



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Методические указания
по выполнению расчетно-графической
работы по дисциплине

**«Теория упругости с основами
пластичности и ползучести»**

для обучающихся по техническим
направлениям подготовки
(специальностям)
«Упругопластический изгиб балки»

Авторы
Языев Б.М, Демченко Д.Б.,
Маяцкая И.А., Чепурненко А.С.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Упругопластический изгиб балки: методические указания предназначены для проведения практической работы по дисциплине «Теория упругости с основами пластичности и ползучести» для обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания включают основные теоретические положения и пример выполнения задания расчетно-графической работы для студентов, изучающих курс «Теория упругости с основами пластичности и ползучести».

Авторы

докт. техн. наук, профессор
кафедры «Соппротивление
материалов» Языев Б.М.;

канд. техн. наук, доц. Кафедры
«Соппротивление материалов»
Демченко Д.Б.;

канд. техн. наук, доц. Кафедры
«Соппротивление материалов»
Маяцкая И.А.;

канд. техн. наук, ст. преп. кафедры
«Соппротивление материалов»
Чепурненко А.С.





Оглавление

1. Постановка задачи	4
2. Предельное сопротивление изгибу.	19
3. Пример.	31
Библиографический список	36

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории неупругого изгиба рассматривается изгиб балки, материал которой не подчиняется закону Р. Гука. Подобная задача возникает всегда, когда балка нагружается таким образом, что возникающие в ней напряжения превышают предел пропорциональности $\sigma_{\text{пл}}$ для данного материала.

Поведение балки при неупругом изгибе определяется формой диаграммы зависимости напряжения σ от деформации ε .

Исследование неупругих балок основывается, как и в случае упругого изгиба, на предположении:

- плоские поперечные сечения балки при чистом изгибе остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси;
- продольные волокна балки находятся в состоянии простого растяжения или сжатия и не давят друг на друга в поперечном направлении.

Отсюда следует, что деформации в балке по высоте сечения изменяются по линейному закону. В этом случае с помощью диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ и уравнений равновесия можно найти величины σ и ε .

Уравнение неупругого изгиба.

Для получения уравнения неупругого изгиба рассмотрим чистый изгиб балки. Балку возьмем постоянного поперечного сечения с продольной плоскостью симметрии, подверженную действию изгибающих моментов, расположенных в той же плоскости (рис. 1).

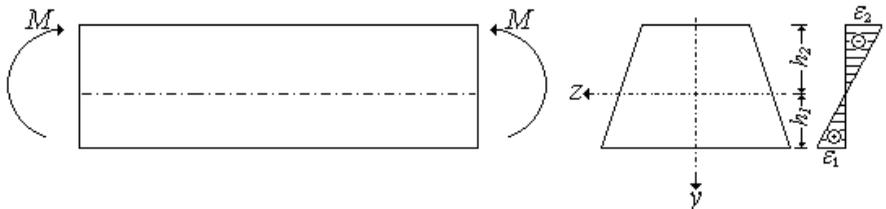


Рис. 1

Балка изгибается в плоскости xOy . Ось z можно рассматривать как нейтральную ось поперечного сечения, положение которой пока неизвестно.

Используя результаты чистого изгиба (из сопротивления материалов) будем иметь:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\rho} = \chi \cdot y; \quad \varepsilon_1 = \frac{h_1}{\rho} = \chi \cdot h_1; \quad \varepsilon_2 = -\frac{h_2}{\rho} = -\chi \cdot h_2, \quad (1)$$

где χ – кривизна.

Отсюда следует, что если известны кривизна и положение нейтральной оси, то сравнительно легко можно найти и деформации.

Положение нейтральной оси можно определить при помощи диаграммы зависимости напряжения от деформации для данного материала и уравнения равновесия между внутренними и внешними силами

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0,$$

а кривизну χ можно найти, используя уравнение равновесия – совокупность напряжений, возникающих в поперечном сечении, статически эквивалентна изгибающему моменту M , т. е.

$$\int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M.$$

После определения кривизны χ из выражения $\frac{d^2v}{dx^2} = \chi$, известного из курса сопротивления материалов, можно найти прогибы балки.

Пластический изгиб.

Простейшим случаем неупругого изгиба является *пластический изгиб*, который имеет место при идеально упругопластическом материале. Такой материал подчиняется закону Гука, пока напряжения $\sigma < \sigma_T$, а затем в нем развиваются пластические деформации при $\sigma = \sigma_T$ (рис. 2). Из диаграммы следует, что идеально упругопластический материал имеет область линейно-упру-

ного поведения, за которой следует область идеально-пластического поведения. Такой материал часто называют идеально пластическим.

Рассмотрим чистый изгиб балки из идеально упругопластического материала.

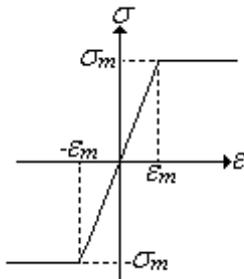


Рис. 2

При исследовании изгиба балок, поперечные сечения которых имеют только одну ось симметрии, различают четыре вида напряженных состояний:

- чисто упругое напряженное состояние (рис. 3,а,б);
- одностороннее упругопластическое напряженное состояние (рис. 3,с);
- двустороннее упругопластическое напряженное состояние (рис. 3,д,е);
- чисто-пластическое напряженное состояние (рис. 3,ф).

В этих случаях наибольшие абсолютные значения растягивающих и сжимающих напряжений различны, поэтому текучесть материала в растянутой и сжатой областях балки наступает не одновременно (рис.3,б,с). Это приводит к параллельному смещению нейтральной оси.

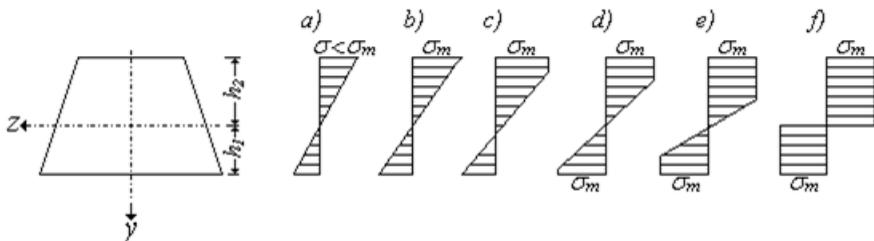


Рис. 3

При чистом изгибе в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения. Решение из сопротивления материалов:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}.$$

Это решение справедливо до тех пор, пока $\sigma_{нб}$ не достигает σ_T .

Наибольшие напряжения $\sigma_{нб}$, одинаковые во всех поперечных сечениях балки, имеют место в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах (рис. 3,а).

Увеличение изгибающего момента M ведет к увеличению напряжений и при определенном значении $M = M_T$, в крайних верхних волокнах напряжения достигнут значения σ_T (рис. 3,б). В этом случае все волокна балки находятся в упругом состоянии, а наиболее удаленные волокна достигли напряжения, соответствующего пределу текучести (σ_T).

Соответствующее значение изгибающего момента определяется по формуле:

$$M_T = \frac{\sigma_T I_z}{h_2} \rightarrow M_T = \sigma_T \cdot W \quad (2)$$

Здесь $W = \frac{I_z}{y_{\max}}$.

