +185 - R_B \cdot 5 &= 0, \quad R_B = + \frac{185}{5} = + 37 \text{ кН}; \quad \rightarrow \quad R_B = + 37 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\Sigma F_z = -F + R_B - q \cdot 4 + R_D = -12 + 37 - 40 + 15 = 52 - 52 = 0 (\pm 5 \%).$$

### Построение эпюр поперечной силы $Q$ и изгибающего момента $M$

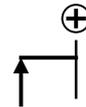
Расчетная схема балки имеет три участка ( $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.15).

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на левом конце балки);

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = -F = -12 \text{ кН};$$



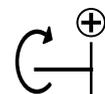
Поперечная сила  $Q$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$\begin{aligned} Q(0) &= -12 \text{ кН (значение на левой границе участка);} \\ Q(2\text{ м}) &= -12 \text{ кН (значение на правой границе участка).} \end{aligned}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = -F \cdot x_1 = -12 \cdot x_1;$$



Изгибающий момент  $M$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка.

$$\begin{aligned} M(0) &= 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка);} \\ M(2\text{ м}) &= -12 \cdot 2 = -24 \text{ кНм (значение на правой границе участка).} \end{aligned}$$

**II участок BC:**  $0 \leq x_2 \leq 4\text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка);

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = -F + R_B - q \cdot x_2 = -12 + 37 - 10 \cdot x_2 = 25 - 10 \cdot x_2;$$



Поперечная сила  $Q$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

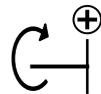
$$Q(0) = 25 - 10 \cdot 0 = +25 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(4\text{м}) = 25 - 10 \cdot 4 = -15 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения, в котором  $Q$  обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение):

$$Q(x_0) = 25 - 10 \cdot x_0 = 0, \quad x_0 = 25/10 = 2,5 \text{ м; } \rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 2,5 \text{ м.}}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.



Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = -F \cdot (x_2 + 2) + R_B \cdot x_2 - q \cdot x_2^2 / 2 = -12 \cdot (x_2 + 2) + 37 \cdot x_2 - 10 \cdot x_2^2 / 2 =$$

$$= -24 + 25 \cdot x_2 - 5 \cdot x_2^2;$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является квадратичной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка и в найденном сечении с координатой  $x_0 = 2,5 \text{ м}$

$$M(0) = -24 \text{ кНм (значение на левой границе участка);}$$

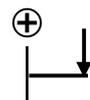
$$M_{\text{экстр.}} = M(2,5\text{м}) = -24 + 25 \cdot 2,5 - 5 \cdot (2,5)^2 = 7,25 \text{ кНм (значение в сечении балки с координатой } x_0 = 2,5 \text{ м);}$$

$$M(4\text{м}) = -24 + 25 \cdot 4 - 5 \cdot (4)^2 = -4 \text{ кНм (значение на правой границе участка).}$$

**III участок DC:**  $0 \leq x_3 \leq 1\text{ м}$  (начало отсчета на правом конце балки);

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы



$$Q(x_3) = -R_D = -15 \text{ кН;}$$

Поперечная сила  $Q$  на третьем участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

## Расчет балок на прочность

$$Q(0) = -15 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(1\text{м}) = -15 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента **M** на третьем участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента



$$M(x_3) = R_D \cdot x_3 = 15 \cdot x_3;$$

Изгибающий момент **M** на третьем участке является линейной функцией координаты **x<sub>3</sub>**. Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

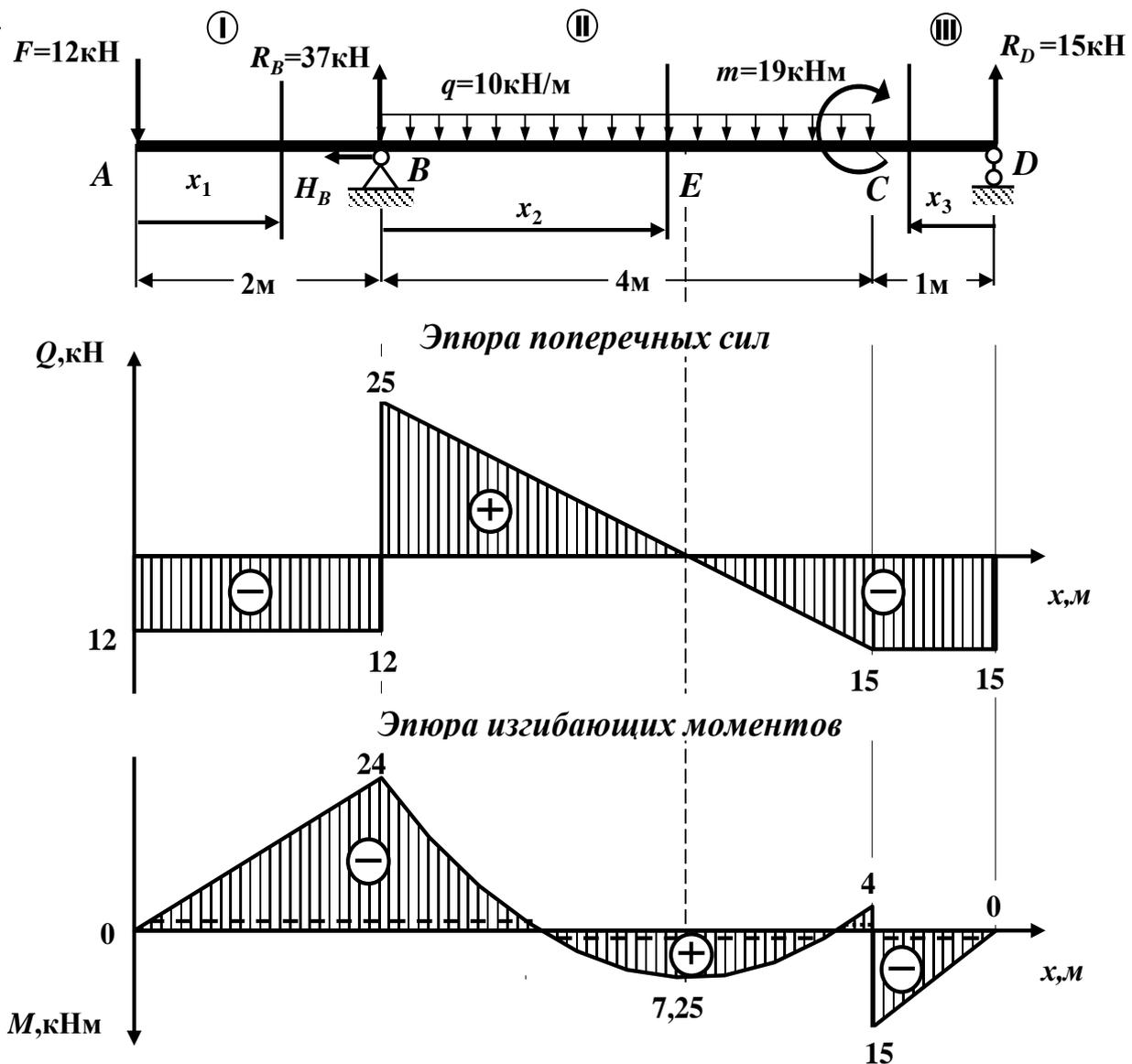
$$M(0) = 0 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

$$M(1\text{м}) = +15 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям **Q** и **M** в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.16.

*Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов масштаба: масштаб длины балки 1 см : 1,5 м; масштаб оси **Q** – 1 см : 10 кН; масштаб оси **M** – 1 см : 10 кН·м.*

*В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.*



**Рис. 1.16. Эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$**

На эпюре  $M$  вместе со знаком пунктиром показаны положения растянутых волокон.

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.
- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту.

Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает max или min ( $M_{экстр}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### Подбор прямоугольного сечения деревянной балки по методу допускаемых напряжений

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (1.5)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле:

$\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения относительно главной оси  $y$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Из условия прочности определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения по формуле (1.8)

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Размеры поперечного сечения балки подбираются из условия

$$W_y \approx W_y^{\text{треб}}.$$

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение  $B$ , рис. 1.16)

## Расчет балок на прочность

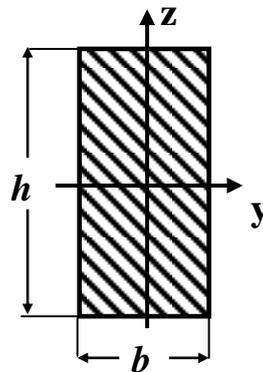
$$M_{\max} = 24 \text{ кНм} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ МНм.}$$

Используя неравенство (1.8), определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{12} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \text{ см}^3 = 2000 \text{ см}^3.$$

Для прямоугольного поперечного сечения балки размером  $b \times h$  момент сопротивления вычисляется по формуле (см. справочные таблицы)

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$



Используя заданное в условии задачи соотношение  $\beta = h/b = 2,5$ , выражаем момент сопротивления через один из размеров, например через  $b$ , т.е. ( $h = 2,5 \cdot b$ )

$$W_y = \frac{b \cdot (2,5b)^2}{6} = 1,04b^3$$

Приравнявая  $W_y = W_y^{\text{треб}}$ , получаем

$$1,04 \cdot b^3 \geq 2000 \text{ см}^3.$$

Из полученного соотношения определяем размер  $b$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2000 \text{ см}^3}{1,04}} = 12,435 \text{ см} \approx 12,4 \text{ см.}$$

*Размеры сечений деревянных элементов, согласно требованиям технологии, округляются до размера, кратного 0,5 см.*

Принимаем  $b = 12,5 \text{ см}$ . Тогда  $h = 2,5 \cdot b = 2,5 \cdot 12,5 \text{ см} = 31,25 \text{ см} \approx 31,5 \text{ см}$ .