Для балки прямоугольного сечения

$$h_2 = h_1 = h/2; I_z = bh^3/12$$

формула (2) принимает вид:

$$M_T = \frac{\sigma_T bh^3 \cdot 2}{12h} = \frac{\sigma_T bh^2}{6} = \sigma_T \cdot W; \quad W = \frac{bh^2}{6} \quad (3)$$

При увеличении изгибающего момента сверх M_T волокна вблизи верхней поверхности балки начнут испытывать состояние текучести. Распределение напряжений показано на *рис. 3,с*. Дальнейшее увеличение момента приводит к проникновению все глубже в балку пластических деформаций (*рис. 3,д*).

При этом материал во внешних зонах балки будет находиться в пластическом состоянии, в то время как центральное «ядро» остается упругим. Деформации в крайних точках поперечного сечения будут возрастать и наибольшая величина деформации пре-
взойдет ε_T , соответствующее пределу текучести σ_T .

Если продолжать увеличивать изгибающий момент M , то пластическая зона будет дальше распространяться внутрь по направлению к нейтральной оси, (*рис. 3,е*). На этом этапе, деформации в крайних волокнах могут в 10 – 15 раз превышать деформации ε_T , а упругое «ядро» почти исчезнет.

Фактически балка уже исчерпала свою предельную несущую способность по моменту и распределение напряжений σ в предельном состоянии можно представить двумя прямоугольниками (*рис. 3,ф*). Изгибающий момент M , соответствующий такому идеализированному распределению напряжений σ называется предельным моментом M_n и представляет собой максимальный момент, который может выдержать балка из идеально упругопластического материала. При вычислении M_n принимаем распределение напряжений, как на *рис. 4,а*. Поскольку сумма внутренних растягивающих усилий равна сумме сжимающих усилий (равнодействующая внутренних усилий равна нулю) заключаем, что нейтральная ось делит площадь поперечного сечения балки на две равные части.

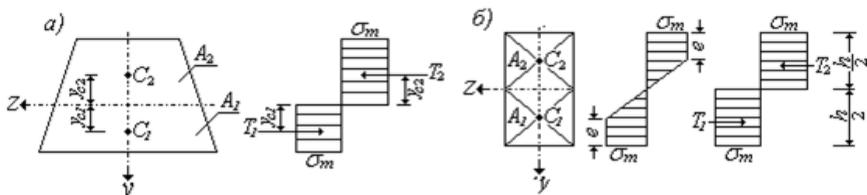


Рис. 4

Тогда: $T_1 = \sigma_m \cdot A_1$; $T_2 = \sigma_m \cdot A_2$,

где: A_1 – часть площади сечения, расположенная ниже нейтральной линии;

A_2 – часть площади сечения, расположенная выше нейтральной линии.

Равнодействующая внутренних усилий в поперечном сечении

$$N = \int_A \sigma_T \cdot dA = T_1 - T_2 = 0$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_T \cdot A_1 - \sigma_T \cdot A_2 = 0. \rightarrow A_1 = A_2$$

Следовательно, условие для определения положения нейтральной оси:

$$A_1 = A_2. \quad (4)$$

Для прямоугольного сечения (рис. 4,б) нейтральная ось совпадает с центральной осью.

Аналогично выражению (1) для упругого момента, выражение для предельного момента можно записать в виде (рис. 3.б):

$$M_n = \sigma_T \cdot W_n = T_1 \cdot y_{c1} + T_2 \cdot y_{c2} = \sigma_T (A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2}),$$

$$M_n = \sigma_T \cdot \frac{A}{2} (y_{c1} + y_{c2}) = \sigma_T \cdot W_n \quad (5)$$

или

$$W_n = \frac{A}{2}(y_{c1} + y_{c2}) \quad (6)$$

где

Таким образом, W_n представляет собой пластический момент сопротивления сечения (*пластический модуль*). Пластический модуль W_n можно геометрически интерпретировать как сумму статических моментов относительно нейтральной оси частей площади поперечного сечения, лежащих выше и ниже нейтральной оси, т.е.

$$W_n = S_z^a + S_z^b \quad (7)$$

Для прямоугольного и двутаврового поперечных сечений (две оси симметрии)

$$y_{c1} = y_{c2}$$

нейтральная линия будет одной и той же при пластическом и упругом изгибах.

Следовательно, отношение предельного момента M_n для балки к моменту M_m , зависит только от формы поперечного сечения и характеризует запас прочности балки по отношению к состоянию, при котором в балке возникают первые пластические деформации

$$f = \frac{M_n}{M_m} = \frac{W_n}{W} \quad (8)$$

Для балки прямоугольного поперечного сечения, согласно (5) (рис. 5).

$$W_n = \frac{bh}{2}(y_1 + y_2) = \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4}\right) = \frac{bh}{2} \cdot a_c = \frac{b \cdot h^2}{4} \quad (9)$$

где $a_c = y_1 + y_2$ – расстояние между центрами тяжести двух частей поперечного сечения.

Подставив (9) и (3) в (8), получим:

$$f = \frac{bh^2}{4} \frac{6}{bh^2} = \frac{3}{2} = 1,5 \quad (a)$$

Таким образом, для балки прямоугольного поперечного сечения предельный момент M_n на 50% превышает момент, при котором возникает начальное пластическое течение (первые пластические деформации).

Следовательно, для полного разрушения балки прямоугольного поперечного сечения требуется разрушающий момент на 50% больше того, при котором начинается пластическая деформация.

$$h_1 = h - 2t; \quad b_1 = b - d.$$

Рассмотрим двутавровую балку (рис. 6).

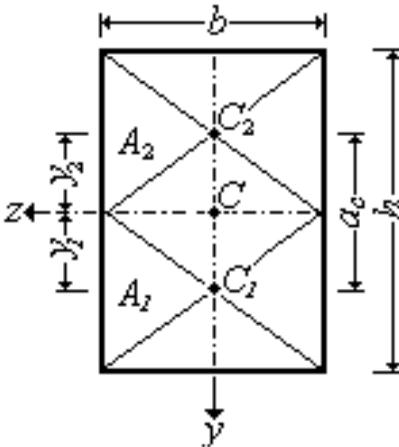


Рис. 5

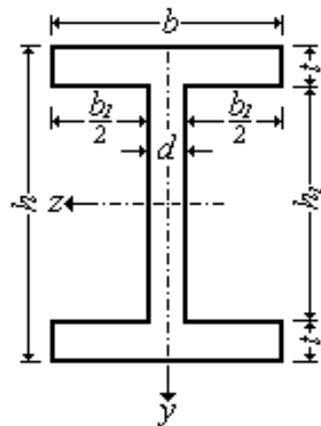


Рис. 6

Согласно (2) изгибающий момент, при котором начинается текучесть, получается путем умножения σ_T на момент сопротивления. В результате получим:

$$M_T = \sigma_T \left(\frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12} \right) \frac{2}{h} \quad (6)$$