С учетом технологических требований принимаем балку прямоугольного поперечного сечения размером  **$b \times h = 12,5 \times 31,5 \text{ см}$** .

### Проверка прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям (1.5).

С этой целью определяем фактический момент сопротивления

$$W_y^{\text{факт}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{12,5 \text{ см} \cdot (31,5 \text{ см})^2}{6} = 2070 \text{ см}^3 = 2070 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Вычисляем максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_y} = \frac{24 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{2070 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 11,6 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 11,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 12 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по методу допускаемых нормальных напряжений выполняется. Проверяем выполнение условия экономичности

$$\varepsilon = \frac{[\sigma] - \sigma_{\text{max}}}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{12 - 11,6}{12} \cdot 100\% = 3,33\% < 5\%$$

Условие экономичности выполняется.

Условия прочности и экономичности выполняются, принимаем окончательно балку прямоугольного поперечного сечения размером  **$b \times h = 12,5 \times 31,5 \text{ см}$** .

### Проверка прочности балки по нормальным напряжениям по методу предельных состояний.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу предельных состояний имеет вид (1.6)

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}} \cdot \eta}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B.$$

Проверим выполнение этого условия прочности.

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение  **$B$** , рис. 1.16)

$$M_{\text{max}} = 24,0 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Фактический момент сопротивления  $W_y^{\text{факт}}$  прямоугольного поперечного сечения балки размером  **$b \times h = 12,5 \times 31,5 \text{ см}$**  равен

$$W_y^{\text{факт}} = 2070 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Расчетное сопротивление  $R$  материала балки равно

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B = 23 \text{ МПа} \cdot 0,72 \cdot 1,0 = 16,6 \text{ МПа}.$$

Находим максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} = \frac{24,0 \cdot 10^{-3} \text{ МНм} \cdot 1,35}{2070 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 15,6 \text{ МПа} < R = 16,6 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности и по методу предельных состояний выполняется.*

### Проверка прочности подобранного сечения балки по касательным напряжениям

Максимальные касательные напряжения возникают в опасном сечении балки в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (ось  $y$ ).

Для прямоугольного поперечного сечения балки максимальные касательные напряжения вычисляется по формуле (1.16)

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{\max}}{2 A},$$

где

$\tau_{\max}$  – максимальное касательное напряжение;

$Q_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = b \cdot h$  – площадь поперечного сечения балки.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений для прямоугольного сечения балки имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{\max}}{2 bh} \leq [\tau].$$

Здесь

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

В опасном сечении балки по касательным напряжениям (опасное сечение расположено на бесконечно малом расстоянии вправо от сечения  $B$ , рис. 1.16)  $Q_{\max} = 25 \text{ кН} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ МН}$ .

При принятых размерах поперечного сечения балки  $b = 12,5 \text{ см}$  и  $h = 31,5 \text{ см}$

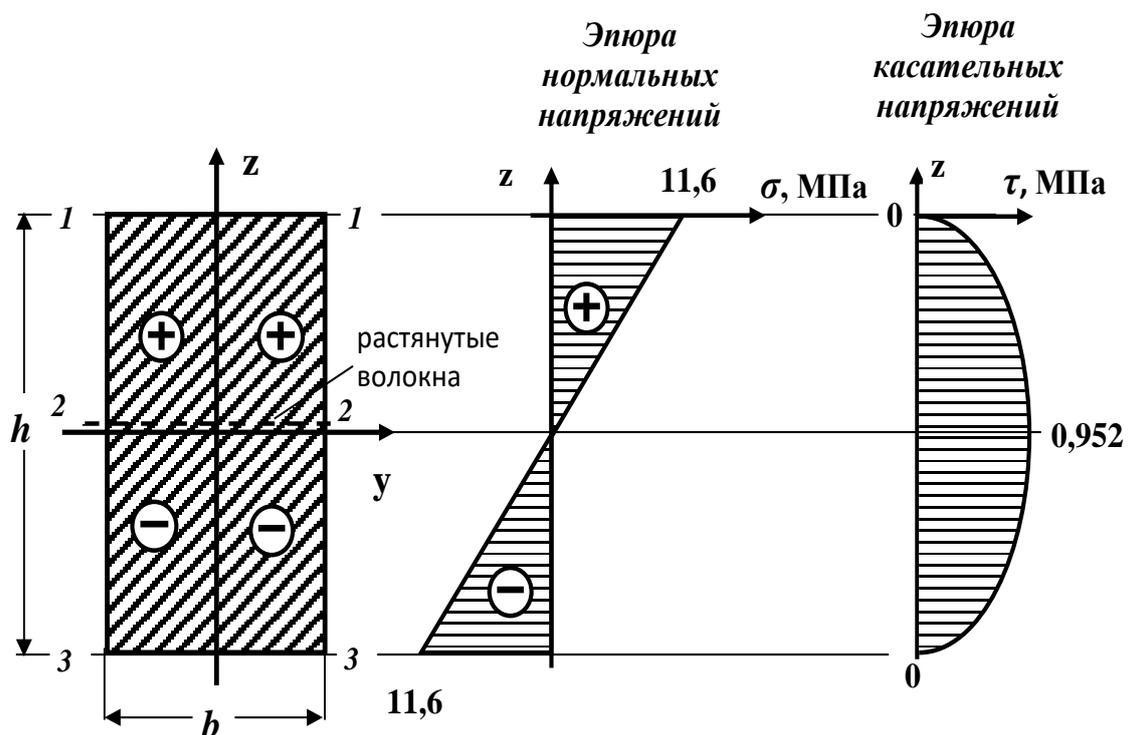
$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{2 \cdot 12,5 \cdot 31,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,952 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 0,952 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.*

В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые бóльшие размеры поперечного сечения балки.

### Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям растянуты верхние волокна (рис. 1.16), поэтому нормальные напряжения в точках поперечного сечения, лежащих на линии **1 – 1** – положительные, а в точках поперечного сечения, лежащих на линии **3 – 3** – отрицательные (рис. 1.17).



**Рис. 1.17. Эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки**

Напряжения в точках линии **1 – 1**

$$\sigma_{1-1} = + \sigma_{\max} = + 11,6 \text{ МПа.}$$

В точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (ось **y**) **2 – 2**, нормальные напряжения равны **0**

$$\sigma_{2-2} = 0.$$

Напряжения в точках линии **3 – 3**

$$\sigma_{3-3} = - \sigma_{\max} = - 11,6 \text{ МПа.}$$

Используя полученные данные, строим эпюру нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки, которая графически изображается наклонной прямой линией (рис. 1.17).

В нашей задаче точки, лежащие на линиях **1 – 1** и **3 – 3** поперечного сечения, являются **опасными точками по нормальным напряжениям**, они наиболее удалены от нейтральной линии (главной оси  $y$ ).

Переходим к построению эпюры касательных напряжений. Как было показано выше, максимальные касательные напряжения возникают в точках **2 – 2** поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (ось  $y$ )

$$\tau_{\max} = \tau_{2-2} = 0,952 \text{ МПа.}$$

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, касательные напряжения равны **0**

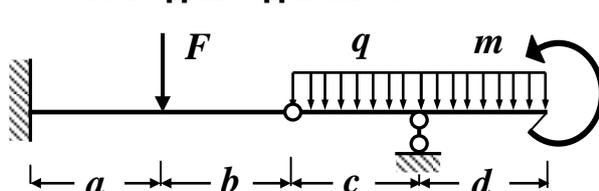
$$\tau_{1-1} = \tau_{3-3} = 0.$$

Используя полученные данные и учитывая, что касательные напряжения по высоте поперечного сечения изменяются по параболическому закону, строим эпюру касательных напряжений, как это показано на рис. 1.17.

Точки **2 – 2**, лежащие на нейтральной линии (ось  $y$ ) поперечного сечения, являются **опасными точками по касательным напряжениям**.