При вычислении M_n учтем, что распределение напряжений должно соответствовать рис. 4. Момент внутренних растягивающих усилий относительно нейтральной оси получается умножением σ_T на статический момент половины поперечного сечения относительно этой же оси. Удваивая этот момент, находим:

$$M_n = \sigma_T \left(\frac{bh^2}{4} - \frac{b_1 h_1^2}{4} \right). \quad (в)$$

Подставив (б) и (в) в (8), получим

$$f = \frac{M_n}{M_m} = \frac{\sigma_m \left(\frac{bh^2}{4} - \frac{b_1 h_1^2}{4} \right)}{\sigma_m \left(\frac{bh^2}{6} - \frac{b_1 h_1^3}{6h} \right)} = \frac{3bh^2 \left(1 - \frac{b_1 h_1^2}{bh^2} \right)}{2bh^2 \left(1 - \frac{b_1 h_1^3}{bh^3} \right)} = 1,5 \frac{1 - \frac{b_1 h_1^2}{bh^2}}{1 - \frac{b_1 h_1^3}{bh^3}}.$$

Из полученного выражения видно, что отношение M_n/M_T меньше чем 3/2 и его значение зависит от размеров поперечного сечения. Полагая, например,

$$\frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h} = 0,9,$$

найдем из уравнения (г)

$$\frac{M_n}{M_m} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - (0,9)^3}{1 - (0,9)^4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - 0,729}{1 - 0,6561} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,271}{0,3439} = \frac{0,813}{0,6878} = 1,182$$

В этом случае M_n на 18% больше M_T . В случае обычных прокатных двутавровых балок вычисления дают значения $f = 1,15 \div 1,17$.

Рассмотренный способ расчета балок может использоваться и для поперечного изгиба, если учесть, что влияние сдвигов на величину нормальных напряжений незначительно.

Пластические шарниры.

Рассмотрим свободно опертую прямоугольную балку, нагруженную в середине сосредоточенной силой F (рис. 7). Эпюра изгибающих моментов представляет собой треугольник. Наибольший изгибающий момент возникает в среднем сечении балки. При достижении моментом величины $M_1 = M_T$ (рис. 7, б - эпюра 1) в точках A и B (рис. 7, а) появляются первые пластические деформации. С увеличением силы F момент в среднем сечении достигает некоторой величины M_2 (рис. 7, б - эпюра 2), а в сечениях C и D моменты достигнут величины M_T . При этом пластические зоны распространятся вглубь балки. Следовательно, если величина момента находится в пределах $M_T \leq M_{\max} \leq M_n$, то в средней части балки будет ограниченное пластическое течение.

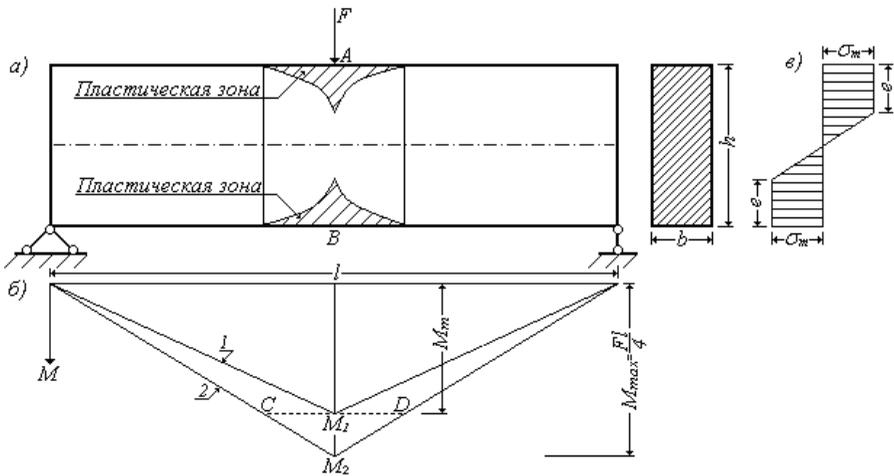


Рис. 7

Для каждого значения e глубины этого распространения соответствующий изгибающий момент, определяется с помощью заштрихованной площади (рис. 7, в) по формуле

$$M = \sigma_T \cdot b \cdot e \cdot (h - e) + \sigma_T \frac{b(h - 2e)^2}{6} = \sigma_T \frac{bh^2}{6} \left[1 + \frac{2e}{h} \left(1 - \frac{e}{h} \right) \right]. \quad (9)$$

Соответствующая кривизна изогнутой оси балки находится использованием уравнения (1). Применяя это уравнение к волок-

нам, находящимся на расстоянии $\frac{h}{2} - e$ от нейтральной оси, и учитывая, что напряжение в этих волокнах достигает предела текучести σ_T , получим

$$\sigma_T = \frac{E\left(\frac{h}{2} - e\right)}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_T}{E\left(\frac{h}{2} - e\right)}. \quad (10)$$

Пренебрегая влиянием касательных напряжений, глубину e распространения пластической деформации в каждом поперечном сечении можно найти из выражения (9) и таким путем определить области пластического течения.

Когда наибольший изгибающий момент $M_{\max} = \frac{Fl}{4}$ приближается к значению M_{T_1} (рис. 8), то области пластичности приближаются к нейтральной оси среднего поперечного сечения балки. Сопrotивление изгибу в этом поперечном сечении определится наибольшим значением момента, при котором балка начнет разрушаться.

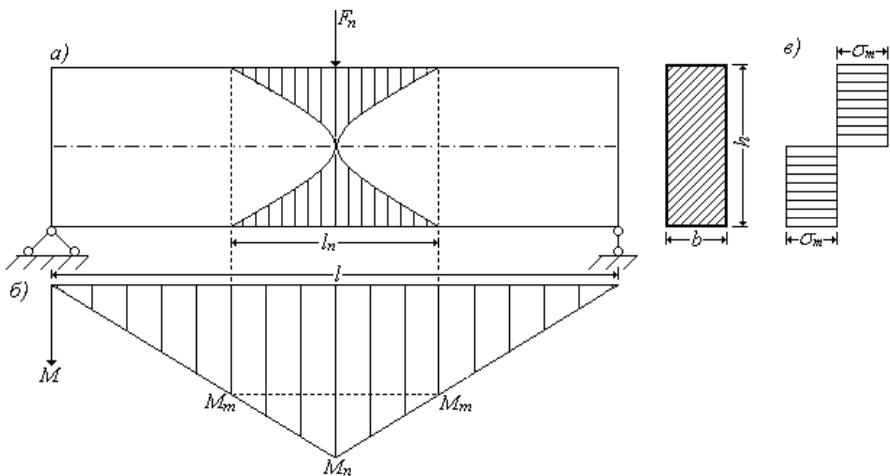


Рис. 8

Две половины балки, оставаясь сравнительно жесткими, будут поворачиваться одна относительно другой вокруг нейтральной оси среднего поперечного сечения, как вокруг некоторого шарнира.

Появление в балке такого «шарнира» равносильно приобретению балкой одной степени свободы (потере одной внутренней связи).

Подобный кинематический образ оказывается удобным при расчетах сооружений по предельным нагрузкам. Такой воображаемый шарнир принято называть *шарниром текучести* или *пластическим шарниром*. Однако пластический шарнир имеет существенные отличия от обыкновенного шарнира:

во-первых, изгибающий момент в сечении, проходящем через пластический шарнир, не равен нулю, а равен пределу пластического сопротивления сечения изгибу;

во-вторых, пластический шарнир является односторонним шарниром, так как он исчезает при перемене направления действующих сил при разгрузке.

Можно считать, что балка, ослабленная чрезмерно большими поворотами в среднем поперечном сечении (кривизна становится чрезвычайно большой – (рис. 8), ведет себя подобно двум жестким стержням, соединенных *пластическим шарниром*, который позволяет этим стержням поворачиваться относительно друг друга

под действием момента M_n . Эпюра напряжений при образовании пластического шарнира показана на (рис. 8, в).

Для вычисления изгибающего момента, соответствующего образованию пластического шарнира, можно использовать формулу (5)

$$M_n = \sigma_T \cdot \frac{A}{2} (y_{c1} + y_{c2}) = \sigma_T \cdot W_n$$

где, согласно (7), $W_n = S_z^e + S_z^u$.

Если сечение имеет две оси симметрии, то пластический момент сопротивления определяется по формуле

$$W_n = 2S_z^{1/2}, \quad (11)$$

где $S_z^{1/2}$ – статический момент половины площади сечения.

Если сечение балки *не симметрично* относительно горизонтальной центральной оси, то нейтральная ось при развитии пластических деформаций смещается. Положение нейтральной оси при образовании пластического шарнира может быть найдено из условия

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

Так как при образовании пластического шарнира напряжения в сжатой и растянутой зонах по абсолютной величине равны σ_T , то:

$$\sigma_T (A_p - A_c) = 0. \quad (12)$$

Длину пластической зоны l_n , примыкающей к пластическому шарниру, можно вычислить, учитывая, что изгибающий момент M в начале этой зоны равен M_T (рис. 8). В результате, получим

$$M_T = \frac{F}{2} \cdot \frac{l - l_n}{2}; \quad M_{\max} = \frac{Fl}{4} = M_n \rightarrow F = \frac{4M_n}{l}$$

Тогда

$$M_T = \frac{4M_n}{2l} \cdot \frac{l-l_n}{2} \rightarrow l_n = l \left(1 - \frac{M_T}{M_n} \right) \rightarrow l_n = l \left(1 - \frac{1}{f} \right) \quad (13)$$

Например, для балки прямоугольного поперечного сечения $f=1,5$, следовательно,

$$l_n = \left(1 - \frac{2}{3} \right) \cdot l = \frac{l}{3}$$

Для двутаврового сечения

$$l_n = (0,115 \div 0,145) \cdot l$$

Пример 1. Определить отношение M_n/M_T для балки круглого поперечного сечения (рис. 9).

Из (8) имеем:

$$f = \frac{M_n}{M_T} = \frac{W_n}{W}$$

где $W_n = \frac{A}{2} (y_{c1} + y_{c2})$

Для круга:

$$W = \frac{\pi r^3}{4}; \quad W = 2S \frac{1}{z} = 2 \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} r^3$$

Следовательно

$$f = \frac{M_n}{M_T} = \frac{W_n}{W} = \frac{4r^3}{3\pi r^3} = \frac{16}{3\pi} = 1,7$$

Пример 2. Определить отношение M_n/M_T для балки кольцевого поперечного сечения (рис. 10).

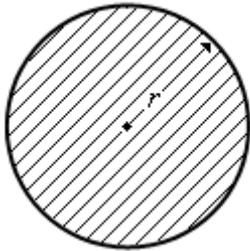


Рис. 9

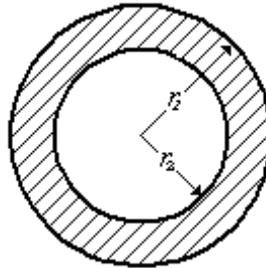


Рис. 10

Для кольца имеем

$$W = \frac{\frac{\pi r_1^4}{4} - \frac{\pi r_2^4}{4}}{r_1} = \frac{\pi(r_1^4 - r_2^4)}{4r_1};$$

$$W_n = 2S_z^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}(r_1^3 - r_2^3).$$

Тогда

$$f = \frac{M_n}{M_T} = \frac{W_n}{W} = \frac{4(r_1^3 - r_2^3)4r_1}{3\pi(r_1^4 - r_2^4)} = \frac{16r_1}{3\pi} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^4 - r_2^4}.$$

Примем $r_2 = 0,8r_1$.

Тогда

$$f = \frac{16r_1}{3\pi} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^4 - r_2^4} = \frac{16r_1}{3\pi} \frac{r_1^3 - (0,8r_1)^3}{r_1^4 - (0,8r_1)^4} = \frac{16r_1}{3\pi} \frac{r_1^3(1 - 0,512)}{r_1^4(1 - 0,4096)} = \frac{16}{3\pi} \frac{0,488}{0,5904} = 1,4$$

2. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗГИБУ.

Несущая способность статически неопределимых балок

Обычная практика проектирования конструкций, воспринимающих статические нагрузки, сводится к выбору безопасных размеров конструкции при условии, чтобы рабочая нагрузка, умноженная на коэффициент запаса, вызывала наибольшее напряжение, равное пределу текучести материала.

Однако в большинстве случаев начало текучести не означает полного разрушения, и конструкция (сооружение) обычно выдерживает нагрузку, превышающую ту, при которой начинается текучесть. Для использования этой дополнительной способности сопротивления, при выборе надлежащих размеров сооружения вычисляют предельное значение нагрузки для предполагаемых размеров сооружения. Тогда безопасная нагрузка на сооружение может быть получена как некоторая определенная часть того предельного значения, которое представляет нагрузку, вызывающую полное разрушение сооружения.

Процесс расчета, когда предельная нагрузка принимается за основу для выбора безопасных размеров сооружения, называется *расчетом по предельному состоянию*.

При поперечном изгибе статически определимой балки, когда изгибающие моменты в сечениях не одинаковы, исчерпание несущей способности одним лишь сечением (сечением под грузом - *рис. 8*) уже означает потерю несущей способности балки в целом. Действительно, наличие в двух опорной балке одного сечения в пролете, способного к неограниченному росту деформаций, означает превращение балки в геометрически изменяемую систему. Для балок отношение предельной нагрузки к нагрузке, при которой начинается текучесть, равно отношению M_n/M_T и зависит от формы поперечного сечения балки.

В статически неопределимых системах вопрос об анализе напряженного состояния становится более сложным, так как усилия, действующие на элементы системы, зависят не только от величины внешних сил, но также и от упругих и пластических свойств элементов системы. В этом случае требуется рассмотрение еще и деформаций.

Возникновение в статически неопределимых балках и рамах пластического шарнира в одном сечении не означает потери несущей способности системы в целом, так как потеря одной связи не превращает обычно такую систему в геометрически изменяемую кинематическую цепь.

Так, система, n раз статически неопределимая, превращается при образовании пластического шарнира в систему, $n-1$ раз статически неопределимую. Поэтому в статически неопределимых системах необходимо отличать предел пластического сопротивления сечения от предела пластического сопротивления системы в целом.