### 2.3. Задача №3. Расчет на прочность статически определимой стальной балки с промежуточным шарниром

Исходные данные:



$$a = 1 \text{ м}; b = 2 \text{ м}; c = 2 \text{ м}; d = 1 \text{ м};$$

$$q = 20 \text{ кН/м}; m = 18 \text{ кНм}; F = 20 \text{ кН.}$$

Рис 1.18. Схема балки

Для заданной расчетной схемы стальной балки с промежуточным шарниром (рис. 1.18) требуется:

1. Построить поэтажную схему.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Из условия прочности по методу допускаемых нормальных напряжений подобрать два варианта поперечного сечения балки, приняв допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ :
  - а) сечение балки из стального прокатного двутавра;
  - б) сечение балки из двух стальных прокатных швеллеров.

Проверить прочность подобранных сечений балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.

4. Проверить прочность подобранных сечений балки по нормальным напряжениям по методу предельных состояний, приняв нормативное сопротивление  $R^H = 230 \text{ МПа}$ ; коэффициент перегрузки  $n = 1,3$ ; коэффициент однородности материала  $k = 0,9$ ; коэффициент условий работы  $m_B = 1,0$ .

5. Проверить прочность подобранных сечений балки по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений, приняв  $[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma]$ .

6. Для опасных сечений балки (для двух вариантов поперечного сечения) построить:

- эпюру нормальных напряжений;
- эпюру касательных напряжений в пределах высоты стенки поперечного сечения.

7. Проверить прочность подобранных сечений балки по главным напряжениям в соответствии с **IV** (энергетической) теорией прочности.

### Решение

#### Построение поэтажной схемы балки

Расчет заданной балки с промежуточным шарниром проведем с помощью метода построения «поэтажной» схемы (рис. 1.19).

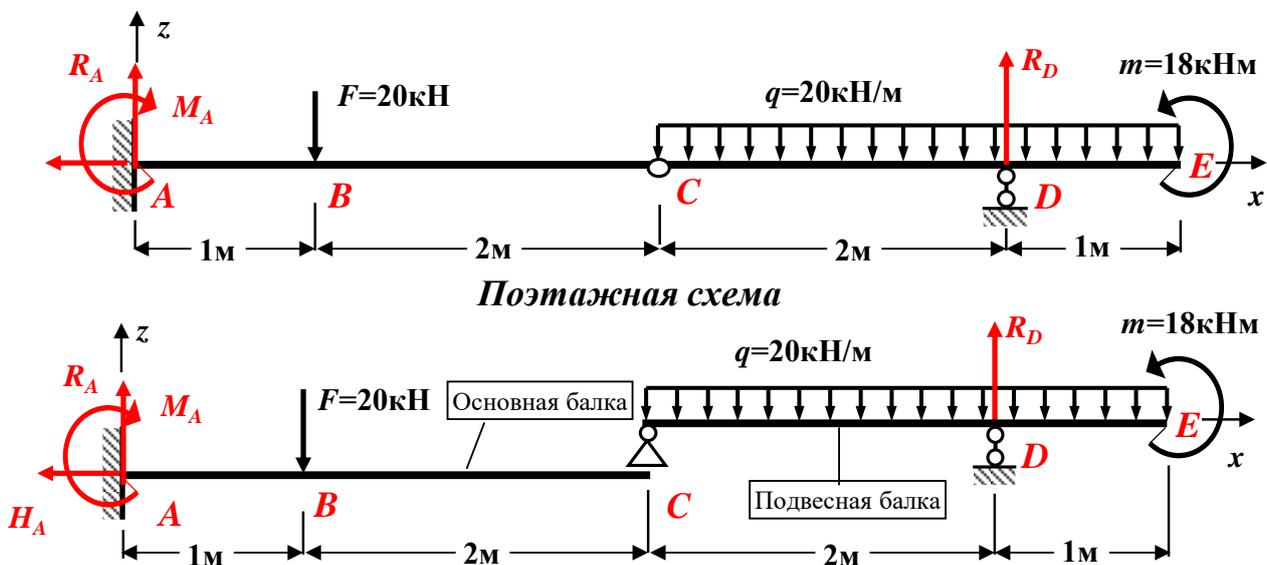


Рис. 1.19. Заданная балка и ее поэтажная схема

Для этого разрежем заданную балку по промежуточному шарниру **C** и выделим основную балку **ABC**, так как она имеет три кинематические связи, и подвесную балку **CDE** (рис. 1.19).

Расчет балок производят отдельно, начиная с самых верхних подвесных и последовательно переходя к ниже лежащим балкам. При расчете ниже лежащих балок необходимо учитывать не только заданную внешнюю нагрузку, которая к ним приложена, но и силы, равные по величине опорным реакциям выше лежащих подвесных балок и противоположно направленные.

## Определение опорных реакций и построение эпюр $Q$ и $M$ подвесной балки $CDE$

### Определение опорных реакций

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Для определения опорных реакций подвесной балки (рис. 1.20) составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

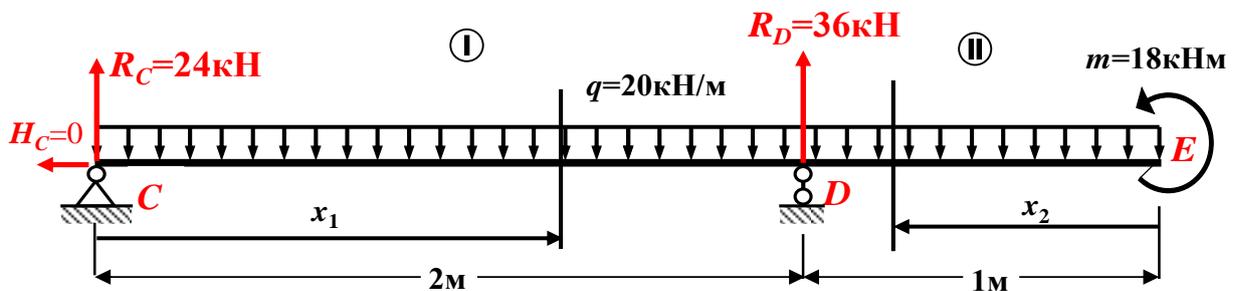


Рис. 1.20. Расчетная схема подвесной балки  $CDE$

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: -H_c = 0; \rightarrow H_c = 0.$$



2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $C$  равна нулю

$$\begin{aligned} \sum M_c = 0: -q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_D \cdot 2 + m = 0; & -20 \cdot 4,5 + R_D \cdot 2 + 18 = 0; \\ & -72 + R_D \cdot 2 = 0; R_D = \frac{72}{2} = 36 \text{ кН}; \rightarrow R_D = 36 \text{ кН}. \end{aligned}$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $D$  равна нулю

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0: -R_c \cdot 2 + q \cdot 3 \cdot 0,5 + m = 0; & -R_c \cdot 2 + 20 \cdot 1,5 + 18 = 0; \\ & -R_c \cdot 2 + 48 = 0; R_c = \frac{48}{2} = 24 \text{ кН}; \rightarrow R_c = 24 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\sum F_z = R_c - q \cdot 3 + R_D = 24 - 20 \cdot 3 + 36 = 60 - 60 = 0 (\pm 5 \%).$$

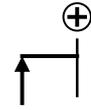
### Построение эпюр $Q$ и $M$

Расчетная схема подвесной балки имеет два участка ( $CD$  и  $DE$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.20).

**I участок  $CD$ :**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы



$$Q(x_1) = R_c - q \cdot x_1 = 24 - 20 \cdot x_1;$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = 24 - 20 \cdot 0 = +24 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

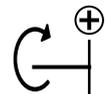
$$Q(2\text{м}) = 24 - 20 \cdot 2 = -16 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения, в котором  $Q$  обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение):

$$Q(x_0) = 24 - 20 \cdot x_0 = 0, \quad x_0 = 24/20 = 1,2 \text{ м; } \rightarrow \mathbf{x_0 = 1,2 \text{ м.}}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента



$$M(x_1) = R_c \cdot x_1 - q \cdot x_1^2 / 2 = 24 \cdot x_1 - 10 \cdot x_1^2;$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка и в найденном сечении с координатой  $x_0 = 1,2 \text{ м}$

$$M(0) = 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка);}$$

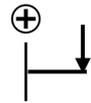
$$M_{\text{экстр.}} = M(1,2\text{м}) = 24 \cdot 1,2 - 10 \cdot 1,2^2 = +14,4 \text{ кНм (значение в сечении с координатой } x_0 = 1,2 \text{ м):}$$

$$M(2\text{м}) = 24 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = +8 \text{ кНм (значение на правой границе участка).}$$

**II участок ED:**  $0 \leq x_2 \leq 1\text{м}$  (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы



$$Q(x_2) = q \cdot x_2 = 20 \cdot x_2;$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = 0 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(1\text{м}) = 20 \cdot 1 = + 20 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.