Пределом пластического сопротивления статически неопределимой системы называют значение параметра нагрузки, при котором рассматриваемая система превращается в геометрически изменяемую систему с одной кинематической степенью свободы.

Превращение в механизм конструкции (сооружения) возможно и частичное, в какой-либо одной области или части, тогда как другие части могут продолжать оставаться в условиях геометрически неизменяемых систем.

Примером может служить многопролетная неразрезная балка (рис. 11), несущую способность которой можно считать исчерпанной, если в каком либо

одном (обычно в самом большом или загруженном более других) пролете образуется три пластических шарнира (рис. 11, б). Образование трех пластических шарниров в одном пролете исключает эксплуатацию такого пролета, тогда как другие пролеты еще способны воспринимать нагрузку.

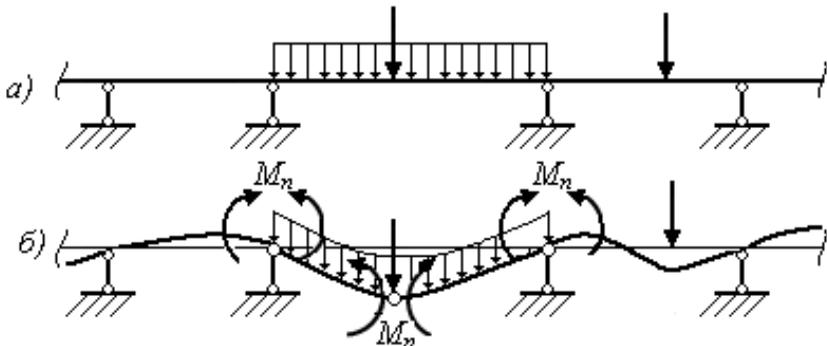


Рис. 11

Предел пластического сопротивления статически неопределимой системы может значительно превышать предел упругого сопротивления той же системы. В качестве примера рассмотрим статически неопределимую балку постоянного поперечного сечения с одним защемленным концом и вторым свободно опертым (рис.

12,а), нагруженную в середине пролета сосредоточенной силой F . Балка один раз статически неопределимая. За лишнюю неизвестную примем опорный момент M_A . Рассмотрим вначале изгиб, происходящий в пределах упругости. Находим значение неизвестной опорного момента. Получим

$$M_A = \frac{3Fl}{16}$$

Эпюра изгибающих моментов, полученная сложением эпюр от действия M_A и M_F , изображена на рис. 12,а.

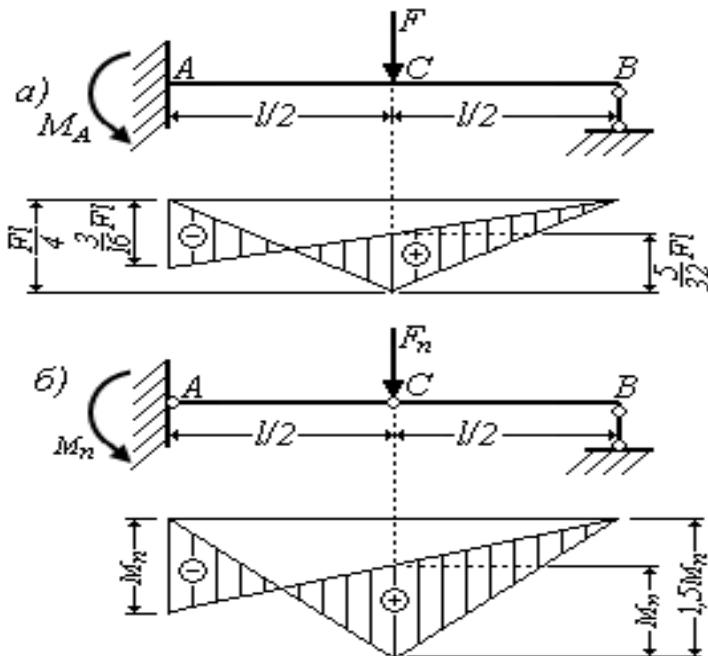


Рис. 12

Если взять за основу расчета нагрузку, при которой начинается текучесть, то наибольший изгибающий момент (рис. 12,а) бу-

дет в заделке $\left(\frac{3}{16} Fl > \frac{5}{32} Fl \right)$, а значение силы $F=F_T$ определяется условием

$$M_T = \frac{3}{16} F_T l$$

$$F_T = \frac{16}{3} \frac{M_T}{l} \quad (a)$$

Отсюда

При увеличении нагрузки (свыше F_T) текучесть в защемленном конце A будет продолжаться, а изгибающий момент будет увеличиваться до значения M_n , когда в точке A образуется пластический шарнир.

Тем не менее, это условие не вызывает полного разрушения балки, а лишь переводит ее в статически определимую систему. При дальнейшем увеличении нагрузки текучесть начнется и в поперечном сечении C , где имеется другая вершина в эпюре изгибающих моментов. Балка будет воспринимать нагрузку до тех пор, пока изгибающий момент в поперечном сечении C не достигнет предельного значения, равного M_n . При достижении момента в сечении C значения, равного M_n , в нем образуется пластический шарнир. В балке образуются два пластических шарнира (сечения A и C) при свободном повороте в обыкновенном шарнире B (рис. 12,б).

Это и будет предельным состоянием, соответствующим полному разрушению балки. В этом случае изгибающие моменты в поперечных сечениях A и C балки будут численно равны M_n .

Соответствующая эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 12,б.

Из рис. 12,б следует, что наибольшая ордината на эпюре моментов в точке C , соответствующая нагрузке F_n равна $1,5 M_n$ и F_n определяется из условия:

$$\frac{F_n l}{4} = 1,5 M_n,$$

$$F_n = \frac{6 M_n}{l}. \quad (6)$$

которое дает

$$\frac{F_n}{F_T} = \frac{9}{8} \frac{M_n}{M_T}, \quad (7)$$

Из условий (а) и (б) получаем

$$\frac{F_n}{F_T}$$

т. е. отношение нагрузок $\frac{F_n}{F_T}$ больше в статически неопре-

делимом случае, чем значение отношения $\frac{M_n}{M_T}$ для статически определимого случая.

Таким образом, путем введения пластических шарниров в поперечных сечениях *A* и *C* балки (рис. 12,б) получаем задачу, которая может быть легко решена уравнениями статики, что значительно проще, чем в статически неопределимой задаче (рис. 12,а).

Следовательно, вычисление F_n по предельному состоянию проще, чем вычисление F_T в расчете, основанном на предположении упругого поведения сооружения. Кроме этого, расчет по предельному состоянию более соответствует реальной работе конструкции, так как результаты, получаемые на основании допущения об идеальной упругости, зависят также и от точности предполагаемых условий на концах балки. Незначительное вращение заделанного конца *A* или небольшое вертикальное смещение опоры *B* балки могут значительно изменить величину F_T , в то время, как несовершенства такого рода не оказывают влияния на значение F_n , вычисляемое для статически определимой системы (рис. 12,б).

Таковы два главных преимущества метода расчета по предельному состоянию.

При более общих случаях пластической деформации конструкций принцип наложения за пределом упругости неприменим, так как деформация конструкции зависит не только от окончательных значений нагрузок, но также и от порядка, в котором нагрузки приложены к конструкции.

Рассмотрим балку (рис. 13,а):

Обе силы приложены одновременно. Соответствующая эпюра изгибающих моментов имеет вид, изображенный на *рис. 13,б*, а наибольший изгибающий момент равен $F/9$.

Отсюда следует, что деформация будет упругой, если

$$F < \frac{9M_T}{l} \quad (г)$$

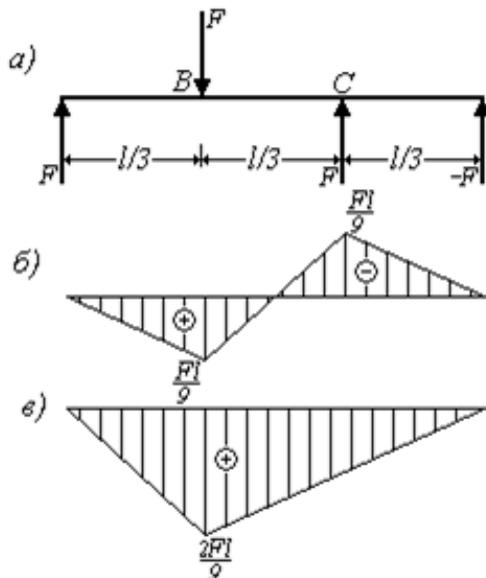


Рис. 13

Сила F сначала приложена в поперечном сечении B балки, а нагрузка в сечении C приложена после. При приложении силы F только в сечении B , соответствующая эпюра изгибающих моментов имеет вид, изображенный на *рис.13,в*.

Наибольший изгибающий момент, равный $2F/9$, будет в два раза больше, чем в предыдущем случае, и может вызвать пластическую деформацию, хотя условие (г) выполняется. Эта пластическая деформация не будет устранена последующим приложением силы F в поперечном сечении C , и окончательная деформация балки будет отлична от случая одновременного приложения сил в поперечных сечениях B и C .

В дальнейшем будем всегда полагать, что силы приложены одновременно, а в процессе нагружения отношения между силами остаются постоянными и равными отношениям окончательных значений сил. Все силы будем обозначать одним и тем же символом, умноженными на числовые коэффициенты, указывающие отношения между величинами сил.

В рассмотренном примере (рис. 12) была только одна возможность размещения пластических шарниров и, следовательно, была только одна форма разрушения балки. Если на балку действуют несколько сил, то будет несколько различных возможных положений пластических шарниров и несколько возможных форм разрушения балки. Следовательно, из всех возможных форм разрушения необходимо выбрать ту, которая соответствует наименьшему значению нагрузок. Эти нагрузки и будут предельными.

В качестве примера выбора надлежащих положений для пластических шарниров рассмотрим балку (рис. 14), жестко защемленную в сечении A и свободно опертую в B и нагруженную двумя силами F и $2F$. При условии полного разрушения пластические шарниры будут образовываться в двух из трех поперечных сечений A , C , D (на эпюре моментов наибольшие ординаты будут находиться на вертикалях, проходящих через эти поперечные сечения).

Все возможные положения пластических шарниров и соответствующие им формы разрушения балки показаны на рис. 14, б-г.

В каждом пластическом шарнире моменты M_n должны быть направлены так, чтобы *препятствовать* взаимному повороту частей балки. Величину нагрузки, необходимую для образования пластического шарнира можно определить из уравнений статического равновесия.

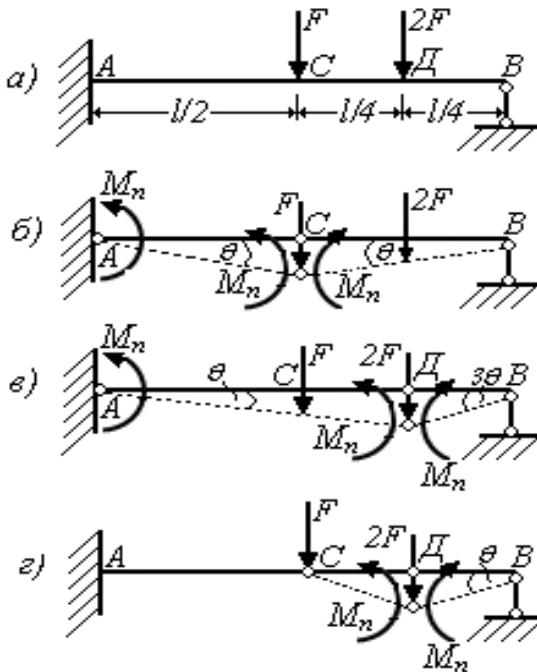


Рис. 14

Например, для формы разрушения балки (рис. 14,б) соответствующие силы показаны на рис. 15,а. Составим уравнения равновесия.

- для левого отрезка балки AC

$$\sum M_{(C)} = 0. \rightarrow Q \frac{l}{2} - M_n - M_n = 0 ;$$

- для правого отрезка балки CB

$$\sum M_{(C)} = 0. \rightarrow (Q - F_n) \frac{l}{2} + M_n - 2F_n \frac{l}{4} = 0$$

Решая полученные уравнения, найдем предельное значение силы F .

$$Q \frac{l}{2} - 2M_n = (Q - F_n) \frac{l}{2} + M_n - F_n \frac{l}{2}$$

$$F_n = \frac{3M_n}{l}$$

Отсюда

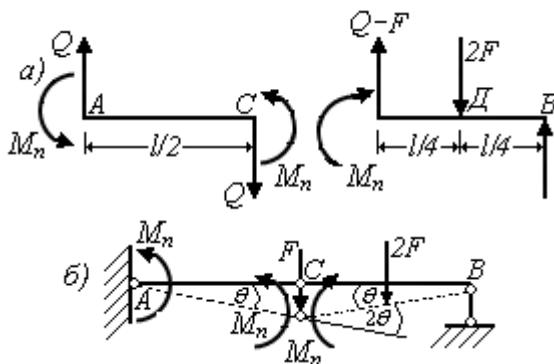


Рис. 15

Вместо применения уравнений равновесия, подобных приведенным выше, при определении несущей способности изгибаемых элементов конструкций, удобнее использовать схему, предложенную А.А. Гвоздевым [4]. Основу этой схемы составляет замена элемента конструкции некоторым механизмом посредством введения в него пластических шарниров. Пластический шарнир, как известно, элемент, обеспечивающий мгновенную подвижность системы, в котором развивается пластический момент сопротивления (пластический модуль). Превратив элемент конструкции посредством введения пластических шарниров в механизм, имеющий мгновенную подвижность, можно получить значение несущей способности применением *принципа возможных перемещений*.

Если некоторая материальная система под действием данных сил находится в равновесии, то работа сил, приложенных к этой системе на любых бесконечно малых возможных перемещениях, равна нулю – и наоборот: если работа системы сил, приложенных к данной материальной системе на любых возможных перемещениях равна нулю, то система находится в равновесии.