Составляем выражение для изгибающего момента

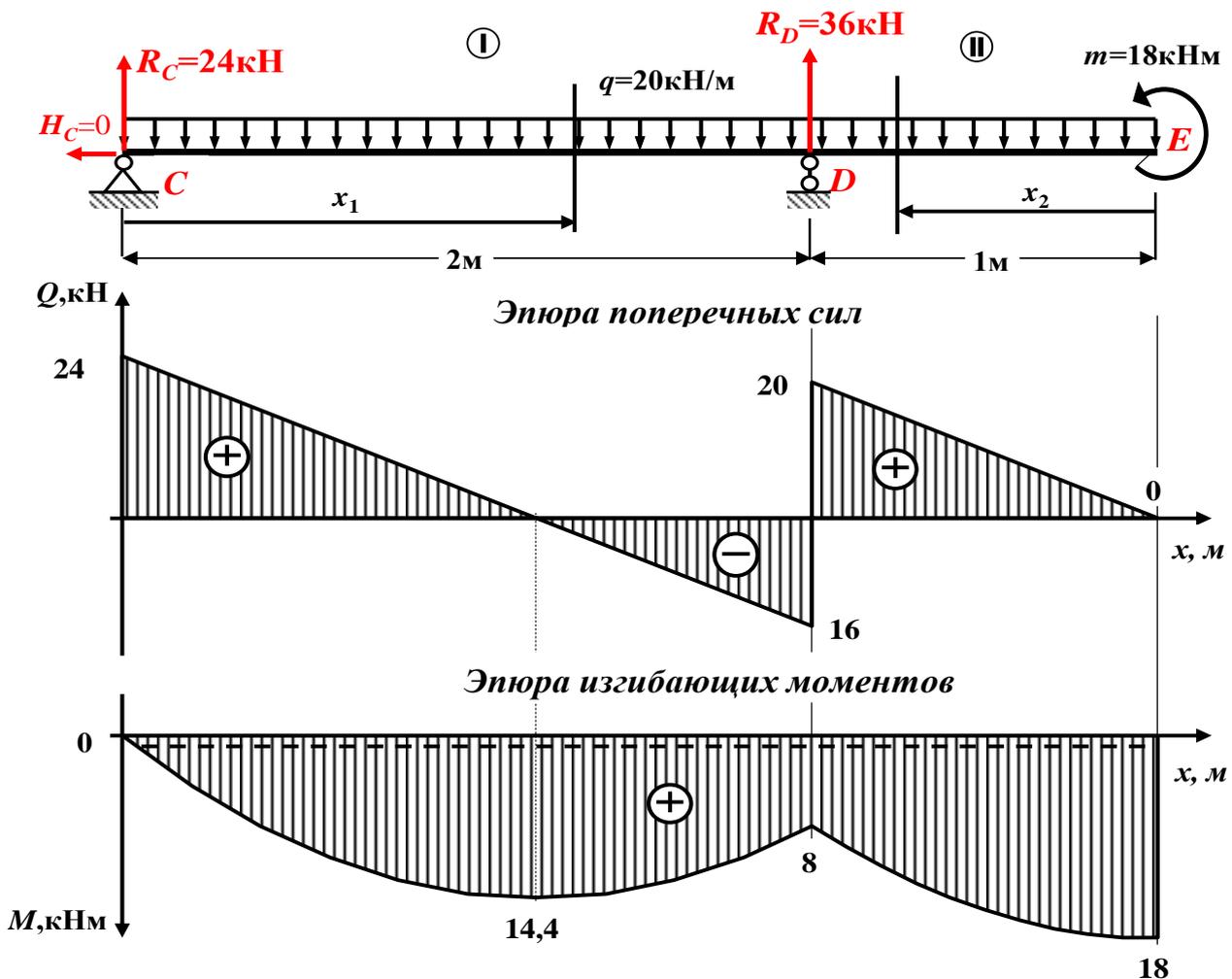
$$M(x_2) = m - q \cdot x_2^2 / 2 = 18 - 20 \cdot x_2^2 / 2 = 18 - 10 \cdot x_2^2 ;$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = 0 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

$$M(1\text{м}) = 18 - 10 = + 8 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям  $M$  и  $Q$  в характерных сечениях подвесной балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.21.



**Рис. 1.21. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента подвесной балки CDE**

Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов масштаба: масштаб длины балки  $1 \text{ см} : 1,5 \text{ м}$ ; масштаб оси  $Q$  –  $1 \text{ см} : 10 \text{ кН}$ ; масштаб оси  $M$  –  $1 \text{ см} : 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

На эпюре  $M$  вместе со знаком пунктиром показаны положения растянутых волокон.

## Определение опорных реакций и построение эпюр $Q$ и $M$ для основной балки $ABC$

### Определение опорных реакций

Основная балка  $ABC$ , кроме заданных внешних нагрузок, нагружается силой, равной реакции  $R_C$  в опоре  $C$  подвесной балки  $CDE$ , и противоположно направленной (рис. 1.22).

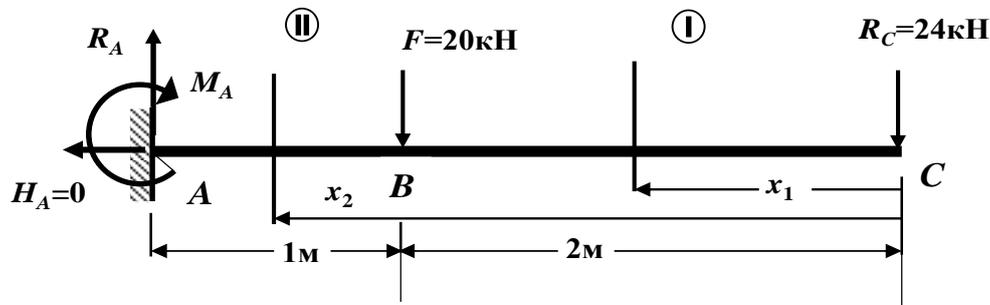


Рис. 1.22. Расчетная схема основной балки  $ABC$

Основная балка  $ABC$  является консольной, поэтому, в виде исключения, опорные реакции ( $R_A$ ,  $H_A$  и  $M_A$ ) можно не определять, а вести дальнейший расчет со стороны свободного конца балки. При этом численные значения опорных реакций, в случае необходимости, можно определить по эпюрам  $Q$  и  $M$ , используя правило «скачков».

### Построение эпюр $Q$ и $M$

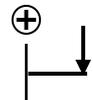
Разбиваем расчетную схему основной балки на участки. В нашем примере балка имеет два участка ( $AB$  и  $BC$ ), которые пронумеруем справа налево (рис. 1.22).

Проводим сечение на каждом участке и рассматриваем правую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.22), так как слева от сечения опорные реакции неизвестны.

**I участок CB:**  $0 \leq x_1 \leq 2$  м (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы



$$Q(x_1) = R_C = +24 \text{ кН};$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

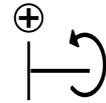
$$Q(0) = +24 \text{ кН}; \text{ (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(2) = +24 \text{ кН}; \text{ (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = -R_c \cdot x_1 = -24 \cdot x_1;$$



Изгибающий момент  $M$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = 0 \text{ кНм; (значение на правой границе участка);}$$

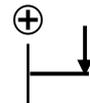
$$M(2\text{м}) = -48 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

**II участок ВА:**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 3\text{м}$  (начало отсчета на правом конце балки);

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = R_c + F = 24 + 20 = +44 \text{ кН.}$$



Поперечная сила  $Q$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

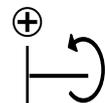
$$Q(2\text{м}) = +44 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(3\text{м}) = +44 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = -R_c \cdot x_2 - F \cdot (x_2 - 2) = -24 \cdot x_2 - 20 \cdot (x_2 - 2) = -44 \cdot x_2 + 40;$$