Возможными являются такие перемещения, которые не нарушают связей системы. Например, для абсолютно твердой балки AB (рис. 16, а), превращенной в механизм (геометрически изменяемую систему) постановкой шарнира в сечении C , возможными являются

перемещения, показанные на *рис. 16,б* и невозможными – на *рис.16,в*, так как при них нарушается связь, даваемая шарниром *C*.

Перемещения (*рис. 16,в*) станут возможными, если вместо постановки шарнира в сечении *C* произвести разрез балки в этом сечении.

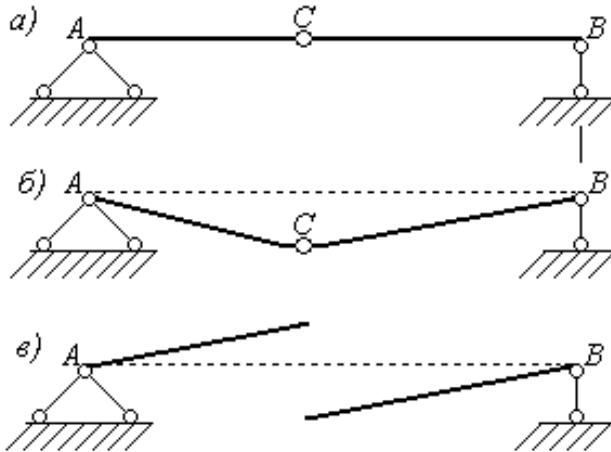


Рис. 16

Равенство нулю работы системы сил, требуемое принципом возможных перемещений, выражается следующим образом:

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(F_i \varepsilon_i) = 0, \quad (14)$$

где

- F_i – одна из сил системы (*рис. 17*);
- ε_i – возможное перемещение точки ее приложения.

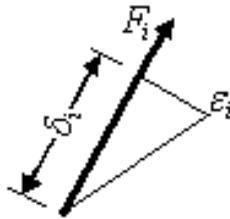


Рис. 17

Обозначим проекцию перемещения ε_i на направление силы F_i (составляющую перемещения вдоль силы) через δ_i , т. е.

$$\delta_i = \varepsilon_i \cdot \cos(F_i, \varepsilon_i),$$

Тогда работу силы на рассматриваемом возможном перемещении можно выразить следующим образом:

$$F_i \varepsilon_i \cos(F_i, \varepsilon_i) = F_i \delta_i.$$

Подставляя полученное выражение в (14), получим:

$$\sum F_i \delta_i = 0. \quad (15)$$

В дальнейшем будем рассматривать формулу (15). При этом необходимо учитывать, что в выражение принципа возможных перемещений теперь входят не перемещения, а их составляющие δ_i вдоль соответствующих сил.

Рассматривая снова форму разрушения балки (рис. 14,б), отметим, что введением пластических шарниров в сечениях A и C , получаем механизм, состоящий из двух шарнирных частей. Для написания уравнения равновесия этого механизма необходимо рассмотреть возможные перемещения, определяемые малым углом поворота θ . При этом повороте моменты M_n в поперечных сече-

ниях A и C , препятствуя вращению, будут совершать работу, равную $-\theta \cdot M_n$ и $-2\theta \cdot M_n$. В то же самое время силы F и $2F$ совер-

шат работу, равную $\frac{Fl\theta}{2}$ и $\frac{2Fl\theta}{4}$.

Уравнение возможных перемещений, согласно (15), принимает вид:

$$-M_n\theta - 2M_n\theta + \frac{Fl\theta}{2} + \frac{2Fl\theta}{4} = 0$$

Отсюда находим

$$F_n = \frac{3M_n}{l} \quad (д)$$

Для формы разрушения балки (рис. 14,в,г) уравнения возможных перемещений принимает, соответственно, вид:

$$-\theta \cdot M_n - 4\theta \cdot M_n + \frac{Fl\theta}{2} + \frac{2 \cdot 3Fl\theta}{4} = 0. \rightarrow F_n = \frac{5M_n}{2l} = \frac{2,5M_n}{l} \quad (е)$$

$$-\theta \cdot M_n - 2\theta \cdot M_n + \frac{2Fl\theta}{4} = 0. \rightarrow F_n = \frac{6M_n}{l} \quad (ж)$$

Сравнивая результаты выражений (д), (е) и (ж), приходим к заключению, что для балки (рис. 14,а) предельная нагрузка равна

$$F_n = \frac{2,5M_n}{l},$$

а форма разрушения балки изображена на рис. 14,в.

3. ПРИМЕР.

Исходные данные:

$l = 8,4 \text{ м}$. Материал сталь. Сечение – двутавр №36.

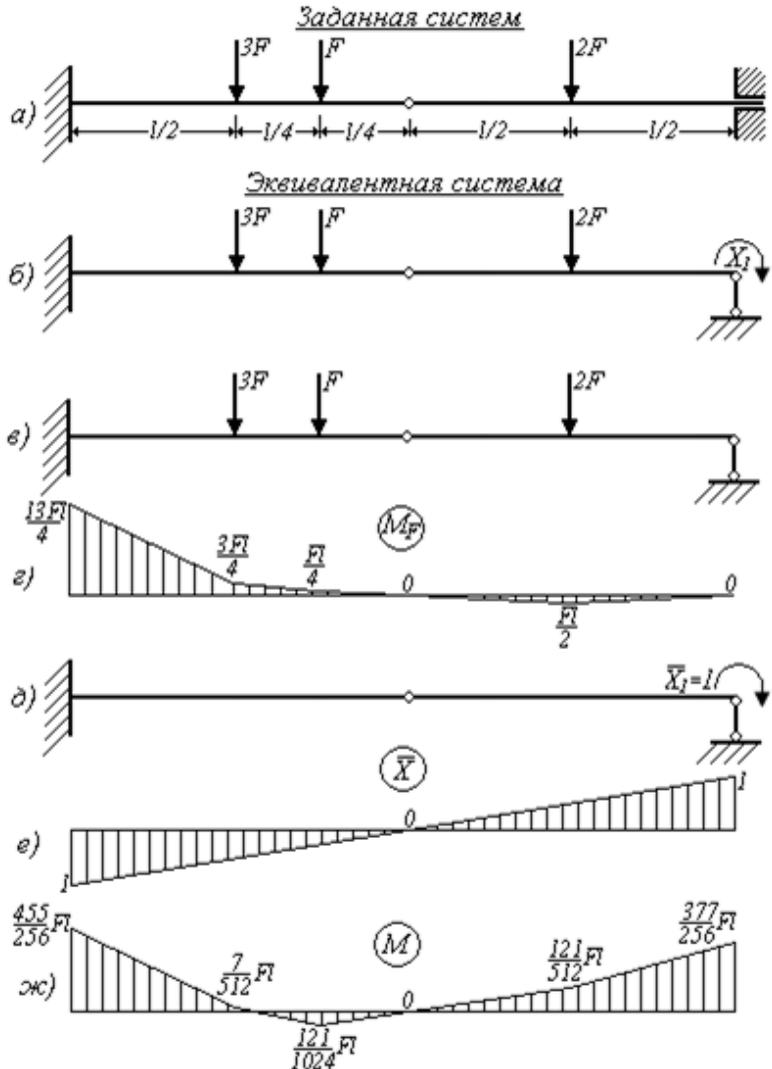


Рис. 18

1. Заданная балка (рис. 18,а) один раз статически неопределима. Статическую неопределимость раскрываем методом сил. Эквивалентная система представлена на рис. 18,б. Основную систему нагружаем внешней нагрузкой (рис. 18,в). Грузовая эпюра представлена на рис. 18,г. Основную систему нагружаем «лишней» неизвестной - моментом X_1 (рис. 18,д). Единичная эпюра представлена на рис. 18,е.