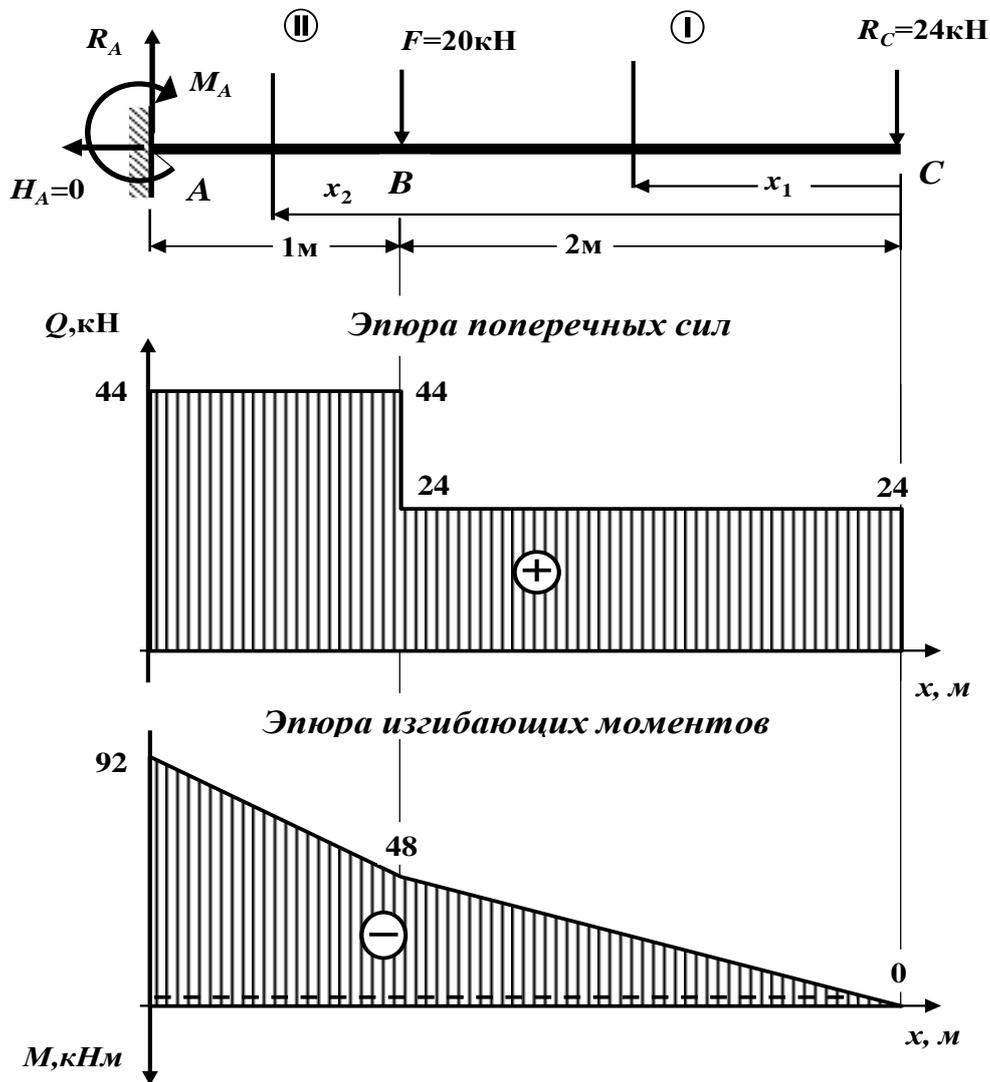


Изгибающий момент  $M$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(2\text{м}) = -88 + 40 = -48 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

$$M(3\text{м}) = -132 + 40 = -92 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

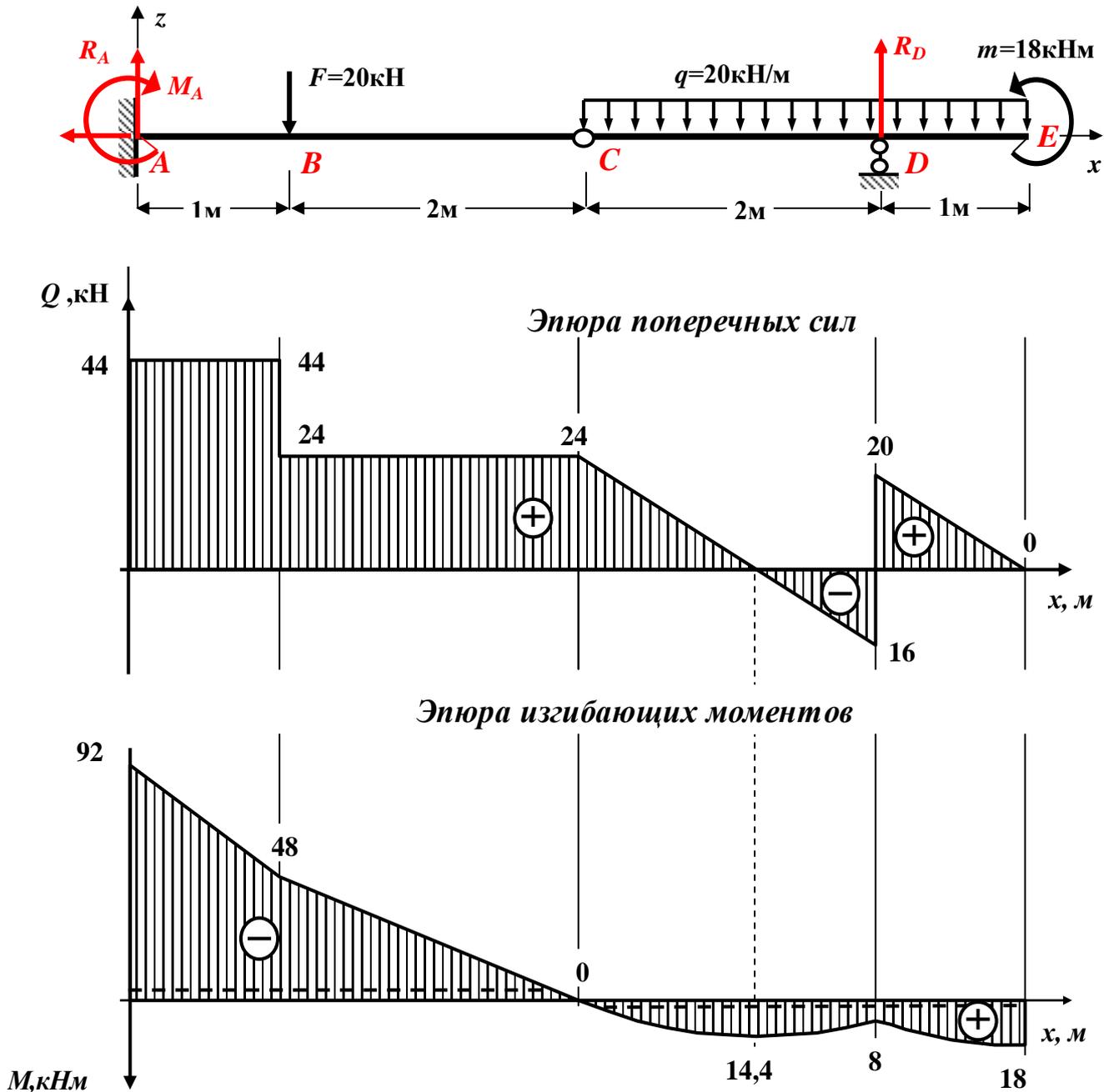
По полученным численным значениям  $M$  и  $Q$  в характерных сечениях основной балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.23



**Рис. 1.23. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента основной балки ABC**

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

Построенные эпюры для двух балок (основной и подвесной) в отдельности объединяются в эпюры внутренних силовых факторов для всей балки с промежуточным шарниром. Окончательный вид эпюр  $Q$  и  $M$  для заданной балки с промежуточным шарниром показан на рис. 1.24.



**Рис. 1.24. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента для заданной балки с промежуточным шарниром**

Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов масштаба: масштаб длины балки 1 см : 1,5 м; масштаб оси  $Q$  – 1 см : 10 кН; масштаб оси  $M$  – 1 см : 10 кН·м.

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.
- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.
- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).
- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{экстр}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).
- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.
- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

#### Статическая проверка

Для многопролетной балки алгебраическая сумма проекций на вертикальную ось  $z$  всех действующих внешних сил и реакций опор должна быть равна нулю, то есть

$$\Sigma F_z = R_A - F - q \cdot 3 + R_D = 44 - 20 - 20 \cdot 3 + 36 = 80 - 80 = 0 (\pm 5 \%).$$

*В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов для многопролетной балки построены правильно.*

### Подбор поперечного сечения заданной балки с промежуточным шарниром из прокатной стали по методу допускаемых напряжений

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (1.5)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле:

$\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $Y$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Из условия прочности определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения балки по формуле (1.8)

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Размеры поперечного сечения балки подбираются из условия

$$W_y \approx W_y^{\text{треб}}.$$

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **A**, рис. 1.24)

$$M_{\max} = 92 \text{ кНм} = 92 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Используя неравенство (1.8), определяем требуемую величину момента сопротивления

$$W_y^{\text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{92 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{160 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}} = 5,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 5,75 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{ см}^3 = 575 \text{ см}^3.$$

Следовательно,

$$W_y^{\text{треб}} = 575 \text{ см}^3$$

### а). Подбор поперечного сечения балки из стального прокатного двутавра

По сортаменту стального прокатного двутавра ближайшим к  $W_y^{\text{треб}} = 575 \text{ см}^3$  является значение момента сопротивления  $W_y = 597 \text{ см}^3$ , которое соответствует двутавру **№ 33**.

Следовательно, фактический момент сопротивления для двутавра № 33 равен

$$W_y^{\text{факт}} = 597 \text{ см}^3 = 597 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверяем выполнение условия прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (1.5)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{92 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{597 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 154,104 \text{ МПа} \approx 154 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности по методу допускаемых нормальных напряжений выполняется. Балка недогружена.*

Проверяем выполнение условия экономичности (для прокатных элементов  $\varepsilon \leq 10$  %)

$$\varepsilon = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{160 - 154}{160} \cdot 100 \% = 3,75 \% (< 10 \%).$$

*Условие экономичности выполняется.*

*Условия прочности и экономичности выполняются, следовательно, принимаем балку с поперечным сечением **из стального прокатного двутавра № 33.***

### **б). Подбор поперечного сечения балки из двух стальных прокатных швеллеров**

Требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки, состоящего из *двух швеллеров*, равен

$$W_y^{\text{треб}} = 575 \text{ см}^3.$$

Следовательно, требуемый момент сопротивления *одного швеллера* равен

$$W_y^{\text{шв}} = \frac{W_y^{\text{треб}}}{2} \geq \frac{575 \text{ см}^3}{2} = 288 \text{ см}^3.$$

Здесь с индексом "**шв**" обозначается момент сопротивления одного швеллера, а без индекса – момент сопротивления поперечного сечения балки, состоящего из двух швеллеров.

По сортаменту для стального прокатного швеллера ближайшим к  $W_y^{\text{шв}} = 288 \text{ см}^3$  является значение момента сопротивления  $W_y^{\text{шв}} = 308 \text{ см}^3$ , которое соответствует швеллеру **№ 27**.

Следовательно, фактический момент сопротивления для поперечного сечения балки, состоящего из двух стальных прокатных швеллеров № 27, равен

$$W_y^{\text{факт}} = 2W_y^{\text{шв}} = 2 \cdot 308 \text{ см}^3 = 616 \text{ см}^3 = 616 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверяем выполнение условия прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (1.5)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{92 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{616 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 149,4 \text{ МПа} \approx 149 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности по методу допускаемых нормальных напряжений выполняется. Балка недогружена.*

Проверяем выполнение условия экономичности (для прокатных элементов  $\varepsilon \leq 10$  %)

$$\varepsilon = \frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{160 - 149}{160} \cdot 100 \% = 6,87 \% (< 10 \%).$$

*Условие экономичности выполняется.*

*Условия прочности и экономичности выполняются, следовательно, принимаем балку с поперечным сечением из **двух стальных прокатных швеллеров № 27.***

### **Проверка прочности подобранных сечений балки по нормальным напряжениям по методу предельных состояний**

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу предельных состояний имеет вид (1.6)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B.$$

Проверим выполнение этого условия прочности.

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **A**, рис. 1.24)

$$M_{\max} = 92,0 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

#### **а). Поперечное сечение балки из стального прокатного двутавра**

Фактический момент сопротивления  $W_y^{\text{факт}}$  для двутавра № 33 равен

$$W_y^{\text{факт}} = 597 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Расчетное сопротивление **R** материала балки равно

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B = 230 \text{ МПа} \cdot 0,9 \cdot 1,0 = 207 \text{ МПа.}$$

Находим максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} = \frac{92,0 \cdot 10^{-3} \text{ МНм} \cdot 1,3}{597 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 200 \text{ МПа} < R = 207 \text{ МПа.}$$

*Условие прочности и по методу предельных состояний выполняется.*

**б). Поперечное сечение балки из двух стальных прокатных швеллеров**

Фактический момент сопротивления  $W_y^{\text{факт}}$  для двух швеллеров № 27 равен

$$W_y^{\text{факт}} = 2W_y^{\text{шв}} = 2 \cdot 308 \text{ см}^3 = 616 \text{ см}^3 = 616 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Расчетное сопротивление **R** материала балки равно

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B = 230 \text{ МПа} \cdot 0,9 \cdot 1,0 = 207 \text{ МПа.}$$

Находим максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot n}{W_y} = \frac{92,0 \cdot 10^{-3} \text{ МНм} \cdot 1,3}{616 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 194 \text{ МПа} < R = 207 \text{ МПа.}$$

*Условие прочности и по методу предельных состояний выполняется.*

**Проверка прочности подобранных сечений балки по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений**

Касательные напряжения ( $\tau$ ) в произвольной точке поперечного сечения балки определяются по формуле Д.И. Журавского (1.12)

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{b(z) J_y},$$

где

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_y^{\text{отс}}$  – абсолютное значение статического момента отсеченной части поперечного сечения балки;

$b(z)$  – толщина поперечного сечения балки на уровне точки поперечного сечения, в которой определяются касательные напряжения;

$J_y$  – главный момент инерции поперечного сечения балки.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (1.19)

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{\text{отс}}}{b(z) \cdot J_y} \leq [\tau],$$

где

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Для балок с поперечным сечением из прокатных стальных элементов

$$[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma] = 0,6 \cdot 160 \text{ МПа} = 96 \text{ МПа}.$$

В нашем примере опасным сечением по касательным напряжениям является сечение **A** (рис. 1.24), где

$$Q_{\max} = 44 \text{ кН}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в опасном сечении балки ( $Q = Q_{\max}$ ), в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральном слое (на оси  $y$ ), поэтому  $b(z) = d$  – для поперечного сечения балки *из двутавра* и  $b(z) = 2d$  – для поперечного сечения балки *из двух швеллеров*.

Отсеченная часть фигуры – верхняя половина поперечного сечения, поэтому  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2}$  – для поперечного сечения балки *из двутавра* и  $S_y^{\text{отс}} = 2 S_y^{1/2}$  – для поперечного сечения балки *из двух швеллеров*.

Здесь

$S_y^{1/2}$  – статический момент половины сечения. (Для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте).

**а). Поперечное сечение балки из стального прокатного двутавра**

Из сортамента прокатной стали для двутавра №33 выписываем следующие значения:

$$h = 33 \text{ см}; \quad d = 7,0 \text{ мм} = 0,7 \text{ см}; \quad t = 11,2 \text{ мм} = 1,12 \text{ см}; \quad J_y = 9840 \text{ см}^4;$$

$$S_y^{1/2} = 339 \text{ см}^3.$$

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений (1.19)

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_y^{1/2}}{d J_y} = \frac{44 \text{ кН} \cdot 339 \text{ см}^3}{0,7 \text{ см} \cdot 9840 \text{ см}^4} = 2,1655 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} =$$

$$\approx 21,6 \text{ МПа} < 96 \text{ МПа.}$$

Условие прочности по касательным напряжениям для двутавра № 33 выполняется.

В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.

### **б). Поперечное сечение балки из двух стальных прокатных швеллеров**

Из сортамента прокатной стали для швеллера № 27 выписываем следующие значения:

$$h = 27 \text{ см}; d = 6 \text{ мм} = 0,6 \text{ см}; t = 10,5 \text{ мм} = 1,05 \text{ см}; J_y = 4160 \text{ см}^4;$$

$$S_y^{1/2} = 178 \text{ см}^4.$$

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений (1.19)

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} 2 S_y^{1/2}}{2 d 2 J_y} = \frac{44 \text{ кН} \cdot 178 \text{ см}^3}{2 \cdot 0,6 \text{ см} \cdot 4160 \text{ см}^4} = 1,5689 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = \approx 15,7 \text{ МПа} < 96 \text{ МПа.}$$

Условие прочности по касательным напряжениям для двух швеллеров №27 выполняется.

В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.