Составляем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

Коэффициенты определяем перемножением эпюр по правилу Верещагина.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2l}{3EI};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{Fl^2}{EI} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) + \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \end{aligned} \right] = \frac{-377Fl^2}{384EI}$$

Отсюда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{F1}}{\delta_{11}} = \frac{37Fl^2}{384EI} \cdot \frac{3EI}{2l} = \frac{377}{256} Fl$$

Корректируем единичную эпюру моментов и, складывая ее с грузовой, получаем окончательную эпюру моментов для заданной балки (рис. 18,ж).

2. Максимальный (по абсолютной величине) изгибающий мо-

мент $M_{\max} = \frac{455}{256} Fl$ возникает в левой заделке. Приравнявая его моменту, соответствующего началу текучести M_T , получим

$$\frac{455}{256} F_T l = M_T,$$

а соответствующее значение нагрузки равно:

$$F_T = \frac{256 M_T}{455 l}.$$

3. Первый пластический шарнир образуется в сечении у левой заделки, где изгибающий момент имеет наибольшее значение. Следовательно, во всех возможных случаях возникновения пластических шарниров наиболее опасными будут те, в которые входит и сечение в левой заделке балки.

Рассмотрим возможные положения пластических шарниров (рис.19):

4. Составим уравнения возможных перемещений.

Схема разрушения б).

$$-2M_n \cdot \theta + 3F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \theta \cdot \frac{3}{4} \cdot l + 2F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} = 0. \rightarrow F = \frac{8M_n}{13 \cdot l}.$$

Схема разрушения в).

$$-3M_n \cdot \theta + 3F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \theta \cdot \frac{l}{4} = 0. \rightarrow F = \frac{12M_n}{7l}.$$

Схема разрушения г).

$$2M_n \cdot \theta - M_n \cdot 3\theta + 3F \cdot \theta \cdot \frac{3}{4} l + F \cdot 3\theta \cdot \frac{l}{4} = 0. \rightarrow F = \frac{20M_n}{13l}.$$

Схема разрушения д).

$$-M_n \cdot \theta - M_n \cdot 2 \cdot \theta + 3F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \theta \cdot \frac{3l}{4} = 0. \rightarrow F = \frac{4M_n}{3l}.$$

За расчетную нагрузку принимаем наименьшее значение силы

$$F_{II} = \frac{8M_n}{13 \cdot l},$$

а разрушение произойдет по схеме б).

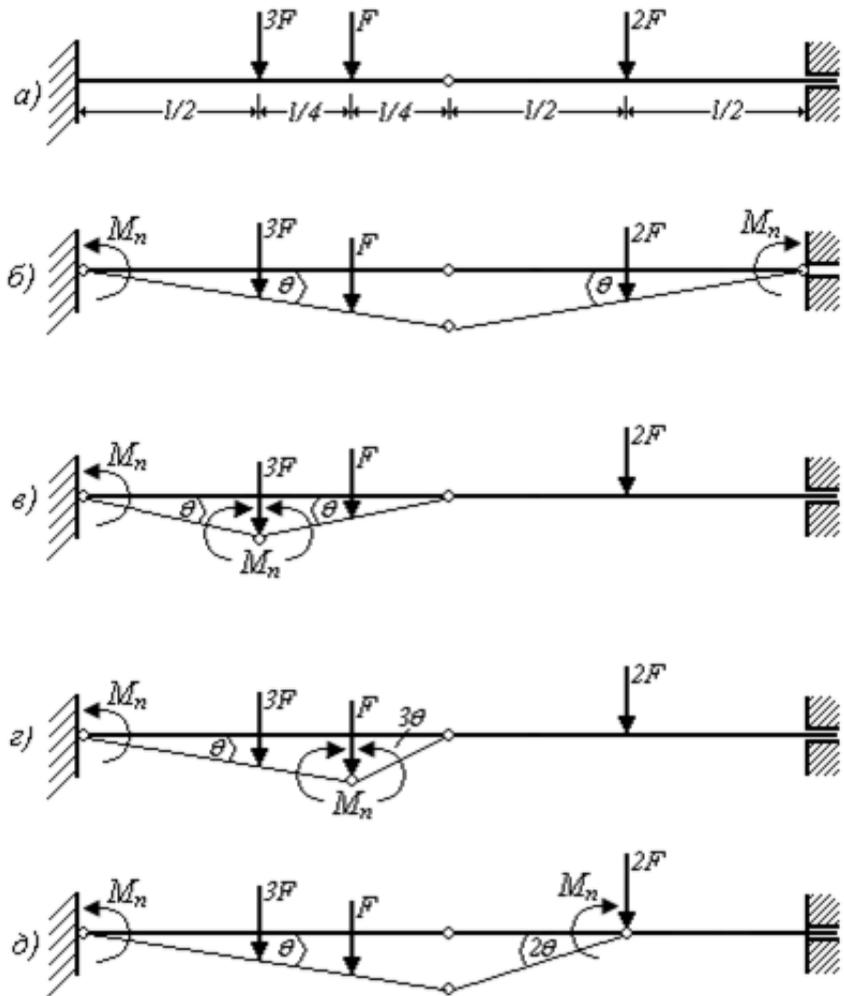


Рис. 19

5. Для заданной формы поперечного сечения балки момент сопротивления изгибу и пластический модуль равны:

$$W = 743 \text{ см}^3; \quad W_n = 2S_z^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 423 = 846 \text{ см}^3$$

6. Определим значения M_T , M_n , F_T , F_n :

$$M_T = \sigma_T \cdot W = 240 \cdot 10^3 \cdot 743 \cdot 10^{-6} = 178,3 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$M_n = \sigma_T \cdot W_n = 240 \cdot 10^3 \cdot 846 \cdot 10^{-6} = 203 \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$F_T = \frac{256M_T}{455l} = \frac{256 \cdot 178,3}{455 \cdot 8} = 12,54 \text{кН};$$

$$F_n = \frac{8M_n}{13l} = \frac{8 \cdot 203}{13 \cdot 8} = \frac{203}{13} = 15,63 \text{кН}$$

7. Сравним F_n с F_T . Получим

$$\frac{F_n}{F_T} = \frac{15,63}{12,54} = 1,25$$

Превышение составляет 25%.

Следовательно, расчет по предельному состоянию позволяет полнее использовать несущую способность материала по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям (в упругой постановке задачи).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. - 393с.
2. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 535с.
3. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М. Высшая школа, 1974. – 200с.
4. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия. – М.: Госстройиздат, 1949. – 180с.