### **Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки**

#### **а). Поперечное сечение балки из стального прокатного двутавра**

#### **• Эпюра нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки из двутавра**

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **A**, рис. 1.24) растянуты верхние волокна, поэтому в опасных точках, лежащих на линии **1 – 1** двутавра, нормальное напряжение положительное и равно

$$\sigma_{1-1} = + \sigma_{max} = + 154 \text{ МПа.}$$

В точках, лежащих на нейтральной линии **2 – 2** (ось **y**) двутавра, нормальное напряжение равно **0**

$$\sigma_{2-2} = 0 \text{ МПа.}$$

В опасных точках, лежащих на линии **3 – 3** двутавра, нормальное напряжение отрицательное и равно

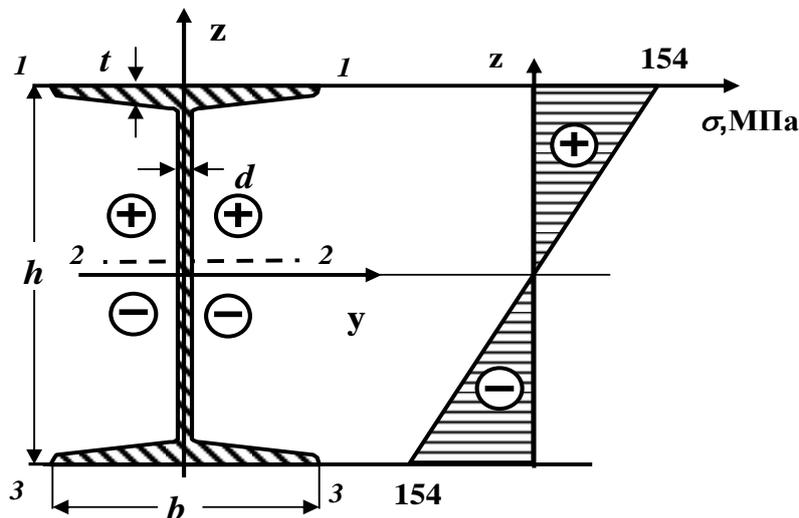
$$\sigma_{3-3} = -\sigma_{\max} = -154 \text{ МПа.}$$

Используя полученные данные, строим эпюру нормальных напряжений по высоте двутавровой балки, которая графически изображается наклонной прямой линией (рис .1.25.)

• **Эпюра касательных напряжений в пределах высоты стенки поперечного сечения балки из двутавра**

В опасном сечении балки по касательным напряжениям (сечение **A**, рис. 1.24)

$$Q_{\max} = 44 \text{ кН.}$$



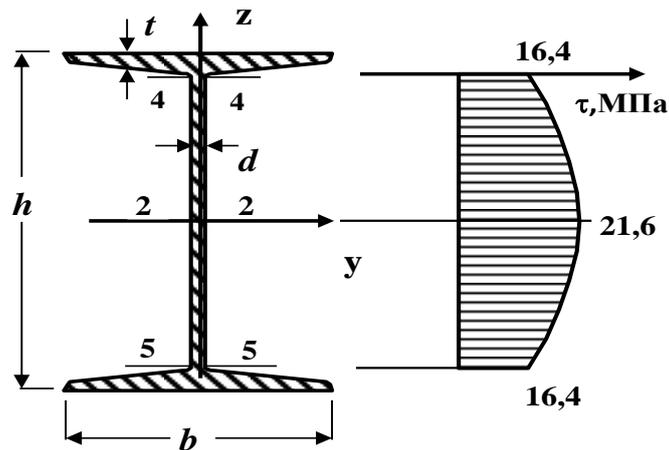
**Рис. 1.25. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутавровой балки**

Из сортамента прокатной стали для двутавра № 33 имеем следующие значения

$$h = 33 \text{ см; } d = 7,0 \text{ мм} = 0,7 \text{ см; } t = 11,2 \text{ мм} = 1,12 \text{ см;}$$

$$J_y = 9840 \text{ см}^4; \quad S_y^{1/2} = 339 \text{ см}^4.$$

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях **4 – 4**, **2 – 2** и **5 – 5** двутавра (рис. 1.26).



**Рис. 1.26. Эпюра касательных напряжений по высоте стенки двутавра**

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{b(z) J_y}$$

В опасных точках **2 – 2**, лежащих на нейтральной линии (ось **y**) двутавра, касательные напряжения равны  **$T_{\max}$**

$$T_{2-2} = T_{\max} = 21,6 \text{ МПа.}$$

Для определения касательных напряжений в точках, лежащих на линиях **4 – 4** и **5 – 5**, найдем статический момент «отсеченной» части (полки двутавра) поперечного сечения балки относительно главной оси **y**

$$\begin{aligned} S_y^{\text{отс}} &= S_y^{\text{полка}} = S_y^{1/2} - S_y^{1/2 \text{ стенки}} = S_y^{1/2} - d \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) = \\ &= 339 - 0,7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{33}{2} - 1,12\right)^2 = 339 - 82,8 = 256 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Вычисляем касательные напряжения в точках, лежащих на линиях **4 – 4** и **5 – 5**

$$\begin{aligned} T_{4-4} = T_{5-5} &= \frac{Q_{\max} S_y^{\text{полка}}}{d J_y} = \frac{44 \text{ кН} \cdot 256 \text{ см}^3}{0,7 \text{ см} \cdot 9840 \text{ см}^4} = 1,64 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = \\ &= 1,64 \cdot 10 \text{ МПа} = 16,4 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру касательных напряжений по высоте стенки двутавра (рис. 1.26).

### б). Поперечное сечение балки из двух стальных прокатных швеллеров

- Эюра нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки из двух швеллеров**

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **A**, рис. 1.24) растянуты верхние волокна, поэтому в опасных точках, лежащих на линии **1-1** двух швеллеров, нормальное напряжение положительное и равно

$$\sigma_{1-1} = + \sigma_{\max} = + 149 \text{ МПа.}$$

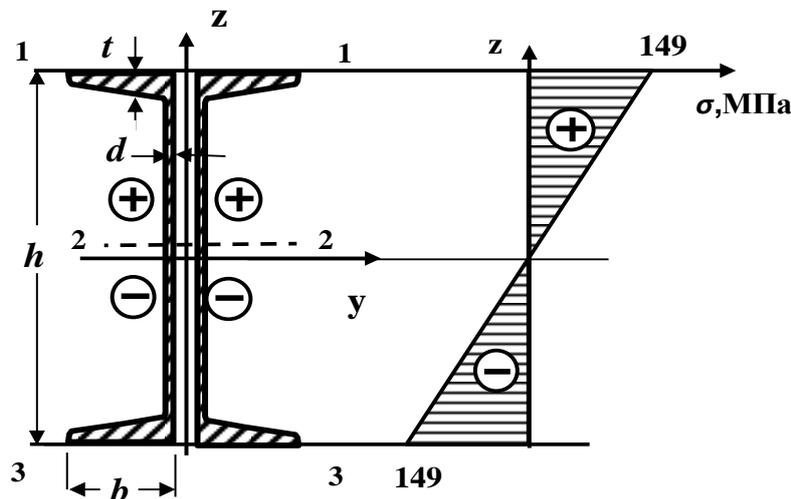
В точках **2-2**, лежащих на нейтральной линии (ось **y**) двух швеллеров, нормальное напряжение равно **0**

$$\sigma_{2-2} = 0 \text{ МПа.}$$

В опасных точках, лежащих на линии **3-3** двух швеллеров, нормальное напряжение отрицательное и равно

$$\sigma_{3-3} = - \sigma_{\max} = - 149 \text{ МПа.}$$

Используя полученные данные, строим эюру нормальных напряжений по высоте балки, которая графически изображается наклонной прямой линией (рис. 1.27).



**Рис. 1.27. Эюра нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки из двух швеллеров**

- Эюра касательных напряжений в пределах высоты стенки поперечного сечения балки из двух швеллеров**

## Расчет балок на прочность

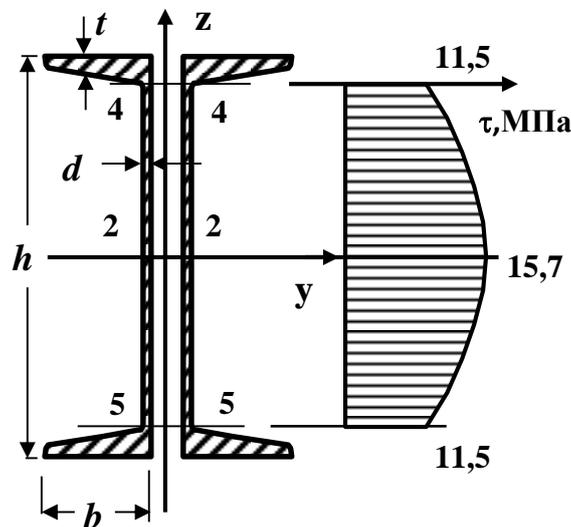
В опасном сечении балки по касательным напряжениям (сечение **A**, рис. 1.24)

$$Q_{\max} = 44 \text{ кН.}$$

Из сортамента прокатной стали для швеллера № 27 имеем следующие значения

$$h = 27 \text{ см; } d = 0,6 \text{ см; } t = 1,05 \text{ см; } J_y = 4160 \text{ см}^4; S_y^{1/2} = 178 \text{ см}^4.$$

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях **4–4**, **2–2** и **5–5** двух швеллеров (рис. 1.28).



**Рис. 1.28. Эпюра касательных напряжений в пределах высоты стенки поперечного сечения балки из двух швеллеров**

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{b(z) J_y}$$

Касательные напряжения в точках **2–2** нейтральной линии (ось **y**) двух швеллеров равны  $\tau_{\max}$

$$\tau_{2-2} = \tau_{\max} = 15,7 \text{ МПа.}$$

Для определения касательного напряжения в точках линий **4 – 4** и **5 – 5** двух швеллеров найдем статический момент «отсеченной» части (полок двух швеллеров) поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$

$$\begin{aligned} S_y^{\text{отс}} &= S_y^{\text{полок}} = 2 \cdot (S_y^{1/2} - S_y^{1/2\text{стенки}}) = 2 \cdot [S_y^{1/2} - d \cdot (\frac{h}{2} - t) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{h}{2} - t)] = \\ &= 2 \cdot [S_y^{1/2} - \frac{d}{2} \cdot (\frac{h}{2} - t)^2] = 2 \cdot [178 - \frac{0,6}{2} \cdot (\frac{27}{2} - 1,05)^2] = \\ &= 2 \cdot (178 - 46,5) = 2 \cdot 131 = 262 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Вычисляем касательные напряжения в точках, лежащих на линиях **4 – 4** и **5 – 5** двух швеллеров

$$\tau_{4-4} = \tau_{5-5} = \frac{Q_{\max}}{2d} \frac{S_y^{\text{полки}}}{2I_y} = \frac{44 \text{ кН} \cdot 262 \text{ см}^3}{2 \cdot 0,6 \text{ см} \cdot 2 \cdot 4160 \text{ см}^4} = 1,15 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 11,5 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру касательных напряжений по высоте стенки двух швеллеров (рис. 1.28).

### Проверка прочности подобранных сечений балки по главным напряжениям

Обычно, дополнительную проверку на прочность по главным напряжениям производят для поперечных сечений, у которых ширина резко меняется вблизи краев сечения, например, в двутавре или швеллере. Эпюры нормальных и касательных напряжений для таких профилей показывают, что на уровне перехода от полки к стенке (точки **4 – 4** и **5 – 5**) касательные и нормальные напряжения ненамного отличаются от своих максимальных значений.

Дополнительная проверка на прочность по главным напряжениям при изгибе производится в зависимости от принятой теории прочности.

По главным напряжениям проверяются те сечения балки *по ее длине*, где одновременно действуют большие изгибающий момент и поперечная сила. Причем, если таких сечений несколько, то проверяются все эти сечения.

В данной задаче таким сечением является сечение в опоре **A** (рис. 1.24), где

$$M_A = M_{\max} = 92 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}; \quad \text{и} \quad Q_A = Q_{\max} = 44 \text{ кН}.$$

Произведем проверку прочности для точек **4 – 4** и **5 – 5** (рис. 1.26 и 1.28) поперечных сечений балки по главным напряжениям в соответствии с **IV** (энергетической) теорией прочности.

Вычислим нормальные и касательные напряжения в этих точках по формулам (1.1) и (1.12).

#### а). Поперечное сечение балки из стального прокатного двутавра №33

- **Нормальные напряжения для двутавра № 33**

Нормальные напряжения в точках **4 - 4** и **5 - 5** двутавра №33 (рис. 1.26) равны (1.1):

$$|\sigma_{4-4}| = |\sigma_{5-5}| = \frac{M_A}{I_y} \cdot Z_{4-4},$$

где

$M_A$  – величина изгибающего момента в сечении **A** ( $M_A = 92 \cdot 10^{-3}$  МНм) (рис. 1.24);

$I_y$  – величина главного момента инерции относительно оси **y** двутавра № 33 ( $I_y = 9840$  см<sup>4</sup>);

$Z_{4-4}$  – расстояние от нейтральной оси (главной оси **y**) до точек **4 - 4** или **5 - 5** (рис. 1.26):

$$Z_{4-4} = \left| \frac{h}{2} - t \right| = \frac{33}{2} - 1,12 = 15,38 \text{ см} \approx 15,4 \text{ см} = 15,4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Следовательно,

$$|\sigma_{4-4}| = |\sigma_{5-5}| = \frac{M_A}{I_y} \cdot Z_{4-4} = \frac{92 \cdot 10^{-3}}{9840 \cdot 10^{-8}} \cdot 15,4 \cdot 10^{-2} = 143,98 \text{ МПа} \approx 144 \text{ МПа.}$$

- **Касательные напряжения для двутавра № 33**

Касательные напряжения в точках **4 - 4** и **5 - 5** двутавра № 33 (рис. 1.26) равны

$$\tau_{4-4} = \tau_{5-5} = 16,4 \text{ МПа.}$$

- **Расчетные (главные) напряжения**

Расчетные (главные) напряжения по **IV** (энергетической) теории прочности (1.23) в точках **4 - 4** и **5 - 5** двутавра № 33 будут равны

$$\begin{aligned} \sigma_{4-4}^{IV} &= \sqrt{\sigma_{4-4}^2 + 3\tau_{4-4}^2} = \sqrt{144^2 + 3 \cdot 16,4^2} = 146,8 \text{ МПа} \approx \\ &\approx 147 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Условие прочности по главным напряжениям **для двутавра № 33** выполняется.

## б). Поперечное сечение балки из двух стальных прокатных швеллеров № 27

- **Нормальные напряжения для двух швеллеров № 27**

Нормальные напряжения в точках **4 - 4** и **5 - 5** двух швеллеров № 27 (рис. 1.28) равны (1.1)

$$|\sigma_{4-4}| = |\sigma_{5-5}| = \frac{M_A}{I_y} \cdot Z_{4-4},$$

где

$M_A$  – величина изгибающего момента в сечении **A** ( $M_A = 92 \cdot 10^{-3}$  МНм) (рис. 1.22);

$I_y$  – величина главного момента инерции относительно оси **y** двух швеллеров № 27 ( $I_y = 2 \cdot 4160 \text{ см}^4 = 8320 \text{ см}^4$ );

$Z_{4-4}$  – расстояние от нейтральной оси (главной оси **y**) до точек **4 – 4** или **5 – 5** (рис. 1.28):

$$Z_{4-4} = \left| \frac{h}{2} - t \right| = \frac{27}{2} - 1,05 = 12,45 \text{ см} \approx 12,5 \text{ см} = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Следовательно,

$$|\sigma_{4-4}| = |\sigma_{5-5}| = \frac{M_A}{I_y} \cdot Z_{4-4} = \frac{92 \cdot 10^{-3}}{8320 \cdot 10^{-8}} \cdot 12,5 \cdot 10^{-2} = 138,2 \text{ МПа} \approx 138 \text{ МПа.}$$

- **Касательные напряжения для двух швеллеров № 27**

Касательные напряжения в точках **4 – 4** и **5 – 5** двух швеллеров № 27 (рис. 1.28) равны

$$\tau_{4-4} = \tau_{5-5} = 11,5 \text{ МПа.}$$

- **Расчетные (главные) напряжения**

Расчетные (главные) напряжения по **IV** (энергетической) теории прочности (1.23) в точках **4 – 4** и **5 – 5** двух швеллеров № 27 будут равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{4-4}^{IV} &= \sqrt{\sigma_{4-4}^2 + 3\tau_{4-4}^2} = \sqrt{138^2 + 3 \cdot 11,5^2} = 139,4 \text{ МПа} \approx \\ &\approx 139 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа} \end{aligned}$$

*Условие прочности по главным напряжениям для двух швеллеров № 27 выполняется.*

*Условия прочности подобранных сечений балки по методу допускаемых нормальных и касательных напряжений, по методу предельных состояний и по главным напряжениям выполняются, следовательно, **принимается окончательно сечение балки из стального прокатного двутавра № 33 или из двух стальных прокатных швеллеров № 27.***

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ « РАСЧЁТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ »

1. Какой вид деформации называется изгибом?
2. Какой изгиб называется чистым?
3. Какой изгиб называется поперечным?
4. Что такое плоский изгиб?
5. В каком случае изгиб называется прямым?
6. Что происходит с продольными волокнами материала при изгибе?
7. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки?
8. Как определяется знак поперечной, продольной сил и изгибающего момента в поперечном сечении балки?
9. Для чего строятся эпюры внутренних усилий при изгибе?
10. Что называется силовой плоскостью (силовой линией)?
11. Что называется нейтральной линией?
12. Назовите гипотезы, которые принимаются для вывода формулы нормальных напряжений при чистом плоском изгибе.
13. Как определяется опасное сечение балки по нормальным напряжениям?
14. Какая формула для определения нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения балки.
15. Как определяются опасные точки поперечного сечения балки по нормальным напряжениям?
16. Напишите условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.
17. Эпюра нормальных напряжений при изгибе. Как с помощью этой эпюры определить напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки?
18. Какие гипотезы используются при выводе формулы касательных напряжений при изгибе?
19. Напишите формулу Журавского для определения касательных напряжений при изгибе.
20. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях балки прямоугольной формы, для стенки двутавра?
21. Как проверяется прочность балки по главным напряжениям?

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011.
3. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.
5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – СПб.: Лань, 2005.
6. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.